PG 1 - LISTAS

① $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $F(x,y,z) = 2x - 3y + z$

$u, v \in \mathbb{R}^3$

I) $F(u+v) = F(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = 2(x_1+x_2) - 3(y_1+y_2) + z_1 + z_2 =$
$= 2x_1 - 3y_1 + z_1 + 2x_2 - 3y_2 + z_2 = F(u) + F(v)$

II) $F(\alpha v) = F(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) = 2(\alpha x_1) - 3(\alpha y_1) + \alpha z_1 =$
$= \alpha(2x_1 - 3y_1 + z_1) = \alpha F(v)$

LOGO POR I e II, F é uma transformação linear

---

② $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y) = (x+1, 2y, x+y)$

$u, v \in \mathbb{R}^3$ $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$

I) $T(u+v) = T(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2+1, 2y_1+2y_2, x_1+x_2+y_1+y_2) =$
$= (x_1+1+x_2, 2y_1+2y_2, x_1+y_1+x_2+y_2) =$
$= (x_1+1, 2y_1, x_1+y_1) + \underbrace{(x_2, 2y_1, x_2+y_2)}_{X} = T(u) + X$ e $X \neq T(v)$

Pois $T(v) = (x_2+1, 2y_2, x_2+y_2)$. Logo, T não é Linear.

③ $f_B: V \to V$ V espaço das matrizes $n \times m$ $B \in V$
$f_B(A) = A \cdot B - B \cdot A$

I) $f_B(A+C) = (A+C) \cdot B - B(A+C) = AB + CB - BA - BC =$
$= A \cdot B - BA + CB - BC = f_B(A) + f_B(C)$

II) $f_B(\alpha A) = (\alpha A)B - B(\alpha A) = \alpha(AB) - (B\alpha)A = \alpha(AB) - (\alpha B)A$
$= \alpha(AB) - \alpha(BA) = \alpha(AB - BA) = \alpha f_B(A)$

PG 2

④ $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tq $T(1,0,0) = (2,0)$
$T(0,1,0) = (1,1)$
$T(0,0,1) = (0,-1)$

Ache a Transformação

$T(1,0,0) = (2,0)$
$T(0,1,0) = (1,1)$
$T(0,0,1) = (0,-1)$

Tomamos $v \in \mathbb{R}^3$; $v = (a,b,c)$

$$v = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$

Aplicando T

$T(v) = aT(1,0,0) + bT(0,1,0) + cT(0,0,1)$
$T(v) = a(2,0) + b(1,1) + c(0,-1)$
$T(v) = (2a+b,\ b-c)$

⑤ Ache a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,2) = (2,3)$ e $T(0,1) = (1,4)$

$T(1,0) = T(1,2) - 2(T(0,1)) = (0,-5)$

$v \in \mathbb{R}^2$ $v = (x,y)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$v = x(1,0) + y(0,1)$
$T(v) = xT(1,0) + yT(0,1) = x(0,-5) + y(1,4) = (y, -5x+4y)$

OU AINDA $(x,y) = a(1,2) + b(0,1) = (a, 2a+b)$
$\Rightarrow x = a$ e $y = 2a+b \Rightarrow a = x$ e $b = y-2x$
$v = x(1,2) + (y-2x)(0,1)$
$T(v) = xT(1,2) + (y-2x)T(0,1) = x(2,3) + (y-2x)(1,4) = (2x+y-2x,\ 3x+4y-8x)$
$= (y, -5x+4y)$

✓

→ obs.: foi feita dessa forma em aula.

credeal

⑥ $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$G(x,y,z) = (x+2y-z,\ y+z,\ x+y-2z)$

UMA BASE, OS ELEMENTOS DA $Im(G)$ SÃO DO FORMATO:

$(x+2y-z;\ y+z,\ x+y-2z)$

SEPARANDO DE FORMA ADEQUADA

$(x,0,x)+(2y,y,y)+(-z,z,-2z)$ E AINDA:

$x\underbrace{(1,0,1)}_{v_1}+y\underbrace{(2,1,1)}_{v_2}+z\underbrace{(-1,1,-2)}_{v_3}$

v_1, v_2, v_3 SÃO CANDIDATOS A BASE DE $Im(G)$

MAS PERCEBEMOS QUE $v_2 = 3v_1 + v_3$. LOGO v_1, v_2, v_3 SÃO LD. TOMAMOS v_1 e v_3 COMO CANDIDATOS A BASE E PODEMOS VERIFICAR QUE SÃO LI E FORMAM UMA BASE DE $Im(G)$ e $\dim Im(G) = 2$

Obs: O que eu fiz acima não foi pedido no exercício

ACHAR UMA BASE PARA $Ker(G)$:

OS ELEMENTOS DE $Ker(G)$ TAIS QUE:

$G(x,y,z) = (x+2y-z,\ y+z,\ x+y-2z) = (0,0,0)$

MONTAMOS O SISTEMA COM A IGUALDADE DE CADA COORDENADA:

$$\begin{cases} x+2y-z=0 & \to x+(-2z)-z=0 \to x=3z \\ y+z=0 \to y=-z \\ x+y-2z=0 \end{cases}$$

LOGO OS VETORES QUE SÃO LEVADOS NO $Ker(G)$ SÃO DO TIPO: (x,y,z) tais que $(3z,-z,z)$

E AINDA PODEMOS ESCREVER $z(3,-1,1)$

ONDE O VETOR $(3,-1,1)$ GERA O $Ker(G)$.

$Ker(G) = [(3,-1,1)]$ e $\dim Ker(G) = 1$

Obs: $\dim Ker(G) + \dim Im(G) = \dim \overset{\text{DOMÍNIO}}{D}$ $\quad D = \mathbb{R}^3$

$\quad 1 + 2 = 3$

Obs ② A QUESTÃO 7 É IGUAL A ESTA RESOLUÇÃO

⑧ $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $T(x,y,z) = (2x, 4x-y, 2x+3y-z)$

ⓐ $Ker(T)$ e $Im(T)$

$Ker(T) \to T(x,y,z) = (2x, 4x-y, 2x+3y-z) = (0,0,0)$

$2x=0$; $4x-y=0$; $2x+3y-z=0$; $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow z=0$

$Ker(T) = [(0,0,0)]$ e $\dim Ker(T) = 0$

$Im(T) \to (2x, 4x-y, 2x+3y-z)$ PODEMOS REESCREVER COMO:

$x(2,4,2) + y(0,-1,3) + z(0,0,-1)$

ESTES TRÊ VETORES SÃO CANDIDATOS A BASE DA $Im(T)$

VERIFIQUE QUE SÃO L.I. LOGO $Im(T) = [(2,4,2),(0,-1,3),(0,0,-1)]$

e $\dim Im(T) = 3$

ⓑ Calcule $T^2 = T \circ T \to T(T(v))$ dado $v \in \mathbb{R}^3$

$T(v) = (2x, 4x-y, 2x+3y-z)$

$T(T(v)) = T(2x, 4x-y, 2x+3y-z)$

$= (2.(2x), 4(2x)-(4x-y), 2.(2x)+3.(4x-y)-(2x+3y-z))$

$= (4x, 8x-4x+y, 4x+12x-3y-2x+3y-z)$

$= (4x, 4x+y, 14x-z)$

Logo $T \circ T(v) = (4x, 4x+y, 14x-z)$

ⓒ $T^{-1}(2x, 4x-y, 2x+3y-z) = (x,y,z)$??

T é inversível pois é um isomorfismo.

VERIFIQUE QUE O $Ker(T)$ SÓ TEM O ELEMENTO $(0,0,0)$

LOGO T É INJETIVA.

E AINDA $\forall \vec{w} \in Im(T)$ TEMOS UM $v \in$ DOMÍNIO

tal que $T(v) = (2x, 4x-y, 2x+3y, -z)$

ENTÃO BASTA TOMAR $v = (x,y,z)$. LOGO T É SOBREJETIVA

OU AINDA: NOTE QUE $\dim Ker(T) + \dim Im(T) = \dim D$

MAS $\dim Ker(T) = 0 \Rightarrow \dim Im(T) = \dim D$ Obs: $Im T$ é todo o $\mathbb{R}^3$

COMO a dimensão da imagem é igual ao domínio

TEMOS QUE T É SOBREJETIVA.

~~d) Determine T^{-1}. Quais são seus núcleo e imagem?~~

TOMAMOS INICIALMENTE A BASE CANÔNICA DO DOMÍNIO E CALCULAMOS AS RESPECTIVAS T.

$T(1,0,0) = (2.1, 4.1-0, 2.1+3.0-0) = (2,4,2) = v_1$

$T(0,1,0) = (2.0, 4.0-1, 2.0+3.1-0) = (0,-1,3) = v_2$

$T(0,0,1) = (2.0, 4.0-0, 2.0+3.0-1) = (0,0,-1) = v_3$

VERIFIQUE QUE SÃO A BASE DA $Im(T)$.

ENTÃO O QUE OCORRE QUANDO APLICAMOS T^{-1} NESTES VETORES v_1, v_2, v_3:

$T^{-1}(2,4,2) = (1,0,0)$; $T^{-1}(0,-1,3) = (0,1,0)$ e $T^{-1}(0,0,-1) = (0,0,1)$.

PODEMOS PROSSEGUIR DE DOIS MODOS:

(I) PODEMOS ACHAR $T^{-1}(1,0,0)$, $T^{-1}(0,1,0)$ e $T^{-1}(0,0,1)$

$T^{-1}(0,0,1) = -T^{-1}(0,0,-1) = -(0,0,1) = (0,0,-1)$ //

$T^{-1}(0,1,0) = -T^{-1}(0,-1,3) + 3T^{-1}(0,0,1) =$

$= -(0,1,0) + 3(0,0,-1) = (0,-1,-3)$ //

$T^{-1}(1,0,0) = \frac{1}{2}T^{-1}(2,4,2) - 2T^{-1}(0,1,0) - 1T^{-1}(0,0,1) =$

$= \frac{1}{2}(1,0,0) - 2(0,-1,-3) - 1(0,0,-1) = (1/2, 2, 7)$

ENTÃO ESCREVEMOS UM VETOR $v = (x,y,z)$ COMO COMBINAÇÃO DA BASE CANÔNICA

$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

E APLICAMOS T^{-1}

$T^{-1}(x,y,z) = xT^{-1}(1,0,0) + yT^{-1}(0,1,0) + zT^{-1}(0,0,1)$

$T^{-1}(x,y,z) = x(1/2, 2, 7) + y(0,-1,-3) + z(0,0,-1)$

$T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x, 2x-y, 7x-3y-z\right)$ //

PG 6

VERIFIQUE APLIQUE A T^{-1}.

$T^{-1}(2x, 4x-y, 2x+3y-z) \stackrel{?}{=}$

$= \left(\frac{1}{2}(2x), 2\cdot(2x) - (4x-y), 7(2x) - 3(4x-y) - (2x+3y-z)\right)$

$= (x, 4x-4x+y, 14x-12x+3y-2x-3y+z)$

$= (x, y, z)$

(II) Segundo método. Escreva $v = (x,y,z)$ COMO COMBINAÇÃO LINEAR DE $(2,4,2), (0,-1,3), (0,0,-1)$

$(x,y,z) = a(2,4,2) + b(0,-1,3) + c(0,0,-1)$

$$\begin{cases} 2a = x & \to a = x/2 \\ 4a - b = y & \to 4(x/2) - b = y \to b = 2x - y \\ 2a + 3b - c = z & \to x + 6x - 3y - c = z \to c = 7x - 3y - z \end{cases}$$

LOGO

$(x,y,z) = \left(\frac{x}{2}\right)(2,4,2) + (2x-y)(0,-1,3) + (7x-3y-z)(0,0,-1)$

Aplicando T^{-1} TEREMOS

$T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x}{2}\right)T^{-1}(2,4,2) + (2x-y)T^{-1}(0,-1,3) + (7x-3y-z)T^{-1}(0,0,-1)$

$= \frac{x}{2}(1,0,0) + (2x-y)(0,1,0) + (7x-3y-z)(0,0,1)$

$= \left(\frac{x}{2}, 2x-y, 7x-3y-z\right) = T^{-1}(x,y,z)$

VERIFIQUE QUE $T^{-1}(x,y,z)$ a mesma encontrada no MÉTODO 1.

Pg 7

⑨ $T: V \to V$ e $C = \{ v \in V : T(\vec{v}) = \vec{v} \}$

MOSTRE QUE C é um subespaço de V.

PARA MOSTRAR QUE:

(I) Dados v e $u \in C$ então $(v+u) \in C$

(II) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in C$ então $(\alpha v) \in C$

{ Obs: Note que v e $u \in V$ e $v+u \in V$, $\alpha v \in V$

→ (I) v e $u \in C$ temos que: $v + u = T(v) + T(u) = \underbrace{T(v+u)}_{\in C}$

(II) $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha v = \alpha T(v) = T(\alpha v) \in C$

LOGO C é um subespaço de V. (POR I e II)

⑩ $S(x,y) = (0,x)$ e $T(x,y) = (x,0)$

(I) $ST = 0$? Tomamos $v \in \mathbb{R}^2$; $v = (x,y)$

(I) $ST(v) = ST(x,y) = S(x,0) = (0,x)$.

(II) $TS(v) = TS(x,y) = T(0,x) = (0,0)$

(III) $TT(v) = T(x,0) = (x,0) = T(x,y) = T(v) \Rightarrow T^2 = T$

⑪ $F, G, H \in L(\mathbb{R}^2)$: $F(x,y) = (x, 2y)$; $G(x,y) = (y, x+y)$ e $H(x,y) = (0,x)$. $v \in L(\mathbb{R}^2) \to v = (x,y)$

a) $F+H = F(v) + H(v) = (x,2y) + (0,x) = (x, 2y+x)$

b) $F \circ G = F(G(v)) = F(y, x+y) = (y, 2x+2y)$

c) $G \circ (H+F) = G((H+F)(v)) = G(x, 2y+x) = (2y+x, x+2y+x) =$
$= (2y+x, 2x+2y)$

OU AINDA $G \circ (H+F) = G \circ H + G \circ F = G(H(v)) + G(F(v)) =$
$= G(0,x) + G(x,2y) = (x,x) + (2y, x+2y) = (x+2y, 2x+2y)$

d) $G \circ F = G(F(v)) = G(x,2y) = (2y, x+2y)$

e) $H \circ F = H(F(v)) = H(x,2y) = (0,x)$

(12) F e G operadores lineares de um espaço V.

MOSTRE QUE : $\ker G \subset \ker(F \circ G)$

$x \in \ker(G) \Rightarrow G(x) = 0_V \Rightarrow F(G(x)) = F(0_V) = 0_V$

LOGO TODO EX $x \in \ker(G)$ TAMBÉM PERTENCE À $\ker(F \circ G)$. PORTANTO $\ker(G) \subset \ker(F \circ G)$

Ex: VERIFIQUE F, G em $\mathbb{R}^2$. $F(x,y) = (0, x+y)$ e $G(x,y) = (2x, 2y)$

(13) $F \in L(U,V)$ e $G \in L(V,W)$ TAIS QUE :

$\ker F = \{0\}$ e $\ker(G) = \{0\}$

PROVE QUE $\ker(G \circ F) = \{0\}$

Note que $F: U \to V$ e $G: V \to W$ e $G \circ F: U \to W$

" $\ker F = 0_V$ e $\ker G = 0_W$ " $\ker F \subset \ker(G \circ F)$.

TEMOS QUE $0_U \Rightarrow F(0_U) = 0_V$, TEMOS POR HIPÓTESE $\ker F = \{0\}$; 0_U único elemento levado em 0_V

E AINDA $0_V = G(0_V) = 0_W$, TEMOS POR HIPÓTESE $\ker G = \{0\}$; 0_V único elemento levado em 0_W.

Logo $x \in \ker(G \circ F) \Rightarrow G \circ F(x) = 0_W$

$\Rightarrow G(F(x)) = 0_W \to$ segue que o único elemento aplicado em G que leva no 0_W é o 0_V.

Logo $F(x) = 0_V \to$ Segue que o único elemento aplicado em F que leva no 0_V é o 0_U.

Então x necessariamente tem que ser $0_U \to x = 0_U$.

LOGO $\ker(G \circ F)$ contém só o 0_U!

$\ker(G \circ F) = \{0\}$

(14) Ache uma aplicação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Im} T = [(1,2,0,-4),(2,0,-1,-3)]$.

PODEMOS CRIAR OUTRO VETOR COMO COMBINAÇÃO DA BASE

$1(1,2,0,-4) + 1(2,0,-1,-3) = (3,2,-1,-7)$

Temos $T(v) \in \operatorname{Im} T$; $v \in \mathbb{R}^3$ e $v = (x,y,z)$

$T(v) = x(1,2,0,-4) + y(2,0,-1,-3) + z(3,2,-1,-7)$

$T(x,y,z) = (x+2y+3z,\ 2x+2z,\ -y-z,\ -4x-3y-7z)$

Obs: $\dim \operatorname{Im} T = 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} T = 1$. VERIFIQUE:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 & \to 0=0 \\ 2x+2z=0 & 2x=-2z \Rightarrow x=-z \\ -y-z=0 & \to y=-z \qquad \longrightarrow x=-z=y \\ -4x-3y-7z=0 & \to 0=0 \end{cases}$$

$(x,x,-x) \to x(1,1,-1)$

$\operatorname{Ker} T = [(1,1,-1)]$ e $\dim \operatorname{Ker} T = 1$

(15) TEMOS QUE A TRANSFORMAÇÃO DE ROTAÇÃO É:

$R(x,y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta,\ y\cos\theta + x\,\mathrm{sen}\,\theta)$

e $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \mathrm{sen}\,45^\circ$

$T(x,y)$ que representa uma contração é $T(x,y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}, \dfrac{y}{\sqrt{2}}\right)$

LOGO PROCURAMOS $R \circ T(x,y)$

$$R(T(x,y)) = R\left(\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{y}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{y}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2},\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)$$

(16) Obtenha todas as transformações lineares $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $L(u) = 3u$; $L(v) = 3v$ e $L(w) = 3w$ onde $u = (1,0,0)$; $v = (1,1,0)$ e $w = (0,1,1)$

TEMOS QUE:

$L(1,0,0) = (3,0,0)$; $L(1,1,0) = (3,3,0)$

$L(0,1,1) = (0,3,3)$

PODEMOS SEGUIR DE DOIS MODOS:

(I) $L(1,0,0) = (3,0,0)$

$L(0,1,0) = L(1,1,0) - L(1,0,0) = (0,3,0)$

$L(0,0,1) = L(0,1,1) - L(0,1,0) = (0,0,3)$

Temos $v \in \mathbb{R}^3$; $v = (x,y,z)$, podemos escrever v como combinação linear de sua base canônica.

$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$ APLICANDO L.

$L(x,y,z) = xL(1,0,0) + yL(0,1,0) + zL(0,0,1)$

$L(x,y,z) = x(3,0,0) + y(0,3,0) + z(0,0,3)$

$L(x,y,z) = (3x, 3y, 3z)$

(II) Temos $v \in \mathbb{R}^3$, $v = (x,y,z)$

$(x,y,z) = a(1,0,0) + b(1,1,0) + c(0,1,1)$

$(x,y,z) = (a+b, b+c, c)$

$$\begin{cases} a+b = x & \to a + y - z = x \to a = x - y + z \\ b + c = y & \to b = y - z \\ c = z & \to c = z \end{cases}$$

LOGO $(x,y,z) = (x-y+z)(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(0,1,1)$

APLICANDO L:

$L(x,y,z) = (x-y+z)L(1,0,0) + (y-z)L(1,1,0) + zL(0,1,1)$

$L(x,y,z) = (x-y+z)(3,0,0) + (y-z)(3,3,0) + z(0,3,3)$

$L(x,y,z) = (3x - 3y + 3z + 3y - 3z, 3y - 3z + 3z, 3z)$

$L(x,y,z) = (3x, 3y, 3z)$

Pg 11

(17) $P_2\mathbb{R} = a + bx + cx^2$

$T: \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ e $T(1,0) = 1-t$ e $T(0,1) = 1-t^2$

a) Ker T e Im T?

Sendo $v \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow v = (x,y)$ TEMOS:

$(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$ APLICANDO T

$T(x,y) = xT(1,0) + yT(0,1) = x(1-t) + y(1-t^2)$

$T(x,y) = x - xt + y - yt^2 = x + y - xt - yt^2$ //

Ker T? $T(x,y) = (x+y) - xt - yt^2 = 0 + 0.t + 0.t^2$

$\Rightarrow x = 0$ e $y = 0$ logo $\ker T = \{(0,0)\}$

Im T? $x + y - xt - yt^2 = x(1-t) + y(1-t^2)$

$\operatorname{Im} T = [(1-t), (1-t^2)]$

b) INJETIVA

$u, v \in \mathbb{R}$ $u \neq v \to (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$

$T(u) = x_1 + y_1 - x_1 t - y_1 t^2$ $\Rightarrow T(u) \neq T(v)$

$T(v) = x_2 + y_2 - x_2 t - y_2 t$ SIM É INSETIVA

ou ainda! $\ker T = \{0\}$, logo T é injetiva!

SOBRESETIVA?

NÃO É SOBRESETIVA.

POR EXEMPLO: NÃO EXISTE $v \in \mathbb{R}^2$ tal que

$T(v) = 1 + t + t^2$, sendo $(1 + t + t^2) \in P_2\mathbb{R}$

ou seja $T(x,y) = x + y - xt - yt^2 = 1 + t + t^2$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x = 1 \to x = -1 \\ -y = 1 \quad y = -1 \end{cases}$$

$-1 - 1 = 1 \Rightarrow -2 = 1$ O QUE NÃO OCORRE

LOGO T NÃO É SOBRESETIVA

E POR NÃO SER SOBRESETIVA, NÃO É BIJETIVA

Pg 12

(18) U e V espaços de dimenção finita sobre $\mathbb{R}$ e $T: U \to V$ uma tranformação linear.
$S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_K\} \subset U$

a) Mostre que se $\{T(u_1), \ldots, T(u_K)\}$ é LI em V, então S é linearmente independente em U.

Como queremos mostrar que os vetores em S são LI
TEMOS $v \in S$ pode ser escrito como combinação dos u_i; $i = 1:K$
$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_K v_K \stackrel{?}{=} 0$ APLICAMOS T
$T(v) = T(a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_K v_K) = 0$. COMO É Transf. linear
$= T(a_1 u_1) + T(a_2 u_2) + \ldots + T(a_K v_K) = 0$
$= a_1 T(u_1) + a_2 T(u_2) + \ldots + a_K T(v_K) = 0$
POR HIPÓTESE $T(u_i)$, $i = 1:K$ SÃO LI
LOGO $a_i = 0$; $i = 1:K$
E PORTANTO OS u_i; $i = 1:K$ SÃO LI

OBS: $v = (0,0)$

b) Mostre que se T é injetora e S é LI em U então $A = \{T(\vec{u}_1), \ldots, T(\vec{u}_K)\}$ SÃO LI EM V.
TEMOS QUE MOSTRAR QUE:
$a_1 T(u_1) + \ldots + a_K T(u_K) = 0 \Rightarrow a_i = 0$; $i = 1:K$,
ENTÃO $a_1 T(u_1) + \ldots + a_K T(u_K) = 0 \Rightarrow T(a_1 u_1) + \ldots + T(a_K u_K) = 0$
$\Rightarrow T(a_1 u_1 + \ldots + a_K u_K) = 0$
MAS COMO T É INJETORA TEMOS QUE $\ker T = \{0\}$
LOGO: $a_1 u_1 + \ldots + a_K u_K = 0$,
E COMO S É LI EM U TEMOS QUE:
$a_1 = a_2 = \ldots = a_K = 0$
LOGO $\{T(u_1), \ldots, T(u_K)\}$ SÃO LI EM V.

19 a) $\alpha = \{(1,-1),(0,2)\}$ e $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$
bases do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$T(1,-1) = 1(1,0,-1) + 1(0,1,2) + 0(1,2,0) = (1,1,1)$
$T(0,2) = 0(1,0,-1) + 1(0,1,2) - 1(1,2,0) = (-1,-1,2)$

Dado $v \in \mathbb{R}^2$ $v = (x,y)$

$(x,y) = a(1,-1) + b(0,2) \Rightarrow a = x \Rightarrow b = \frac{y+x}{2}$
$= (a, -a+2b)$

LOGO $(x,y) = x(1,-1) + \left(\frac{y+x}{2}\right)(0,2)$ APLICANDO T:

$T(x,y) = x\,T(1,-1) + \left(\frac{y+x}{2}\right)T(0,2)$

$T(x,y) = x(1,1,1) + \left(\frac{y+x}{2}\right)(-1,-1,2)$

$T(x,y) = \left(x + \left(\frac{-y-x}{2}\right), x + \left(\frac{-y-x}{2}\right), x + y + x\right)$

$T(x,y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}, 2x+y\right)$

(b) Se $S(x,y) = (2y, x-y, x)$
Ache $[S]^{\alpha}_{\beta}$.

(I) $S(1,-1) = (-2,2,1) = a_{11}(1,0,-1) + a_{21}(0,1,2) + a_{31}(1,2,0)$
(II) $S(0,2) = (4,-2,0) = a_{12}(1,0,-1) + a_{22}(0,1,2) + a_{32}(1,2,0)$

$$\text{(I)} \begin{cases} a_{11} + a_{31} = -2 \\ a_{21} + 2a_{31} = 2 \\ -a_{11} + 2a_{21} = 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\to 2a_{21} + a_{31} = -1 \to a_{31} = -1 - 2a_{21} \\ &\to a_{21} - 2 - 4a_{21} = 2 \Rightarrow a_{21} = -\tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

$$a_{31} = -1 + \frac{8}{3} = \frac{5}{3} \to a_{11} = -2 - \frac{5}{3} = -\frac{11}{3}$$

$$\text{(II)} \begin{cases} a_{12} + a_{32} = 4 \\ a_{22} + 2a_{32} = -2 \\ a_{12} + 2a_{22} = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &-2a_{22} + a_{32} = 4 \\ &\to 2a_{22} + 4a_{32} = -4 \\ &\to a_{12} = -2a_{22} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\to 5a_{32} = 0 \\ &\Rightarrow a_{32} = 0 \\ &\Rightarrow a_{22} = -2 \\ &\Rightarrow a_{12} = 4 \end{aligned}$$

LOGO $[S]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix} -\frac{11}{3} & 4 \\ -\frac{4}{3} & -2 \\ \frac{5}{3} & 0 \end{bmatrix}^{\alpha}_{\beta}$

(c) Note que $T(1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\gamma}$

e $T(0,2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\gamma}$

~~Uma base para $\gamma = \{v_1, v_2, v_3\}$~~
~~$T(1,-1) = 1\,v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = v_1$~~
~~$T(0,2) = 0\,v_1 + 0 \cdot v_2 + 1\,v_3 = v_3$~~

TOMÉ BASE PARA γ COMO SENDO A CANÔNICA

LOGO TERÍAMOS QUE PARA:

$T(1,-1) = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + a_{31} v_3$

$T(0,2) = a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + a_{32} v_3$

DEVERÍAMOS ENCONTRAR

$a_{11} = a_{31} = 1$ e $a_{21} = a_{31} = a_{12} = a_{22} = 0$

SUBSTITUA A BASE CANÔNICA:

$T(1,-1) = (1,0,0) = a_{11}(1,0,0) + a_{21}(0,1,0) + a_{31}(0,0,1)$

$T(0,2) = (0,0,1) = a_{12}(1,0,0) + a_{22}(0,1,0) + a_{31}(0,0,1)$

$\Rightarrow a_{11} = a_{31} = 1$ e $a_{21} = a_{12} = a_{31} = a_{22} = 0$

LOGO $[T]^{\alpha}_{\gamma} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Verifique que para $\gamma = \{(1,0,0),(0,K,0),(0,0,1)\}$ $K \in \mathbb{R}^*$ também forma uma base de γ mantendo as características do $[T]^{\alpha}_{\gamma}$

Obs: Provavelmente existem outras possibilidades. ASSIM COMO $\gamma = \{(2,0,0),(0,5,0),(0,0,7)\}$

$\gamma = \{(a,0,0),(0,b,0),(0,0,c)\}$ $a,b,c \in \mathbb{R}^*$

//

(20) $[R] = $

(20) $[R] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Dado $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$$R \circ S(v) = R(S(v)) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - z \\ 2x + y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z + 4x + 2y + 2z = 5x + 2y + z \\ -x + z + 6x + 3y + 3z = 5x + 3y + 4z \end{bmatrix}$$

$$E\ [R \circ S](v) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

VERIFIQUE

$$\text{OU AINDA } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

---

(21) (a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} T(v_1) & T(v_2) & T(v_3) \end{matrix} \end{array}$$

$v \in \mathbb{R}^3$; $v = (x, y, z)$

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$
$$T(x,y,z) = xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1)$$
$$T(x,y,z) = x(1,-1,0) + y(1,0,-1) + z(0,1,-1)$$
$$T(x,y,z) = (x+y, -x+z, -y-z)$$

$$\text{OU } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ -x+z \\ -y-z \end{bmatrix}$$

MAS OBSERVE QUE SÓ TEMOS ISTO DE FORMA DIRETA POIS SE TRATA DA BASE CANÔNICA