ANÁLISE II - LISTA 1.
PROF. MAURÍCIO ZAHN.

02) Dado que $1 = f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h}$, vamos mostrar que
$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}\cdot x} =$$

$$= \frac{1}{x}\cdot \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}$$

Se $h\to 0$ então $\frac{h}{x}\to 0$, para $x\neq 0$.

$$= \frac{1}{x}\cdot \lim_{\frac{h}{x}\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x}\cdot f'(1) = \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}$$

$\square$

---

03)

Basta observar que:

$$\frac{x\cdot f(a) - a\cdot f(x)}{x-a} = \frac{x\cdot f(a) - a\cdot f(a) + a\cdot f(a) - a\cdot f(x)}{x-a} =$$

$$= \frac{f(a)\cdot(x-a) - a\cdot[f(x)-f(a)]}{x-a} = f(a) - a\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a};$$

e daí

$$\lim_{x\to a} \frac{x\cdot f(a) - a\cdot f(x)}{x-a} = \lim_{x\to a}\left[f(a) - a\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]$$

$$= f(a) - a\cdot \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f(a) - a\cdot f'(a)$$

$\square$

---

04) Sejam $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \forall x \in I. \qquad (*)$$

Dado $a \in I \cap I'$ tal que $f(a) = h(a)$ e $f'(a) = h'(a)$.

Como $f(a) = h(a)$ e $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, segue que

$$g(a) = f(a) = h(a). \qquad (**)$$

Logo, de $(*)$ e $(**)$ podemos escrever

$$f(x) - f(a) \leq g(x) - g(a) \leq h(x) - h(a).$$

Tome $x \in (a, a+\delta)$, onde $\delta > 0$. Então $x - a > 0$.

Disso,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \leq \frac{h(x)-h(a)}{x-a}.$$

Pelo T. do Sanduíche usual,

$$\underbrace{\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{= f'_+(a)} \leq \lim_{x\to a^+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \leq \underbrace{\lim_{x\to a^+} \frac{h(x)-h(a)}{x-a}}_{= h'_+(a)};$$

e como existem $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a) = h'(a) = h'_+(a) = h'_-(a)$,

segue que

$$\exists \lim_{x\to a^+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = f'(a) = h'(a).$$

Do mesmo modo, tomando $x \in (a-\delta, a)$, $\delta > 0$,

teremos $x - a < 0$, chegaremos em

$$\exists \lim_{x\to a^-} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = h'(a) = f'(a).$$

Portanto, $\exists\, g'(a) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = h'(a) = f'(a)$ $\square$

02

07) Note que:

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{h\to 0^-} \frac{h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} & ; h \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; h \notin \mathbb{Q} \end{cases} = 0.$$

Do mesmo modo, se mostra que $f'_+(0) = 0$.

Logo, $\exists\ f'(0) = 0$. $\square$

---

09) a) $\forall x \in \mathbb{R}$; $|x - f(x)| \leq x^2$. Em particular.

$$0 \leq |0 - f(0)| \leq 0^2 \iff |f(0)| \leq 0$$

$$\iff f(0) = 0$$

b) $\forall h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$;

$$|h - f(h)| \leq h^2 \iff -h^2 \leq h - f(h) \leq h^2$$

$$\iff -h^2 - h \leq -f(h) \leq h^2 - h$$

$$\iff h - h^2 \leq f(h) \leq h^2 + h. \qquad (*)$$

Se $h > 0$, então

$$1 - h \leq \frac{f(h)}{h} \leq 1 + h$$

Então, $\lim_{h\to 0^+} (1-h) \leq \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} \leq \lim_{h\to 0^+} (1+h)$

Ou seja, como $f(0) = 0$, vem: $\longrightarrow$

$$1 = \lim_{h\to 0^+}(1-h) \leq \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h-0} \leq \lim_{h\to 0^+}(1+h) = 1.$$

Logo, $\exists\ f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h-0} = 1.$

Se $h<0$, então $(*)$ nos fornece:

$$1+h \leq \frac{f(h)}{h} \leq 1-h \quad ,$$

e do mesmo modo feito acima mostremos que $\exists\ f'_-(0) = 1$. (Teorema do Sanduíche).

Assim, segue que $\exists\ f'(0) = 1$.

Um exemplo: Tome $f(x) = x$. Nesse caso, $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que $|x - f(x)| \leq x^2$, pois

$$0 = |x - f(x)| \leq x^2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Além disso, $f(0) = 0$ e notamos que

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

$\square$

10)

a) Note que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{-h\to 0} \frac{f(x+(-h))-f(x)}{-h}$$

$$= f'(x) + f'(x) = 2\cdot f'(x). \text{ Portanto,}$$

f é deriv. em x

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}.$$

$\square$

b) Não, pois se f for derivável implica que $f'(x)$ é o limite acima, e não o contrário, ou seja, deveríamos ter a existência do limite acima garantir que f é derivável.

Por exemplo, $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ é tal que $\nexists\, f'(0)$. No entanto, note nesse caso que

$$\frac{1}{2}\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0-h)}{h} = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|-h|}{h}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|h|}{h} = 0.$$

$\square$

11) $f(0) = g(0) = h(0)$ e $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in [0, b)$.

(a) Como $f(0) = g(0) = h(0)$, tem-se que

$$f(x) - f(0) \leq g(x) - g(0) \leq h(x) - h(0) \qquad (*).$$

Supondo f, g, h deriváveis em 0, segue que

$\exists\, f'(0)$, $g'(0)$ e $h'(0)$ e

$$f'(0) = f'_+(0) \quad , \quad g'(0) = g'_+(0) \quad \text{e} \quad h'(0) = h'_+(0).$$

Logo, dado $x \in [0, b)$, $x > 0$, dividindo $(*)$ por $x - 0$, segue que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \leq \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}$$

Passando o limite com $x \to 0^+$, teremos pelo T. do Sanduíche, que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \leq \lim_{x \to 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0},$$

i.e.,

$$f'(0) \leq g'(0) \leq h'(0).$$

(b) Sendo f e h deriváveis em 0, com $f'(0) = h'(0)$, então, dado $x \in [0, b)$, pelas hipóteses do exercício, novamente, tem-se que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \leq \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}.$$

Passando o limite com $x \to 0^+$, vem:

$$f'(0) \leqslant \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \leqslant h'(0).$$

Como $f'(0) = h'(0)$, segue que

$$\exists \lim_{x \to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = f'(0) = h'(0),$$ o

qual denotaremos por $g'(0)$.

(c) $g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$; $g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim \frac{x^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} x \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0.$$

Logo, $\exists \; g'(0) = 0$.

A função derivada será:

$\forall x \in (0, +\infty)$;

$$g'(x) = x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2x \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2x \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

Verifiquemos se $\exists \lim_{x \to 0^+} g'(x)$:

Considere as sequências (x_n) e (y_n) dadas por:

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \quad e \quad y_n = \frac{1}{2n\pi + \pi}.$$

Note que $x_n, y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Porém;

$$g'(x_n) = 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2n\pi} \cdot \operatorname{sen}(2n\pi)}_{\to 0} - \cos(2n\pi) \xrightarrow[n\to\infty]{} -1,$$

e

$$g'(y_n) = 2 \cdot \frac{1}{2n\pi+\pi} \cdot \operatorname{sen}(2n\pi+\pi) - \cos(2n\pi+\pi) \xrightarrow[n\to\infty]{} +1$$

Logo, tem-se que $x_n, y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, mas

$$g'(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -1 \quad e \quad g'(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +1;$$

logo, g' não é contínua em $x=0$. $\square$

---

20) $\alpha > 1$; escreva $\alpha = \beta + 1$, com $\beta > 0$.

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^{\alpha}$$

Primeiramente, note que f é contínua, pois $\forall \varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}} > 0$, e daí, $\forall x, y : |x-y| < \delta$, segue que

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^{\alpha} < \delta^{\alpha} = (\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha} = \varepsilon$$

Além disso, como $\alpha = \beta + 1$, podemos escrever:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^{\beta+1} = |x-y|^{\beta} \cdot |x-y|$$

$$\Longrightarrow \quad \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \leq |x-y|^{\beta} \qquad ; \beta > 0.$$

Disso, passando o limite com $x \to y$, vamos obter:

$$\left| \lim_{x \to y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \leq \lim_{x \to y} |x-y|^{\beta} = 0 ,$$

i.e.,

$$0 \leq |f'(y)| \leq 0 \quad , \forall y$$

e daí $\quad f'(y) = 0, \ \forall y \Longrightarrow f$ é constante. $\square$