Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise II - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 04 de Exercícios - Funções Convexas

1. Prove a desigualdade de Jensen básica: *Se* $f : I \to \mathbb{R}$ *for uma função convexa em* I, *então*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(x)}{2}, \quad \textit{para todos } a, b \in I.$$

2. Prove a seguinte desigualdade, conhecida por *Desigualdade de Young*: Dados $p, q > 1$ reais tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, para quaisquer $a, b \geq 0$, vale

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Quando $p = q = 2$, o que temos?

3. Sejam $t_1, t_2, ..., t_n \geq 0$ tais que $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$. Prove que

$$x_1^{t_1} \cdot x_2^{t_2} \cdot ... \cdot x_n^{t_n} \leq t_1 \cdot x_1 + t_2 \cdot x_2 + ... + t_n \cdot x_n.$$

4. Se f e g são funções convexas, pode-se concluir que a composição $g \circ f$ é também convexa? Se não, que condição devemos impor de modo a garantir a convexidade de $g \circ f$?

5. **(Sel. Mestr. UFRGS 2014/2)**[1] Seja $f : I \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo I. A função f é chamada *convexa* se

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y),$$

para todo $t \in [0,1]$ e para todo $x, y \in I$.

(a) Mostre que para todo $a, x, b \in I$ com $a < x < b$, tem-se que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

(b) Prove que toda função convexa $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, definida num intervalo aberto (a,b), é contínua.

(c) Dê um exemplo para mostrar que uma função convexa não é necessariamente contínua.

6. Usando a função $f(x) = x \cdot \ln x$, prove que, para quaisquer $a, b, x, y > 0$, tem-se

$$x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{a} \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{a+b}.$$

7. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua convexa tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Prove que existe um único ponto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

8. **(Sel. Mestr. UFSM 2013/1)** Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é *côncava* se para quaisquer $x, y \in I$ e $t \in [0,1]$, temos

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ côncava e contínua, com $f(a) < f(b)$. Mostre que para cada $d \in (f(a), f(b))$, existe um único $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = d$.

---

[1] Esse exercício, embora seja da prova da UFRGS, na verdade corresponde a resultados apresentados e provados no livro "*Análise Real, vol. 1*", do autor Elon Lages Lima - páginas 105 e 106.