Prof. Dr. Maurício Zahn
UFPel

Análise real II

TEXTO DE MENSAGEM...

Dedicamos este trabalho a ...

Prefácio

Este material foi elaborado durante o Segundo Semestre letivo de 2016, para atender a Disciplina de Análise Real II que ministrei para os cursoLicenciatura Matemática da UFPel. Estas notas de aula estão sendo escritas como um material de apoio para os estudantes, em conjunto com as lista de exercícios, e corresponde ao conteúdo desenvolvido na referida disciplina.

Maurício Zahn

Conteúdo

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Preliminares

Definição 1.1 Seja $M \neq \emptyset$. Chama-se uma *métrica* em M toda aplicação $d : M \times M \to [0, +\infty)$ tal que cumpra as condições: para todos $x, y, z \in M$,

(a) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se, e somente se, $x = y$ (positividade);

(b) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria);

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualdade triangular).

Um conjunto não vazio M munido de uma métrica d é chamado de *espaço métrico* e é denotado por (M, d). Quando a métrica d estiver subtendida podemos nos referir ao espaço métrico M, simplesmente.

Não vamos tratar aqui formalmente um estudo de espaços métricos pois foge da ementa de nosso curso, estamos apenas elencando alguns conceitos básicos preliminares que precisamos para nosso curso.

Em nosso curso o espaço métrico (M, d) será $(\mathbb{R}, d)$, onde a métrica d é definida por $d(x, y) = |x - y|$, onde $| \cdot |$ denota o módulo de um número real. De fato, é fácil ver que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais (que é um corpo, c.f. estudado em Análise I) munido da métrica $d(x, y) = |x - y|$ satisfaz as três condições da definição de métrica.

Em um espaço métrico (M, d) temos o importante conceito de bolas.

Dado um espaço métrico (M, d), definimos a *bola aberta centrada em* a *e raio* $r > 0$ por

$$B_r(a) = \{x \in M \,:\, d(x, a) < r\}.$$

Por exemplo, considere $M = \mathbb{R}^2$ munido da métrica da soma:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Prove que d é realmente uma métrica e desenhe a bola aberta centrada na origem $(0, 0)$ e raio unitário.

Uma bola aberta centrada em um ponto também é chamada de uma *vizinhança* do ponto, pois tal ponto é interior à bola.

No nosso caso de interesse, é fácil ver que

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x - a| < r\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a - r < x < a + r\},$$

que corresponde, geometricamente, ao conjunto de todos os pontos no intervalo centrado em a, a menos de r unidades de distância de a.

Em espaços métricos se desenvolvem conceitos topológicos importantes, tais como o conceito de abertos, de sequência, de limite e de continuidade. Os mesmos já foram devidadamente estudados em um curso de Análise I.

No que segue, recordamos o conceito de ponto de acumulação de um conjunto.

Definição 1.2 Sejam $X \subset M$ um subconjunto de um espaço métrico M e $a \in M$. Dizemos que $a \in M$ é um *ponto de acumulação* de X se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, x \in X$, tal que $x \in B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$.

Em outras palavras, $a \in X$ é um ponto de acumulação de X se qualquer bola aberta centrada em a, exceto o próprio ponto a, contiver pontos do conjunto X.

No caso do espaço métrico ser $\mathbb{R}$ munido da métrica usual $d(x,y) = |x-y|$, dado $X \subset \mathbb{R}$, temos que $a \in X$ é ponto de acumulação de X se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $x \in X$, tal que $0 < |x-a| < \varepsilon$.

Assim, por exemplo, sendo $X = (0,1] \subset \mathbb{R}$, temos que, por exemplo, $x = 0$ é ponto de acumulação de $(0,1]$, pois, $\forall \varepsilon > 0$, segue que $\exists x \in (0,1]$ tal que $x \in B_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$. De fato, basta tomar, por exemplo, $x = \min\{\frac{0+\varepsilon}{2}, \frac{0+1}{2}\}$.

O conjunto de todos os pontos de acumulação de X é chamado de *derivado* de X e é denotado por X'.

Exercícios

1. Seja $M = \mathbb{R}^2$. Mostre que para $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in M$, a função

$$d(x,y) = \begin{cases} |x_1 - y_1| & , \text{ se } \quad x_2 = y_2 \\ |x_1| + |x_2 - y_2| + |y_1| & , \text{ se } \quad x_2 \neq y_2 \end{cases}$$

   é uma métrica em M.

2. Seja (M,d) um espaço métrico. Mostre que para quaisquer $x, y, z \in M$, tem-se

$$|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)$$

   e

$$|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w).$$

3. Seja $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, em $\mathbb{R}$, munido da métrica usual. Mostre que $x = 0$ é um ponto de acumulação de X.

Capítulo 2

Derivada

Definição 2.1 Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função, $a \in I' \cap I$ (ou seja a é um ponto de acumulação de I que pertence ao conjunto I). Dizemos que f é derivável em a quando existir o limite

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Observe que a função quociente $q(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ está bem definida para todo $x \neq a$, ou seja, em $I \setminus \{a\}$, que possui $x = a$ como ponto de acumulação.

O número real $f'(a)$ é chamado de derivada de f no ponto $x = a$. Conforme estudado em Cálculo I, tal número possui um significado geométrico interessante: representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$.

Podemos redefinir a derivada em um ponto a da seguinte maneira: pondo $x - a = h$, e daí obtemos

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Nesta notação, verificamos que a função $\xi(h) = \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ está bem definida no conjunto $\{h \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : a + h \in I\}$, que possui $h = 0$ como ponto de acumulação.

Definição 2.2 Dizemos que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é *derivável no conjunto* X quando existir a derivada de f em todos os pontos $a \in X \cap X'$.

Usando a definição de derivada podemos deduzir todas as regras de derivação comumente estudadas em um curso de Cálculo. Apenas para ilustrar, vejamos dois exemplos.

Exemplo 1. Dada $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$. Logo, para determinar, a fórmula para $f'(a)$, com $a \in (0, +\infty)$, considere $h \neq 0$ tal que $a+h \in (0, +\infty)$. Assim, de posse do segundo limite notável, vamos obter

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln \frac{a+h}{a} = \lim_{h\to 0} \ln \left(1 + \frac{h}{a}\right)^{\frac{1}{h}} =$$

$$= \ln \left[\lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{h}{a}\right)^{\frac{a}{h}}\right]^{\frac{h}{a}\cdot\frac{1}{h}} = \ln e^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}.$$

Exemplo 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x$. Vamos determinar $f'(a)$, para $a \in \mathbb{R}$. Seja $h \neq 0$ tal que $a + h \in \mathbb{R}$ e daí

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h},$$

e transformando em produto pela fórmula da Trigonometria

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2},$$

assim, usando o primeiro limite notável, vamos obter

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{-2 \operatorname{sen} \frac{2a+h}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{h}{2}}{2} = \lim_{h\to 0} -\operatorname{sen} \frac{2a+h}{2} = -\operatorname{sen} a.$$

Teorema 2.3 *(Regras de derivação) Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ deriváveis em um ponto $a \in I \cap I'$. Então $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g (neste caso $g(a) \neq 0$) são deriváveis em a e*

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a) \cdot f'(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

Demonstração. Basta aplicar a definição de derivada em cada uma. Faremos apenas a terceira e deixamos a prova das duas primeiras para o leitor.

Sejam f, g nas hipóteses do Teorema. Assim,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(\frac{f}{g})(a+h) - (\frac{f}{g})(a)}{h},$$

se o limite acima existir. Vamos mostrar que tal limite de fato existe, calculando o seu valor. De fato,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(\frac{f}{g})(a+h) - (\frac{f}{g})(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(a+h)}{g(a+h)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a) - g(a+h) \cdot f(a)}{h \cdot g(a+h) \cdot g(a)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g(a) - g(a+h) \cdot f(a)}{h \cdot g(a+h) \cdot g(a)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(a) \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right] - f(a) \left[\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right]}{g(a+h) \cdot g(a)} =$$

$$= \frac{g(a) \cdot f'(a) - f(a) \cdot g'(a)}{[g(a)]^2}.$$

□

Exercícios

1. Use a definição de derivada para calcular a derivada de cada função num ponto de acumulação a do domínio:

   (a) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}.$

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{sen} x.$

2. **(Sel. Mestrado UFRGS 2005/2)** Seja $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Supondo conhecido que f é derivável em 1 e que
$$1 = f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h},$$
prove que
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$
para todo $x > 0$.

3. Sejam $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in I$ se tenha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Se num ponto $a \in I \cap I'$ tem-se $f(a) = h(a)$ e existirem $f'(a) = h'(a)$, mostre que existe $g'(a)$ e tem o mesmo valor.

   Obs. Podemos dizer que este resultado é o "Teorema do sanduíche para derivadas".

4. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua. Dado $a \in I \cap I'$, defina $\xi : I \to \mathbb{R}$ pondo
$$\xi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{se} \quad x \neq a \\ L & \text{se} \ \ x = a \end{cases}.$$
Prove que ξ é contínua se, e somente se, existe $f'(a)$ e $f'(a) = L$.

5. **(Sel. Mestrado UFRGS 2009/2)** Suponha que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é derivável em $x \in x \in (a, b)$.

   (a) Prove que $f'(x) = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$.

   (b) A igualdade acima sugere a possibilidade de uma nova definição da noção de diferenciabilidade e de derivada. Pergunta-se: esta nova maneira resulta em uma noção de derivada equivalente à usual?

6. **(Sel. Mestrado UFRGS 2013/2)** Sejam f, g, h funções definidas no intervalo $[0, b)$, satisfazendo
$$f(0) = g(0) = h(0) \ \text{ e } \ f(x) \leq g(x) \leq h(x) \ \text{ para } \ x \in [0, b).$$

   (a) Prove que f, g e h são deriváveis em 0, então
$$f'(0) \leq g'(0) \leq h'(0).$$

(b) Prove que se f e h são deriváveis em 0 e $f'(0) = h'(0)$, então g é derivável em 0 e $g'(0) = f'(0) = h'(0)$.

(c) Seja $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \quad x = 0 \\ x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ se } \quad x > 0 \end{cases}$$

é derivável em $x = 0$? Em caso afirmativo, qual é a sua derivada? A derivada é contínua no zero? Justifique sua resposta.

7. **(Sel. Mestrado UFRGS 2013/1)** Seja f uma função definida num intervalo aberto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ que contém a origem.

(a) Prove que se f é derivável em 0, então

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = 2f'(0).$$

(b) Mostre que se f é uma função par, então o limite do item anterior existe mesmo que f não seja derivável em 0. Dê exemplos de funções em que o limite acima existe e que não sejam deriváveis.

(c) Prove que se f é monótona e

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = 0,$$

então f é derivável em 0.

2.1 Derivadas laterais

Do mesmo modo que foi estudado em limites, temos o conceito de derivada lateral, como segue.

Definição 2.4 Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $a \in I \cap I'_+$ (ou seja, a é um ponto de acumulação à direita de I, pertencente a a), definimos a *derivada à direita* de f no ponto a por

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Definição 2.5 Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $a \in I \cap I'_-$ (ou seja, a é um ponto de acumulação à esquerda de I, pertencente a a), definimos a *derivada à esquerda* de f no ponto a por

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Quando $a \in I \cap I'$ então temos que a é ponto de acumulação à esquerda e à direita de f e podemos definir ambas as derivadas laterias em a: $f'_-(a)$ e $f'_+(a)$. Como tais derivadas laterais são, na verdade, limites laterais, concluímos que f é derivável em $x = a$ se, e somente se, as derivadas laterais existirem e forem iguais. Ou seja,

$$\exists f'(a) \Leftrightarrow f'_-(a) = f'_+(a).$$

Exercícios

1. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. Calcule as derivadas laterais $f'_-(0)$ e $f'_+(0)$. O que concluímos sobre a existência de $f'(0)$? O que isso significa geometricamente?

2. Seja $a \in I$ um ponto de máximo local para a função $f : I \to \mathbb{R}$. Se f possui derivada à direita no ponto a, mostre que $f'_+(a) \leq 0$. Se existir $f'_-(a)$, mostre que $f'_-(a) \geq 0$. Dê um exemplo onde em um máximo local existam as derivadas laterais e sejam diferentes.

3. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo aberto I. Se, para cada $x \in I$, existir $f'_+(x)$ e for $f'_+(x) > 0$, então f é crescente.

4. **(Sel. Mestrado UFSM 2009/1)** Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & , \text{ se } \quad x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } \quad x = 0 \end{cases}$$

e derivável com derivada primeira contínua.

2.2 A derivada como uma aproximação linear

Nesta seção vamos apresentar uma outra maneira de definir a derivada de uma função num ponto, como sendo uma aproximação linear.

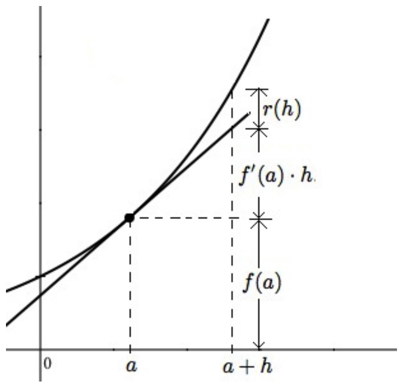
Se f for uma função derivável em um ponto a, defina o número $r(h)$ por

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h.$$

Assim, temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right] = 0.$$

A ilustração abaixo fornece uma ideia geométrica para a definição de $r(h)$.



O número $r(h)$ é denominado de *resto* de h e o limite acima nos diz que o resto $r(h)$ converge para zero quando h converge para zero, mais rapidamente do que h, ou seja, tem-se que $r(h) << h$, significando que $r(h)$ é muito menor do que h. Isto posto, podemos redefinir o conceito de derivada em um ponto como segue.

Definição 2.6 Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função, $a \in I' \cap I$. Dizemos que f é derivável em a se existir o número $f'(a) \in \mathbb{R}$ tal que, pondo

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h),$$

tem-se

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}=0.$$

Exemplo. Dado $f(x) = \operatorname{sen} x$, sabemos que para todo $a \in \mathbb{R}$, tem-se que $f'(a) = \cos a$. Então,

$$\operatorname{sen}(a+h)=\operatorname{sen} a+\cos a\cdot h+r(h),$$

onde

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen} a-\cos a\cdot h}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} a\cdot(\cos h-1)}{h}+\frac{\operatorname{sen}\ h}{h}\cdot\cos a-\frac{\cos a\cdot h}{h}\right]=0.$$

Ou seja, temos que para h pequeno,

$$\operatorname{sen}(a+h)\approx\operatorname{sen} a+h\cdot\cos a.$$

A expressão $f'(a)\cdot h$, que fornece uma boa aproximação para o acréscimo $f(a+h)-f(a)$, recebe o nome de *diferencial* de f no ponto a, e costuma ser denotado por

$$df(a)=f'(a)\cdot h.$$

Vejamos um exemplo mais prático: Vamos obter uma aproximação para $\sqrt{4,1}$. Para isso vamos considerar $f(x)=\sqrt{x}$. Como $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$, pondo

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)\cdot h+r(h),$$

temos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}=0 \text{ (Verifique!)}$$

Logo, temos que, para h "pequeno", vale a aproximação

$$\sqrt{a+h}\approx\sqrt{a}+\frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot h,$$

ou seja, tomando $a=4$ e $h=0,1=\frac{1}{10}$, como h é "pequeno", temos uma aproximação linear, em termos de h para $\sqrt{4,1}$:

$$\sqrt{4,1}\approx\sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4}}\cdot\frac{1}{10}=\frac{81}{40}=2,025.$$

Apenas para comparar, uma calculadora científica nos fornecerá para $\sqrt{4,1}$ a aproximação $2,0248456731$.

Um resultado importante que temos é o seguinte:

Proposição 2.7 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função que é derivável em $a \in I \cap I'$, então f é contínua em a.*

Demonstração. Como f é derivável em a segue que existe $f'(a)$ tal que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h),$$

com $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$.

Assim,

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0} [f(a) + f'(a) \cdot h + r(h)] = f(a),$$

pois $r(h) << h$ e $r(h) \to 0$ quando $h \to 0$. Logo,

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a),$$

ou seja, f é contínua em a.

$\square$

Como um bom exercício, prove esse resultado usando a Definição 2.1.

Observação 2.8 Como se estuda em Cálculo, é bem sabido que a recíproca da Proposição acima não é, em geral, verdadeira. Por exemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ é contínua em 0, mas não é derivável em 0. Verifique isso usando derivadas laterais!

Exercícios

1. Usando diferenciais, encontre uma aproximação para $\sqrt[3]{9}$ e para $\sqrt[4]{15}$.

2. **(Sel. Mestrado UFRGS 2015/1)**

(a) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no ponto $a \in I$. Mostre que a função $r : J \to \mathbb{R}$ definida no intervalo $J = \{h \in \mathbb{R} : a + h \in I\}$ pela igualdade

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h),$$

satisfaz $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$.

(b) Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ deriváveis no ponto $a \in I$, com $f(a) = 0 = g(a)$ e $g'(a) \neq 0$. Mostre que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

(c) Calcule $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

3. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $a \in I$. Mostre que f é derivável em a, com derivada L, se, e somente se, existir uma função $\eta_f : I \to \mathbb{R}$ tal que $\eta_f(a) = 0$, η_f é contínua em a, e

$$f(x) = f(a) + (x - a)(L + \eta_f(x)), \ \forall x \in I.$$

2.3 Regra da Cadeia

Teorema 2.9 *(Regra da cadeia) Sejam A e B intervalos abertos, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ funções com $f(A) \subset B$, $a \in A$ e $b = f(a)$. Se f é uma função derivável em a e g uma função derivável em $b = f(a)$, então a função $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ é derivável em a e*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Demonstração. Sejam f e g funções nas hipóteses acima. Assim, sendo f derivável em a e g derivável em b, temos

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r_1(h)$$

e

$$g(b+k) = g(b) + g'(b) \cdot k + r_2(k)$$

com $\lim_{h \to 0} \frac{r_1(h)}{h} = 0$ e $\lim_{k \to 0} \frac{r_2(k)}{k} = 0$.

Dado $h \neq 0$ tal que $a + h \in A$, montemos a composição no ponto $a + h$. Assim,

$$g(f(a+h)) = g(f(a) + f'(a) \cdot h + r_1(h)).$$

sabendo que $f(a) = b$ e chamando $k = f'(a) \cdot h + r_1(h) = f(a+h) - f(a)$, temos

$$g(f(a+h)) = g(f(a)) + g'(f'(a) \cdot h + r_1(h)) + r_2(f'(a) \cdot h + r_1(h)) =$$

$$= g(f(a)) + g'(f'(a) \cdot h + r_1(h)) + r_2(f(a+h) - f(a)).$$

Subtraindo $g(f(a))$ na igualdade acima e, após, efetuando a divisão por h, obtemos

$$\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} = g'(f(a)) \left(f'(a) + \frac{r_1(h)}{h} \right) + \frac{r_2(f(a+h) - f(a))}{h}.$$

Como $\frac{r_1(h)}{h} \to 0$ quando $h \to 0$, temos

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} g'(f(a)) \cdot f'(a) + \frac{r_2(f(a+h) - f(a))}{h} =$$

$$= g'(f(a)) \cdot f'(a) + \lim_{h \to 0} \frac{r_2(f(a+h) - f(a))}{h}.$$

Portanto,

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) + \lim_{h \to 0} \frac{r_2(f(a+h) - f(a))}{h}.$$

Resta apenas mostrar que o limite à direita da igualdade acima vale zero. Porém, notamos que $r_2(f(a+h) - f(a)) = 0$ se $f(a+h) - f(a) = 0$, e se $h \neq 0$ temos

$$\frac{r_2(f(a+h) - f(a))}{h} = \frac{r_2(f(a+h) - f(a))}{f(a+h) - f(a)} \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} =$$

$$= \frac{r_2(k)}{k} \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \to 0 \cdot f'(a) = 0 \text{ quando } h \to 0.$$

Portanto, concluímos que $\dfrac{r_2(f(a+h)-f(a))}{h} \to 0$ quando $h \to 0$ e então

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

e o teorema está provado.

□

Vejamos um exemplo de aplicação.

Exemplo. Dados $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ e $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, respectivamente, por $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \sqrt{x+1}$, determine $(g \circ f)'(x)$.

Solução. Como $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, pela regra da cadeia, temos

$$f'(x) = \cos x \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}},$$

e então

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)+1}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x + 1}}.$$

Exercícios

1. **(Sel. Mestrado UFRGS 2005/2)** Seja $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(g(x)) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponha que g seja derivável e com derivada não nula em todos os pontos. Prove que f é derivável e que

$$f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)},$$

   para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. **(Sel. Mestrado UFRGS 2004/1)** Prove que $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$, onde

$$f(x) = g(x) \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \ x \neq 0$$

   sabendo que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes derivável com segunda derivada contínua e satisfazendo $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$.

3. Seja I um intervalo aberto. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita ser de *classe* C^1 se for derivável e a derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ for contínua. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é de *classe* C^2 se sua derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ for de classe C^1. Prove que se $f(I) \subset J$, $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ são de classe C^2, então a composta $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ também é de classe C^2.

2.4 Máximo e mínimo local

Proposição 2.10 *Seja a um ponto interior de um intervalo I e $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em a, com $f'(a) > 0$. Então, existe $\delta > 0$ tal que:*

(i) *para todo $x \in (a-\delta, a)$, tem-se $f(x) < f(a)$;*

(ii) *para todo $x \in (a, a+\delta)$, tem-se $f(x) > f(a)$.*

Demonstração. Como f é derivável em $a \in I \cap I'$, segue que existe $f'(a)$, tal que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Assim, seja $\varepsilon = \frac{f'(a)}{2} > 0$. Então, pela definição de limite, segue que existe $\delta > 0$ tal que, para todo x tal que $0 < |x - a| < \delta$, implique em

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \varepsilon = \frac{1}{2} f'(a).$$

Disso, segue que

$$-\frac{1}{2} f'(a) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) < \frac{1}{2} f'(a),$$

donde segue que

$$0 < \frac{1}{2} f'(a) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{3}{2} f'(a).$$

Portanto concluímos que, para todo x tal que $0 < |x - a| < \delta$, segue que

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Logo, concluímos que

$$\begin{cases} f(x) - f(a) > 0, \ \forall x \in (a, a+\delta), \\ f(x) - f(a) < 0, \ \forall x \in (a-\delta, a). \end{cases}$$

□

Porém, o fato de que $f'(a) > 0$ não implica que exista um $\delta > 0$ tal que f seja crescente no intervalo $(a-\delta, a+\delta)$. Para ilustrar isso, vejamos um exemplo.

Dado $\alpha > 0$, defina a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pondo

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & , \text{ se } \ x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } \ x = 0 \end{cases}$$

Afirmação 1. $f'(0)$ existe e $f'(0) > 0$. De fato, basta notar que,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\alpha x + x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = \alpha + x \operatorname{sen} \frac{1}{x},$$

e como como $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ é limitada, temos que

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \left(\alpha + x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = \alpha > 0,$$

e

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \left(\alpha + x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = \alpha > 0.$$

Logo, vale a Afirmação 1, ou seja, $\exists\, f'(0) = \alpha > 0$.

Afirmação 2. Se $\alpha > 0$ for suficientemente pequeno, então f não é crescente em nenhum intervalo da forma $(-\delta, \delta)$.

De fato, considere as sequências

$$x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \quad \text{e} \quad y_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}.$$

Logo, temos que $0 < x_n < y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Porém,

$$f(x_n) - f(y_n) = [\alpha x_n + x_n^2 \cdot (1)] - [\alpha y_n + y_n^2 \cdot (-1)] =$$

$$= \alpha(x_n - y_n) + x_n^2 + y_n^2 = \alpha \left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} \right) + \left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}} \right)^2$$

$$= \frac{-\alpha\pi}{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi^2} + \frac{1}{\left(2n + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} + \frac{1}{\left(2n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} =$$

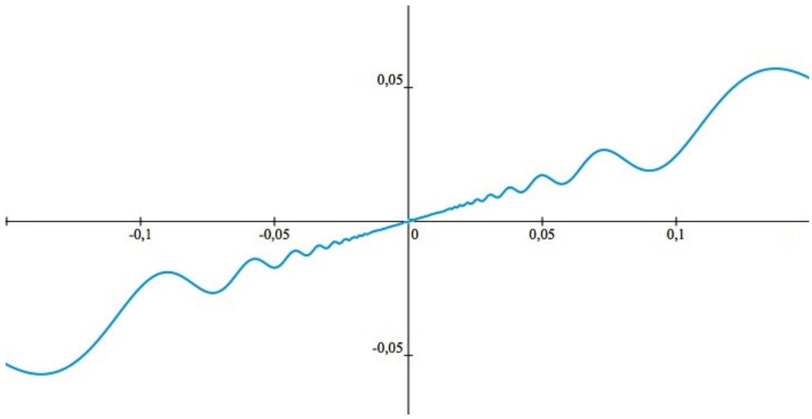
$$= \frac{-\alpha\pi\left(4n^2 - \frac{1}{4}\right) + 8n^2 + \frac{1}{2}}{\left(2n + \frac{1}{2}\right)^2 \left(2n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} = \frac{4n^2(2 - \alpha\pi) + \frac{\alpha\pi}{4} + \frac{1}{2}}{\left(2n + \frac{1}{2}\right)^2 \left(2n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} > 0,$$

se, e somente se, $2 - \alpha\pi > 0$, se, e somente se, $\alpha < \frac{2}{\pi}$.

Assim, tomando $\alpha > 0$ tal que $0 < \alpha < \frac{2}{\pi}$, temos que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < x_n < y_n$ e $f(x_n) > f(y_n)$.

Como $x_n \to 0$ e $y_n \to 0$, segue que f não é crescente no intervalo $(-\delta, \delta)$, qualquer que seja $\delta > 0$.

Apenas para ilustrar, apresentamos um esboço gráfico para f, no caso quando $\alpha = 0,3$. Veja que numa vizinhança da origem o esboço gráfico de f oscila.



Um resultado análogo ao da Proposição 2.10 é apresentado a seguir.

Proposição 2.11 *Seja a um ponto interior de um intervalo I e $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em a, com $f'(a) < 0$. Então, existe $\delta > 0$ tal que:*

(i) *para todo $x \in (a - \delta, a)$, tem-se $f(x) > f(a)$;*

(ii) *para todo $x \in (a, a + \delta)$, tem-se $f(x) < f(a)$.*

Demonstração. A prova é exatamente igual à da Proposição 2.10, bastando tomar $\varepsilon = -\frac{1}{2}f'(a) > 0$.

$\square$

Motivados pelos resultados acima, definimos os conceitos de máximo e mínimo local.

Definição 2.12 Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $a \in I$ um ponto interior. Dizemos que a é um ponto de máximo local para f se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(a)$, para todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Definição 2.13 Seja $f : I \to \mathbb{R}$ e $a \in I$ um ponto interior. Dizemos que a é um ponto de mínimo local para f se existir $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(a)$, para todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Proposição 2.14 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ for derivável em um ponto interior $a \in I$ e tal ponto for de máximo local (ou de mínimo local), então $f'(a) = 0$.*

Demonstração. Faremos prova no caso em que $a \in I$ é um ponto de máximo local (o caso em que $a \in I$ é u ponto de mínimo local é análogo).

Como $f : I \to \mathbb{R}$ possui um máximo local em $a \in I$, segue que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(a)$, para todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$. Dessa forma, concluímos que

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0, \ \forall x \in (a, a + \delta),$$

e

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0, \ \forall x \in (a - \delta, a).$$

Logo, temos que $f'_+(a) \leq 0$ e $f'_-(a) \geq 0$. Como f é derivável em a, segue que

$$f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a) = 0.$$

□

2.5 Funções deriváveis em intervalos

Quando uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável em todos os pontos a do intervalo I, definimos a *função derivada* $f' : I \to \mathbb{R}$, à qual associa a cada ponto $x \in I$ a derivada $f'(x)$. Isto posto, convém apresentar o seguinte conceito.

Definição 2.15 Dizemos que uma função derivável $f : I \to \mathbb{R}$ é *continuamente derivável* ou *de classe* C^1, se a função derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ for contínua.

Tal conceito pode, à primeira vista, parecer estranho, mas alertamos que, de fato, uma função derivada não precisa ser contínua. Um exemplo clássico para justificar essa observação consiste em considerar a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & , \text{ se } \quad x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } \ x = 0 \end{cases}.$$

Não é difícil verificar que f é derivável em toda reta, e em particular em $x = 0$, mas ao determinar a função derivada f' constatamos que a mesma não é contínua em $x = 0$ (Verifique!)

No entanto, observamos algo surpreendente: existe uma versão do Teorema do valor intermediário para a derivada, que seria algo similar ao Teorema do valor intermediário para funções contínuas. No entanto, a versão para derivada que provaremos a seguir não exige que f seja de classe C^1, ou seja, a função derivada f' não precisa ser contínua para o Teorema do valor intermediário para derivadas. Vejamos.

Teorema 2.16 *(Teor. do valor intermediário para derivadas) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em todos os pontos do intervalo I. Se $a, b \in I$ e $f'(a) < d < f'(b)$, então existe um ponto c entre a e b tal que $d = f'(c)$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos supor que $a < b$. Temos dois casos a considerar:

- Caso 1: $d = 0$, ou seja, suponha que $f'(a) < 0 < f'(b)$.

Como f é derivável em b e tal que $f'(b) > 0$, segue pela Proposição 2.10 que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\begin{cases} \forall x \in (b - \delta_1, b), \ f(x) < f(b) \\ \text{e} \\ \forall x \in (b, b + \delta_1), \ f(x) > f(b) \end{cases} \tag{2.1}$$

Do mesmo modo, como f é derivável em a e tal que $f'(a) < 0$, segue pela Proposição 2.11 que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\begin{cases} \forall x \in (a - \delta_2, a),\ f(x) > f(a) \\ \text{e} \\ \forall x \in (a, a + \delta_2),\ f(x) < f(a) \end{cases} \tag{2.2}$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Assim, temos de (2.1) e (2.2) que

$$\begin{cases} f(x) < f(a),\ \forall x \in (a, a + \delta) \\ \text{e} \\ f(x) < f(b),\ \forall x \in (b - \delta, b) \end{cases} \tag{2.3}$$

Como f é contínua em $[a, b] \subset I$ (pois é derivável - veja Proposição 2.7), pelo Teorema do valor extremo segue que f assume valores máximo em mínimo em $[a, b]$. Devido a (2.3) temos que existe um ponto c entre a e b tal que c é ponto de mínimo de f em $[a, b]$, e além disso, temos que $c \neq a$ e $c \neq b$, ou seja, c não assume os extremos do intervalo $[a, b]$.

Sendo f derivável em $(a, b) \subset I$ e possuindo um ponto de mínimo relativo em $c \in (a, b)$, segue pela Proposição 2.14 que $f'(c) = 0 = d$.

Isso conclui o primeiro caso.

- Caso 2: $d \neq 0$, ou seja, $f'(a) < d < f'(b)$, com $d \neq 0$ (caso geral).

Neste caso, defina a função $g : I \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x) - d \cdot x$. Então, g é derivável com derivada $g'(x) = f'(x) - d$.

Dessa forma, dados $a, b \in I$, temos que $g'(a) = f'(a) - d$ e $g'(b) = f'(b) - d$. Como por hipótese vale que $f'(a) < d < f'(b)$, subtraindo d em toda essa cadeia de desigualdades vamos encontrar

$$g'(a) < 0 < g'(b),$$

ou seja, a função g encontra-se nas hipóteses do Caso 1. Assim, conforme o Caso 1, segue que existe c entre a e b tal que $g'(c) = 0$, e como $g'(c) = f'(c) - d$, segue que $f'(c) = d$, como queríamos mostrar.

$\square$

Teorema 2.17 *(Teorema de Rolle) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no aberto (a, b). Se $f(a) = f(b)$, então $\exists c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

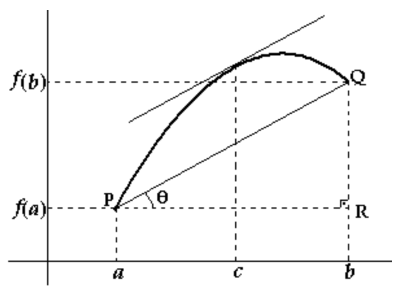
Demonstração. Seja f contínua em $[a, b]$. Logo, pelo Teorema do valor extremo segue que f assume um valor máximo e um valor mínimo em $[a, b]$. Como $f(a) = f(b)$, pelo menos um dos dois casos (máximo ou mínimo) ocorre em um ponto $c \in (a, b)$. Mas f é derivável em (a, b). Portanto, pela Proposição 2.14 segue que $f'(c) = 0$.

$\square$

Teorema 2.18 *(Teorema de Lagrange ou Teorema do Valor Médio - T.V.M) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então, existe um ponto c em (a, b) tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Obs.: Antes de provar o T.V.M, vejamos seu significado geométrico. Considere f nas hipóteses do Teorema. Ligando os pontos $P(a, f(a))$ e $Q(b, f(b))$ e considerando o triângulo retângulo PQR destacado na figura abaixo, temos que a tangente do ângulo θ destacado será numericamente igual à inclinação da reta tangente ao gráfico de f em algum ponto $c \in [a, b]$.



Demonstração do Teorema. Seja f nas hipóteses do Teorema.
Defina $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Como f é contínua em $[a, b]$ segue que g é contínua em $[a, b]$ e como f é derivável em (a, b) segue que g também o é, com

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Além disso, note que

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$$

e

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0.$$

Logo, temos que $g(a) = g(b)$ e estamos, portanto, nas hipóteses do Teorema de Rolle. Portanto, por este Teorema segue que $\exists c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, ou seja

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Portanto,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Algumas consequências do Teorema do Valor Médio são apresentadas abaixo.

Corolário 2.19 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo I. Então, f é crescente em I se, e somente se, $f'(x) \geq 0$, para todo $x \in I$.*

Demonstração. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em I.
Suponha que f seja crescente em I. Assim, para todo $a \in I$ vale que

$$f'(a) = f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0,$$

pois se $x \to a^+$, segue que $x > a$ e daí $x - a > 0$, e também como f é crescente em I segue que $f(x) \geq f(a)$, e daí $f(x) - f(a) \geq 0$.

Reciprocamente, suponha que $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$. Sejam $x_1, x_2 \in I$ tais que $x_1 < x_2$. Logo, pelo T.V.M. segue que existe um ponto $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0,$$

ou seja, concluímos que $f(x_1) \leq f(x_2)$, ou seja, f é crescente em I.

$\square$

Corolário 2.20 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ for uma função derivável em I tal que $f'(x) > 0$, para todo $x \in I$, então f é estritamente crescente em I.*

Demonstração. Segue análogo à recíproca do Corolário acima.

$\square$

Observação 2.21 A recíproca do Corolário 2.20 é falsa, ou seja, o fato de f ser estritamente crescente em I não implica que $f'(x) > 0$, para todo $x \in I$. Por exemplo, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$ é tal que $f'(0) = 0$.

Corolário 2.22 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo I. Então, f é decrescente em I se, e somente se, $f'(x) \leq 0$, para todo $x \in I$.*

Demonstração. É análoga à prova do Corolário 2.19.

$\square$

Corolário 2.23 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ for uma função derivável em I tal que $f'(x) < 0$, para todo $x \in I$, então f é estritamente decrescente em I.*

Demonstração. Fica como exercício.

$\square$

Uma observação análoga à Observação 2.21 deve ser feita para este Corolário. Deixemos para o leitor escrever.

Corolário 2.24 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ for uma função derivável em I tal que $f'(x) = 0$, para todo $x \in I$, então f é constante em I.*

Demonstração. Dados $x_1, x_2 \in I$ quaisquer tais que $x_1 < x_2$. Pelo T.V.M. segue que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0(x_2 - x_1) = 0,$$

e então segue que $f(x_2) = f(x_1)$, $\forall x_1, x_2 \in I$. Como x_1 e x_2 são quaisquer em I, segue que f é constante em I.

□

Corolário 2.25 *Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em um intervalo I tais que $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in I$. Então, existe um ponto $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + c$.*

Demonstração. Defina $h : I \to \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x) - g(x)$. Então, h é derivável em I e

$$h'(x) = f'(x) - g'(x).$$

Como por hipótese $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in I$, segue que $h'(x) = 0$, para todo $x \in I$.

Pelo Corolário anterior segue que $h(x) = c$, onde c é uma constante real. Portanto, $f(x) = g(x) + c$.

□

Lembrando da Análise I, uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita ser de *Lipschitz* ou *lipschitziana* se existir uma constante positiva $M > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in I$, implicar em

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

O número positivo M que satisfaz a desigualdade acima chama-se *constante de Lipschitz*. Isto posto, temos o seguinte resultado relacionado a derivada:

Corolário 2.26 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em um intervalo I. Então, f é de Lipschitz se, e somente se, existir $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M$, para todo $x \in I$.*

Demonstração. Primeiramente, suponha que f é de Lipschitz. Então, existe $M > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in I$, vale a desigualdade

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Então

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M.$$

Passando o limite quando $x \to y$, segue que

$$\left| \lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq \lim_{x \to y} M = M,$$

e como f é derivável em I, obtemos,

$$|f'(x)| \leq M.$$

Reciprocamente, suponha que exista $M > 0$ tal que $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in I$. Assim, para $x, y \in I$ quaisquer, como f é derivável em I, segue pelo T.V.M. que existe c entre x e y tal que

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y),$$

e daí segue que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x - y| \leq M \cdot |x - y|,$$

ou seja, f é de Lispchitz.

$\square$

Corolário 2.27 *Sejam I um intervalo aberto, $a \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua em I. Suponha que f seja derivável em x, para todo $x \in I$, mas $x \neq a$. Se existir $\lim_{x \to a} f'(x) = L$, então f também é derivável em a, com $f'(a) = L$.*

Demonstração. Seja $x \in I$, $x \neq a$. Logo, $x > a$ ou $x < a$. Vamos considerar o caso em que $x > a$. Nesse caso, aplicaremos o T.V.M. em $[a, x]$. Como f é contínua em $[a, x]$ e derivável em (a, x), segue pelo T.V.M. que existe $c \in (a, x)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Então, temos que (note que como $c \in (a, x)$ e $x \to a$ segue que $c \to a$)

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} f'(c) = \lim_{c \to a} f'(c) = L.$$

□

No que segue, apresentamos alguns exemplos de aplicação do Teorema do Valor Médio para desigualdades.

Exemplo 1. Mostre que $\ln(1 + x) \leq x$, $\forall x \geq 0$.

Solução. Defina $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \ln(1 + x) - x.$$

Precisamos mostrar que $f(x) \leq 0$, para todo $x \geq 0$. Notamos que $\forall x \geq 0$, vale que

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 \leq 0.$$

Portanto, $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (0, \infty)$. Logo, pelo Corolário 2.22 segue que f é decrescente em $(0, \infty)$, e disso segue que

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(0) = 0,$$

donde segue que

$$\ln(1 + x) \leq x, \ \forall x \geq 0.$$

□

Exemplo 2. Mostre que $e^x \geq 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solução. Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = e^x - x$. Então, f é derivável em toda a reta, com

$$f'(x) = e^x - 1.$$

Assim, temos que

- $f'(x) > 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$,
- $f'(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, 0)$.

Logo, temos que f é estitamente crescente em $(0, +\infty)$ e estritamente decresente em $(-\infty, 0)$. Assim, segue que

- $\forall x \in (0, \infty)$, $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$, ou seja,
$$e^x - x > e^0 - 0 = 1 \Rightarrow e^x > 1 + x.$$
- $\forall x \in (-\infty, 0)$, $x < 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$, ou seja,
$$e^x - x > e^0 - 0 = 1 \Rightarrow e^x > 1 + x.$$

Ou seja, acabamos de mostrar que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, vale que

$$e^x > 1 + x,$$

e no caso em que $x = 0$ temos $e^x = 1 + x$.

Conclusão: $e^x \geq 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\square$

Teorema 2.28 *(Teor. do Valor Médio de Cauchy) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Então, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$[g(b) - g(a)]f'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c).$$

Observação. Quando $g(x) = x$, o Teorema acima corresponde ao T.V.M. (Verifique!)

Demonstração. Dados $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ nas hipóteses do Teorema, defina $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = (g(b) - g(a))(f(x) - f(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)).$$

Note que φ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) e é tal que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Logo, φ encontra-se nas hipóteses do Teorema de Rolle. Disso, segue que existe $c \in (a, b)$ tal que $\varphi'(c) = 0$. Como

$$\varphi'(x) = (g(b) - g(a))f'(x) - g'(x)(f(b) - f(a)),$$

segue que

$$\varphi'(c) = (g(b) - g(a))f'(c) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0,$$

donde segue o resultado.

□

Uma consequência importante do Teorema acima é a seguinte versão da Regra de L' Hôpital:

Corolário 2.29 *(Regra de L' Hôpital) Sejam $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ deriváveis, tais que*

(i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$,

(ii) $g(x) \neq 0$ *e* $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$,

(iii) $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Então

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Demonstração. Suponha que valem (i), (ii) e (iii). Redefina $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ impondo que $f(a) = g(a) = 0$. Assim, f e g passam a ser contínuas em $[a, b]$. Dado $x \in (a, b)$. Pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy em $[a, x]$, segue que existe $c \in (a, x)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

e então

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L.$$

□

Exercícios

1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a, b). Suponha que $f(a) = f(b) = 0$. Então, dado um $k \in \mathbb{R}$, mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = k \cdot f(c)$.

   Sugestão. Tome $p(x) = f(x) \cdot e^{-kx}$ a aplique o Teorema de Rolle.

2. Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que

$$\left| \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} \right| \leq |\beta - \alpha|, \quad \text{se} \quad x \neq 0.$$

3. Mostre que $\sqrt{1+h} < 1 + \frac{1}{2}h$, se $h > 0$.

4. Aplique o Teorema do Valor Médio a $f(x) = \sqrt{x}$ em $[100, 101]$ para mostrar que
$$\sqrt{101} = 10 + \frac{1}{2\sqrt{c}}$$
para algum c em $(100, 101)$.

5. Explique por que o Teorema do Valor Médio não se aplica à função $f(x) = |x|$ no intervalo $[-1, 2]$.

6. Seja f contínua em $[1, 3]$ e derivável em $(1, 3)$. Suponha que, para todo $x \in (1, 3)$, vale que $1 \leq f'(x) \leq 2$, Prove que $2 \leq f(3) - f(1) \leq 4$.

7. Suponha que as funções f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Suponha também que $f(a) = g(a)$ e que $f'(x) < g'(x)$ para $a < x < b$. Prove que $f(b) < g(b)$.

8. Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é uma *função de Hölder* se $\exists M > 0$ $\exists \alpha \in (0, 1]$ tais que
$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{\alpha}, \forall x, y \in I.$$
Note que no caso particular de $\alpha = 1$, temos que f é de Lipschitz.

   (a) Mostre que se $f : I \to \mathbb{R}$ é de Hölder, então f é uniformemente contínua.

   (b) Mostre que se na condição de Hölder permitíssemos que $\alpha > 1$, seguiria que $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, e portanto, f seria uma função constante.

9. Use o T.V.M. e seus corolários para provar que valem as desigualdades:

   (a) $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$, $\forall x \geq 0$.

   (b) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \geq \operatorname{arcsen} x \geq x$, $\forall x \in [0, 1)$.

   (c) $x - \dfrac{x^3}{3} < \arctan x$, $\forall x > 0$.

(d) $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} < \operatorname{arcsen} x < \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2x-1}{2\sqrt{1-x^2}}$, para $\frac{1}{2} < x < 1$. Observe que $\operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

10. Seja f duas vezes derivável no intervalo $[0,2]$. Mostre que se $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ e $f(2) = 4$, então existe um $x_0 \in (0,2)$ tal que $f''(x_0) = 0$.

11. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável tal que $f(\pi) = \pi$ e $f(e) = e$. Mostre que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = 1$.

12. Suponha que f é uma função derivável com $f'(x) = x^2 f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e tal que $f(0) = 1$. Mostre que $f(x) \cdot f(-x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

13. **(Sel. Mestr. UFSM 2012/1)** Suponha que $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ seja derivável, com $f(0) = 0$, e que $f' : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ seja crescente. Mostre que a função $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ é crescente em $(0,\infty)$.

14. **(Sel. Mestr. UFRGS 2009/1)** Sejam f e g funções reais contínuas e deriváveis em $[a,b]$. Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que:

    (a) Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

    (b) Se $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$, então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = g'(c)$.

15. **(Sel. Mestr. UFRGS 2009/1)** Dado $x > 0$, mostre que $\ln x \geq 1 - \dfrac{1}{x}$.

16. **(Sel. Mestr. UFRGS 2015/2)** Suponhamos que f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq M < 1$ para todo x real. Seja a_1 um número real qualquer e (a_n) uma sequência definida recursivamente $a_{n+1} = f(a_n)$ para $n \in \mathbb{N}$.

    (a) Mostre que

    $$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq M|a_{n+1} - a_n|, \quad \text{para todo } \; n.$$

    (b) Prove que a_n converge.

2.6 Fórmula de Taylor

Nosso objetivo nesta seção é apresentar uma fórmula que permita aproximar uma função qualquer por um certo polinômio, com um erro de aproximação pequeno, numa vizinhança de um ponto a no interior de um intervalo onde a função esteja definida. De fato, na Seção 2.2 definimos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é derivável em um ponto a no interior de I, se existir um número $f'(a)$ tal que, pondo

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r(h),$$

então

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0,$$

ou seja, obtemos uma aproximação linear de f numa vizinhança do ponto a, com um erro (resto) $r(h)$.

Vamos demonstrar uma fórmula que nos permita obter uma aproximação melhor do que a linear. Antes, porém, necessitamos estabelecer o conceito de derivadas sucessivas e funções de classe C^n, $n \in \mathbb{N}$.

2.6.1 Derivadas sucessivas e a classe de funções C^n

Na seção anterior, dada uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, se f for derivável em todos os pontos do intervalo aberto (a,b), definimos a função derivada $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$. Do mesmo modo, sendo f' derivável em (a,b), podemos definir a função derivada da função derivada, ou seja, a derivada segunda $f'' : (a,b) \to \mathbb{R}$, e assim por diante.

Dado $n \in \mathbb{N}$, a derivada de ordem n ou derivada ene-ésima de f em um ponto a é definida indutivamente por

$$f^{(0)}(a) = f(a),$$

$$f^{(1)}(a) = f'(a),$$

$$f^{(n)}(a) = \left(f^{(n-1)}\right)'(a).$$

Definição 2.30 Dizemos que uma função $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ é n vezes derivável em um ponto $a \in (c, d)$ se f possuir derivadas até a ordem $n-1$ em todos os pontos de uma vizinhança de a e se existir $f^{(n)}(a)$.

Definição 2.31 Dizemos que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é de classe C^n, e escrevemos $f \in C^n$, quando f for n vezes derivável em $[a, b]$ e a função $f^{(n)}$ é uma função contínua em $[a, b]$.

Por exemplo, para $n = 0, 1, 2, ...$, defina as funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = x^n|x| = \begin{cases} x^{n+1} & \text{se } \ x \geq 0 \\ -x^{n+1} & \text{se } \ x < 0 \end{cases}.$$

Note que cada f_n é derivável com

$$f'_n(x) = \begin{cases} (n+1)x^n & \text{se } \ x \geq 0 \\ -(n+1)x^n & \text{se } \ x < 0 \end{cases},$$

pois é fácil ver que $\exists\, f'_n(0) = f'_{n_-}(0) = f'_{n_+}(0) = 0$. Portanto, concluímos que

$$f'_n(x) = (n+1)f_{n-1}(x),$$

e com isso a derivada segunda ficará

$$f''_n(x) = (n+1)f'_{n-1}(x) = (n+1)nf_{n-2}(x).$$

Seguindo por indução, chegaremos a $f_n^{(n)}(x) = (n+1)!f_0(x)$, onde $f_0(x) = |x|$, que é contínua, mas não é derivável em $x = 0$. Portanto, concluímos que para todo n fixado, temos que $f_n \in C^n$, mas $f_n \notin C^{n+1}$.

Quando a definição acima for verdadeira para todo $n \in \mathbb{R}$, temos o conceito de função classe C^∞, dado abaixo.

Definição 2.32 Quando f for infinitamente derivável com com todas as derivadas $f^{(n)}$ contínuas, $n = 0, 1, 2, 3, ...$, diremos que f é uma função de classe C^∞, e escrevemos $f \in C^\infty$.

2.6.2 Fórmula de Taylor

No que segue, apresentamos um importante Lema.

Lema 2.33 *Seja $r : I \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável no ponto $0 \in I$. Então, são equivalentes:*

(i) $r(0) = r'(0) = r''(0) = ... = r^{(n)}(0) = 0$;

(ii) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^n} = 0$.

Demonstração. Faremos a prova de cada implicação por indução sobre n.

(i) $\Rightarrow$ (ii):
(a) Quando $n = 1$, ou seja, suponha que vale $r(0) = r'(0) = 0$. Então,

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{r(h) - r(0)}{h - 0} = r'(0) = 0.$$

Logo, vale a base da indução.

(b) Dado que $r(0) = r'(0) = ... = r^{(n)}(0) = 0$, e suponha que (ii) esteja provado até a ordem $n - 1$, ou seja, que vale

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^{n-1}} = 0.$$

Aplicando essa hipótese de indução para $r'(h)$, obtemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{r'(h)}{h^{n-1}} = 0.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, segue que existe $\delta > 0$, tal que, $\forall 0 < |h| < \delta$, implica em

$$\left| \frac{r'(h)}{h^{n-1}} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Dessa forma, avaliando

$$\left| \frac{r(h)}{h^n} \right|,$$

obtemos, pelo T.V.M., que existe $c \in (0, h)$ tal que

$$\left| \frac{r(h)}{h^n} \right| = \left| \frac{r(h) - r(0)}{h^n} \right| = \left| \frac{r'(c)(h - 0)}{h^n} \right| = \left| \frac{r'(c)}{h^{n-1}} \right|,$$

e como $0 < c < h < \delta$, segue que $\frac{1}{h} < \frac{1}{c}$, e daí obtemos a majoração

$$\left|\frac{r(h)}{h^n}\right| = \left|\frac{r'(c)}{h^{n-1}}\right| < \left|\frac{r'(c)}{c^{n-1}}\right| < \varepsilon.$$

Isso prova que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^n} = 0$ e, portanto, pelo Princípio da Indução Matemática segue que vale (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i):

(a) Suponha que (ii) vale para $n = 1$, ou seja, que vale $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$. Então, como r e r' são deriváveis, e portanto contínuas, segue que

$$r(0) = \lim_{h\to 0} h \cdot \frac{r(h)}{h} = 0,$$

e

$$r'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{r(h) - r(0)}{h - 0} = \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Logo, $r(0) = r'(0) = 0$, ou seja, vale a base da indução.

(b) Dado que

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0, \tag{2.4}$$

e supondo que

$$r(0) = r'(0) = ... = r^{(n-1)}(0) = 0, \tag{2.5}$$

precisamos mostrar que $r^{(n)}(0) = 0$.

Defina $\varphi : I \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(h) = r(h) - \frac{r^{(n)}(0)}{n!} h^n.$$

Assim, temos que φ é n vezes derivável em 0, com

$$\varphi^{(k)}(h) = r^{(k)}(h) - \frac{r^{(n)}(0)}{(n-k)!} h^{n-k}, \tag{2.6}$$

para $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Logo, por (2.5) e (2.6) temos que

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = ... = \varphi^{(n-1)}(0) = 0,$$

e como

$$\varphi^{(n)}(h) = r^{(n)}(h) - \frac{r^{(n)}(0)}{0!} = r^{(n)}(h) - r^{(n)}(0),$$

segue que

$$\varphi^{(n)}(0) = r^{(n)}(0) - r^{(n)}(0) = 0.$$

Portanto, pela parte (b) da implicação (i) $\Rightarrow$ (ii) provada anteriormente, segue que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h^n} = 0. \tag{2.7}$$

Agora, pela definição de φ, podemos escrever

$$r(h) = \varphi(h) + \frac{r^{(n)}(0)}{n!} h^n,$$

e daí, segue que

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h) + \frac{r^{(n)}(0)}{n!} h^n}{h^n} = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h^n} + \lim_{h\to 0} \frac{r^{(n)}(0)}{n!}. \tag{2.8}$$

Pela hipótese de indução (2.4) e por (2.7), temos que (2.8) fornece

$$r^{(n)}(0) = 0,$$

como queríamos mostrar. Isso conclui a prova da indução que (ii) $\Rightarrow$ (i). Portanto, conclui-se a prova do Lema.

□

Definição 2.34 Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável em $a \in I$. Definimos o *polinômio de Taylor de ordem* n da função f no ponto a como o polinômio

$$p(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + ... + a_n h^n,$$

cujas derivadas de ordem $\leq n$ no ponto $h = 0$ coincidem com as derivadas de ordem n de f no ponto a, i.e.,

$$p^{(k)}(0) = f^{(k)}(a), \text{ para } k = 0, 1, 2, ..., n. \tag{2.9}$$

Afirmamos que as derivadas $p^{(0)}(0)$, $p'(0)$, $p''(0)$, ..., $p^{(n)}(0)$ determinam de forma única o polinômio $p(h)$, pois

$$p'(h) = a_1 + 2a_2h + 3a_3h^2 + ... + na_nh^{n-1},$$

$$p''(h) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3h + ... + n(n-1)a_nh^{n-2},$$

$$p^{(3)}(h) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3a_4h^2 + ... + n(n-1)(n-2)a_nh^{n-3},$$

e, em geral, para $k = 0, 1, 2, ..., n$,

$$p^{(k)}(h) = k! \cdot a_k + \sum g(h),$$

onde $\sum g(h)$ denota uma soma de termos que contém h. Logo, para $h = 0$ e usando (2.9), segue que

$$f^{(k)}(a) = p^{(k)}(0) = k!a_k, \text{ para } \; k = 0, 1, 2, ..., n,$$

e daí, para $k = 0, 1, 2, ..., n$, temos

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem n da função $f : I \to \mathbb{R}$ no ponto $a \in I$ fica unicamente determinado por

$$p(h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + ... + a_nh^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n.$$

Isto posto, apresentamos o Teorema:

Teorema 2.35 *(Fórmula de Taylor infinitesimal) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável em $a \in I$. Então, para todo $h \in \mathbb{R}$ tal que $a + h \in I$, tem-se*

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + r(h),$$

onde $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$.

Além disso, $p(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k$ *é o único polinômio de grau menor ou igual a n tal que $f(a + h) = p(h) + r(h)$ com* $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$.

Demonstração. Dado $h \in \mathbb{R}$ tal que $a + h \in I$, defina $r(h)$ por

$$r(h) = f(a + h) - p(h), \tag{2.10}$$

onde $p(h)$ é um polinômio de grau $\leq n$ e $r(h)$ é tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0. \tag{2.11}$$

Vamos mostrar que $p(h)$ é o polinômio de Taylor. Note que, por construção, temos que $r(h)$ possui derivadas no ponto 0 até a ordem n. Dessa forma, observando (2.11), estamos nas hipóteses do Lema 2.33. Assim, concluímos que

$$r(0) = r'(0) = r''(0) = ... = r^{(n)}(0) = 0. \tag{2.12}$$

As derivadas de ordem k de (2.10), para $k = 0, 1, 2, ..., n$, são dadas por

$$r^{(k)}(h) = f^{(k)}(a + h) - p^{(k)}(h),$$

e daí, por (2.12) segue que

$$0 = r^{(k)}(0) = f^{(k)}(a) - p^{(k)}(0), \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, ..., n.$$

Logo, $f^{(k)}(a) = r^{(k)}(0)$, e daí segue pela Definição 2.34 que $p(h)$ é o polinômio de Taylor, o qual já mostramos ser único, e é da forma

$$p(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k.$$

□

Observação 2.36 Pondo $a+h = x$ temos $h = x-a$ e então, podemos escrever

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + r(x - a),$$

com

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x - a)}{(x - a)^n} = 0.$$

Uma aplicação imediata da Fórmula de Taylor infinitesimal é a Proposição que segue.

Proposição 2.37 *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função* n *vezes derivável em um ponto* $a \in I$. *Suponha que* $f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$ *e* $f^{(n)}(a) \neq 0$. *Então*

(a) *se* n *for ímpar, então* a *não é ponto de máximo local, nem ponto de mínimo local para* f.

(b) *se* n *for par, então*

- *se* $f^{(n)}(a) > 0$, *então* a *é ponto de mínimo local para* f,
- *se* $f^{(n)}(a) < 0$, *então* a *é ponto de máximo local para* f.

Demonstração. Como $f'(a) = f''(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$, pela Fórmula de Taylor infinitesimal, segue que

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + r(h) = \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r(h)}{h^n}\right)h^n.$$

Como $\frac{r(h)}{h^n} \to 0$ quando $h \to 0$ e $\frac{f^{(n)}(a)}{n!} \neq 0$, segue que:

(a) se n for ímpar, então:

- $h^n > 0$ para $h > 0$;
- $h^n < 0$ para $h < 0$,

e então $f(a+h) - f(a)$ possuirá um sinal à direita contrário ao sinal à esquerda de a. Logo, o ponto a não é ponto de máximo local e nem de mínimo local para f.

(b) se n for par, então $h^n > 0$, $\forall h \neq 0$. Logo, o sinal de $h^n\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{r(h)}{h^n}\right)$, para $0 < |h| < \delta$, é o mesmo sinal de $f^{(n)}(a)$. Assim,

- se $f^{(n)}(a) > 0$ então $f(a+h) - f(a) > 0$ para $0 < h < \delta$, e daí é mínimo local para f,
- se $f^{(n)}(a) < 0$ então $f(a+h) - f(a) < 0$ para $0 < h < \delta$, e daí é máximo local para f.

Isso conclui a prova da Proposição.

□

No que segue, apresentamos uma segunda Fórmula de Taylor, onde o resto assume uma forma diferente da infinitesimal.

Teorema 2.38 *(Fórmula de Taylor com resto de Lagrange) Seja f uma função n vezes derivável no intervalo aberto do tipo $(a-\delta, a+\delta)$, onde $\delta > 0$, com $f^{(n-1)}$ contínua em $[a-\delta, a+\delta]$. Então, dado $b \in (a-\delta, a+\delta)$, existe c entre a e b tal que*

$$f(b) = f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n.$$

Além disso, pondo $b = a+h$, segue que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n.$$

Observação. Note que o caso $n = 1$ é o T.V.M. usual.

Demonstração. Sem perda de generalidade, vamos supor $a < b$. Defina $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \ldots$$
$$\ldots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{A}{n!}(b-x)^n,$$

onde $A \in \mathbb{R}$ é tal que $\varphi(a) = 0$. Tal escolha para A torna φ contínua em $[a,b]$. Por construção temos que φ é derivável em (a,b), com

$$\varphi'(x) = f'(x) - f''(x)(b-x) - f'(x) - \frac{1}{2}f'''(x)(b-x)^2 - 2(b-x)\frac{f''(x)}{2} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(n-1)(b-x)^{n-2} - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + \frac{A}{(n-1)!}(b-x)^{n-1},$$

donde segue que

$$\varphi'(x) = \frac{A - f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}.$$

Assim, sendo φ contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), e notando que $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$, estamos nas hipóteses do Teorema de Rolle, e daí segue que existe $c \in (a,b)$ tal que $\varphi'(c) = 0$, e com isso, segue que

$$0 = \varphi'(c) = \frac{A - f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1} \Leftrightarrow A = f^n(c).$$

Logo, para $x = a$, teremos

$$0 = \varphi(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - ... - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n,$$

e daí a Fórmula é obtida isolando-se $f(b)$, onde $c \in (a, b)$.

Para mostrar a segunda parte do Teorema, observe que, denotando $b = a+h$, segue que $h = b - a$, e assim,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n,$$

onde $c \in (a, a+h)$, e portanto, $c = a + \theta h$, para algum $0 < \theta < 1$. Isso conclui a prova do Teorema.

$\square$

Exercícios

1. Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{2n} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}.$$

   Mostre que f_n é n vezes derivável, mas que sua ene-ésima derivada não é contínua no ponto $x = 0$, logo, $f \notin C^n$.

2. Use a igualdade

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + ... + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

   e a Fórmula de Taylor infinitesimal para calcular as derivadas sucessivas, no ponto $x = 0$, da função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par, i.e., $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que na expressão da fórmula de Taylor em torno de 0 não aparecem as derivadas ímpares em 0. Enuncie e demonstre um resultado análogo para funções ímpares, i.e., tais que $f(x) = -f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

4. Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas vezes deriváveis no ponto $a \in I$. Se $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$ e $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in I$, prove que $f''(a) \geq g''(a)$.

5. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável em $a \in I$. Prove que
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a).$$

6. Utilize a Fórmula de Taylor infinitesimal para provar a seguinte versão da regra de L'Hôpital: *Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções n vezes deriváveis no ponto $a \in I$, com derivadas nulas neste ponto até a ordem $n-1$. Se $g^{(n)}(a) \neq 0$, então*
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

7. **(Sel. Mestr. UFRGS 2010/1)** Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

   (a) Se f é não decrescente, prove que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$.

   (b) Suponha que $f(x) < f(y)$ para todos $x, y \in (a, b)$ tais que $x > y$. Podemos afirmar que a derivada de f é estritamente menor que zero em todos os pontos de (a, b)?

   (c) Suponha agora que f é duas vezes diferenciável em (a, b), e que a derivada de segunda ordem de f é estritamente positiva. Prove que f pode ter no máximo um ponto de mínimo local.

8. Seja $f \in C^{n+1}$ em uma vizinhança do ponto a, e considere a Fórmula de Taylor com resto de Lagrange:
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^n(a+\theta h)}{n!}h^n,$$
com $0 < \theta < 1$. Prove que se $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, então $\theta \to \frac{1}{n+1}$ quando $h \to 0$. Sugestão: compare com a Fórmula de Taylor infinitesimal.

9. Considere uma função f onde a derivada segunda $f''(x)$ existe e é contínua em $[0, 1]$. Assuma que $f(0) = f(1) = 0$ e suponha que existe $K > 0$ tal que $|f''(x)| \leq K$, para todo $x \in [0, 1]$. Mostre que
$$\left| f'\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{K}{4} \quad \text{e} \quad |f'(x)| \leq \frac{K}{2}.$$

10. Suponha $f \in C^2(0,\infty)$ e escreva

$$M_j = \sup_{x\in(0,\infty)} |f^{(j)}(x)|,$$

onde $j = 0, 1, 2$.

(a) Use a Fórmula de Taylor em torno de qualquer x fixado para mostrar que para todo $h \in (0,\infty)$, tem-se

$$|f'(x)| \leq h \cdot M_2 + \frac{M_0}{h}.$$

(b) Encontre o valor de h que minimiza a parte direita da desigualdade acima. Em seguida, conclua que

$$M_1^2 \leq 4 \cdot M_0 \cdot M_2.$$

11. Seja $\mathcal{F}$ a coleção de todas as funções duas vezes continuamente deriváveis em $\mathbb{R}$ satisfazendo $f \geq 0$ em $\mathbb{R}$ e $f''(x) \leq 1$ em $\mathbb{R}$. Encontre uma constante $C \in (0,\infty)$ tal que para cada $f \in \mathcal{F}$ e para cada $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$f'(x)^2 \leq C \cdot f(x).$$

2.7 Funções convexas

Definição 2.39 Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo I, é *convexa* se, para quaisquer $x_1, x_2 \in I$ e para qualquer número real $\lambda \in [0,1]$, cumprir a desigualdade:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

A combinação $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ é chamada de *combinação convexa*. Chamando $\lambda = \lambda_1$ e $1-\lambda = \lambda_2$, notamos que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, com $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, e podemos escrever a desigualdade da definição acima por

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Geometricamente, uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita convexa em I se, para quaisquer $a, b \in I$, a reta secante ao gráfico de f nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

fica acima do gráfico de f.

Assim, seja $x \in (a, b) \subset I$. Logo, $a < x < b$. A equação da reta secante ao gráfico de f nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dada por

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Logo, como $(x, f(x))$ está abaixo do gráfico da reta secante acima destacada, segue que

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

ou seja,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{2.13}$$

Por outro lado, a equação da reta secante ao gráfico de f também pode ser escrita por

$$y = f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b),$$

e, do mesmo modo, como $(x, f(x))$ está abaixo do gráfico da reta secante acima destacada, segue que

$$f(x) \leq f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b),$$

ou seja, (e não esquecendo que $x - b < 0$, por isso trocamos a desigualdade que segue)

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

ou melhor,

$$\frac{f(b) - f(x)}{b - x} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{2.14}$$

Juntando (2.13) e (2.14) obtemos

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}. \tag{2.15}$$

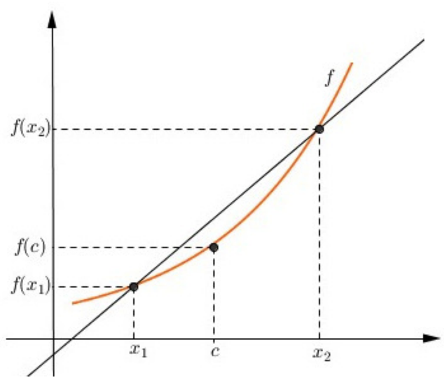
Isto caracteriza a convexidade de f. Faça um desenho para ilustrar.

Mais ainda, sendo f convexa em I, se $a < b < c < d$, pode-se mostrar que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \leq \frac{f(d)-f(c)}{d-c}, \tag{2.16}$$

ou seja, as declividades vão aumentando. Um simples desenho já justifica este fato.

No entanto, até o momento parece não haver conexão entre a definição dada de função convexa com o seu significado geométrico. Vejamos que de fato a desigualdade da Definição 2.39 se cumpre: dados $x_1, x_2 \in I$ e suponha f convexa em I (sem considerar convexidade como a Definição 2.39, e sim somente seu significado geométrico).



Assim, dado $c \in [x_1, x_2]$, segue que podemos escrever

$$c = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \quad \text{para algum } \lambda \in [0,1].$$

Logo,

$$f(c) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2).$$

Afirmamos que $f(c) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$: De fato, a equação da reta secante ao ráfico de f em $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ é dada por

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1),$$

e como todo ponto do gráfico de f no intervalo $[x_1, x_2]$ fica abaixo de tal reta, segue que, em particular quando $x = c$, teremos

$$f(c) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(c - x_1),$$

onde $c = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, ou seja,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - x_1),$$

o que, organizando adequadamente a direita da desigualdade acima, obtemos

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2),$$

como queríamos mostrar.

Na proposição que segue podemos estender a combinação convexa para n termos.

Proposição 2.40 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ for uma função convexa, então para quaisquer $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ e para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \geq 0$ tais que $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$, tem-se*

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Demonstração. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ for uma função convexa. Faremos a prova por indução sobre n. Como f é convexa, segue que para $n = 2$ a prova já está garantida, ou seja, vale a base da indução.

Suponha então que a desigualdade seja verdadeira para $n-1$ números reais e sejam $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ tais que $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 1$. Se $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, então vale a base da indução.

Vamos então supor que $\lambda_n < 1$. Assim, podemos escrever

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = (1 - \lambda_n)\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_n}x_1 + ... + \frac{\lambda_{n-1}}{1 - \lambda_n}x_{n-1}\right) + \lambda_n x_n.$$

Denotando

$$y = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_n}x_1 + ... + \frac{\lambda_{n-1}}{1 - \lambda_n}x_{n-1},$$

temos

$$f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n) = f((1-\lambda_n)y + \lambda_n x_n) \leq (1-\lambda_n)f(y) + \lambda_n f(x_n), \quad (2.17)$$

pois vale para $n = 2$.

Observe também que

$$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_n} + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_n} + ... + \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n} = \frac{\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1}}{1-\lambda_n} = \frac{1-\lambda_n}{1-\lambda_n} = 1,$$

e como a hipótese da indução vale para $n-1$ termos,

$$f(y) = f(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_n}x_1 + ... + \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n}x_{n-1}) \leq$$

$$\leq \frac{\lambda_1}{1-\lambda_n}f(x_1) + ... + \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n}f(x_{n-1}),$$

o que, levado para (2.17), fornece

$$f(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n) \leq (1-\lambda_n)f(y) + \lambda_n f(x_n) \leq$$

$$\leq \lambda_1 f(x_1) + ... + \lambda_{n-1} f(x_{n-1}) + \lambda_n f(x_n),$$

como queríamos mostrar.

$\square$

Estamos interessados em obter resultados que liguem os conceitos de função convexa com função derivável. No entanto, chamamos a atenção de que o fato de uma função ser convexa não implica de a mesma ser derivável. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ é convexa, pois dados $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, tem-se que, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = |\lambda_1 x + \lambda_2 y| \leq \lambda_1 |x| + \lambda_2 |y| = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(x).$$

No entanto, f não é derivável na origem.

Vejamos agora um importante resultado.

Proposição 2.41 *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável em I. Então, f é convexa em I se, e somente se, $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$.*

Demonstração. Suponha que f seja convexa em I Assim, dados $a < b \in I$ e tomando $a < x < b$, segue por (2.15) que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

Como $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ e $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} = f'(b)$, concluímos que

$$f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b),$$

ou seja, dados $a < b$, mostramos que $f'(a) \leq f'(b)$, ou seja, concluímos que f' é crescente em I, e pelo Corolário 2.19 aplicado a f' segue que $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$. Isso prova a primeira parte da Proposição.

Reciprocamente, suponha que $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$. Sejam $a, b \in I$, com $a < b$. Dado $h > 0$ tal que $a-h, b+h \in I$.

Assim, pelo Teorema da Fórmula de Taylor com resto de Lagrange segue que existe $c_1 \in (a-h, a)$ e existe $c_2 \in (b, b+h)$ tais que

$$f(a-h) = f(a) + f'(a)(-h) + \frac{f''(c_1)}{2!}(-h)^2,$$

e

$$f(b+h) = f(b) + f'(b)h + \frac{f''(c_2)}{2!}h^2.$$

Mas como $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, vamos obter

$$f(a-h) - f(a) \geq f'(a)(-h) \quad \text{e} \quad f(b+h) - f(b) \geq f'(b)h,$$

e portanto,

$$\frac{f(a)-f(a-h)}{h} \leq f'(a) \quad \text{e} \quad \frac{f(b+h)-f(b)}{h} \geq f'(b). \tag{2.18}$$

Novamente pelo Corolário 2.19, como $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$, segue que f' é crescente em I, ou seja,

$$a < b \Rightarrow f'(a) \leq f'(b).$$

Logo, como $a < b$, concluímos de (2.18) que

$$\frac{f(a)-f(a-h)}{h} \leq f'(a) \leq f'(b) \leq \frac{f(b+h)-f(b)}{h}.$$

Por fim, escrevendo $x = a-h$ e $y = b+h$, temos que $x < a < b < y$ e são tais que

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(y)-f(b)}{y-b},$$

ou seja, f é convexa em I.

□

Um importante exemplo de função convexa é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$. De fato, para mostrar isso, basta notar que $f''(x) = e^x > 0$, logo, pela Proposição acima segue que f é convexa (e estritamente, pois a desigualdade é estrita).

No que segue apresentamos dois exemplos de aplicação da função exponencial e o estudo de funções convexas é dada abaixo.

Exemplo 1. Prove a desigualdade existente entre média aritmética e geométrica, ou seja, dados $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$, mostre que

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

Solução. De fato, basta definir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = e^x$. Como $f''(x) = e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, segue que f é convexa. Assim,

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} = e^{\ln \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}} = e^{\frac{1}{n}\ln x_1 + ... + \frac{1}{n}\ln x_n} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}e^{\ln x_1} + ... + \frac{1}{n}e^{\ln x_n} = \frac{x_1 + ... + x_n}{n}.$$

□

Exemplo 2. (Desigualdade de Young) *Dados $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, para quaisquer $a, b \geq 0$, vale a desigualdade:*

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}.$$

Demonstração. Como $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ é convexa, temos que

$$a \cdot b = e^{\ln(a \cdot b)} = e^{\ln a + \ln b} = e^{\frac{p}{p}\ln a + \frac{q}{q}\ln b} =$$

$$= e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln a^q} = f(\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln a^q),$$

e como $f(x) = e^x$ é convexa e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, segue que

$$a \cdot b = f(\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln a^q) \leq \frac{1}{p}f(\ln a^p) + \frac{1}{q}f(\ln b^q) = \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{q}e^{\ln b^q} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

$\square$

Capítulo 3

Integrais

Neste capítulo queremos desenvolver uma importante ferramenta do cálculo: a *integração definida*, que é motivada pelo problema de se determinar a área que uma curva forma em um dado intervalo em relação ao eixo horizontal. Uma aplicação física para isto seria, por exemplo, determinar o traballho realizado para mover um objeto, conhecendo-se o gráfico deslocamento $\times$ força. Teremos que o referido trabalho será numericamente igual à área que o gráfico da função força faz com o eixo deslocamento. Porém, nem sempre esta área pode ser determinada a partir de decomposição de figuras planas elementares, tais como quadrados, retângulos e triângulos. Somente o estudo de integrais definidas responderá perfeitamente a isto.

3.1 A integral definida

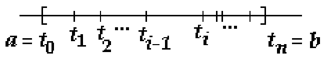
3.1.1 Preliminares

Inicialmente apresentaremos algumas definições e propriedades extremamente importantes que nortearão nossos estudos de integrais.

Definição 3.1 Definimos a *partição* de um intervalo $[a, b]$ por

$$P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b\}.$$

Da definição temos que uma partição P de um intervalo $[a, b]$ divide o mesmo intervalo em n subintervalos do tipo $[t_{i-1}, t_i]$.



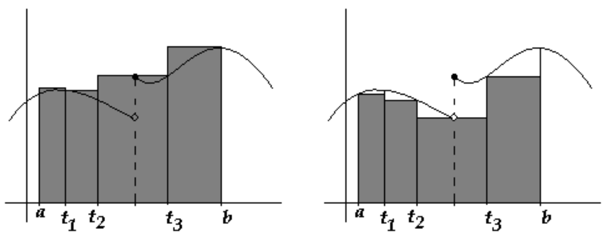
Definição 3.2 Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e P uma partição de $[a, b]$. Definimos o *ínfimo* e o *supremo*[1] de f em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ da partição, respectivamente, por

$$m_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \quad \text{e} \quad M_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x).$$

Definição 3.3 Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$. Definimos as somas *superior* e *inferior* de f, em relação à partição P, respectivamente, por

$$S(f; P) := \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) \quad \text{e} \quad s(f; P) := \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}).$$

A seguir, temos uma representação gráfica da definição acima, onde a primeira ilustração representa a soma superior de f em relação à uma partição P e a segunda, a soma inferior.



Note que, no caso quando $f \geq 0$, as somas superior e inferior, representam, respectivamente, aproximações por excesso e por falta, da área que o gráfico de

[1] Lembre das definições de ínfimo e supremo de um conjunto apresentadas no curso de Análise I.

f forma com o eixo horizontal no intervalo $[a, b]$. Intuitivamente, se refinarmos a partição de $[a, b]$, ou seja, se "quebrarmos" mais o intervalo $[a, b]$, iremos cada vez mais nos aproximar, por excesso e por falta, da área real. Esta será a ideia de nosso estudo.

Lema 3.4 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *limitada e* P *uma partição de* $[a, b]$*. Então*

$$s(f; P) \leq S(f; P).$$

Demonstração. O que este Lema está nos dizendo é que, dada uma partição P de $[a, b]$, a soma inferior sempre é menor ou igual do que a soma superior. Facilmente podemos observar isto mediante uma construção gráfica, como a ilustração apresentada na definição de somas superior e inferior acima. Porém vamos à prova deste Lema. Seja P uma partição qualquer de $[a, b]$. Como $m_i \leq M_i$, e $t_i - t_{i-1} > 0 \ \forall i \in \{0, 1, ..., n\}$, temos

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Somando estas desigualdades para todos os i's, temos

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}),$$

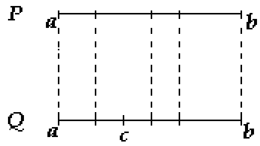
ou seja,

$$s(f; P) \leq S(f; P).$$

□

Definição 3.5 Sejam P e Q duas partições de $[a, b]$. Dizemos que Q é um *refinamento* de P se $P \subset Q$.

O que esta definição quer dizer é que um refinamento de uma partição é uma outra partição do intervalo que contém todos os pontos da partição anterior e pelo menos mais um ponto. Isto pode ser observado na ilustração abaixo, onde Q é um refinamento de P.



Lema 3.6 *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada , P e Q duas partições de $[a, b]$, com $P \subset Q$ (i.e., Q é um refinamento de P). Então*

$$s(f; P) \leq s(f; Q) \leq S(f : Q) \leq S(f; P).$$

Obs.: O que este lema está nos informando significa que, ao refinarmos uma partição P, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta. Observe que a desigualdade intermediária é simplesmente o lema anterior. Precisaríamos mostrar então as outras duas. Porém, deixaremos para o leitor fazer algumas construções gráficas e concluir o resultado.

Corolário 3.7 *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada , P e Q duas partições de $[a, b]$. Então*

$$s(f; P) \leq S(f; Q),$$

ou seja, qualquer soma inferior é sempre menor ou igual do que qualquer soma superior.

Demonstração. Basta notar que $P \cup Q$ é um refinamento tanto de P quanto de Q. Assim, pelo lema acima

$$s(f; P) \leq s(f; P \cup Q) \leq S(f : P \cup Q) \leq S(f; Q).$$

□

3.1.2 Integrais superior e inferior

Definição 3.8 Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Definimos os conjuntos

$$A := \{s(f; P) \ : P \quad \text{é partição de} \ \ [a, b]\}$$

$$B := \{S(f; P) \ : P \quad \text{é partição de} \ \ [a, b]\}$$

Definição 3.9 Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada e $\Lambda = \{P : P$ é partição de $[a, b]\}$. Definimos a *integral superior* e a *integral inferior* de f em $[a, b]$, respectivamente, por

$$\overline{\int_a^b} f := \inf_{P \in \Lambda} S(f; P) \quad \text{e} \quad \underline{\int_a^b} f := \sup_{P \in \Lambda} s(f; P)$$

Observe que se $f \geq 0$ temos que estas integrais inferior e superior, na verdade, representam, respectivamente, aproximações por excesso e por falta da área real que f forma com o eixo horizontal em $[a, b]$. Mas pode ser que tal área **não exista!**

De um resultado que vem da Análise I, temos a seguinte afirmação:
Af.: *Dados $A, B \subset \mathbb{R}$, não vazios tais que, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $x \leq y$, então* $\sup A \leq \inf B$. *Além disso, vale a igualdade se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ e $\exists y \in B$ tais que $y - x < \varepsilon$.*

A mesma situação ocorre quando A e B forem os conjuntos apresentados na definição 3.8.

Assim, temos pelo comentado acima e pelo Corolário 3.7 que $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$. Mais adiante usaremos estes resultados.

3.1.3 Funções integráveis

Definição 3.10 Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Dizemos que f é *integrável* (à Riemann) se as integrais superior e inferior forem iguais, ou seja, se

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

A este valor comum, chamamos de *integral definida* e escrevemos

$$\int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\, dx.$$

A seguir temos alguns exemplos.

Exemplo 1. A função de Dirichlet $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

não é integrável.

Considere $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ uma partição qualquer de $[0,1]$. Assim, pela densidade dos irracionais em $\mathbb{R}$ temos

$$m_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = 0.$$

Portanto, qualquer que seja P a partição de $[0,1]$ teremos

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = 0.$$

Da mesma forma, pela densidade dos racionais em $\mathbb{R}$ temos

$$M_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = 1.$$

Logo,

$$S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + ... + (t_n - t_{n-1}) =$$

$$= t_n - t_0 = 1 - 0 = 1,$$

$\forall P$ partição de $[0,1]$. Assim

$$\int_{\underline{0}}^{1} f = \sup\{s(f;P) \; : P \text{ é partição}\} = 0$$

e

$$\int_{0}^{\overline{1}} f = \inf\{S(f;P) \; : P \text{ é partição}\} = 1$$

Disso, segue que

$$\int_{\underline{0}}^{1} f = 0 < 1 = \int_{0}^{\overline{1}} f,$$

e daí f não é integrável.

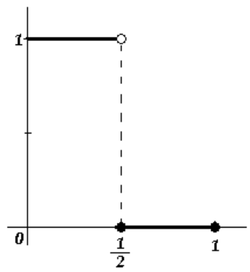
Obs.: Realmente, isso era de se esperar, uma vez que não é possível construir o esboço gráfico da função de Dirichlet. Não existe, de fato, uma área.

Exemplo 2. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Vamos mostrar que esta função é integrável e obter $\displaystyle\int_0^1 f$.

O gráfico de f é apresentado abaixo.



Seja P_n a partição dada por

$$P_n = \{0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\},\ n \geq 3.$$

Assim,

$$s(f;P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) =$$

$$= 1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} - 0\right) + 0\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)\right) + 0\left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$$

Analogamente,

$$S(f;P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}.$$

Logo, temos

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} = s(f; P_n) \leq \underline{\int_0^1} f \leq \overline{\int_0^1} f \leq S(f; P_n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}.$$

Logo, pelo critério do sanduíche, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\underline{\int_0^1} f = \overline{\int_0^1} f.$$

Logo, f é integrável, com $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$.

Realmente, observando que $f \geq 0$ em $[0, 1]$, tal integral corresponde à área que o gráfico de f forma com o eixo horizontal em $[0, 1]$.

Exemplo 3. $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Vamos calcular $\displaystyle\int_0^b x^2$.

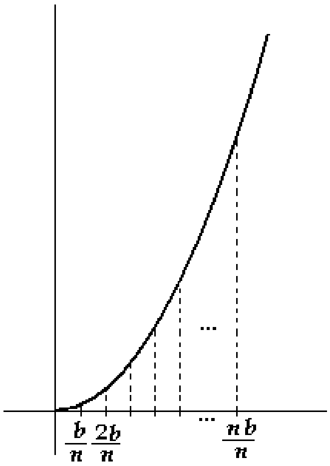
Para $n \in \mathbb{N}$, considere a partição *regular* P_n de $[0, b]$ dada por

$$P_n = \{0, \frac{1 \cdot b}{n}, \frac{2 \cdot b}{n}, ..., \frac{n \cdot b}{n} = b\},$$

que divide este intervalo em n subintervalos $[t_{i-1}, t_i]$ de mesmo comprimento de tamanho

$$t_i - t_{i-1} = \frac{ib}{n} - \frac{(i-1)b}{n} = \frac{b}{n},$$

visto que $t_i = 0 + \dfrac{ib}{n}$, $\forall i \in \{0, 1, ..., n\}$.



Como f é crescente em $[0, b]$, temos

$$M_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = f(t_i) \quad \text{e} \quad m_i = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = f(t_{i-1})$$

Portanto,

$$S(f; P_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\frac{b}{n} =$$

$$= \frac{b}{n}\left(\frac{1^2b^2}{n^2} + \frac{2^2b^2}{n^2} + \frac{3^2b^2}{n^2} + ... + \frac{n^2b^2}{n^2}\right) = \frac{b^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2)$$

Observemos aqui um resultado importante que pode ser provado por indução matemática sobre n:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Com isto, continuando os cálculos, temos

$$S(f; P_n) = \frac{b^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{b^3}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow \frac{b^3}{3} \text{ quando } n \to \infty.$$

Por outro lado,

$$s(f; P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\frac{b}{n} = \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(i-1)b}{n}\right]^2 =$$

$$= \frac{b^3}{n^3}(0^2 + 1^2 + ... + (n-1)^2) = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Portanto,

$$s(f; P_n) = \frac{b^3}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) \longrightarrow \frac{b^3}{3} \text{ quando } n \to \infty.$$

Assim,

$$\int_{\underline{0}}^{b} f = \int_{0}^{\underline{b}} f = \frac{b^3}{3}.$$

Portanto, f é integrável e

$$\int_0^b x^2\, dx = \frac{b^3}{3}.$$

Obs.: Para resolver o problema de integração acima, utilizamos de uma igualdade, que pode ser provada por indução matemática sobre n. Citemos aqui outras igualdades que serão úteis em exercícios:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} k = k \cdot n$, $\forall n \geq 1$.

(b) $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \geq 1$.

(c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \geq 1$.

(d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$, $\forall n \geq 1$.

Note, por exemplo, que a igualdade (a) nos diz que ao somar uma constante k com ela mesma n vezes obtemos $n \cdot k$ e a igualdade (b) é nada mais, nada menos, do que a soma dos n primeiros números naturais, que corresponde à soma de n termos da progressão aritmética $(1, 2, 3, ..., n)$. Procure provar as quatro igualdades acima como exercício usando a indução matemática.

3.1.4 Critério de integrabilidade

Na seção 3.1.2 citamos uma importante afirmação que repetimos abaixo:

Af.: Dados $A, B \subset \mathbb{R}$, não vazios tais que, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, $x \leq y$, então $\sup A \leq \inf B$. Além disso, vale a igualdade se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ e

$\exists y \in B$ tais que $y - x < \varepsilon$.

Em particular, dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada, sendo

$$A = \{s(f; P) : \ P \ \text{é partição de} \ \ [a, b]\}$$

e

$$B = \{S(f; P) : \ P \ \text{é partição de} \ \ [a, b]\},$$

temos

$$\int_{\underline{a}}^{b} f = \sup A \leq \inf B = \int_{a}^{\overline{b}} f,$$

e, de acordo com a afirmação relembrada acima, valerá a igualdade, ou seja, f é **integrável** se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \, P_1, P_2$ partições de $[a, b]$ tais que

$$S(f; P_1) - s(f; P_2) < \varepsilon.$$

Em palavras, considerando ε um erro entre as aproximações por falta e por excesso da integral, temos que f é integrável (i.e., existirá uma área, considerando o caso $f \geq 0$) se este erro for desprezível.

Já temos assim um tipo de critério para decidir se f é integrável ou não. Porém, vamos melhorar este critério, mostrando que apenas uma partição P é suficiente. Ou seja, vamos provar o lema seguinte.

Lema 3.11 *Uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ P partição de $[a, b]$ tal que*

$$S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon.$$

Demonstração. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Suponhamos que f seja integrável. Logo, dado $\varepsilon > 0 \ \exists \, P_1, P_2$ partições de $[a, b]$ tais que

$$S(f; P_1) - s(f; P_2) < \varepsilon.$$

Considere $P = P_1 \cup P_2$, que é um refinamento de ambas as partições P_1 e P_2. Assim, pelo lema 3.6 temos

$$S(f; P) \leq S(f; P_1) \quad \text{e} \quad s(f; P_2) \leq s(f; P)$$

Portanto, obtemos

$$S(f;P) - s(f;P) \leq S(f;P_1) - s(f;P_2) < \varepsilon.$$

Logo, está provada a suficiência.

Reciprocamente, suponhamos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ P$ partição de $[a,b]$ tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

Vamos mostrar que f é integrável.
De fato, basta tomar $P_1 = P_2 = P$, donde segue o resultado.
Portanto, vale também a necessidade e o lema está então provado.

$\square$

Definição 3.12 Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Definimos a *oscilação* de f em $[a,b]$, e denotamos por $\omega(f;[a,b])$ ao número real

$$\omega(f;[a,b]) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Com isto, enunciamos finalmente o critério de integrabilidade, conhecido como *critério de Darboux.*

Teorema 3.13 *(Critério de Darboux) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. São equivalentes as afirmações:*

(a) f é integrável;

(b) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ P$ partição de $[a,b]$ tal que $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$;

(c) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ P$ partição de $[a,b]$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega(f;[t_{i-1},t_i])(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$.

Demonstração. Para mostrar que todas as afirmações são equivalentes basta mostrar que $(a) \Leftrightarrow (b)$ e $(b) \Leftrightarrow (c)$.
Note que $(a) \Leftrightarrow (b)$ Já foi mostrado no Lema 3.11. Portanto, resta mostrar $(b) \Leftrightarrow (c)$. Suponhamos que vale (b), ou seja, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, P$ partição de $[a,b]$ tal que $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$. Basta notar que

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f;[t_{i-1},t_i])(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x) - \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x) \right)(t_i - t_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)(t_i - t_{i-1}) =$$
$$= S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon.$$

Portanto vale (c).
Reciprocamente, suponha que vale (c). Analogamente se mostra que vale (b). Deixamos como exercício.

□

O lema abaixo sobre ínfimo e supremo será útil para o teorema seguinte.

Lema 3.14 *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitadas em $[a,b]$. Então, valem as desigualdades*

$$\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$$

e

$$\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g.$$

Demonstração. Sejam f e g duas funções limitadas em $[a,b]$. Vamos mostrar que

$$\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g.$$

Basta observar que, $\forall x \in [a,b]$, temos

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq f(x) + \sup g \leq \sup f + \sup g.$$

Como esta desigualdade é verdadeira para todo x em $[a,b]$, valerá, em particular para o supremo de $f+g$, ou seja,

$$\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g.$$

Da mesma forma mostramos a desigualdade para o ínfimo: $\forall x \in [a,b]$ vale

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \geq f(x) + \inf g \geq \inf f + \inf g.$$

Logo, em particular, para o ínfimo temos

$$\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g.$$

□

No teorema seguinte apresentamos as principais propriedades da integral definida.

Teorema 3.15 *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis e c uma constante real. Valem as propriedades*

(a) $f+g$ e cf são integráveis, com

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad e \quad \int_a^b cf = c\int_a^b f.$$

(b) Se $f \geq 0$, então $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$. Em particular, se $f \geq g$, então $\displaystyle\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

(c) $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$. Além disso, se f é limitada por $M > 0$, então

$$\left|\int_a^b f\right| \leq M(b-a).$$

(d) $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$.

(e) $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

(f) $f \cdot g$ é integrável.

Demonstração. Faremos as provas dos itens (a), (c) e (f). Os demais deixamos para o leitor (podem ser encontrados em livros...)
(a) Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ uma partição qualquer de $[a,b]$. Aplicando o Lema acima em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ temos

$$S(f+g;P) = \sum_{i=1}^{n} \sup(f+g)(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} (\sup f + \sup g)(t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sup f(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} \sup g(t_i - t_{i-1}) = S(f;P) + S(g;P).$$

Logo,

$$S(f+g;P) \leq S(f;P) + S(g;P). \tag{3.1}$$

Também temos

$$s(f+g;P)=\sum_{i=1}^{n}\inf(f+g)(t_i-t_{i-1})\geq\sum_{i=1}^{n}(\inf f+\inf g)(t_i-t_{i-1})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\inf f(t_i-t_{i-1})+\sum_{i=1}^{n}\inf g(t_i-t_{i-1})=s(f;P)+s(g;P).$$

Logo,

$$s(f+g;P)\geq s(f;P)+s(g;P). \tag{3.2}$$

Da definição de integral superior temos

$$\overline{\int_a^b} f+g=\inf_{P\in B}S(f+g;P),$$

onde $B=\{S(f+g;P):\ P\ \text{é partição de}\ [a,b]\}$.

Juntando esta igualdade com (3.1) obtemos

$$\overline{\int_a^b} f+g\leq S(f+g;P)\leq S(f;P)+S(g;P).$$

Pelo lema 3.6 temos que

$$\overline{\int_a^b} f+g\leq S(f;P_1)+S(g;P_2),$$

onde P_1 e P_2 são duas partições quaisquer da família $\mathcal{P}$ de partições de $[a,b]$. Logo, como a desigualdade acima será verdadeira para quaisquer partições P_1 e P_2 de $[a,b]$, valerá em particular para aquelas que darão os respecitvos ínfimos, ou seja,

$$\overline{\int_a^b} f+g\leq\overline{\int_a^b} f+\overline{\int_a^b} g. \tag{3.3}$$

Do mesmo modo, usando a noção de ínfimo, obtemos

$$\underline{\int_a^b} f+g\geq\underline{\int_a^b} f+\underline{\int_a^b} g. \tag{3.4}$$

Como f e g são integráveis por hipótese, segue que as integrais superior e inferior de f e g são iguais e daí, com as duas últimas desigualdades obtidas acima, concluímos que $f + g$ também é integrável e

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g,$$

o que prova a primeira parte de (a), que mostra a *linearidade* da integral definida.

Vejamos a prova da segunda parte, ou seja, mostrar que $\int_a^b cf = c\int_a^b f$. Se $c = 0$, não temos nada a mostrar.
Considere o caso $c > 0$. Como f é integrável em $[a, b]$, dado $\varepsilon > 0$ segue que existe partição P de $[a, b]$ tal que

$$S(f; P) - s(f; P) < \frac{\varepsilon}{c}.$$

Note que, como

$$S(c \cdot f; P) = c \cdot S(f; P) \ \text{ e } \ s(c \cdot f; P) = c \cdot s(f; P),$$

segue que

$$S(c \cdot f; P) - s(c \cdot f; P) = c\,(S(f; P) - s(f; P)) < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon,$$

ou seja, cf é integrável com $\int_a^b cf = c\int_a^b f$.
Já o caso onde $c < 0$ se faz analogamente, pois basta considerar $-c > 0$.

(c) Das propriedades de módulo temos que $\forall x \in [a, b]$

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Usando a propriedade descrita em (b), integrando obtemos

$$\int_a^b -|f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Passando o sinal negativo para fora da integral, pois é possível de acordo com (a), temos

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

o que, de acordo com a noção de módulo, temos

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

o que prova a primeira parte de (c).
Ainda, supondo f limitada por $M > 0$, i.e., $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, segue que

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b M dx = M \int_a^b dx.$$

Resta mostrar apenas que $\int_a^b 1\, dx = b - a$. Realmente, Para calcular esta integral, note primeiramente que $g(x) = 1$, $\forall x \in [a, b]$. Assim, dada qualquer partição $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ de $[a, b]$ temos que

$$M_i = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = 1 = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) = m_i.$$

Disso segue que

$$s(f; P) = S(f; P) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (t_i - t_{i-1}) =$$

$$= t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + ... + t_n - t_{n-1} = t_n - t_0 = b - a.$$

Como isto vale para qualquer partição P, concluímos que

$$\int_{\underline{a}}^b 1\, dx = \int_a^{\underline{b}} 1\, dx = b - a.$$

Portanto,

$$\int_a^b dx = b - a,$$

e daí concluímos que

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M \int_a^b dx = M(b - a).$$

(f) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integráveis. Então f e g são limitadas e disso segue que existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ e $|g(x)| \leq M$, $\forall x \in [a, b]$.

Defina $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x)g(x)$.

Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ uma partição de $[a, b]$. Assim, dados $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$, temos

$$|h(x)-h(y)| = |f(x)g(x)-f(y)g(y)| = |f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)|$$

$$\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)|,$$

e como f e g são limitadas por $M > 0$, $|g(x) - g(y)| \leq \omega(g; [t_{i-1}, t_i])$ e $|f(x) - f(y)| \leq \omega(f; [t_{i-1}, t_i])$, segue que a estimativa acima fica majorada por

$$|(fg)(x) - (fg)(y)| = |h(x) - h(y)| \leq M[\omega(g; [t_{i-1}, t_i]) + \omega(f; [t_{i-1}, t_i])].$$

Como esta última desigualdade é verdadeira para quaisquer $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$, segue que valerá

$$\omega(fg; [t_{i-1}, t_i]) \leq M[\omega(g; [t_{i-1}, t_i]) + \omega(f; [t_{i-1}, t_i])],$$

e daí para $i = 1, 2, ..., n$ tem-se

$$\omega(fg; [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1}) \leq M \cdot \omega(g; [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1}) +$$

$$+ M \cdot \omega(f; [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1}),$$

e, somando para $i = 1, 2, ..., n$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(fg; [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1}) \leq M \sum_{i=1}^{n} \omega(g; [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1}) +$$

$$+ M \sum_{i=1}^{n} \omega(f; [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1}).$$

Como f e g são integráveis, por hipótese, segue que dado $\varepsilon > 0$, existe partição P de $[a, b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2M},$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(g; [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(fg;[t_{i-1},t_i])(t_i - t_{i-1}) \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$$

ou seja, $f \cdot g$ é também integrável.

□

3.2 Outras propriedades da integral

Proposição 3.16 *Toda função monótona $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, assuma que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ seja crescente. Logo, f é limitada e como $[a,b]$ é um intervalo fechado, temos que

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \forall x \in [a,b].$$

Escreva $m = f(a)$ e $M = f(b)$, e dado $\varepsilon > 0$, escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{(M-m)(b-a)}{n} < \varepsilon.$$

Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ a partição regular de $[a,b]$ que divide tal intervalo em n subintervalos de comprimento $\frac{b-a}{n}$. Logo,

$$t_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \ i = 0, 1, 2, ..., n.$$

Sejam $m_i = \inf\limits_{x \in [t_{i-1},t_i]} f(x) = f(t_{i-1})$ e $M_i = \sup\limits_{x \in [t_{i-1},t_i]} f(x) = f(t_i)$. Logo, a oscilação de f em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ será dada por

$$\omega(f;[t_{i-1},t_i]) = M_i - m_i = f(t_i) - f(t_{i-1}),$$

e assim, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f;[t_{i-1},t_i])(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1})) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) = \frac{b-a}{n}(M-m) < \varepsilon.$$

Logo, f é integrável em $[a,b]$.

□

Proposição 3.17 *Toda função contínua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.*

Demonstração. Como $[a,b]$ é um compacto e f é contínua nesse compacto, segue que f é uniformemente contínua em $[a,b]$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, dados $x, y \in [a,b]$ com $|x-y| < \delta$, implica em $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{n} < \delta$, e seja $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ a partição regular de $[a,b]$. Logo,

$$t_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \ i = 0, 1, 2, ..., n,$$

e disso segue que

$$t_i - t_{i-1} = a + i \cdot \frac{b-a}{n} - \left(a + (i-1) \cdot \frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} < \delta.$$

Portanto, $\forall x, y \in [t_{i-1}, t_i]$, teremos $|x-y| < \delta$, e disso

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Em particular, $\sup\limits_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) - \inf\limits_{y \in [t_{i-1}, t_i]} f(y) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, ou seja,

$$\omega(f; [t_{i-1}, t_i]) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Portanto, concluímos que

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}(t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

o que mostra que f é integrável em $[a,b]$.

□

3.3 O Teorema Fundamental do Cálculo

Nesta seção iremos estudar um dos mais importantes Teoremas do cálculo, conhecido por *Teorema Fundamental do Cálculo*, que faz uma conexão entre derivadas e integrais, simplificando enormemente a resolução de problemas de obter a integral definida de uma função f. Inicialmente, apresentaremos algumas definições e propriedades preliminares.

3.3.1 Preliminares

Definição 3.18 Dizemos que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é de *Lipschitz* se $\exists M > 0$ tal que $\forall x, y \in [a, b]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

A constante $M > 0$ é chamada de *constante de Lipschitz*.

Observe que, se uma função f for de Lipschitz segue que a mesma possui um certo controle sobre a derivada, uma vez que, podemos escrever

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq M,$$

o que mostra que, fazendo $x \to y$ temos que $|f'(x)| \leq M$, ou seja, para uma função f que cumprir a condição de Lipschitz, os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico de tal f variam entre $-M$ e M, ou seja, as inclinações das retas tangentes ao gráfico de f em $[a, b]$ ficam controladas pela constante de Lipschitz M.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$ é de Lipschitz.

De fato, dados $x, y \in \mathbb{R}$, temos

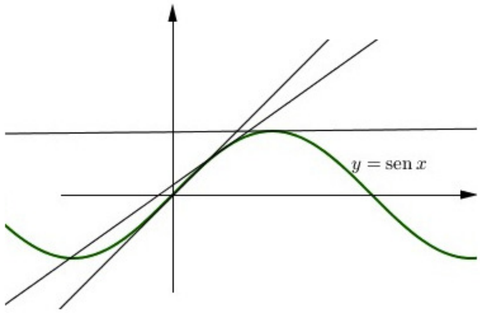
$$|f(x) - f(y)| = |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| = \left|2\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right| =$$

$$= 2\left|\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x+y}{2}\right|.$$

Como $|\cos\alpha| \leq 1$ e $|\text{sen}\,\alpha| \leq |\alpha|$, $\forall\alpha$, segue que

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\left|\frac{x-y}{2}\right| \cdot 1 = |x-y|.$$

Logo, realmente, f é de Lipschitz com $M = 1$. Isto significa que os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico da função seno variam entre -1 e 1, ou seja, as inclinações dessas retas variam entre -45^o e 45^o.
Na figura abaixo temos os gráficos da função seno e de algumas retas tangentes nos pontos $A(0,0)$, $B(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $C(\frac{\pi}{2}, 1)$.



Exemplo 2. A função $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ **não é** de Lipschitz.

Desconfiamos disso pois, observando o gráfico de f, perto da origem o mesmo parece possuir retas tangentes com inclinações muito "fortes", o que sugere que f não seja de Lipschitz. Veremos que, realmente, perto de zero a função dada não satisfaz a condição de Lipschitz.

De fato, se por absurdo f fosse de Lipschitz, então, $\forall x, y \in [0, +\infty)$, existiria $M > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

Em particular, tome $x = 0$ e $y = \frac{1}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ (note que quanto maior for o valor do natural n, mais perto de x estará y). Disso, temos

$$|f(x) - f(y)| = \left|f(0) - f(\frac{1}{n})\right| = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Logo,

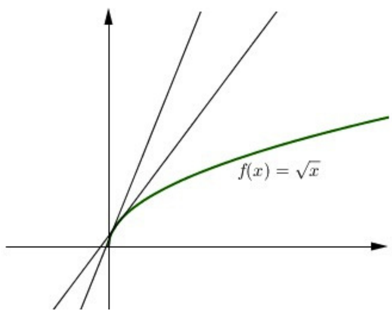
$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq M\left|0 - \frac{1}{n}\right| = \frac{M}{n}.$$

Portanto, teríamos

$$\frac{n}{\sqrt{n}} \leq M \Rightarrow \sqrt{n} \leq M, \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mas isto implica que o conjunto n dos naturais seria limitado superiormente por M, o que é um absurdo. Portanto, concluímos que tal função f não é de Lipschitz.

Abaixo temos o esboço gráfico da função f, bem como uas retas tangentes próximas à origem, indicando geometricamente que as inclinações das mesmas aumentam gradativamente à medida que tomamos pontos cada vez mais próximos de zero (observe que exatamente em $x = 0$ f não é derivável).



Proposição 3.19 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ for de Lipschitz, então f é contínua.*

Demonstração. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de Lipschitz com constante de Lipschitz $M > 0$.

Dado $\varepsilon > 0$. Basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$. Assim, $\forall x, y \in [a, b]$ tal que $|x - y| < \delta$, temos

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < M\delta = M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Portanto, f é contínua em $[a, b]$.

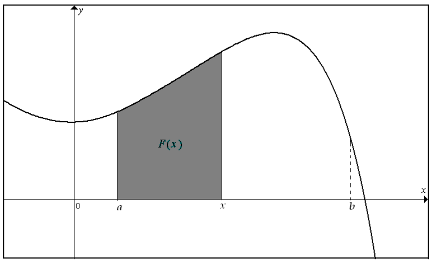
□

3.3.2 O Teorema Fundamental do Cálculo

Definição 3.20 Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável. Definimos $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Da definição, considerando $f \geq 0$ em $[a, b]$, notamos que a função F nos fornece a área que o gráfico de f forma com o eixo horizontal no intervalo $[a, x]$. Dizemos então, neste caso, que F é a *função área*.



A seguinte proposição trata da continuidade de F.

Proposição 3.21 *A função F é de Lipschitz e, portanto, contínua.*

Demonstração. Seja $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, com f integrável.

Sendo f integrável, segue que f é limitada. Assim, $\exists K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K$, $\forall x \in [a, b]$. Portanto, $\forall x, y \in [a, b]$ temos

$$|F(x) - F(y)| = \left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt\right| = \left|-\int_x^a f(t)dt - \int_a^y f(t)dt\right| =$$

$$= \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq \int_y^x |f(t)|dt \leq \int_y^x Kdt = K|x - y|.$$

Logo, temos que F é de Lipschitz. Pela proposição anterior segue que F é contínua.

$\square$

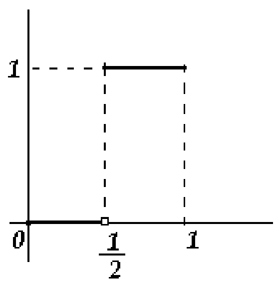
Observe que a proposição acima nos diz que F é uma função que melhora a continuidade de f, ou seja, *regulariza* a f, uma vez que não se exige que f seja contínua, mas apenas limitada e no entanto F sempre será contínua, independente de f ser ou não.

Vejamos um exemplo para ilustrar isto.

Exemplo 1. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1, & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

cujo gráfico é apresentado abaixo.



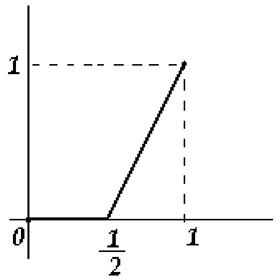
é fácil ver que f não é contínua em $x = \dfrac{1}{2}$. No entanto, temos que $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x 0dt, & \text{se} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \int_0^{\frac{1}{2}} 0dx + \int_{\frac{1}{2}}^x 1\, dt, & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

ou seja,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2}, & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

cujo esboço gráfico é apresentado a seguir.



Observe que F é contínua, mesmo f não sendo.

Repare ainda que a área que f forma com o eixo horizontal, no intervalo $[0, \frac{3}{4}]$ corresponde à área de um retângulo de base $b = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ e altura $h = 1$, ou seja, $A = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$ unidades de área. Realmente, isto pode ser observado na função F simplesmente como $A = F(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ unidades de área.
O próximo teorema nos fornece um resultado extremamente interessante, que nos diz que continuidade de f nos garante derivabilidade de F.

Teorema 3.22 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua em um ponto x_0, então F é derivável em x_0 com $F'(x_0) = f(x_0)$.*
Ou seja,

$$F'(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right)\bigg|_{x=x_0} = f(x_0).$$

Demonstração. Dado $h \in \mathbb{R}$ tal que $x + h \in [a,b]$. Precisamos mostrar que

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \to 0$$

quando $h \to 0$.
Como f é contínua em x_0, segue que, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|t - x_0| < \delta$ implica em $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$, ou seja $-\varepsilon < f(t) - f(x_0) < \varepsilon$.
Assim, notando que $f(x_0) = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt$, temos

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\left[\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right] - f(x_0)\right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \left[\int_{x_0}^{a} f + \int_{a}^{x_0+h} f \right] - f(x_0) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt \right| < \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon \, dt \right| = \left| \frac{1}{h} \varepsilon \cdot h \right| = \varepsilon$$

Isto prova o teorema.

□

Teorema 3.23 *(Teorema Fundamental do Cálculo - TFC) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável com f' integrável. Então*

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Obs.: Exige-se no Teorema acima que f' seja integrável para se evitar situações como por exemplo, $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln x$. Temos que $\exists f' : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, mas no entanto, a área que o gráfico deste ramo de hipérbole forma seria infinita e, portanto, não existiria realmente uma área.

Demonstração. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável com f' integrável. Seja P uma partição qualquer de $[a, b]$ que divide este intervalo em n subintervalos da forma $[t_{i-1}, t_i]$:

$$P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \ ... \ < t_n = b\}.$$

Assim,

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) - f(t_{i-1}).$$

Como f é derivável em (t_{i-1}, t_i), pelo Teorema do Valor Médio, segue que $\exists c_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que $f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i)(t_i - t_{i-1})$, $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$. Portanto,

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f'(c_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Defina para cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ os números

$$m_i' = \inf_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x) \ \text{ e } \ M_i' = \sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} f(x).$$

Observe que, para cada i

$$m_i' \leq f'(c_i) \leq M_i'.$$

Logo,

$$m_i'(t_i - t_{i-1}) \leq f'(c_i)(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Somando estas desigualdades para cada i obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} m_i'(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f'(c_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}),$$

ou seja,

$$s(f'; P) \leq f(b) - f(a) \leq S(f'; P)$$

Como, por hipótese, f' é integrável, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ P$ partição de $[a, b]$ tal que

$$S(f'; P) - s(f'; P) < \varepsilon.$$

Portanto

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

□

Teorema 3.24 *(Integração por partes) Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deriváveis com derivadas integráveis. Então.*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Demonstração. Pela regra da derivada do produto, temos que

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',$$

com f' integrável, e sendo g derivável, então g é contínua, e, portanto, pela Proposição 3.17, g é integrável. Assim, $f' \cdot g$ é integrável. Do mesmo modo concluímos que $f \cdot g'$ também é integrável.

Como a soma de funções integráveis é integrável, concluímos que $(f \cdot g)'$ é integrável.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\int_a^b (f \cdot g)' = (f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a) = f(b)g(b) - f(a)g(a), \tag{3.5}$$

e por outro lado,

$$\int_a^b (f \cdot g)' = \int_a^b (f' \cdot g + f \cdot g') = \int_a^b f' \cdot g + \int_a^b f \cdot g'. \tag{3.6}$$

Comparando (3.5) e (3.6), segue o resultado.

□

Teorema 3.25 *(Mudança de variável) Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ derivável com g' integrável e $g([c,d]) \subset [a,b]$. Então*

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt.$$

Demonstração. Defina $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Pelo Teorema 3.22 temos que, sendo f contínua, segue que F é derivável com $F' = f$.

Pela Regra da Cadeia, temos

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t).$$

Além disso, como f e g são contínuas tem-se que $f \circ g$ é contínua, e pela Proposição 3.17 segue que $f \circ g$ é integrável, e disso,

$$(F \circ g)'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t) \ \text{ é integrável.}$$

Pelo T.F.C., obtemos

$$\int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int_c^d (F \circ g)'(t)dt = (F \circ g)(d) - (F \circ g)(c) =$$

$$= F(g(d)) - F(g(c)) = \int_a^{g(d)} f(x)dx - \int_a^{g(c)} f(x)dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx.$$

□

3.4 Fórmula de Taylor com resto integral

No Capítulo anterior estudamos os Teoremas da Fórmula de Taylor com restos infinitesimal e na forma de Lagrange. Vejamos agora a formulação onde o resto fica expresso em termos de uma integral definida, razão pela qual recebe o nome "resto integral". Antes, porém, é salutar enunciar um importante Lema.

Lema 3.26 *Seja $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^{n+1} em um intervalo aberto contendo $[0, 1]$. Então*

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + ... + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(t)dt.$$

Demonstração. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, escrevemos

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)dt.$$

Escreva $f(t) = 1 - t$ e $g(t) = \varphi'(t)$. Então $f'(t) = -1$ e $g'(t) = \varphi''(t)$. Assim,

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)dt = \varphi(0) - \int_0^1 -1 \cdot g(t)dt =$$
$$= \varphi(0) - \int_0^1 f'(t)g(t)dt.$$

Pelo Teorema 3.24 de integração por partes, identificando $u = g(t)$ e $dv = f'(t)dt$, vamos obter

$$du = g'(t)dt = \varphi''(t)dt \quad \text{e} \quad v = f(t) = 1 - t,$$

e daí

$$\varphi(1) = \varphi(0) - \int_0^1 f'(t)g(t)dt = \varphi(0) - \int_0^1 udv =$$
$$= \varphi(0) - \left[uv|_1 - uv|_0 - \int_0^1 vdu \right] =$$
$$= \varphi(0) - g(t)(1-t)|_1 + g(t)(1-t)|_0 + \int_0^1 (1-t)g'(t)dt =$$
$$= \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)dt.$$

Novamente, identificando $u = \varphi''(t)$ e $dv = (1-t)dt$, teremos $du = \varphi'''(t)dt$ e $v = -\frac{(1-t)^2}{2}$, e novamente pela integração por partes, vem

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + uv|_1 - uv|_0 - \int_0^1 vdu =$$

$$= \varphi(0) + \varphi'(0) + 0 - \varphi''(0)\left(-\frac{1}{2}\right) - \int_0^1 -\frac{(1-t)^2}{2}\varphi'''(t)dt,$$

ou seja,

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + 0 + \frac{\varphi''(0)}{2} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}\varphi'''(t)dt.$$

Tomando $u = \varphi'''(t)$ e $dv = \frac{(1-t^2)}{2}dt$, obtemos

$$du = \varphi^{(4)}(t)dt \quad \text{e} \quad v = -\frac{(1-t)^3}{2 \cdot 3},$$

e com isso, pelo Teorema da integração por partes, vem

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + uv|_1 - uv|_0 - \int_0^1 vdu =$$

$$= \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + 0 - \varphi'''(0)\left(-\frac{1}{2 \cdot 3}\right) - \int_0^1 -\frac{(1-t)^3}{2 \cdot 3}\varphi^{(4)}(t)dt,$$

ou seja,

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + \frac{\varphi'''(0)}{2 \cdot 3} + \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{2 \cdot 3}\varphi^{(4)}(t)dt.$$

Seguindo por indução até a ordem $n+1$ segue o resultado.

□

De posse do Lema acima, provamos:

Teorema 3.27 *(Fórmula de Taylor com resto integral) Seja f uma função de classe C^{n+1} definida em um intervalo aberto contendo $[a, a+h]$. Então*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+th)h^{n+1}dt.$$

Demonstração. Defina $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(t) = f(a + th).$$

Logo, φ é de classe C^{n+1} pois f o é. Além disso, $\varphi(1) = f(a+h)$ e pela Regra da Cadeia,

$$\varphi'(t) = f'(a + th)h.$$

Em geral, tem-se que

$$\varphi^{(k)}(t)f^{(k)}(a + th)h^k, \ k = 0, 1, 2, ..., n + 1,$$

e então pelo Lema 3.26 segue que o resultado.

□

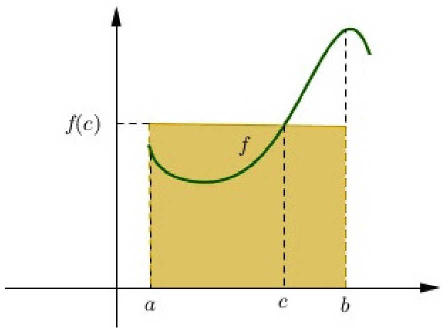
3.5 Teoremas do Valor Médio para integrais

Nesta seção apresentamos três teoremas importantes, denominados de Teoremas do Valor Médio para integrais.

Teorema 3.28 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

No caso onde $f \geq 0$ temos uma interessante interpretação geométrica para esse Teorema: como f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, existirá um ponto c entre a e b tal que a área compreendida pelo gráfico de f, as retas verticais $x = a$ e $x = b$ e o eixo horizontal será numericamente igual à área do retângulo de base $b - a$ e altura $f(c)$. Veja a figura abaixo.



Vamos à prova do Teorema.

Demonstração. Como f é contínbua em $[a,b]$, segue pelo Teorema do Valor Extremo (Teor. de Weierstrass) que existem x_1, x_2 em $[a,b]$ tais que $f(x_1) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ e $f(x_2) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Assim, segue que, $\forall x \in [a,b]$:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Integrando em $[a,b]$ vamos obter

$$\int_a^b f(x_1)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x_2)dx,$$

e então

$$f(x_1)\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(x_2)\int_a^b dx,$$

donde segue que

$$f(x_1) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq f(x_2),$$

e como f é contínua no intervalo fechado de extremidades em x_1 e x_2, contido em $[a,b]$, segue pelo Teorema do Valor Intermediário que $\exists c \in (a,b)$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

□

Teorema 3.29 *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas com $g(x) > 0$, para todo $x \in [a,b]$. Então, existe $c \in [a,b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Demonstração. Sendo f contínua em $[a,b]$, segue pelo Teorema do valor Extremo que f assume valor máximo e assume valor mínimo em $[a,b]$. Assim, sejam M e m, respectivamente, tais valores. Temos, portanto, que

$$m \leq f(x) \leq M, \ \forall x \in [a,b].$$

Sendo $g(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$, temos que

$$m\, g(x) \leq f(x)g(x) \leq M\, g(x).$$

Integrando em $[a,b]$, obtemos

$$\int_a^b m\, g(x) \leq \int_a^b f(x)g(x) \leq \int_a^b M\, g(x),$$

ou seja,

$$m \int_a^b g(x) \leq \int_a^b f(x)g(x) \leq M \int_a^b g(x),$$

e como $g(x) > 0$, $\forall x$, segue que $\int_a^b g > 0$ e daí

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)}{\int_a^b g(x)} \leq M.$$

Como f é contínua, segue que existem $x_0, x_1 \in [a,b]$ tais que $m = f(x_0)$ e $M = f(x_1)$, e com isso, obtemos

$$f(x_0) \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)}{\int_a^b g(x)} \leq f(x_1),$$

e, pela continuidade de f, considerando $d = \frac{\int_a^b f(x)g(x)}{\int_a^b g(x)}$, segue pelo Teorema do Valor Intermediário que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = d$, ou seja,

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)}{\int_a^b g(x)},$$

donde segue o resultado.

$\square$

Corolário 3.30 *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas com $g(x) < 0$, para todo $x \in [a, b]$. Então, existe $c \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Demonstração. A prova é análoga à do Teorema acima, deixamos para o leitor.

$\square$

Teorema 3.31 *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável com g' integrável e tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$ e g decrescente. Então, existe $\theta \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = g(a)\int_a^\theta f(x)\,dx.$$

Demonstração. Defina $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Pelo Teorema 3.22 temos que F é contínua e então derivável com $F'(x) = f(x)$.

Pelo Teorema da integração por partes (Teorema 3.24), segue que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b F'(x)g(x)dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)dx.$$

Como $F(a) = 0$, obtemos

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x)dx. \tag{3.7}$$

Como por hipótese g é derivável e decrescente, segue que $g'(x) \leq 0$, $\forall x \in [a, b]$ e g' é contínua. Dessa forma temos que F e g' estão nas hipóteses do Corolário 3.30, e disso segue que $\exists c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b F(x)g'(x)dx = F(c)\int_a^b f'(x)dx = F(c)(g(b) - g(a)).$$

Assim, (3.7) resulta em

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(b)g(b) - F(c)(g(b) - g(a)) =$$

$$= F(c)(g(a) - g(b)) + F(b)g(b) =$$
$$= \left[F(c)\frac{g(a) - g(b)}{g(a)} + F(b)\frac{g(b)}{g(a)}\right] g(a).$$

Denotando $\alpha = \dfrac{g(a) - g(b)}{g(a)}$ e $\beta = \dfrac{g(b)}{g(a)}$, notamos que $\alpha + \beta = 1$. Logo, o aditivo acima entre colchetes é uma combinação convexa de $F(c)$ e $F(b)$, e portanto $d := F(c) \cdot \alpha + F(b) \cdot \beta$ está entre $F(c)$ e $F(b)$.

Aplicando o Teorema do Valor Intermediário para funções contínuas em F no intervalo $[c, b]$, segue que existe θ entre c e b tal que $F(\theta) = d$. Portanto, concluímos finalmente que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(c) \cdot \alpha + F(b) \cdot \beta]g(a) = d \cdot g(a) =$$
$$= F(\theta)g(a) = g(a) \int_a^\theta f(x)dx.$$

□

3.6 Soma de Riemann

Nesta seção vamos apresentar a definição de *soma de Riemann*. Para isto, vejamos primeiramente a definição de *norma* de uma partição P de $[a, b]$.

Definição 3.32 Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ uma partição do intervalo $[a, b]$. Definimos a *norma* da partição P por

$$||P|| = \max_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} \{t_i - t_{i-1}\}.$$

Ou seja, a norma de uma partição P de $[a, b]$ é o maior subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de $[a, b]$.

No que segue apresentamos um importante resultado.

Teorema 3.33 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se P for uma partição qualquer de $[a, b]$ com $||P|| < \delta$, tem-se*

$$\int_a^{\overline{b}} f \leq S(f; P) < \int_a^{\overline{b}} f + \varepsilon.$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$. Suponha que $f \geq 0$ em $[a,b]$ (se $f < 0$, basta tomar $k > 0$ tal que $f + k \geq 0$ e trabalhar com $f + k$ ao invés de f).

Notamos que, por definição tem-se que

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f;P), \tag{3.8}$$

para toda partição P de $[a,b]$.

Seja $P_0 = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$ tal que

$$S(f;P_0) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.9}$$

Como f é limitada, seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in [a,b]$.

Tome

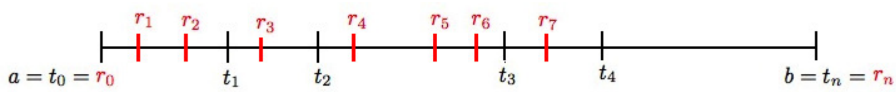
$$\delta = \frac{\varepsilon}{2 \cdot M \cdot n}, \tag{3.10}$$

onde $M > 0$ é a constante acima definida e n é o número de subintervalos de P_0.

Afirmamos que $\forall$ P partição de $[a,b]$ tal que $||P|| < \delta$, implica em

$$S(f;P) < \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon.$$

De fato, seja $P = \{a = r_0 < r_1 < r_2 < ... < r_n = b\}$ uma partição qualquer de $[a,b]$ tal que $||P|| < \delta$.



Vamos indicar por $[r_{j-1}, r_j]$ os subintervalos de P que estão contidos em algum subintervalo de P_0, ou seja, tais que $[r_{j-1}, r_j] \subset [t_{i-1}, t_i]$, para algum i fixado, e denotaremos isso por $j \subset i$; e vamos indicar por $[r_{k-1}, r_k]$ os subintervalos restantes de P que contém algum t_i em seu interior.

Portanto, existem no máximo n subintervalos do tipo $[r_{k-1}, r_k]$.

Quando $j \subset i$, temos que $M_j \leq M_i$ e é fácil ver que

$$\sum_{j \subset i} r_j - r_{j-1} \leq t_i - t_{i-1} \quad \text{e} \quad M_k(r_k - r_{k-1}) \leq M||P|| < M \cdot \delta,$$

onde M_i, M_j e M_k denotam os supremos de f em $[t_{i-1}, t_i]$, $[r_{j-1}, r_j]$ e $[r_{k-1}, r_k]$, respectivamente e notamos que tais supremos são todos maiores ou iguais a zero, pois admitimos $f \geq 0$. Assim,

$$S(f;P) = \sum_j M_j(r_j, r_{j-1}) + \sum_k M_k(r_k - r_{k-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) + \sum_k M \cdot \delta \leq S(f;P_0) + M \cdot n \cdot \delta,$$

e por (3.9) e (3.10) vem:

$$S(f;P) \leq S(f;P_0) + M \cdot n \cdot \delta < \int_a^{\overline{b}} f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot n \cdot \delta \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot M \cdot n},$$

ou seja,

$$S(f;P) < \int_a^{\overline{b}} f(x)dx + \varepsilon.$$

Combinando esta desigualdade com (3.8), segue o resultado.

□

Corolário 3.34 *Sejam* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitada e* P *uma partição de* $[a,b]$. *Então*

$$\lim_{||P|| \to 0} S(f;P) = \int_a^{\overline{b}} f(x)dx.$$

Demonstração. De fato, dado $\varepsilon > 0$, pelo Teorema 3.33 segue que existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| S(f;P) - \int_a^{\overline{b}} f(x)dx \right| < \varepsilon \ , \quad \text{sempre que} \quad ||P|| < \delta.$$

□

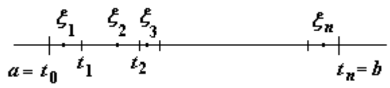
Corolário 3.35 *Sejam* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *limitada e* P *uma partição de* $[a,b]$. *Então*

$$\lim_{||P|| \to 0} s(f;P) = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx.$$

Demonstração. Basta provar um Teorema análogo ao Teorema 3.33 e o resultado segue.

□

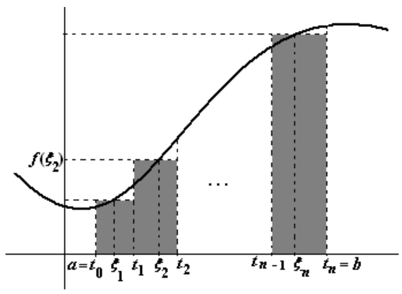
Definição 3.36 Dada uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ de $[a, b]$. Em cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ escolhemos arbitrariamente um ponto ξ_i, $i = 1, 2, ..., n$. Estes pontos ξ_i definem uma *partição pontilhada* $P^\star$ de $[a, b]$.



Com esta partição pontilhada $P^\star$ definimos a *soma de Riemann* como segue.

Definição 3.37 Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Definimos a soma de Riemann por

$$\sum(f; P^\star) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$



Observe que, sendo m_i e M_i, respectivamente, o ínfimo e o supremo de f em $[t_{i-1}, t_i]$, temos que

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i, \forall i.$$

Logo, multiplicando por $t_i - t_{i-1}$ e somando para todos os índices i obtemos a cadeia de desigualdades:

$$s(f; P) \leq \sum(f; P^\star) \leq S(f; P).$$

Considerando f uma função integrável em $[a, b]$, temos que o Teorema do Sanduíche aplicado à cadeia de desigualdades do parágrafo acima, combinado com os Corolários 3.34 e 3.35 e a Definição 3.37 nos fornecem o seguinte resultado:

Teorema 3.38 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrável com* $I = \int_a^b f$. *Então*

$$\lim_{||P|| \to 0} \sum (f; P^\star) = I.$$

O que o teorema acima nos diz é que, sendo f uma função integrável, para calcular $\int_a^b f$ basta considerar uma partição pontilhada $P^\star$ de $[a, b]$ qualquer tal que a norma da partição P tenda para zero. A soma então montada tenderá para a integral de f em $[a, b]$.

Capítulo 4

Séries

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos a noção de soma infinita, denominada *série numérica*. Iniciemos com a sua definição.

Definição 4.1 Chama-se *série infinita* a soma da forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

dos termos de uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. A série pode ser abreviada usando-se o símbolo de somatório $\sum$. Assim,

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

e a notação $\sum$ deve ser adotada, salvo para séries muito simples.

Na notação

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

a_n chama-se *termo geral da série*.

Nosso objetivo é compreender o significado de tal soma infinita e desenvolver métodos para decidir se uma dada série possui ou não uma soma e, em alguns casos, determinar tal soma.

A cada série infinita $\sum a_n$ está associada a sequência das somas parciais s_n:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Portanto,

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ ...,\ s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n.$$

Definição 4.2 A série infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é dita ser *convergente* se a sequência das somas parciais $(s_n)_n$ for convergente; e *divergente* se a sequência das somas parciais for divergente. Se a série for convergente e a sequência das somas parciais (s_n) convergir para S, então S será chamada a soma da série, e escreve-se

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

desde que o limite exista.

Exemplo: Considere a série $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} + ... + \frac{2^n - 1}{2^n} + ...$ Note que, os termos desta série formam uma sequência convergente, pois $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$, no entanto, não segue a convergência da série.

Neste caso, podemos observar que cada termo da série é pelo menos igual a $\frac{1}{2}$ e, consequentemente

$$s_n \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2} = n \cdot \frac{1}{2}.$$

A sequência s_n é monótona, mas não é limitada, e $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$. Logo, a série é divergente.

De modo geral, devem-se distinguir as noções de série, sequência dos termos de uma série, e a sequência de somas parciais de uma série. A série é simplesmente um outro modo de descrever-se a sequência das somas parciais; os termos da série descrevem as variações entre uma soma parcial e a soma seguinte.

Exemplo. Para atribuirmos significado, por exemplo, para uma expressão do tipo

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} + ...$$

somamos os termos um a um a partir do início e buscamos um padrão para as somas parciais.

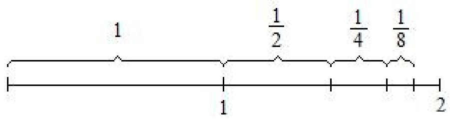
Soma Parcial	Valor	Expressão sugerida para a soma parcial
$s_1 = 1$	1	$2 - 1$
$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$2 - \frac{1}{2}$
$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$	$2 - \frac{1}{4}$
$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$\frac{15}{8}$	$2 - \frac{1}{8}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$	$\dots$	$2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

Realmente existe um padrão. A soma parcial forma uma sequência cujo ene-ésimo termo é

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Esta sequência converge para 2, pois $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)=2$. Assim, dizemos que a soma infinita $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{2^{n-1}}+...$ é igual a 2.

Observe a figura a seguir.



Quando os comprimentos $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, ...$ são adicionados um a um, a soma se aproxima de 2.

Você deve estar se perguntando: Podemos adicionar um número infinito de termos um a um? A resposta é: Claro que não! Contudo, podemos ainda definir sua soma como o limite da sequência de somas parciais quando $n\to+\infty$.

Exemplo: Encontre a soma da série[1] $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Solução. Inicialmente procuramos um padrão na sequência das somas parciais que possa levar a uma fórmula para s_n. Neste caso, a chave é a decomposição em frações parciais.

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Assim, podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$s_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$s_n=1-\frac{1}{n+1}$$

[1] A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ é chamada série telescópica.

Note que, $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Logo, a série converge, e sua soma é 1.

4.2 Série geométrica

Séries geométricas são da forma

$$1 + a + a^2 + a^3 + ... + a^n + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n,$$

onde $a \in \mathbb{R}$.

Se $a = 1$, a n-ésima soma parcial da série geométrica é $s_n = 1 + 1^1 + 1^2 + ... + 1^n = n + 1$ e será divergente, pois $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Se $a = -1$, a série diverge porque a n-ésima soma parcial oscila entre 1 e 0. Se $|a| \neq 1$, podemos determinar a convergência ou a divergência da série da seguinte maneira:

$$s_n = 1 + a \cdot +a^2 + a^3 + ... + a^n$$

Multiplicando por a, obtemos

$$a \cdot s_n = a + a^2 + a^3 + ... + a^n + a^{n+1}$$

Subtraindo a primeira igualdade da segunda, obtemos

$$a \cdot s_n - s_n = a^{n+1} - 1.$$

Logo, como assumimos $|a| \neq 1$, podemos escrever

$$s_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Se $|a| < 1$ segue que $a^{n+1} \to 0$ e daí

$$s_n \to \frac{1}{1-a},$$

ou seja, concluímos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}; \text{ onde } |a| < 1, \text{ i.e., a série converge.}$$

Quando $|a| > 1$ a série será divergente.

4.3 Propriedades das séries

A proposição abaixo estabelece as principais operações entre séries convergentes.

Proposição 4.3 *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *são convergentes com somas* A *e* B *respectivamente, e* k *é uma constante, então*

(i) $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = A + B$

(ii) $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - b_n) = A - B$

(iii) $\sum_{n=1}^{+\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = k \cdot A$

Demonstração. Considere as somas parciais $A_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$, $s_n = (a_1 + b_1) + ... + (a_n + b_n)$, então $s_n = A_n + B_n$. Como A_n converge para A e B_n converge para B, s_n converge para $A + B$. Vale um raciocínio análogo para as séries $\sum(a_n - b_n)$ e $\sum k \cdot a_n$. Isto prova a Proposição. □

Corolário 4.4 (i) *Quando multiplicamos uma série divergente por uma constante diferente de zero, obtemos uma série também divergente.*
(ii) *Se* $\sum a_n$ *converge e* $\sum b_n$ *diverge, então tanto* $\sum(a_n + b_n)$ *como* $\sum(a_n - b_n)$ *divergem.*

Obs.: Lembre-se de que $\sum(a_n + b_n)$, pode convergir quando tanto $\sum a_n$ e $\sum b_n$ divergem. Por exemplo, $\sum a_n = 1 + 1 + 1 + ...$ e $\sum b_n = (-1) + (-1) + (-1) + ...$ divergem, enquanto $\sum(a_n + b_n) = 0 + 0 + 0 + ...$ converge para 0.

Exemplo. Calcule as somas a seguir.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1} - 1}{6^{n-1}}$ (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{2^{n-1}}$

Solução. Note que basta usar a Proposição 4.3 e notar que temos operações com séries geométricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{6^{n-1}} =$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = 2 - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{2^{n-1}} = 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 4 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 8$

Proposição 4.5 *(Critério do Termo Geral) Se não tivermos* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, *então* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *divergirá.*

Demonstração. Fazendo-se S representar a soma da série e $s_n = a_1+a_2+...+a_n$ representar a n-ésima soma parcial, se tomarmos n suficientemente grande, tanto s_n como s_{n-1} estão perto de S, assim a diferença $s_n - s_{n-1} = a_n$, está próxima de zero. Mais formalmente,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = S - S = 0$$

Logo, se a_n não convergir para zero, a série não poderá convergir.

$\square$

Note que esse critério só poderá ser usado para provar divergências. Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, a série $\sum a_n$ poderá divergir ou convergir.

Exemplo. Aplicar o teste do n-ésimo termo para verificar se a sequência diverge.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ diverge, pois $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(-1)^n$ não existe.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2$ diverge, pois $n^2 \to +\infty$, quando $n \to +\infty$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n-1}{4n+5}$ diverge, pois $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{4n+5} = \frac{3}{4} \not\to 0$ quando $n \to +\infty$.

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Note que, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, logo o teste não revela nada. Veremos abaixo que esta série, chamada *harmônica*, diverge.

Proposição 4.6 *Uma série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *de termos não negativos converge se, e somente se, suas somas parciais são limitadas superiormente.*

Demonstração. Suponha que $\sum a_n$ seja convergente, com $a_n \geq 0$, $\forall n$. Vamos mostrar que a sequência (s_n) das somas parciais da série é limitada superiormente. Seja

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

tal que

$$\exists \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = s > 0,$$

pois $a_n \geq 0$, $\forall n$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |s_n - s| < \varepsilon$.
Ou seja, $-\varepsilon < s_n - s < \varepsilon$, donde segue que $s_n < s + \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

Tome $k = \max\{s + \varepsilon, s_1, s_2, ..., s_{n_0}\} > 0$.

Assim, segue que $s_n \leq k$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, encontramos $k > 0$ tal que $s_n \leq k$, $\forall n$, o que mostra que a sequência das somas parciais da série $\sum a_n$ é limitada superiormente por $k > 0$.

Reciprocamente, suponha que a sequência (s_n) das somas parciais de $\sum a_n$ seja limitada superiormente.

Vamos mostrar que $\sum a_n$ converge, onde $a_n \geq 0$, $\forall n$. Por absurdo, suponha que $\sum a_n$ diverge. Isto significa que

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty,$$

ou seja, $\forall M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_n > M$, $\forall n \geq n_0$.

Mas isso contradiz a hipótese de que (s_n) é limitada superiormente. Absurdo!
Portanto, $\sum a_n$ é convergente.

$\square$

Exemplo. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ...$ é chamada *série harmônica*. Esta série é muito importante e, assim como a série geométrica, é muito usada como referência para alguns testes de convergência que veremos adiante. A série harmônica é divergente, mas isto não segue do teste do n-ésimo termo, pois $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Isto ocorre porque não há limitante superior para suas somas parciais.

Podemos agrupar os termos desta série da seguinte forma:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + ... + \frac{1}{16}\right)}_{>\frac{8}{16}=\frac{1}{2}} + ...$$

A soma dos dois primeiros elementos é 1,5. A soma dos dois termos seguintes é $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, que é maior do que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ e assim por diante. A sequência de somas paricias não é limitada superiormente, logo a série harmônica diverge.

Teorema 4.7 *(Critério de Cauchy) Uma série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} an$ *converge se, e somente se,* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $p > n_0$,

$$|\sum_{n=n_0}^{p} a_n| < \varepsilon.$$

Demonstração. Sabemos que a série $\sum a_n$ converge se, e somente se a seqência das somas parciais (s_n) for convergente. Logo, pelo Critério de Cauchy para sequências, temos que $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ converge se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall m, n \geq n_0$, implicar em

$$|s_m - s_n| < \varepsilon.$$

No entanto, escrevendo $n = n_0$ e $m = n_0 + p$, onde $p \geq 1$, segue que

$$|\sum_{n=n_0+1}^{p} a_n| = |a_{n_0+1} + ... + a_{n_0+p}| = |s_{n_0+p} - s_{n_0}| < \varepsilon.$$

□

Definição 4.8 Se uma série $\sum a_n$ for tal que $\sum |a_n|$ é convergente, então a série $\sum a_n$ será chamada *absolutamente convergente.*

Teorema 4.9 *(Teorema da Convergência Absoluta) Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *convergir, então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *convergirá, ou seja, toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Pela desigualdade triangular dos módulos temos

$$|a_{n+1} + a_{n+2} ... + a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_m|$$

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ convergir, então a soma no segundo membro será menor que ε, para um $\varepsilon > 0$ dado, quando $n \geq N$, para um N escolhido de forma conveniente, logo a soma no primeiro membro será menor do que ε para $n \geq N$, e a série a_n convergirá.

□

Exemplo. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ...$ é convergente, pois a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$ converge.

Podemos interpretar este teorema como afirmando que a introdução de sinais negativos para diversos termos de uma série convergente de termos positivos tende a ajudar a convergência.

Definição 4.10 Uma série $\sum a_n$ que converge, mas que não é absolutamente convergente, é chamada *condicionalmente convergente.*

4.4 Testes de convergência

Dada uma série $\sum a_n$, vamos estudar Teoremas que nos ajudarão a decidir sua convergência ou divergência. Primeiramente vamos estudar séries que não possuem termos negativos. A razão para essa restrição consiste no fato de que as somas parciais dessas séries formam sequências crescentes, e sequências crescentes limitadas superiormente sempre convergem. Para mostrar que uma série sem termos negativos converge, precisamos simplesmente mostrar que suas somas parciais são limitadas superiormente.

4.4.1 Teste da comparação

Teorema 4.11 *Sendo $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos não-negativos,*

(i) se $\sum b_n$ for convergente e $a_n \leq b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será convergente.

(ii) se $\sum b_n$ for divergente e $a_n \geq b_n$ para todo n, então $\sum a_n$ também será divergente.

Demonstração. Faremos apenas a demonstração de (i) e deixaremos (ii) para o leitor. Seja $\sum b_n$ uma série convergente e $a_n \leq b_n$, $\forall n$. Vamos mostrar que a série $\sum a_n$ também é convergente.

De fato, sejam (B_n) a sequência das somas parciais da série $\sum b_n$ e (A_n) a sequência das somas parciais da série $\sum a_n$.

Como $\sum b_n$ converge segue que

$$\exists\, B = \lim_{n\to+\infty} B_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

Como $a_n \leq b_n$, $\forall n$, temos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k,$$

ou seja,

$$A_n \leq B_n, \forall n.$$

Porém, $\exists \lim_{n\to+\infty} B_n = B$, ou seja, (A_n) é uma sequência limitada e ainda crescente, pois é uma sequência de somas de termos não negativos.
Portanto, (A_n) é convergente, ou seja,

$$\exists\, A = \lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n,$$

o que mostra que a série $\sum a_n$ também é convergente.

$\square$

Exemplo: Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{5n-1}$ converge ou diverge.

Solução. Precisamos encontrar uma maneira de comparar o termo geral da série dada com o termo geral de uma outra série na qual sabemos ser convergente ou divergente. Observe que, $\forall n \in \mathbb{N}$ temos $5n-1 < 5n$. Tomando os inversos, temos

$$\frac{1}{5n-1} > \frac{1}{5n}.$$

Multiplicando esta última desigualdade por 5, obtemos

$$\frac{5}{5n-1} > \frac{5}{5n} = \frac{1}{n}.$$

Como a série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmônica) e vale a desigualdade acima $\forall n$, pelo teorema acima, o item (ii) nos diz que divergência da série de termo geral menor implica em divergência da série com termo maior, ou seja, concluímos que a série dada é divergente.

4.4.2 Teste da comparação do limite

Teorema 4.12 *Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos, se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0,$$

então ambas as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem ou divergem.

Demonstração. Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ nas hipóteses do teorema.
Considere $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$. Assim, dado $\varepsilon = c > 0$, segue que $\exists\, n_0 > 0$ tal

que $\forall n \geq n_0$, implica que $|\frac{a_n}{b_n} - c| < c$. Ou seja, para qualquer $n \geq n_0$ temos

$$0 < \frac{a_n}{b_n} < c + c \Rightarrow 0 < a_n < 2cb_n.$$

Portanto, de acordo com o teste de comparação visto anteriormente, a convergência da série $\sum b_n$ e, consequentemente, a convergência da série $2c\sum b_n$, implica na convergência da série $\sum a_n$ e divergência da série $\sum a_n$ implica na divergência da série $\sum b_n$.

□

Exemplo. Determine se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ converge ou diverge.

Solução. Consideremos a série geométrica $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$, que é convergente. Assim, considerando $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ e $b_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$, temos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n - 1}} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = 1 > 0.$$

Portanto, pelo teorema acima, sendo $\sum a_n$ convergente, concluímos que $\sum b_n$ também é convergente.

4.4.3 Teste da razão

Teorema 4.13 *Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos e suponha que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$$

Então,

(i) a série converge se $c < 1$.

(ii) a série diverge se $c > 1$ ou se c for infinito.

(iii) o teste é inconclusivo se $c = 1$.

Demonstração. Faremos apenas a demonstração de (i).
Suponhamos que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1$.
Tome $\varepsilon > 0$ tal que $c+\varepsilon < 1$. Então, pelo limite acima segue que $\exists n_0 > 0$ tal que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - c\right| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, ou seja,

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < c+\varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Assim, fixando $n \geq n_0$ podemos escrever

$$0 < \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < c+\varepsilon,$$

$$0 < \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < c+\varepsilon,$$

$$0 < \frac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}} < c+\varepsilon,$$

$$\vdots$$

$$0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < c+\varepsilon$$

Multiplicando todas estas desigualdades obtemos

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} < (c+\varepsilon)^{n-n_0}, \ \forall n \geq n_0.$$

Ou seja,

$$0 < a_n < \frac{a_{n_0}}{(c+\varepsilon)^{n_0}} \cdot (c+\varepsilon)^n, \ \forall n \geq n_0.$$

Como a série $\dfrac{a_{n_0}}{(c+\varepsilon)^{n_0}} \sum (c+\varepsilon)^n$ é uma série geométrica de razão $c+\varepsilon < 1$, esta série é convergente e, portanto, pelo critério de comparação segue que a série $\sum a_n$ é convergente.

$\square$

Exemplo. Investigue a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$.

Solução. Basta montar a razão entre termos consecutivos. Assim,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}}{\dfrac{2^n+5}{3^n}} = \frac{2^{n+1}+5}{3^n(2^n+5)} = \frac{2\cdot 2^n + 2\cdot 5 - 5}{3^n(2^n+5)} =$$

$$= \frac{2(2^n+5)}{3^n(2^n+5)} - \frac{5}{3^n(2_n+5)} = \frac{2}{3^n} - \frac{5}{3^n(2^n+5)} \longrightarrow 0$$

quando $n \to +\infty$.
Portanto, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1,$$

e então a série dada é convergente.

4.4.4 Teste da raiz

Teorema 4.14 *Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos e suponha que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$$

Então,

(i) a série converge se $c < 1$.

(ii) a série diverge se $c > 1$ ou se c é infinita.

(iii) o teste é inconclusivo se $c = 1$.

Demonstração. Faremos a demonstração de (i).
Seja $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = c < 1$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ tal que $c + \varepsilon < 1$ (por exemplo, podemos considerar $\varepsilon = \frac{1-c}{2} > 0$), $\exists\, n_0 > 0$ tal que $\forall n \geq n_0$, temos $|\sqrt[n]{a_n} - c| < \varepsilon$, ou seja,

$$0 < \sqrt[n]{a_n} < c + \varepsilon, \;\; \forall n \geq n_0.$$

Elevando esta desigualdade à potência n temos

$$0 < a_n < (c+\varepsilon)^n.$$

Como $c + \varepsilon < 1$ temos que a série geométrica $\sum (c+\varepsilon)^n$ é convergente e, pelo critério de comparação, concluímos que a série $\sum a_n$ também é convergente.

$\square$

Exemplo. Teste a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

Solução. Aplicando o teste da raiz temos

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n} = \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}}.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3} < 1,$$

o que mostra que a série dada é convergente.

4.5 Série alternada

Definição 4.15 Uma série *alternada* é aquela cujos termos são alternadamente positivos e negativos.

São exemplos de séries alternadas

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1} = -\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\ldots$$

4.5.1 Teste da série alternada

Teorema 4.16 *(Teste de Leibniz) Se a série alternada*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n = b_1-b_2+b_3-b_4+\ldots,$$

com $b_n > 0$, satisfizer

(i) $b_{n+1} \leq b_n$*, para todo* n *(i.e., a sequência* b_n *é decrescente),*

(ii) $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$,

então a série é convergente.

Demonstração. Como (b_n) é uma sequência decrescente (por (i)), segue que

$$b_1 > b_2 > b_3 > ...$$

Consideremos as somas parciais

- $s_1 = b_1$;
- $s_2 = b_1 - b_2 < b_1 = s_1 \Rightarrow s_2 < s_1$;
- $s_3 = b_1 - b_2 + b_3 = s_2 + b_3 > s_2 \Rightarrow s_2 < s_3$;

Ainda, $s_3 = b_1 + (-b_2 + b_3)$. Como (b_n) é uma sequência decrescente, temos que $b_3 < b_2$ e então $-b_2 + b_3 < 0$. Assim,

$$s_3 = b_1 + (-b_2 + b_3) < b_1 = s_1,$$

ou seja,

$$s_1 > s_3.$$

Da mesma forma, como $b_3 > b_4$, pois (b_n) é decrescente, temos $b_3 - b_4 > 0$ e então

$$s_4 = s_2 + (b_3 - b_4) > s_2 \Rightarrow s_4 > s_2.$$

Ainda,

$$s_5 = s_3 - b_4 + b_5 < s_5 \ \text{ e } \ s_6 = s_4 + (b_5 - b_6) > s_4.$$

Seguindo estes raciocínios montamos duas sequências de somas parciais: as pares (s_{2n}) e as ímpares (s_{2n-1}), onde temos que

$$s_2 < s_4 < s_6 < ... < s_5 < s_3 < s_1.$$

Pela cadeia de desigualdadas montada acima, temos que (s_{2n}) é uma sequência crescente e limitada superiormente por s_1. Portanto,

$$\exists L_1 = \lim_{n \to \infty} s_{2n}.$$

Da mesma forma, sendo (s_{2n-1}) decrescente e limitada inferiormente por s_2, segue que

$$\exists L_2 = \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}.$$

Portanto,

$$L_2 \leq L_1,$$

pelas desigualdades acima.

Afirmamos que $L_2 = L_1$.

De fato, se $L_2 < L_1$, então, tome $\varepsilon = \frac{L_1 - L_2}{2} > 0$. Assim, sendo $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $\forall n \geq n_0$, implica em $|b_n| < \frac{L_1 - L_2}{2}$.

Como $b_n = s_n - s_{n-1}$, tomando, em particular, $n = 2k$, $n \geq n_0$, temos

$$|s_{2k} - s_{2k-1}| < \frac{L_1 - L_2}{2} \Leftrightarrow \frac{L_2 - L_1}{2} < s_{2k} - s_{2k-1} < \frac{L_1 - L_2}{2}.$$

Como $s_{2k} \to L_2$ e $s_{2k-1} \to L_1$, temos, olhando a esquerda da cadeia de desigualdades acima, que

$$\frac{L_2 - L_1}{2} < L_2 - L_1 \Rightarrow L_1 < L_2.$$

Mas supomos $L_2 < L_1$. Absurdo! Portanto, $L_2 = L_1$.

Assim, com as hipóteses do teorema, concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = \lim_{n\to\infty} s_n = L_1 = L_2,$$

isto é, a série converge.

$\square$

Exemplo. A série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ é convergente, pois as duas condições do teste da série alternada são satisfeitas:

(i) $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad b_{n+1} < b_n$

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

4.5.2 Testes da razão e da raiz para séries alternadas

Podemos extender as Proposições 4.13 e 4.14 para séries alternadas como segue. Não faremos as demonstrações para não nos tornarmos repetitivos.

Proposição 4.17 *Seja* $\sum a_n$ *uma série alternada, tal que*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = c.$$

Então, se $c < 1$ *a série converge absolutamente, se* $c > 1$ *a série diverge e se* $c = 1$ *o teste é inconclusivo.*

Proposição 4.18 *Seja* $\sum a_n$ *uma série alternada, tal que*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = c.$$

Então, se $c < 1$ *a série converge absolutamente, se* $c > 1$ *a série diverge e se* $c = 1$ *o teste é inconclusivo.*

Vejamos um exemplo de aplicação.

Exemplo. Estude a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{10^n}$.

Solução. Usando o teste da razão temos

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\cdot\frac{10^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{10^n} = +\infty > 1$$

Portanto, concluímos que a série dada diverge.

Capítulo 5

Sequências de funções

No curso de Análise Real I foi feito um estudo aprofundado sobre sequências numéricas. Normalmente uma sequência numérica $(x_n)_n$ é definida como uma lista infinita de números reais

$$(x_n)_n = (x_1, x_2, x_3, ...),$$

onde os $x_i \in \mathbb{R}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Outra maneira equivalente de definir uma sequência é considerá-la como uma função de variaável natural $x_n = x(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a qual, para cada $n \in \mathbb{N}$ associa uma imagem x_n, e o conjunto imagem, ordenadamente, $x_1, x_2, ...$, define a sequência (x_n).

Uma questão importante (a mais importante, na verdade) do estudo de sequências numéricas é investigar se uma dada sequência $(x_n)_n$ converge para um valor a, ou seja, se tal sequência numérica possui um limite.

Neste capítulo vamos considerar uma teoria análoga àquela estudada para limites de sequências numéricas aplicada em um tipo especial de sequência, onde os termos são funções ao invés de números reais, ou seja, vamos estudar *sequências de funções* $(f_n)_n = (f_1, f_2, f_3, ...)$.

5.1 Conceito

Definição 5.1 Seja X um conjunto de números reais. Definimos por *sequência de funções* $f_n : X \to \mathbb{R}$ como a correspondência que associa para cada $n \in \mathbb{N}$ uma função f_n de X em $\mathbb{R}$.

Vamos examinar um exemplo. Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, a sequência

$$f_n : [0, 10] \to \mathbb{R}$$

por

$$f_n(x) = \frac{x}{n}.$$

Neste caso, temos

$$f_1 : [0, 10] \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x;$$
$$f_2 : [0, 10] \to \mathbb{R},\ f_2(x) = \frac{x}{2};$$
$$f_3 : [0, 10] \to \mathbb{R},\ f_3(x) = \frac{x}{3};$$

e assim por diante. Faça um esboço gráfico dos primeiros termos dessa sequência de funções (f_n). Considere $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 0$. Podemos observar que à medida em que n aumenta, o gráfico de f_n vai se aproximando cada vez mais do gráfico de f. É nesse sentido que se estuda convergência de sequência de funções. Existem dois tipos importantes de convergência: a *convergência simples* e a *convergência uniforme*, como veremos na próxima seção.

5.2 Convergência simples e uniforme

Definição 5.2 Seja $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Dada uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ e dada $f : X \to \mathbb{R}$, dizemos que:

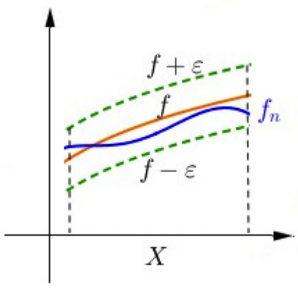
(1) f_n converge para f *simplesmente*, e escrevemos $f_n \to f$ se, para todo $x \in X$ fixado, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.

(2) f_n converge para f *uniformemente*, e escrevemos $f_n \rightrightarrows f$, se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall x \in X$, $\forall n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Em outras palavras, a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge simplesmente a f quando, para cada $x \in X$ fixado, a sequência de números reais $(f_n(x)) = (f_1(x), f_2(x), ...)$ converge para o número $f(x)$. Ou seja, para todo $x \in X$ fixado,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Já a convergência uniforme é mais forte: dado $\varepsilon > 0$, existe um índice n_0 tal que, a partir desse índice, os gráficos de todas as f_n estarão próximos do gráfico de f a menos de ε. Ou seja, conseguimos obter um n_0 que sirva para todos os $x \in X$. Observe o desenho abaixo, onde, temos o gráfico de f e os gráficos dos translados $f + \varepsilon$ e $f - \varepsilon$, onde, no interior temos uma *faixa de raio* ε, na qual os gráficos de f_n ficam no interior, para todo $n \geq n_0$, devido à convergência ser uniforme.



Para deixar esses conceitos de convergência mais claros, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1. Considere a sequência de funções $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$ e $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \text{ se } x = 1 \end{cases}.$$

É fácil ver que $f_n \to f$ simplesmente. De fato, para todo $x \in [0, 1)$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0,$$

e
$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1.$$

Porém, afirmamos que f_n não converge para f uniformemente, i.e., $f_n \not\rightrightarrows f$.

De fato, se por exemplo tomarmos $\varepsilon = \frac{1}{4}$, construindo a faixa de raio $\varepsilon = \frac{1}{4}$ em torno do gráfico de f, veremos f_n não fica contida em tal faixa, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Faça um desenho para verificar.

Exemplo 2. Considere a sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}.$$

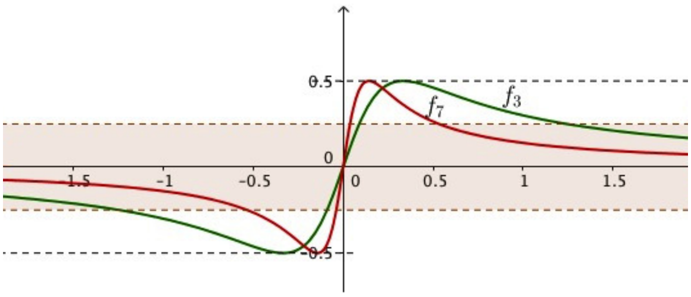
Afirmamos que f_n converge simplesmente para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \equiv 0$.

De fato, basta observar que para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, temos que
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1 + n^2x^2} = 0 = f(x).$$

No entanto, afirmamos que tal convergência não é uniforme. De fato, a derivada de f_n será
$$f_n'(x) = \frac{(1 + n^2x^2)n - nx \cdot 2n^2x}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{n(1 - n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)}.$$

Logo, os pontos críticos de f são onde $f_n'(0) = 0$, o que nos fornecem $x = \pm\frac{1}{n}$, e daí $f_n(\frac{1}{n}) = \pm\frac{1}{2}$.

Então, qualquer faixa de raio menor do que $\frac{1}{2}$ construída para $f(x) \equiv 0$, teremos que os gráficos das f_n não ficarão inteiramente contidos em tal faixa, e então $f_n \not\rightrightarrows f$. Veja a figura abaixo, onde desenhamos, para ilustrar, os gráficos de $f_3(x)$ e $f_7(x)$ e uma faixa de raio $\frac{1}{4}$ centrada em $f(x) \equiv 0$.



Sejamos mais precisos no que diz respeito à convergência simples neste exemplo: para todo $x \in \mathbb{R}$, vamos mostrar que $f_n \to f \equiv 0$. Dado $\varepsilon > 0$, temos que

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \frac{n|x|}{1 + n^2x^2} \leq \frac{n|x|}{n^2x^2} = \frac{1}{n|x|}.$$

Assim, precisamos escolher um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 > \frac{1}{\varepsilon|x|}, \tag{5.1}$$

e assim, para todo $n \geq n_0$, teremos

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{n_0|x|} < \frac{\varepsilon|x|}{|x|} = \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_0$, e portanto $f_n \to f \equiv 0$ simplesmente.

Observação. Observe neste exemplo que a desigualdade (5.1) nos diz que se x for muito pequeno, então o n_0 terá de ser muito grande. Logo, a convergência não pode ser uniforme, pois o índice n_0 fica dependendo do x.

No que segue, apresentamos um importante resultado para investigar se uma convergência é uniforme. Antes, porém, precisamos definir sequência de Cauchy para sequência de funções.

Definição 5.3 Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ chama-se *sequência de Cauchy* se, para todo $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todos $m, n \geq n_0$, implicar em $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in X$.

Isso posto, enunciamos:

Teorema 5.4 *Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uniformenente convergente se, e somente se, for uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Suponha que $f_n \rightrightarrows f$. Seja $\varepsilon > 0$. Pela Definição de convergência uniforme, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in X$.

Logo, para $m, n \geq n_0$ vale:

$$|f_m(x) - f_n(x)| = |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \leq$$

$$\leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para todo $x \in X$. Ou seja, (f_n) é de Cauchy.

Reciprocamente, suponha que (f_n) é de Cauchy. Então, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$, $\forall m, n \geq n_0$.

Vamos definir uma função $f : X \to \mathbb{R}$ do seguinte modo: fixado $x_0 \in X$, a sequência de números reais $(f_n(x_0))_n$ é de Cauchy, e portanto converge para um limite $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Defina $f(x_0) = y_0$, e isso para cada x_0 fixado. Isso define $f : X \to \mathbb{R}$.

Vamos mostrar que $f_n \rightrightarrows f$.

Dado $\varepsilon > 0$, temos que $\exists n_0$ tal que $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall m, n \geq n_0$, $\forall x \in X$. Com $x \in X$ e $n \geq n_0$ fixados, a desigualdade acima vale $\forall m \geq n_0$. Fazendo $m \to \infty$, vamos obter

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

e isso para todo $n \geq n_0$ e para todo $x \in X$, provando que $f_n \rightrightarrows f$.

$\square$

Outro resultado importante é o descrito abaixo:

Proposição 5.5 *Sejam f_n e $f : X \to \mathbb{R}$. Então, f_n converge para f uniformemente se, e somente se,*

$$d_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

Demonstração. Suponha que $f_n \to f$ uniformemente. Vamos mostrar que $d_n \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$. Como $f_n \to f$ uniformemente, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x \in X$, $\forall n \geq n_0$.

Fixando $n \geq n_0$, vale $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall x \in X$. Portanto,

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

isto é, $d_n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, ou seja, $d_n \to 0$.

Reciprocamente, suponha que $d_n \to 0$. Então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tal que $d_n < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Assim, pela definição de supremo segue que para todo $x \in X$ e para todo $n \geq n_0$, tem-se que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq d_n < \varepsilon,$$

o que prova que $f_n \to f$ uniformemente.

□

Vejamos um exempo de aplicação. Considere $f_n : (0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = nxe^{-nx}$.

Considerando a função $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) \equiv 0$, afirmamos que f_n converge para f simplesmente. De fato, basta notar que

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{nx}{e^{nx}} = 0.$$

Vejamos se a convergência é uniforme. A derivada de f_n será

$$f_n'(x) = \frac{ne^{nx} - nxne^{nx}}{e^{2nx}} = \frac{n(1 - nx)}{e^{nx}}.$$

Assim, os pontos críticos são quando $f_n'(x) = 0$, o que corresponde em verificar onde $1 - nx = 0$, ou seja, $x = \frac{1}{n}$. Então,

- se $x < \frac{1}{n}$, então $f_n'(x) = \frac{n(1-nx)}{e^{nx}} < 0$;
- se $x > \frac{1}{n}$, então $f_n'(x) = \frac{n(1-nx)}{e^{nx}} > 0$.

Portanto, segue que $x = \frac{1}{n}$ é um ponto de máximo para as f_n. Usando a Proposição 5.5, temos

$$d_n = \sup_{x \in (0,1]} |nxe^{-nx} - 0| = \max_{x \in (0,1]} \frac{nx}{e^{nx}} = \left.\frac{nx}{e^{nx}}\right|_{x=\frac{1}{n}} = \frac{1}{e} \not\to 0,$$

e então segue que a sequência (f_n) não converge uniformemente.

Índice Remissivo