Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Trigonometria - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 09 de Exercícios - Números Complexos

1. Escrever na forma $a + bi$ os seguintes números complexos:
   (a) $(1+i)(1+i^3)(1+i)^{-1}$ (b) $3(7+2i) - ((5+4i)+1)i$
   (c) $[(1-i)^3 + i^{157}](1+i)^{-1}$ (d) $\dfrac{i^{2000} - i^{47}}{1 - 3i^{579}} + \sqrt{-25}$

2. Se $Z \neq 0$, calcule o conjugado de $\dfrac{1}{Z}$.

3. Represente o número complexo $z = \dfrac{i^{578} - i^{41}}{2 - i^{83}}$ na forma algébrica.

4. Demonstre que $\Re\mathrm{e}(Z) = \dfrac{Z + \overline{Z}}{2}$ e que $\Im\mathrm{m}(Z) = \dfrac{Z - \overline{Z}}{2}$.

5. Seja $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... + a_n z^n$ um polinômio com coeficientes reais. Demonstre que, se w for raiz de $p(z) = 0$, então o conjugado de w também é raiz desta equação.

6. Dado o número complexo z, mostre que $\Re\mathrm{e}\, z \leq |z|$ e que $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

7. Usando o exercício anterior, prove a Proposição a seguir: *"Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, tem-se*

   (a) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
   (b) $|z + w| \leq |z| + |w|$*"*

8. Prove que o argumento do produto de dois números complexos é igual à soma dos argumentos. Em seguida, calcule o argumento de $i(1+i)$.

9. Representar na forma trigonométrica cada complexo a seguir:
   (a) $z = -1 + i$ (b) $z = -1 - \sqrt{3}i$ (c) $z = -\sqrt{3} + i$ (d) $z = -i$

10. Encontre os pontos $z = x + yi$ tais que
    (a) $|z| \leq 2$ (b) $\Im\mathrm{m} z > 0$ (c) $\Re\mathrm{e}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) \leq 1$ (d) $\Im\mathrm{m}\left(\frac{1}{1-z}\right) > 1$.

    Faça também uma representação geométrica em cada caso.

11. Expressar cada número complexo abaixo na forma $a + bi$.

    (a) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^{100}$ (b) $(-1+i)^6$ (c) $\sqrt[4]{1}$ (d) $\sqrt[6]{-729}$

    (e) $\sqrt[3]{1+i}$ (f) $\sqrt{\dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}}$ (g) $\sqrt{-16i}$ (h) $\sqrt[5]{-2+2i}$

12. Encontrar o valores de $\sqrt[4]{-1+i}$ e de $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^{50}$.

13. Representar o número complexo $z = \dfrac{2}{\sqrt{3} + i}$ na forma trigonométrica.