Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear
Lista 05 de Exercícios - Transformações Lineares
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Mostre que a aplicação $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = 2x - 3y + z$ é uma transformação linear.

2. Mostre que a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y) = (x+1, 2y, x+y)$ não é uma transformação linear.

3. Seja V o espaço vetorial das matrizes $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$. Seja B um elemento de V e considere a aplicação $\varphi_B : V \to V$ dada por
$$\varphi_B(A) = A \cdot B - B \cdot A.$$
Mostre que φ_B é uma transformação linear.

4. Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$; $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$. Em seguida, obtenha $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(\vec{v}) = (3, 2)$.

5. Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $(1, 2) = (2, 3)$ e $T(0, 1) = (1, 4)$.

6. Seja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por
$$G(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z).$$
Encontre uma base e a dimensão do núcleo da G.

7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear dada por
$$T(x, y, z) = (x + 2y - z,\ y + z,\ x + y - 2z).$$
Determine uma base e a dimensão para o núcleo e para a imagem de T.

8. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por
$$T(x, y, z) = (2x,\ 4x - y,\ 2x + 3y - z).$$
   (a) Determine o núcleo e a imagem de T e suas dimensões.
   (b) Calcule $T^2 = T \circ T$.
   (c) Mostre que T é invertível.
   (d) Determine a transformação inversa T^{-1}. Quais são seus núcleo e imagem?

9. Seja $T : V \to V$ um operador linear e C o conjunto dos vetores de V que são deixados fixos por T, ou seja,
$$C = \{\vec{v} \in V\ :\ T(\vec{v}) = \vec{v}\}.$$
Mostre que C é um subespaço vetorial de V.

10. Sejam S e T os operadores lineares em $\mathbb{R}^2$ definidos por $S(x, y) = (0, x)$ e $T(x, y) = (x, 0)$. Mostre que $ST = 0$, mas que $TS \neq 0$. Mostre também que $T^2 = T$.

11. Sendo F, G e $H \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definidos por $F(x, y) = (x, 2y)$, $G(x, y) = (y, x + y)$ e $H(x, y) = (0, x)$, determinar $F + H$, $F \circ G$, $G \circ (H + F)$, $G \circ F$ e $H \circ F$.

12. Sejam F e G operadores lineares de um espaço vetorial V. Mostre que $\ker G \subset \ker(F \circ G)$. Dê um exemplo onde vale a igualdade.

13. Sejam $F \in \mathcal{L}(U, V)$ e $G \in \mathcal{L}(V, W)$ tais que $\ker F = \{0\}$ e $\ker G = \{0\}$. Prove que $\ker(G \circ F) = \{0\}$.

14. Ache uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cuja imagem é gerada por $(1, 2, 0, -4)$ e $(2, 0, -1, -3)$.

15. Qual é a aplicação A que representa uma contração de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ seguida por uma rotação de $45°$?

16. (Sel. Mestrado UFRGS/2007/2) Obtenha todas as transformações lineares $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que $L(u) = 3u$, $L(v) = 3v$ e $L(w) = 3w$, onde $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ e $w = (0, 1, 1)$.

17. (Sel. Mestrado UFSM/2013/2) Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$, dos polinômios de graus menor ou igual a 2, e a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to P_2(\mathbb{R})$ determinada por $T(1, 0) = 1 - t$ e $T(0, 1) = 1 - t^2$.

    (a) Encontre o núcleo e a imagem da transformação T.

    (b) Esta transformação é injetiva, sobrejetiva, bijetiva? Justifique sua resposta.

18. (Sel. Mestrado UFRGS/2011/2) Sejam U e V dois espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $T : U \to V$ uma transformação linear. Considere $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k\} \subset U$.

    (a) Mostre que se $\{T(\vec{u}_1), T(\vec{u}_2), ..., T(\vec{u}_k)\}$ é linearmente independente em V, então S é linearmente independente em U.

    (b) Mostre que se T é injetora e S é linearmente independente em U, então $\{T(\vec{u}_1), T(\vec{u}_2), ..., T(\vec{u}_k)\}$ é linearmente independente em V.

19. Sejam $\alpha = \{(1, -1), (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, e

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

    (a) Ache T.

    (b) Se $S(x, y) = (2y, x - y, x)$, ache $[S]^\alpha_\beta$.

    (c) Ache uma base γ tal que $[T]^\alpha_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

20. Se $[R] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, ache $R \circ S$.

21. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja matriz com relação à base canônica seja

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine $T(x, y, z)$.

   (b) Qual é a matriz do operador T com relação à base $\beta = \{(-1, 1, 0), (1, -1, 1), (0, 1, -1)\}$?

   (c) O operador T é invertível? Justifique.

22. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$

   (a) Determine uma base do núcleo de T.

   (b) Dê a dimensão da imagem de T.

   (c) T é sobrejetora? Justifique.

   (d) Faça um desenho para $\ker T$ e $\operatorname{Im} T$.

23. Determine a representação matricial de cada um dos seguintes operadores do $\mathbb{R}^2$ em relação às bases indicadas:

   (a) $F(x, y) = (2x, 3y - x)$ e base canônica.

   (b) $F(x, y) = (3x - 4y, x + 5y)$ e base $\beta = \{(1, 2), (2, 3)\}$.

24. (Sel. Mestrado UFSM/2015/2) Seja P_2 o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a dois.

   (a) Verifique que $\beta = \{1 + t, -1 + t, t^2\}$ é uma base de P_2.

   (b) Verifique que $T : P_2 \to P_2$ definido por $T(f(t)) = \frac{df(t)}{dt} - f(t)$ é um operador linear.

   (c) Encontre a matriz que representa T com relação à base β.

25. (Sel. Mestrado UFRGS/2008/1) Seja P_n o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n:

$$P_n = \{f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n,\ t \in \mathbb{R}, a_i \in \mathbb{R}\}.$$

   (a) Obtenha uma base e a dimensão de P_4.

   (b) Mostre que P_3 é um subespaço vetorial de P_4.

   (c) Considere o operador linear $D : P_4 \to P_4$ definido como $Df(x) = \frac{df}{dx}(x)$. Obtenha a matriz da transformação linear D numa base conveniente de P_4.

   (d) O operador D do item (c) é injetivo? É sobrejetivo?