Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise II - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 5 de Exercícios - Integrais: Somas de Riemann e Propriedades

1. Dê um exemplo de uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que não seja integrável, mas seja *módulo-integrável* (i.e., $|f|$ é integrável).

2. Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ é limitada e f^2 é integrável em $[0,1]$, então f é integrável em $[0,1]$? Justifique.

3. **(Sel. Mestr. UFRGS 2004/2)** Considerando uma partição conveniente do intervalo $[0,2]$ e utilizando a definição de integral, obtenha as estimativas
$$\sqrt{2}+\sqrt{3} \leq \int_0^2 \sqrt{x^4+2}\,dx \leq 3\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$

4. Use a fórmula
$$\operatorname{sen} h + \operatorname{sen} 2h + \operatorname{sen} 3h + ... + \operatorname{sen} mh = \frac{\cos\frac{h}{2} - \cos\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)h\right)}{2\operatorname{sen}\frac{h}{2}}$$
para determinar a área sob a curva $y = \operatorname{sen} x$ de $x = 0$ até $x = \frac{\pi}{2}$. Faça de duas etapas:
   (a) Divida o intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ em n subintervalos de igual comprimento (partição regular P) e calcule a correspondente soma superior.
   (b) Determine $\lim\limits_{n\to+\infty} S(f;P)$.

5. **(Sel. Mestr. UFRGS 2007/1)**
   (a) Usando somas de Riemann, obtenha
$$\int_0^1 x^2dx \qquad \text{(note que } 1+4+...+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\text{)}$$
   (b) Seja $f : [2,3] \to \mathbb{R}$ a função definida por
$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 2+\cos x & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
   Mostre que f não é integrável.

6. Se f é integrável e m e M são tais que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$ (i.e., f é limitada em $[a,b]$), mostre que
$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

7. Suponha que f seja uma função contínua em $[0,1]$. Mostre que
$$\int_0^1 f(x)x^2dx = \frac{1}{3}f(\xi),$$
para algum $\xi \in [0,1]$.

8. **(Sel. Mestr. UFRGS 2004/2)** Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua não negativa. Definindo $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ por
$$g(x) = \int_a^x f(s)\,ds$$
prove que b é ponto de máximo absoluto de g.

9. Se f é integrável (e então limitada) em $[a,b]$, mostre que
$$\left|\int_a^b f\right| \leq (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

10. Seja $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ uma função de Lipschitz, i.e., $\exists\, K>0$ tal que
$$|f(x)-f(y)|\leq K|x-y|,$$
para quaisquer $x,y\in[0,1]$. Mostre que
$$\left|\int_0^1 f-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right|<\frac{K}{2n}.$$

11. Suponhamos que $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ seja contínua, derivável em $(0,1)$, $f(0)=0$ e $|f'(x)|\leq 1$ para todo $x\in(0,1)$. Mostre que
$$-\frac{1}{2}\leq\int_0^1 f(x)dx\leq\frac{1}{2}.$$

12. **(Sel. Mestr. UFRGS 2014/1)** Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz $f(x)\geq c>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Defina $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por
$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$$
   (a) Prove que F satisfaz $F(y)-F(x)\geq c(y-x)$ para $y\geq x$.
   (b) Prove que F é bijetora e, portanto, tem uma inversa $G=F^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
   (c) Mostre que a inversa de F, denotada por G, satisfaz
   $$|G(w)-G(z)|\leq\frac{1}{c}|w-z|,$$
   para todo $z,w\in\mathbb{R}$, isto é, G é uma função de Lipschitz.

13. **(Sel. Mestr. UFSM 2013/1)** Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada integrável. Defina
$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\quad x\in[a,b].$$
   (a) Mostre que F é contínua em $[a,b]$.
   (b) Prove que se f é contínua em $x_0\in(a,b)$ então F é derivável em x_0 e $F'(x_0)=f(x_0)$.
   (c) Seja $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$. Mostre que g é estritamente crescente.

14. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua e considere $M=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$. Prove que
$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=M.$$
Sugestão: Mostre que, dado $\varepsilon>0$, existe um intervalo $[c,d]\subset[a,b]$ tal que $|f(x)|\geq M-\varepsilon$, $\forall x\in[c,d]$. Em seguida, mostre que
$$(M-\varepsilon)(d-c)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq M(b-a)^{\frac{1}{p}}.$$

15. Se $f:[a.b]\to\mathbb{R}$ for uma função integrável e $c\in\mathbb{R}$, definimos g em $[a+c,b+c]$ por $g(y)=f(y-c)$. Prove que g é integrável e que $\int_{a+c}^{b+c} g=\int_a^b f$. A função g chama-se *c-translado* de f.

16. Suponha $a>0$ e considere $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ integrável.
   (a) Se f for par, i.e., se $f(-x)=f(x)$ para todo $x\in[0,a]$, mostre que $\int_{-a}^a f=2\int_0^a f$.
   (b) Se f for ímpar, i.e., se $f(-x)=-f(x)$ para todo $x\in[0,a]$, mostre que $\int_{-a}^a f=0$.