Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise II - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 03 de Exercícios - Fórmula de Taylor

1. Seja $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{2n} \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}.$$

   Mostre que f_n é n vezes derivável, mas que sua ene-ésima derivada não é contínua no ponto $x = 0$, logo, $f \notin C^n$.

2. Use a igualdade
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + ... + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$
   e a Fórmula de Taylor infinitesimal para calcular as derivadas sucessivas, no ponto $x = 0$, da função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par, i.e., $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que na expressão da fórmula de Taylor em torno de 0 não aparecem as derivadas ímpares em 0. Enuncie e demonstre um resultado análogo para funções ímpares, i.e., tais que $f(x) = -f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

4. Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas vezes deriváveis no ponto $a \in I$. Se $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$ e $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in I$, prove que $f''(a) \geq g''(a)$.

5. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável em $a \in I$. Prove que
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a).$$

6. Utilize a Fórmula de Taylor infinitesimal para provar a seguinte versão da regra de L'Hôpital: *Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções n vezes deriváveis no ponto $a \in I$, com derivadas nulas neste ponto até a ordem $n-1$. Se $g^{(n)}(a) \neq 0$, então*
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

7. **(Sel. Mestr. UFRGS 2010/1)** Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável.
   (a) Se f é não decrescente, prove que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$.
   (b) Suponha que $f(x) < f(y)$ para todos $x, y \in (a, b)$ tais que $x > y$. Podemos afirmar que a derivada de f é estritamente menor que zero em todos os pontos de (a, b)?
   (c) Suponha agora que f é duas vezes diferenciável em (a, b), e que a derivada de segunda ordem de f é estritamente positiva. Prove que f pode ter no máximo um ponto de mínimo local.

8. Seja $f \in C^{n+1}$ em uma vizinhança do ponto a, e considere a Fórmula de Taylor com resto de Lagrange:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + ... + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + \frac{f^n(a+\theta h)}{n!}h^n, \text{ com } 0 < \theta < 1.$$

Prove que se $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, então $\theta \to \frac{1}{n+1}$ quando $h \to 0$. Sugestão: compare com a Fórmula de Taylor infinitesimal.

9. Considere uma função f onde a derivada segunda $f''(x)$ existe e é contínua em $[0,1]$. Assuma que $f(0) = f(1) = 0$ e suponha que existe $K > 0$ tal que $|f''(x)| \leq K$, para todo $x \in [0,1]$. Mostre que

$$\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{K}{4} \text{ e } |f'(x)| \leq \frac{K}{2}.$$

10. Suponha $f \in C^2(0,\infty)$ e escreva

$$M_j = \sup_{x\in(0,\infty)} |f^{(j)}(x)|,$$

onde $j = 0, 1, 2$.

   (a) Use a Fórmula de Taylor em torno de qualquer x fixado para mostrar que para todo $h \in (0,\infty)$, tem-se

$$|f'(x)| \leq h \cdot M_2 + \frac{M_0}{h}.$$

   (b) Encontre o valor de h que minimiza a parte direita da desigualdade acima. Em seguida, conclua que

$$M_1^2 \leq 4 \cdot M_0 \cdot M_2.$$

11. Seja $\mathcal{F}$ a coleção de todas as funções duas vezes continuamente deriváveis em $\mathbb{R}$ satisfazendo $f \geq 0$ em $\mathbb{R}$ e $f''(x) \leq 1$ em $\mathbb{R}$. Encontre uma constante $C \in (0,\infty)$ tal que para cada $f \in \mathcal{F}$ e para cada $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$f'(x)^2 \leq C \cdot f(x).$$