Fundação Universidade Federal de Pelotas
Departamento de Matemática e Estatística
Curso de Licenciatura em Matemática - Noturno
Segunda Prova de Álgebra Linear I
Prof. Dr. Maurício Zahn

Nome: **Data:** 06/07/2016.

Questão 01. Determine as coordenadas do vetor $\vec{u} = (4, -5, 3) \in \mathbb{R}^3$ em relação à base

$$\beta = \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (3, 1, 0)\}.$$

Questão 02. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1, -2) = (2, 3, -1) \;\text{ e }\; T(0, 1) = (1, -1, 0).$$

Questão 03. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por

$$T(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z).$$

(a) Determine o núcleo de T, uma base para ele e sua dimensão.

(b) Determine a imagem de T, uma base para ele e a sua dimensão.

(c) Considerando as bases $\beta = \{(1, 1, 1), (-1, 0, 0), (0, 2, 0)\}$ e $\gamma = \{(2, -1), (-1, 0)\}$ do $\mathbb{R}^3$ e do $\mathbb{R}^2$, respectivamente, determine a matriz da transformação $[T]^{\beta}_{\gamma}$.

Questão 04. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z).$$

(a) Determine os autovalores e autovetores de T, caso existam.

(b) Mostre que T é inversível e determine a transformação inversa T^{-1}.

Questão 05. Mostre que a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 \sqrt{5}}{2}$$

é um produto interno. Induza daí uma norma e em seguida calcule a norma do vetor $\vec{u} = (-1, 1)$. Você saberia desenhar a *bola unitária* do $\mathbb{R}^2$ definida por $B_{\mathbb{R}^2} = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x|| < 1\}$, onde a norma $|| \cdot ||$ é a induzida acima?

Questão 06. Dados $a, b, c > 0$, use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para provar que

$$\sqrt{\frac{a+b}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{a+c}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a+b+c}} \leq \sqrt{6}.$$

Questão 07. Prove o Teorema de Pitágoras: Seja $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ um conjunto de vetores em um espaço vetorial V munido de um produto interno, cujos vetores $\vec{v}_1$, ..., $\vec{v}_n$ são dois a dois ortogonais. Então

$$||\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + ... + \vec{v}_n||^2 = ||\vec{v}_1||^2 + ||\vec{v}_2||^2 + ... + ||\vec{v}_n||^2.$$

De acordo com o Teorema acima, podemos afirmar que

$$\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t + \cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \, dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt.$$

Explique.