Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear
Lista 06 de Exercícios - Autovalores e autovetores
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Determine os autovalores e autovetores associados a cada transformação linear abaixo:

   (a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 2y, -x + 4y)$.
   (b) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$.
   (c) $T: P_2 \to P_2$, $T(at^2 + bt + c) = at^2 + ct + b$.
   (d) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z, 2y + z, 2y + 3z)$.

2. Determine os autovalores e autovetores das seguintes matrizes:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$

3. Se um operador linear $T: V \to V$ é tal que $\lambda = 0$ é um autovalor associado a T, mostre que o operador T não é inversível.

4. Mostre que uma matriz A e a sua transposta A^t possuem mesmos autovalores.

5. Defina o conjunto $V_\lambda = \{\vec{v} \in V \ : \ T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\}$, chamado de *subespaço associado ao autovalor* λ ou *autoespaço* de T. Mostre que V_λ é um subespaço vetorial de V.

6. Os autovalores de um operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$, sendo $\vec{v}_1 = (1, -1)$ e $\vec{v}_2 = (-1, 0)$ os respectivos autovetores. Determine a transformação T, seu núcleo e sua imagem.

7. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ matrizes inversíveis.

   (a) Calcule $A \cdot B$ e $B \cdot A$ e observe que estes produtos são diferentes.
   (b) Encontre os autovalores de $A \cdot B$ e os autovalores de $B \cdot A$. O quê você observa?
   (c) Encontre os autovetores de $A \cdot B$ e os autovetores de $B \cdot A$. O quê você observa?

8. (Sel. Mestrado UFSM/2012/2) Considere o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (5x - 6y, x)$.

   (a) Calcule os autovalores e os autovetores de T.
   (b) Exiba uma base para cada um dos autoespaços[1] de T.
   (c) Calcule explicitamente $T^8(x, y)$.

9. (Sel. Mestrado UFSM/2010/1) Prove que matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico. Use isso para provar que se V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e T um operador linear definido sobre V, então $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$ produzem os mesmos autovalores para α e β bases quaisquer.

---
[1] Um autoespaço V_λ é o conjunto de todos os autovetores associados ao autovalor λ. Veja também a Questão 5.