Universidade Federal de Pelotas
Cursos de Licenciatura em Física e Bacharelado em Física
Disciplina de Cálculo 1
Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 1 de Exercícios

1. Dados o conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e\}$, e os conjuntos $A = \{a, b, d\}$ e $B = \{b, d, e\}$, calcule:

   (a) $A \cup B$ (b) $B \cap A$ (c) $B \setminus A$ (d) $A^{\complement} \cap B$ (e) $B^{\complement} \setminus A^{\complement}$ (f) $(A \cup B)^{\complement}$

2. Efetue as operações com intervalos indicadas em cada item abaixo.

   (a) $(1, 3) \cup [3, 4]$ (b) $(2, 5] \cap (-\infty, 3)$ (c) $(-1, 3] \setminus [3, 4)$
   (d) $[1, 4)^{\complement} \cup (2, +\infty)$ (e) $[-1, 1] \cap [0, 2)^{\complement}$ (f) $([3, 4] \setminus (-\infty, 3]^{\complement})^{\complement}$

3. Dados os intervalos $A = [-3, 2]$, $B = (-1, 6)$ e $C = (-\infty, -1)$, obtenha o resultado de cada operação abaixo:

   (a) $A \cup B$ (b) $A \setminus B$ (c) $A \cup C$ (d) $A \setminus C$ (e) $B \setminus A$ (f) $B^{\complement} \setminus (B \cap C)$

4. Prove cada afirmação a seguir caso seja verdadeira, ou exiba um contra-exemplo caso seja falsa:

   (a) A soma de dois números racionais é sempre racional.
   (b) A soma de dois números irracionais é sempre irracional.

5. Mostre que $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$.

6. Provar que $\sqrt{3}$ é irracional.

7. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Prove que se para todo $\varepsilon > 0$ tivermos $a < b + \varepsilon$, então $a \leq b$.

8. Dados a, b, ε no corpo dos reais, onde $\varepsilon > 0$, mostre que

$$|a - b| < \varepsilon \Rightarrow |b| - \varepsilon < |a| < |b| + \varepsilon.$$

9. Mostre que no corpo dos reais vale a desigualdade:

$$|xy - ab| \leq |x||y - b| + |b||x - a|.$$

10. Dados a, b, ε no corpo dos reais, onde $\varepsilon > 0$, mostre que

$$|a - b| < \varepsilon \Rightarrow |b| - \varepsilon < |a| < |b| + \varepsilon.$$

11. Mostre que no corpo dos reais valem as desigualdades:

    (a) $|xy - ab| \leq |x||y - b| + |b||x - a|$
    (b) $|xy - ab| \leq (|x - a| + |a|)|y - b| + |b||x - a|$

12. Encontre os valores de $x \in \mathbb{R}$ que verificam cada desigualdade abaixo.

    (a) $5x + 2 > x - 6$ (b) $3x - 5 < \frac{3}{4}x + \frac{1 - x}{3}$ (c) $2 \leq 5 - 3x \leq 11$
    (d) $\frac{2}{1 - x} \leq 1$ (e) $\frac{1}{3x - 7} \geq \frac{4}{3 - 2x}$ (f) $|2x - 4| \leq 2$
    (g) $\left|\frac{2 - x}{3x - 1}\right| \leq \frac{2}{3}$ (h) $\left|\frac{1}{x - 2} - \frac{x}{3}\right| \leq 1$ (i) $\left|\frac{2x - 4}{2 - 3x}\right| \leq \frac{1}{4}$

13. As funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(x) = x$ são iguais? Justifique.

14. As funções f e g cujas lei são

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

são iguais? Justifique.

15. Determine o domínio de cada função $f : A \to \mathbb{R}$ apresentada abaixo.

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-4x}} + \dfrac{1+\sqrt{x}}{x-2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1} - \dfrac{\sqrt{3-x}}{(x-1)(x+3)}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x - \dfrac{1}{x - \dfrac{1}{x-1}}}$

(e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x-6}{1-4x}}$

(f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x-2}} - \dfrac{\sqrt[3]{x-4}}{\sqrt{x}}$

16. Sejam $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, $g : \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{2}\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dadas respectivamente por

$$f(x) = -\frac{1+x}{2}; \quad g(x) = 2x - 5 \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{1}{x}.$$

Justifique por que é possível montar a composição $u = f \circ h \circ g$. Em seguida, determine a função $u : A \to B$ exibindo quem é o domínio A e quem é o contradomínio B.

17. Escoçar o gráfico de cada função abaixo, indicando o domínio e a imagem:

(a) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$

(b) $f(x) = |2x-2| + |x+3|$

18. Sejam f e g funções reais (i.e., $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) definidas pelas leis

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4, & \text{se } x \geq 1 \\ 3x + 4, & \text{se } x < 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = x - 3$$

Determine a lei que define $f \circ g$.

19. Sendo as funções $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ dada por $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$ e $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dada por $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$. Determine $g \circ f$ e $f \circ g$. O que se conclui do resultado obtido?

20. Dadas as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 2x + 5$, determine a função inversa de $g \circ f$.

21. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ dada por $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

(a) Obtenha o domínio de f e seus zeros, se houverem.

(b) Encontre os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $|f(x)| \leq \dfrac{2}{3}$.

(c) Mostre que f é inversível e calcule sua inversa f^{-1}.

(d) Seja g a função cuja lei é dada por $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Obtenha o domínio desta função e comente porque é possível compor $g \circ f$. Em seguida, obtenha $g \circ f$.

22. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ dada por $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

    (a) Obtenha os zeros de f, se houverem.

    (b) Encontre os valores reais de x para os quais $|f(x)| \leq \frac{2}{3}$.

    (c) Mostre que f é inversível e calcule a sua inversa.

23. Esboçar os gráficos de $f(x) = x|x|$, $g(x) = x - |x|$, $h(x) = (x-1)|x+1|$ e $i(x) = 1 + |x - |x||$, indicando seus respectivos domínio e imagem.

24. Represente geometricamente a região do plano cartesiano onde $g(x) > 0$ e $i(x) \leq 0$, sendo g e i as funções dadas no exercício anterior.

25. A equação para o decaimento do gás radônio 222 é $y = y_0 e^{-0,18t}$, sendo t expresso em dias. Quanto tempo será necessário para que o radônio presente em uma atmosfera de ar (em recipiente hermético) decaia 90% de sua quantidade inicial?

26. Uma pessoa deposita uma quantia em um banco que remunera à taxa de 1% ao mês. Em quantos meses a quantia depositada dobrará?

27. Estima-se que a população de uma cidade cresça 2% a cada 5 anos.

    (a) Qual é o crescimento estimado para um período de 20 anos?

    (b) E em um período de t anos?

28. As bactérias em um recipiente se reproduzem de forma tal que o aumento do seu número em um intervalo de tempo de comprimento fixo é proporcional ao número de bactérias presentes no início do intervalo. Suponhamos que, inicialmente, haja 1000 bactérias no recipiente e que, após 1 hora, este número tenha aumentado para 1500. Quantas bactérias haverá cinco horas após o início do experimento?

29. Qual é a *meia vida*[1] de um material radioativo que sofre desintegração de 20% de sua massa em um período de 1 ano?

30. A meia vida de certa substância radioativa é 12 horas. Inicialmente há 8 gramas da substância radioativa.

    (a) Expresse a quantidade remanescente da substância em função do tempo t.

    (b) Em quanto tempo restará apenas 1 grama de material contendo o elemento radioativo?

31. Em uma caverna da França, famosa pelas pinturas feitas por homens pré-históricos, foram encontrados pedaços de carvão vegetal, nos quais a radioatividade de C^{14} era $0,145$ vezes a radioatividade num pedaço de carvão feito hoje. Calcule a idade do carvão e dê uma estimativa para a época em que as pinturas foram feitas (Obs.: A meia vida do C^{14} é 5730 anos).

32. Um quadro de Vermeer (1632-1675) ainda contém 99,5% de seu carbono-14 (meia vida de 5730 anos). A partir dessa informação, você pode determinar se o quadro é ou não falsificado? Justifique.

33. Um reator converte urânio 238, estável, no isótopo plutônio 239. O decaimento deste isótopo é dado por $A(t) = A_0 e^{-0,00002876t}$, onde $A(t)$ é a quantia do isótopo no instante t, em anos, e A_0 é a quantia original.

    (a) Se $A_0 = 500$, quanto restará após um período de vida humana? (use $t = 70$ anos)

    (b) Encontre a meia-vida dete isótopo.

[1] Nos processos radioativos, meia-vida ou período de semidesintegração de um radioisótopo é o tempo necessário para desintegrar a metade da massa deste isótopo, que pode ocorrer em segundos ou em bilhões de anos, dependendo do grau de instabilidade do radioisótopo. Ou seja, se tivermos 100kg de um material, cuja meia-vida é de 100 anos, depois desses 100 anos, teremos 50kg deste material. Mais 100 anos e teremos 25kg e, assim, sucessivamente.

34. Um medicamento é ministrado por via intravenosa para aliviar a dor. A função $f(t) = 90 - 52\ln(1+t)$, $0 \leq t \leq 4$, dá o número de unidades do medicamento remanescentes no corpo depois de t horas.

    (a) Qual foi a quantidade inicial ministrada em termos de unidades do medicamento?

    (b) Quantas unidades estarão presentes depois de duas horas?

    (c) Desenhe o gráfico de f.

35. As indicações R_1 e R_2, na *escala Richter*, de dois terremotos estão indicados pela fórmula

$$R_1 - R_2 = \log \frac{E_1}{E_2},$$

onde E_1 e E_2 medem a energia liberada pelos terremotos sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre.

A tabela abaixo mostra algumas medidas, onde alguns dados estão faltando. Complete a tabela, de acordo com as definições dadas e seus conhecimentos.

R_1	R_2	E_1	E_2
8	6	10	
5	7		13
	9	2	20
7	7	10	10

36. Esboçar o gráfico de cada função cuja lei é dada em cada item a seguir, indicando domínio e imagem.

    (a) $f(x) = 1 + 2^{x-1}$ (b) $f(x) = |1 - 2^{x-1}|$

    (c) $f(x) = \log_2(x-3)$ (d) $f(x) = 1 - 2\log_2(1-x)$

    (e) $f(x) = |1 - \log_{\frac{1}{2}}(x+2)|$ (f) $f(x) = 1 + \ln(x-2)$

37. Sejam f e g as funções dadas por

$$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1],\ f(x) = \sin x \quad \text{e} \quad g : [-1,1] \to [1,2],\ g(x) = x^2 + 1.$$

Determine $g \circ f$. Esta função é inversível? Justifique.

38. Esboçar o gráfico de cada função abaixo, indicando domínio, imagem e período.

    a) $f(x) = 1 + 2\sin\left(2x - \frac{5\pi}{3}\right)$ d) $f(x) = \csc\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$

    b) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ e) $f(x) = |1 - 2\cos x|$

    c) $f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ f) $f(x) = 1 - 2\sec\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

39. Sejam as funções $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ e $g : (0, \frac{\pi}{2}) \to (0, +\infty)$ dadas respectivamente por

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{e^x}}$$

$$g(x) = 2\ln\csc x$$

Construa o gráfico de $h = f \circ g$, indicando domínio e imagem. h é periódica? h é bijetiva?

40. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 2x - \frac{4\pi}{3}$ e $g(x) = 1 + 2\text{sen}\, x$. Esboçar o gráfico de $g \circ f$, indicando domínio e imagem.