Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise II - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 02 de Exercícios

1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a, b). Suponha que $f(a) = f(b) = 0$. Então, dado um $k \in \mathbb{R}$, mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = k \cdot f(c)$.
Sugestão. Tome $p(x) = f(x) \cdot e^{-kx}$ a aplique o Teorema de Rolle.

2. Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que
$$\left| \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} \right| \leq |\beta - \alpha|, \text{ se } \quad x \neq 0.$$

3. Mostre que $\sqrt{1+h} < 1 + \frac{1}{2}h$, se $h > 0$.

4. Aplique o Teorema do Valor Médio a $f(x) = \sqrt{x}$ em $[100, 101]$ para mostrar que
$$\sqrt{101} = 10 + \frac{1}{2\sqrt{c}}$$
para algum c em $(100, 101)$.

5. Explique por que o Teorema do Valor Médio não se aplica à função $f(x) = |x|$ no intervalo $[-1, 2]$.

6. Seja f contínua em $[1, 3]$ e derivável em $(1, 3)$. Suponha que, para todo $x \in (1, 3)$, vale que $1 \leq f'(x) \leq 2$, Prove que $2 \leq f(3) - f(1) \leq 4$.

7. Suponha que as funções f e g sejam contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b). Suponha também que $f(a) = g(a)$ e que $f'(x) < g'(x)$ para $a < x < b$. Prove que $f(b) < g(b)$.

8. Dizemos que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é uma *função de Hölder* se $\exists M > 0$ $\exists \alpha \in (0, 1]$ tais que
$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^{\alpha}, \forall x, y \in I.$$
Note que no caso particular de $\alpha = 1$, temos que f é de Lipschitz.
   (a) Mostre que se $f : I \to \mathbb{R}$ é de Hölder, então f é uniformemente contínua.
   (b) Mostre que se na condição de Hölder permitíssemos que $\alpha > 1$, seguiria que $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, e portanto, f seria uma função constante.

9. Use o T.V.M. e seus corolários para provar que valem as desigualdades:
   (a) $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$, $\forall x \geq 0$.
   (b) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \geq \operatorname{arcsen} x \geq x$, $\forall x \in [0, 1)$.
   (c) $x - \dfrac{x^3}{3} < \arctan x$, $\forall x > 0$.
   (d) $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}} < \operatorname{arcsen} x < \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2x-1}{2\sqrt{1-x^2}}$, para $\frac{1}{2} < x < 1$. Observe que $\operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

10. Seja f duas vezes derivável no intervalo $[0,2]$. Mostre que se $f(0)=0$, $f(1)=2$ e $f(2)=4$, então existe um $x_0 \in (0,2)$ tal que $f''(x_0)=0$.

11. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável tal que $f(\pi)=\pi$ e $f(e)=e$. Mostre que existe $x\in\mathbb{R}$ tal que $f'(x)=1$.

12. Suponha que f é uma função derivável com $f'(x)=x^2 f(x)$, para todo $x\in\mathbb{R}$, e tal que $f(0)=1$. Mostre que $f(x)\cdot f(-x)=1$, para todo $x\in\mathbb{R}$.

13. **(Sel. Mestr. UFSM 2012/1)** Suponha que $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ seja derivável, com $f(0)=0$, e que $f':(0,\infty)\to\mathbb{R}$ seja crescente. Mostre que a função $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ é crescente em $(0,\infty)$.

14. **(Sel. Mestr. UFRGS 2009/1)** Sejam f e g funções reais contínuas e deriváveis em $[a,b]$. Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que:

    (a) Se $f(a)=f(b)$, então existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

    (b) Se $f(a)=g(a)$ e $f(b)=g(b)$, então existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=g'(c)$.

15. **(Sel. Mestr. UFRGS 2009/1)** Dado $x>0$, mostre que $\ln x \geq 1-\dfrac{1}{x}$.

16. **(Sel. Mestr. UFRGS 2015/2)** Suponhamos que f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $|f'(x)|\leq M<1$ para todo x real. Seja a_1 um número real qualquer e (a_n) uma sequência definida recursivamente $a_{n+1}=f(a_n)$ para $n\in\mathbb{N}$.

    (a) Mostre que
    $$|a_{n+2}-a_{n+1}|\leq M|a_{n+1}-a_n|, \quad \text{para todo} \;\; n.$$

    (b) Prove que a_n converge.