Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Análise II - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 01 de Exercícios

1. Use a definição de derivada para calcular a derivada de cada função num ponto de acumulação a do domínio:

   (a) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x)=\sqrt{x}$.

   (b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\operatorname{sen} x$.

2. **(Sel. Mestrado UFRGS 2005/2)** Seja $f(x)=\ln x$, $x>0$. Supondo conhecido que f é derivável em 1 e que
$$1=f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h},$$
prove que
$$f'(x)=\frac{1}{x}$$
para todo $x>0$.

3. Prove que se $f(x)$ é derivável em $x=a$, então
$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a).$$

4. Sejam $f,g,h:I\to\mathbb{R}$ tais que, para todo $x\in I$ se tenha $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$. Se num ponto $a\in I\cap I'$ tem-se $f(a)=h(a)$ e existirem $f'(a)=h'(a)$, mostre que existe $g'(a)$ e tem o mesmo valor.
Obs. Podemos dizer que este resultado é o "Teorema do sanduíche para derivadas".

5. Seja $f:I\to\mathbb{R}$ contínua. Dado $a\in I\cap I'$, defina $\xi:I\to\mathbb{R}$ pondo
$$\xi(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{se} \quad x\neq a\\ L & \text{se} \quad x=a\end{cases}.$$
Prove que ξ é contínua se, e somente se, existe $f'(a)$ e $f'(a)=L$.

6. Seja f a função real definida por
$$f(x)=\begin{cases}x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}, & \text{se } x\neq 0\\ 0, & \text{se } x=0\end{cases}$$
Use a definição de derivada para mostrar que existe $f'(0)$, mas que $f'(0)\neq\lim_{x\to 0}f'(x)$. (ou seja, a função derivada f' não é contínua em $x=0$).

7. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por
$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{se } x \text{ racional}\\ 0, & \text{se } x \text{ irracional}\end{cases}.$$
Prove que f é derivável em $x=0$.

8. Seja $\alpha > 1$. Se f é uma função tal que satisfaz $|f(x)| \leq |x|^{\alpha}$, prove que f é derivável em $x = 0$.

9. Seja $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo $|x - f(x)| \leq x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que $f(0) = 0$.

   (b) Mostre que $f'(0)$ existe e encontre o seu valor. Exiba uma função que satisfaça tal propriedade.

10. **(Sel. Mestrado UFRGS 2009/2)** Suponha que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é derivável em $x \in (a, b)$.

    (a) Prove que $f'(x) = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x - h)}{h}$.

    (b) A igualdade acima sugere a possibilidade de uma nova definição da noção de diferenciabilidade e de derivada. Pergunta-se: esta nova maneira resulta em uma noção de derivada equivalente à usual?

11. **(Sel. Mestrado UFRGS 2013/2)** Sejam f, g, h funções definidas no intervalo $[0, b)$, satisfazendo
$$f(0) = g(0) = h(0) \quad \text{e} \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \text{para} \quad x \in [0, b).$$

    (a) Prove que f, g e h são deriváveis em 0, então
$$f'(0) \leq g'(0) \leq h'(0).$$

    (b) Prove que se f e h são deriváveis em 0 e $f'(0) = h'(0)$, então g é derivável em 0 e $g'(0) = f'(0) = h'(0)$.

    (c) Seja $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por
$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \quad x = 0 \\ x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ se } \quad x > 0 \end{cases}$$
    é derivável em $x = 0$? Em caso afirmativo, qual é a sua derivada? A derivada é contínua no zero? Justifique sua resposta.

12. **(Sel. Mestrado UFRGS 2013/1)** Seja f uma função definida num intervalo aberto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ que contém a origem.

    (a) Prove que se f é derivável em 0, então
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = 2f'(0).$$

    (b) Mostre que se f é uma função par, então o limite do item anterior existe mesmo que f não seja derivável em 0. Dê exemplos de funções em que o limite acima existe e que não sejam deriváveis.

    (c) Prove que se f é monótona e
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x} = 0,$$
    então f é derivável em 0.

13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em um ponto $a \in \mathbb{R}$. Verifique que

$$f'(a) = \lim_{n\to\infty} n\left(f(a+\frac{1}{n}) - f(a)\right).$$

No entanto, a existência desse limite não implica que f seja derivável em a. Dê um exemplo para isso.

14. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. Calcule as derivadas laterais $f'_-(0)$ e $f'_+(0)$. O que concluímos sobre a existência de $f'(0)$? O que isso significa geometricamente?

15. Seja $a \in I$ um ponto de máximo local para a função $f : I \to \mathbb{R}$. Se f possui derivada à direita no ponto a, mostre que $f'_+(a) \leq 0$. Se existir $f'_-(a)$, mostre que $f'_-(a) \geq 0$. Dê um exemplo onde em um máximo local existam as derivadas laterais e sejam diferentes.

16. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo aberto I. Se, para cada $x \in I$, existir $f'_+(x)$ e for $f'_+(x) > 0$, então f é crescente.

17. **(Sel. Mestrado UFSM 2009/1)** Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & , \text{ se } \; x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } \; x = 0 \end{cases}$$

e derivável com derivada primeira contínua.

18. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & , \text{ se } \; x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } \; x = 0 \end{cases}$$

é derivável. Obtenha sequências (x_n), (y_n) tais que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, $x_n \neq y_n$, mas não existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$.

19. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável num intervalo I. Se $f'(x) = 0$, para todo $x \in I$, mostre que f é constante.

20. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ definida num intervalo I. Se existir um $\alpha > 1$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha,$$

mostre que f é contínua e possui derivada nula em todos os pontos de I. Consequentemente, f é constante.

21. Dizemos que uma função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é *uniformemente derivável* se f é derivável em (a, b) e para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - y| < \delta \;\text{ e }\; x, y \in (a, b) \;\Rightarrow\; \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x)\right| < \varepsilon.$$

Prove que se f é uniformemente derivável, então f' é contínua. Em seguida, dê um exemplo de uma função que é derivável, mas não uniformemente derivável.

22. (a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $0 \leq t_n \leq 1$. Se $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$, prove que

$$\lim_{n\to\infty} [t_n \cdot x_n + (1 - t_n) \cdot y_n] = a.$$

(b) Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável no ponto $a \in X \cap X'$. Se (x_n) e (y_n) são sequências de pontos em X tais que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$ e $x_n < a < y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, prove que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a).$$

Sugestão: Note que para $t_n = \dfrac{y_n - a}{y_n - x_n}$ temos que $0 \leq t_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim, pode-se escrever

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = t_n \cdot \frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a} + (1 - t_n) \cdot \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a},$$

e usando o item (a) conclua o exercício.

23. **(Sel. Mestrado UFRGS 2015/1)**

(a) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no ponto $a \in I$. Mostre que a função $r : J \to \mathbb{R}$ definida no intervalo $J = \{h \in \mathbb{R} : a + h \in I\}$ pela igualdade

$$f(a + h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h),$$

satisfaz $\lim_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$.

(b) Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ deriváveis no ponto $a \in I$, com $f(a) = 0 = g(a)$ e $g'(a) \neq 0$. Mostre que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

(c) Calcule $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

24. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $a \in I$. Mostre que f é derivável em a, com derivada L, se, e somente se, existir uma função $\eta_f : I \to \mathbb{R}$ tal que $\eta_f(a) = 0$, η_f é contínua em a, e

$$f(x) = f(a) + (x - a)(L + \eta_f(x)), \ \forall x \in I.$$

25. **(Sel. Mestrado UFRGS 2005/2)** Seja $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(g(x)) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponha que g seja derivável e com derivada não nula em todos os pontos. Prove que f é derivável e que

$$f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

26. Seja I um intervalo aberto. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é dita ser de *classe* C^1 se for derivável e a derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ for contínua. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é de *classe* C^2 se sua derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ for de classe C^1. Prove que se $f(I) \subset J$, $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ são de classe C^2, então a composta $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ também é de classe C^2.

27. **(Sel. Mestrado UFRGS 2005/1)** Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ se } \quad x \geq 0 \\ 0 & , \text{ se } \quad x < 0 \end{cases}$$

é de classe C^1, ou seja, é derivável com primeira derivada contínua, mas não é duas vezes derivável.

28. **(Sel. Mestrado UFRGS 2011/2)** Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo da reta diz-se de Lipschitz se existe uma constante $K > 0$ tal que $x, y \in I \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.

    (a) Prove que se f é de Lipschitz, então f é contínua.

    (b) Prove que se f e g são duas funções de Lipschitz definidas em um mesmo intervalo I, então $f + g$ é Lipschitz.

    (c) Prove que uma função Lipschitz $f : I \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo I limitado da reta, é uma função limitada.

    (d) Prove que se f e g são duas funções Lipschitz definidas em um mesmo intervalo I limitado, então o produto $f \cdot g$ é Lipschitz.

    (e) Verdadeiro ou falso? (Justifique cuidadosamente): se uma função é Lipschitz então é diferenciável.

29. **(Sel. Mestrado UFRGS 2004/1)** Prove que $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$, onde

$$f(x) = g(x) \,\mathrm{sen} \frac{1}{x}, \; x \neq 0$$

sabendo que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes derivável com segunda derivada contínua e satisfazendo $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$.