Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear
Lista 07 de Exercícios
Espaços com produto interno e Espaços normados
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Mostre que $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

2. Mostre que a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_2 + 4x_1y_1$$
é um produto interno.

3. Dados $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$, verifique se a expressão abaixo define um produto interno em $\mathbb{R}^2$:
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1v_1 - u_1v_2 - v_2u_1 + 3u_2v_2.$$

4. Sendo $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ vetoresm em $\mathbb{R}^2$, defina a aplicação
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{u_1v_1}{a^2} + \frac{u_2v_2}{b^2},$$
onde $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ estão fixados. Prove que tal aplicação define um produto interno. Induza uma norma daí e em seguida, calcule a norma de $\vec{u} = (1, -1)$.

5. Dados os vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, -3)$ e $\vec{w} = (1, -4, 3)$ no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, munido com o produto interno usual, verifique quais pares são ortogonais.

6. Mostre que as funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$ no espaço vetorial $C([-\pi, \pi])$ com produto interno definido por $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ são ortogonais.

7. Considere $f(t) = 3t - 5$ e $g(t) = t^2$ no espaço dos polinômios $P(t)$ munido com o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$.
   (a) Calcule $\langle f, g \rangle$.
   (b) Calcule $||f||$ e $||g||$.
   (c) Usando os itens anteriores, verifique o Teorema de Cauchy-Schwarz.

8. (Sel. Mestrado UFSM/2010/1) Seja V o espaço vetorial real dado pelas funções contínuas no intervalo $[0, 2\pi]$.
   (a) Mostre que $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ é um produto interno em V.
   (b) Exiba dois vetores não nulos ortogonais em relação ao produto interno dado no item (a).
   (c) Considere $[f, g] = \int_0^{2\pi} f(x)g(2\pi - x)dx$. Então $[f, g]$ define um produto interno em V?

9. Seja $C([a, b])$ o espaço vetorial de todas as funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas. Mostre que a aplicação $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx$ é um produto interno. Induza daí uma norma $||.||$ e calcule $||f||$, sendo $f(x) = x - 1$.

10. Sejam f, g funções contínuas em $[0,1]$. Prove que

$$\left[\int_0^1 f(t)\cdot g(t)dt\right]^2 \leq \left(\int_0^1 f(t)^2 dt\right)\cdot\left(\int_0^1 g(t)^2 dt\right).$$

11. Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz em $\mathbb{R}^3$ para mostrar que dados valores reais positivos a_1, a_2 e a_3, vale

$$(a_1 + a_2 + a_3)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right) \geq 9.$$

12. (Sel. Mestrado UFRGS/2007/2) Se $a_1, a_2, ..., a_N$ são números reais, $N \in \mathbb{N}$, então prove que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} a_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{N} a_i^2.$$

13. Mostre que em um espaço vetorial V com um produto interno vale a lei do paralelogramo:

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 + ||\vec{u}-\vec{v}||^2 = 2||\vec{u}||^2 + 2||\vec{v}||^2,$$

onde $||\cdot||$ é a norma induzida do produto interno.

14. Seja V um espaço vetorial com um produto interno. Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v} \in V$, prove que os vetores $||\vec{u}||\vec{v} + ||\vec{v}||\vec{u}$ e $||\vec{u}||\vec{v} - ||\vec{v}||\vec{u}$ são ortogonais.

15. Para cada vetor $\vec{v}$ do $\mathbb{R}^3$ dado a seguir, determine as normas $||\vec{v}||_1$, $||\vec{v}||_2$ e $||\vec{v}||_\infty$.

    (a) $\vec{v} = (1, -2, 0)$ (b) $\vec{v} = (2, 1, -3)$ (c) $\vec{v} = (2, 0, 0)$ (d) $\vec{v} = (1, 2, 3)$

16. Verifique se as expressões a seguir definem uma norma para $C([a,b])$:

    (a) $||f|| = |f(a)| + |f(b)|$. (b) $||f|| = \int_a^b |f(x)|dx$. (c) $||f|| = \max\limits_{a\leq x\leq b} |f(x)|$.