Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise II - Prof. Dr. Maurício Zahn
Respostas da Lista 03 de Exercícios - Fórmula de Taylor

1. Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{2n} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Mostre que f_n é n vezes derivável, mas que sua ene-ésima derivada não é contínua no ponto $x = 0$, logo, $f \notin C^n$.

2. Use a igualdade

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + ... + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

e a Fórmula de Taylor infinitesimal para calcular as derivadas sucessivas, no ponto $x = 0$, da função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Solução. Escreva

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + ... + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}. \tag{1}$$

Pela Fórmula de Taylor infinitesimal em torno de 0 temos

$$f(h) = f(0 + h) = f(0) + f'(0)h + \frac{f''(0)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}h^n + r(h),$$

onde $\lim_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^n} = 0$. Comparando-a com (1), obtemos

$$f(0) = 1, \ f'(0) = 1, \ \frac{f''(0)}{2!} = 1 \Rightarrow f''(0) = 2, \ \ ..., \ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1 \Rightarrow f^{(n)}(0) = n!$$

e é tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{n+1}}{h^n(1-h)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{1-h} = 0.$$

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par, i.e., $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que na expressão da fórmula de Taylor em torno de 0 não aparecem as derivadas ímpares em 0. Enuncie e demonstre um resultado análogo para funções ímpares, i.e., tais que $f(x) = -f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

4. Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas vezes deriváveis no ponto $a \in I$. Se $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$ e $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in I$, prove que $f''(a) \geq g''(a)$.

Solução. Dado $h \in \mathbb{R}$ tal que $a+ \in I$. Assim, pela Fórmula de Taylor infinitesimal, temos

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + r_1(h),$$

e

$$g(a+h) = g(a) + g'(a)h + \frac{g''(a)}{2!}h^2 + r_2(h),$$

onde $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r_1(h)}{h^2} = 0$ e $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r_2(h)}{h^2} = 0$.

Como $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in I$, em particular temos que $f(a+h) \geq g(a+h)$, e disso segue que

$$f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + r_1(h) \geq g(a) + g'(a)h + \frac{g''(a)}{2!}h^2 + r_2(h).$$

Como $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$, simplificando vem que

$$\frac{f''(a)}{2}h^2 + r_1(h) \geq \frac{g''(a)}{2}h^2 + r_2(h).$$

Tomando $h \neq 0$, segue que $h^2 > 0$ e daí, dividindo por h^2 obtemos

$$\frac{f''(a)}{2} + \frac{r_1(h)}{h^2} \geq \frac{g''(a)}{2} + \frac{r_2(h)}{h^2},$$

e passando o imite com $h \to 0$ vamos concluir que $f''(a) \geq g''(a)$.

5. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável em $a \in I$. Prove que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a).$$

Solução. Expandindo a Fórmula de Taylor para $f(a+h)$ e $f(a-h)$ vamos obter

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + r_1(h),$$

e

$$f(a-h) = f(a) + f'(a)(-h) + \frac{f''(a)}{2!}(-h)^2 + r_2(-h),$$

onde $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r_1(h)}{h^n} = 0$ e $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r_2(-h)}{(-h)^n} = 0$.

Calculando a operação $f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)$, vamos obter

$$f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) =$$

$$= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + r_1(h) - 2f(a) + f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + r_2(-h) =$$

$$= \frac{f''(a)}{h^2} + r_1(h) + \frac{f''(a)}{h^2} + r_2(-h).$$

Dividindo por h^2, obtemos

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = \frac{f''(a)}{2} + \frac{r_1(h)}{h^2} + \frac{f''(a)}{2} + \frac{r_2(-h)}{(-h)^2},$$

e fazendo a passagem ao limite com $h \to 0$ segue o resultado.

6. Utilize a Fórmula de Taylor infinitesimal para provar a seguinte versão da regra de L'Hôpital: *Sejam* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *funções* n *vezes deriváveis no ponto* $a \in I$, *com derivadas nulas neste ponto até a ordem* $n-1$. *Se* $g^{(n)}(a) \neq 0$, *então*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Solução. Basta abrir a Fórmula de Taylor para f e g em $x = a$. Assim,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_1(x-a)}{g(a) + g'(a)(x-a) + ... + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_2(x-a)},$$

onde $\lim_{x\to a} \frac{r_1(x-a)}{(x-a)^n} = 0$ e $\lim_{x\to a} \frac{r_2(x-a)}{(x-a)^n} = 0$.

Como $f(a) = f'(a) = ...f^{(n-1)}(a) = g(a) = g'(a) = ...g^{(n-1)}(a) = 0$, obtemos

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_1(x-a)}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_2(x-a)} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r_1(x-a)}{(x-a)^n}}{\lim_{x\to a} \frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r_2(x-a)}{(x-a)^n}} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

7. **(Sel. Mestr. UFRGS 2010/1)** Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

   (a) Se f é não decrescente, prove que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$.

   (b) Suponha que $f(x) < f(y)$ para todos $x, y \in (a, b)$ tais que $x > y$. Podemos afirmar que a derivada de f é estritamente menor que zero em todos os pontos de (a, b)?

   (c) Suponha agora que f é duas vezes diferenciável em (a, b), e que a derivada de segunda ordem de f é estritamente positiva. Prove que f pode ter no máximo um ponto de mínimo local.

Solução.
(a) Suponha que f é não decrescente, i.e., para todos $\alpha < \beta \in (a, b)$,

$$\alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta).$$

Tome $h > 0$ tal que $\beta = \alpha + h$. Assim, pela Fórmula de Taylor infinitesimal segue que

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + f'(\alpha)h + r(h),$$

onde $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Como f é não decrescente, temos

$$f(\alpha) \leq f(\beta) = f(\alpha + h) = f(\alpha) + f'(\alpha)h + r(h),$$

e daí

$$f(\alpha) \leq f(\alpha) + f'(\alpha)h + r(h)$$

e então
$$f'(\alpha)h + r(h) \geq 0 \Rightarrow f'(\alpha) + \frac{r(h)}{h} \geq 0,$$
e passando o limite com $h \to 0$ segue que $f'(\alpha) \geq 0$.

(b) Não. Tome, por exemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3$. Neste caso, f é tal que $x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$. No entanto, $f'(0) = 0$.

(c) $f''(x) > 0, \forall x \in (a,b)$, logo f é convexa em (a,b), e portanto, possuirá no máximo um ponto de mínimo local nesse intervalo.

8. Seja $f \in C^{n+1}$ em uma vizinhança do ponto a, e considere a Fórmula de Taylor com resto de Lagrange:
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^n(a+\theta h)}{n!}h^n, \text{ com } 0 < \theta < 1.$$
Prove que se $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, então $\theta \to \frac{1}{n+1}$ quando $h \to 0$. Sugestão: compare com a Fórmula de Taylor infinitesimal.

9. Considere uma função f onde a derivada segunda $f''(x)$ existe e é contínua em $[0,1]$. Assuma que $f(0) = f(1) = 0$ e suponha que existe $K > 0$ tal que $|f''(x)| \leq K$, para todo $x \in [0,1]$. Mostre que
$$\left| f'\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{K}{4} \text{ e } |f'(x)| \leq \frac{K}{2}.$$

Solução. Desenvolvendo a Fórmula de Taylor com resto de Lagrange em $x = a \in (0,1)$, temos
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2,$$
onde c está entre 0 e 1.

Quando $x = 0$, temos
$$f(0) = f(a) + f'(a)(-a) + \frac{f''(c_1)}{2}(-a)^2, \text{ com } c_1 \text{ entre } 0 \text{ e } a,$$
e quando $x = 1$,
$$f(1) = f(a) + f'(a)(1-a) + \frac{f''(c_2)}{2}(1-a)^2, \text{ com } c_2 \text{ entre } a \text{ e } 1.$$
Como $f(0) = f(1)$, temos
$$f(a) + f'(a)(-a) + \frac{f''(c_1)}{2}(-a)^2 = f(a) + f'(a)(1-a) + \frac{f''(c_2)}{2}(1-a)^2$$
e daí vamos obter
$$f'(a) = \frac{f''(c_1)}{2}a^2 - \frac{f''(c_2)}{2}(1-a^2). \tag{2}$$
Assim,
$$|f'(a)| \leq \frac{|f''(c_1)|}{2}a^2 + \frac{|f''(c_2)|}{2}(1-a^2) \leq \frac{K}{2}a^2 + \frac{K}{2}(1-a^2) =$$

$$= Ka^2 - Ka + \frac{K}{2} = Ka(a-1) + \frac{K}{2} \leq \frac{K}{2},$$

onde esta última desigualdade segue pelo fato de que $a - 1 \leq 0$ pois $a \leq 1$. Ou seja, concluímos que, para todo $a \in (0,1)$, vale que

$$|f'(a)| \leq \frac{K}{2}.$$

Por fim, pondo $a = \frac{1}{2}$, de (2) vamos obter a estimativa

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f''(c_1)}{2}\frac{1}{4} - \frac{f''(c_2)}{2}\frac{1}{4},$$

e passando o módulo, vamos obter

$$\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{|f''(c_1)|}{2}\frac{1}{4} + \frac{|f''(c_2)|}{2}\frac{1}{4} \leq \frac{K}{8} + \frac{K}{8} = \frac{K}{4}.$$

10. Suponha $f \in C^2(0,\infty)$ e escreva

$$M_j = \sup_{x \in (0,\infty)} |f^{(j)}(x)|,$$

onde $j = 0, 1, 2$.

(a) Use a Fórmula de Taylor em torno de qualquer x fixado para mostrar que para todo $h \in (0,\infty)$, tem-se

$$|f'(x)| \leq h \cdot M_2 + \frac{M_0}{h}.$$

(b) Encontre o valor de h que minimiza a parte direita da desigualdade acima. Em seguida, conclua que

$$M_1^2 \leq 4 \cdot M_0 \cdot M_2.$$

Solução.

(a) Dado $h > 0$, desenvolvendo a Fórmula de Taylor com o resto de Lagrange em $x \in (0,\infty)$ como abaixo, obtemos

$$f(x+2h) = f(x) + f'(x) \cdot 2h + \frac{f''(c)}{2!}(2h)^2,$$

onde c entre x e $x + 2h$. Logo,

$$2f'(x)h = f(x+2h) - f(x) - \frac{f''(c)}{2} \cdot 4h^2.$$

Logo, isolando $f'(x)$ e passando o módulo, vamos obter

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+2h)| + |f(x)|}{2h} + |f''(c)| \cdot h \leq \frac{M_0}{h} + M_2 \cdot h.$$

(b) Defina $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ por $g(t) = \dfrac{M_0}{t} + M_2 \cdot t$. Examinemos os pontos críticos de g: temos que

$$g'(t) = -\frac{M_0}{t^2} + M_2,$$

temos que $\nexists g'(t)$ se, e somente se $t = 0$, mas este caso de ponto crítico g não está definida. Logo, basta verificar onde $g'(t) = 0$:

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow = -\frac{M_0}{t^2} + M_2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{M_0}}{\sqrt{M_2}},$$

e como $g''(t) = \frac{M_0}{t^3} > 0 \ \forall t \in (0, \infty)$, segue que g assume um mínimo em $t = \frac{\sqrt{M_0}}{\sqrt{M_2}}$. Assim, o h que minimiza a desigualdade do item (a) é dado por $h = \frac{\sqrt{M_0}}{\sqrt{M_2}}$. Nesse caso, teremos

$$|f'(x)| \leq \frac{\sqrt{M_0}}{\sqrt{M_2}} \cdot M_2 + M_0 \cdot \frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_0}} = \frac{2M_0 \cdot M_2}{\sqrt{M_0} \cdot \sqrt{M_2}},$$

e elevanso ao quadrado, vamos obter

$$|f'(x)| \leq 4M_0 \cdot M_2,$$

e como tal desigualdade vale para todo $x \in (0, \infty)$, em particular vale para o x que produz o supremo na parte esquerda da desigualdade acima, ou seja, segue que

$$M_1^2 \leq 4M_0 \cdot M_2.$$

11. Seja $\mathcal{F}$ a coleção de todas as funções duas vezes continuamente deriváveis em $\mathbb{R}$ satisfazendo $f \geq 0$ em $\mathbb{R}$ e $f''(x) \leq 1$ em $\mathbb{R}$. Encontre uma constante $C \in (0, \infty)$ tal que para cada $f \in \mathcal{F}$ e para cada $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$f'(x)^2 \leq C \cdot f(x).$$

Solução. Desenvolvendo a Fórmula de Tylor com resto de Lagrange, vamos obter

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(c)}{2}h^2,$$

onde c entre x e $x + h$. Como $f(x) \geq 0$, e $f''(x) \leq 1$, $\forall x$, obtemos a estimativa

$$0 \leq f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(c)}{2}h^2 \leq f(x) + f'(x)h + \frac{h^2}{2},$$

ou seja, obtemos

$$f(x) + f'(x)h + \frac{h^2}{2} \geq 0,$$

que trata-se de uma inequação de segundo grau na variável h, e a mesma é maior ou igual a zero quando o discriminante Δ for menor ou igual a zero, ou seja, quando

$$[f'(x)]^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} f(x) \leq 0,$$

donde segue que $[f'(x)]^2 \leq 2 \cdot f(x)$, e disso, $C = 2$.