ANÁLISE II. – PROF. MAURÍCIO ZAHN.

RESPOSTAS DE EXERCÍCIOS DA LISTA 02.

02) Defina $f:[\alpha,\beta]\longrightarrow \mathbb{R}$ por (supomos $\alpha<\beta$).

$$f(t) = \cos tx$$ (neste caso, x constante $x\neq 0$)

Tal função é contínua em $[\alpha,\beta]$ e derivável em (α,β), com $f'(t) = -x.\operatorname{sen} tx$.

Assim, pelo T.V.M. segue que $\exists\ c\in(\alpha,\beta)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha},$$ e daí

$$f(\beta)-f(\alpha) = f'(c).(\beta-\alpha),$$ ou seja,

$$\cos\beta x - \cos\alpha x = -x.\operatorname{sen}(cx).(\beta-\alpha),$$ e daí

$$|\cos\beta x - \cos\alpha x| = |x.\operatorname{sen}(cx).(\beta-\alpha)|,$$

e então

$$|\cos\beta x - \cos\alpha x| = |x|.\underbrace{|\operatorname{sen}(cx)|}_{\leq 1}.|\beta-\alpha| \leq |x|.|\beta-\alpha|$$

$$\Rightarrow |\cos\beta x - \cos\alpha x| \leq |x|.|\beta-\alpha|,$$ e como

$|\cos\beta x-\cos\alpha x| = |\cos\alpha x - \cos\beta x|$; dividindo a desigualdade acima por $|x|\neq 0$, segue que

$$\left|\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x}\right| \leq |\beta-\alpha|$$ $\square$

03) Define $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \sqrt{x}$.

Assim, dado $h > 0$, temos que f é contínua em $[1, 1+h]$ e derivável em $(1, 1+h)$, com derivada

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Logo, pelo T.V.M. segue que $\exists\ c \in (1, 1+h)$ tal que

$$f(1+h) - f(1) = f'(c).(1+h-1), \text{ i.e.,}$$

$$\sqrt{1+h} - \sqrt{1} = \frac{1}{2\sqrt{c}}.h.$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{c}}.h.$$

Como $c \in (1, 1+h)$, temos que $\sqrt{c} > 1$ e então

$0 < \frac{1}{\sqrt{c}} < 1$. Logo:

$$\underbrace{\sqrt{1+h}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{c}} h < 1 + \frac{1}{2.1}.h = \underbrace{1 + \frac{1}{2}h}.$$

$\square$

---

07) Define $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x) - g(x)$.

Temos que h é cont. em $[a,b]$ e derivável em (a,b).

Logo, pelo T.V.M. segue que $\exists\ c \in (a,b)$ tal que

$$h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a}, \quad \text{ou seja;}$$

(...)
segue

(...)
$$\frac{f(b)-g(b)-(f(a)-g(a))}{b-a} = h'(c) = f'(c) - g'(c) .$$

Como $f(a) = g(a)$, segue que

$$f'(c) - g'(c) = \frac{f(b)-g(b)}{b-a} \quad , \text{ ou seja,}$$

$$f(b) - f(a) = (f'(c) - g'(c)).(b-a) . \qquad (*)$$

Como por hipótese $f'(x) < g'(x)$ para $x \in (a,b)$, segue que

$f'(c) - g'(c) < 0$, e como $b-a < 0$,

temos que $(*)$ nos fornece

$$f(b) - f(a) < 0 \implies f(b) < f(a) .$$

$\square$

---

09) (b) $x \leq \text{arcsen}\, x \leq \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in [0,1)$. !

1º: Defina $f:[0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \text{arcsen}\, x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Logo;

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2} \cdot 1 - x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)}{1-x^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\frac{1-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1-x^2}\right).$$

Como $x \in [0,1)$, temos $0 \leq x^2 < 1$, logo:

$$-1 < -x^2 \leq 0 \Rightarrow 0 < 1-x^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x^2} \geq 1, \text{ e portanto } 1 - \frac{1}{1-x^2} \leq 0.$$

Além disso, $0 < 1-x^2 \leq 1 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} \leq 1$,

e então $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 1 > 0$. Logo, concluímos:

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{>0} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1-x^2}\right)}_{\leq 0} \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0, \quad \forall x \in [0,1)$$

Portanto, temos que f é decrescente em $[0,1)$ e daí segue que, $\forall x \in [0,1)$;

$$0 \leq x \Rightarrow f(0) \geq f(x), \text{ i.e.};$$

$$0 = \operatorname{arcsen} 0 - \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} \geq \operatorname{arcsen} x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ ou seja};$$

$$\boxed{\operatorname{arcsen} x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} \quad (I); \quad \forall x \in [0,1).$$

2º: Agora, defina $g:[0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ por

$$g(x)=\arcsin x - x.$$

Assim, $g'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1$,

e como já vimos no caso anterior, $\forall x\in[0,1)$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\geq 1, \quad \text{e daí} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\geq 0,$$

ou seja, $\forall x\in[0,1)$ concluímos que

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\geq 0 \Rightarrow g'(x)\geq 0;$$

logo, g é crescente em $[0,1)$, donde segue que, $\forall x\in[0,1)$;

$$0\leq x \Rightarrow f(0)\leq f(x), \text{ i.e.};$$

$$0=\arcsin 0 - 0\leq \arcsin x - x$$

$$\Rightarrow \boxed{\arcsin x\geq x} \quad (\mathrm{II}), \quad \forall x\in[0,1).$$

Juntando (I) e (II) concluímos que, $\forall x\in[0,1)$, vale:

$$x\leq \arcsin x\leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$\square$

10) Pelo T.V.M. aplicado em $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ temos que $\exists\ x_1 \in (0,1)$ tal que

PODEMOS APLICAR O T.V.M. em f pois f é CONT. e DERIV. em $(0,2)$

$$f(1)-f(0) = f'(x_1).(1-0)$$

$$\Rightarrow f'(x_1) = f(1)-f(0) = 2-0 = 2$$

Ainda, pelo T.V.M., considerando f em $[1,2]$, segue que $\exists\ x_2 \in (1,2)$ tal que

$$f(2)-f(1) = f'(x_2).(2-1)$$

$$\Rightarrow f'(x_2) = f(2)-f(1) = 4-2 = 2.$$

Logo, temos que em $[x_1,x_2] \subset [0,2]$ tem-se que $f'(x_1)=2$ e $f'(x_2)=2$, e como f' é cont. em $[x_1,x_2]$ e derivável em (x_1,x_2), com $f'(x_1)=f'(x_2)=2$, pelo T. de Rolle segue que $\exists\ x_0 \in (x_1,x_2) \subset (0,2)$ tal que

$$f''(x_0) = 0.$$

$\square$

---

12) Seja f derivável tal que $f(0)=1$ e $f'(x)=x^2.f(x)$.

Defina $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $g(x)=f(x).f(-x)$.

Então,

$$g'(x) = \big(f(x).f(-x)\big)' = f(x).f'(-x).(-1) + f'(x).f(-x);$$

e como $f'(x) = x^2.f(x),\ \forall x$, segue que:

$$g'(x) = -f(x).\,f'(-x) + f'(x).\,f(-x) =$$

$$= -f(x).\,x^2.\,f(-x) - x^2.\,f(x).\,f(-x) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad g'(x) = 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, $g(x) = c$; c = CONSTANTE.

Em particular, para $x = 0$, vem:

$$c = g(0) = f(0).\,f(-0) = f(0).\,f(0) = 1.1$$

pois $f(0) = 1$, por hipótese

$\Longrightarrow \; c = 1$; e daí:

$$\left.\begin{array}{c} g(x) = 1 \\ \| \\ f(x).\,f(-x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{f(x).\,f(-x) = 1}$$

$\square$

---

15) Defina $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = \ln x + \frac{1}{x} \quad .$$ Assim;

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} \quad .$$ Assim:

- $\forall x \in (0, 1]$, temos $0 < x \leq 1 \Rightarrow -1 < x - 1 \leq 0$, e $x^2 > 0$; logo,

$$\forall x \in (0,1] \; , \; \varphi'(x) = \frac{\overbrace{x-1}^{\leq 0}}{\underbrace{x^2}_{>0}} \leq 0 \; ,$$

e portanto φ é decrescente em $(0, 1]$.

Portanto, $x \leq 1 \Rightarrow \varphi(x) \geq \varphi(1)$

$$\Rightarrow \ln x + \frac{1}{x} \geq \underbrace{\ln 1}_{=0} + 1 = 1$$

$$\Rightarrow \ln x \geq 1 - \frac{1}{x}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

- $\forall x \in [1, +\infty)$, temos $x \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq 0$; e $x^2 \geq 1 > 0$; logo, concluímos que

$$\varphi'(x) = \frac{\overbrace{x-1}^{\geq 0}}{\underbrace{x^2}_{>0}} \geq 0 \Rightarrow \varphi'(x) \geq 0.$$

Logo, φ é crescente em $[1, +\infty)$. Assim, $\forall x \geq 1$, $\varphi(x) \geq \varphi(1)$, i.e.,

$$\ln x + \frac{1}{x} \geq \underbrace{\ln 1}_{=0} + 1 = 1 \Rightarrow \ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$$

Conclusão: $\forall x \in (0, +\infty)$,

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}.$$

$\square$