Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Curso de Licenciatura em Matemática - Noturno
Prova Optativa de Álgebra Linear I
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 11/07/2016.

Instruções.

(a) Quem precisa recuperar somente a primeira área, deverá escolher 4 questões da **PARTE I**.

(b) Quem precisa recuperar somente a segunda área, deverá escolher 4 questões da **PARTE II**.

(c) Quem precisa recuperar as duas áreas deverá escolher 2 questões da **PARTE I** e 3 questões da **PARTE II**.

(d) Assinale as questões escolhidas nesta folha de questões e marque uma das opções acima na qual você se enquadra.

PARTE I

[ ] **Questão 01.** Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule a sua inversa A^{-1}, usando o algoritmo para determinar a inversa via operações elementares sobre linhas.

(b) Calcule a sua inversa A^{-1}, através da matriz adjunta.

[ ] **Questão 02.** Resolva o sistema linear $\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 2x + 5y - 9z = -10 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$ usando operações elementares sobre linhas ou a Regra de Cramer.

[ ] **Questão 03.** Prove cada item a seguir, referente à teoria dos determinantes.

(a) Se P for uma matriz inversível, mostre que $\det P^{-1} = \dfrac{1}{\det P}$.

(b) Dizemos que duas matrizes A e B são *semelhantes* se existir uma matriz inversível P tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Mostre que se A e B são semelhantes, então $\det A = \det B$.

(c) Uma matriz A é simétrica quando $A^t = A$. Sendo A simétrica, mostre que

$$\det(A + B) = \det(A + B^t).$$

[ ] **Questão 04.** Seja V um espaço vetorial. Se $(U_j)_{j \in J}$ é uma família de subespaços vetoriais de V, mostre que $\cap_{j \in J} U_j$ também é um subespaço vetorial de V.

[ ] **Questão 05.** Considere o espaço vetorial $P_2 = \{at^2 + bt + c \,:\, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e os vetores $p_1 = t^2 - 2t + 1$, $p_2 = t + 2$ e $p_3 = 2t^2 - t$.

(a) Escreva o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1, p_2 e p_3.

(b) Determine uma condição para a, b e c de modo que o vetor $at^2 + bt + c$ seja uma combinação linear de p_2 e p_3.

(c) O conjunto $\beta = \{p_1, p_2, p_3\}$ forma uma base para P_2? Justifique.

PARTE II

[ ] **Questão 01.** Resolva cada item a seguir, referente ao núcleo de uma transformação linear.

(a) Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Mostre que $\mathrm{Ker}(T)$ é um subespaço vetorial de V.

(b) Determine $\ker(T)$ para $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0,0) = (2,0)$; $T(0,1,0) = (1,1)$ e $T(0,0,1) = (0,-1)$. e em seguida dê uma interpretação geométrica para o núcleo de T.

[ ] **Questão 02.** Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por

$$T(x,y,z) = (3x, x-y, 2x+y+z).$$

(a) Determine os autovalores e autovetores de T.

(b) Determine $\ker T$, $\mathrm{Im}(T)$ e suas dimensões.

(c) T é injetiva? É sobrejetiva? Justifique.

[ ] **Questão 03.** Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por

$$T(x,y) = (x-3y, 2x-4y).$$

(a) Determine autovalores e autovetores de T.

(b) Calcule a matriz $[T]_\gamma^\beta$, sendo $\beta = \{(2,5),(3,7)\}$ e $\gamma = \{(1,3),(2,4)\}$ são bases do $\mathbb{R}^2$.

[ ] **Questão 04.** Considere a aplicação $\langle .,. \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{9} u_1 \cdot v_1 + \frac{1}{4} u_2 \cdot v_2$$

(a) Mostre que $\langle .,. \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

(b) Induza uma norma e calcule a norma do vetor $\vec{u} = (2,-1)$.

(c) Desenhe a bola unitária $B_{\mathbb{R}^2} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,:\, ||\vec{x}|| < 1\}$, onde $||\cdot||$ é a norma induzida do produto interno acima.

[ ] **Questão 05.** Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^3$ para mostrar que dados valores reais positivos a_1, a_2 e a_3, vale

$$(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9.$$