RESOLUÇÃO EXERCÍCIOS – LISTA 04.

PROF. MAURÍCIO ZAHN.

02) <u>A_1</u>: $\vec{u} \oplus (\vec{v} \oplus \vec{w}) \stackrel{?}{=} (\vec{u} \oplus \vec{v}) \oplus \vec{w}$:

$$\vec{u} \oplus (\vec{v} \oplus \vec{w}) = \vec{u} \oplus (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{u} - (\vec{v} - \vec{w})$$
$$= \vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{w} = (\vec{u} \oplus \vec{v}) + \vec{w}$$
$$= (\vec{u} \oplus \vec{v}) - (-\vec{w}) = (\vec{u} \oplus \vec{v}) \oplus (-\vec{w}).$$

Logo, a adição não é associativa.

<u>A_2</u>: $\vec{u} \oplus \vec{v} \stackrel{?}{=} \vec{v} \oplus \vec{u}$:

$\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{u} - \vec{v}$; mas

$\vec{v} \oplus \vec{u} = \vec{v} - \vec{u}$. Logo, "$\oplus$" não é comutativa.

<u>A_3</u>: ¿$\exists\ \vec{0} \in V$ tal que $\vec{u} \oplus \vec{0} = \vec{u} = \vec{0} + \vec{u}$?

$\vec{u} \oplus \vec{0} = \vec{u} - \vec{0} = \vec{u}$; mas

$\vec{0} \oplus \vec{u} = \vec{0} - \vec{u} = -\vec{u}$.

Logo, as duas igualdades não valem.

VERIFICAREMOS OS DOIS CASOS POIS VIMOS ACIMA QUE A COMUTATIVIDADE NÃO VALE.

<u>A_4</u>: $\exists -\vec{u}$ tal que $\vec{u} \oplus -\vec{u} = \vec{0}$

Na verdade, é o próprio $\vec{u}$:

$$\vec{u} \oplus \vec{u} = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}.$$

<u>M_1</u>: $\alpha \odot (\vec{u} \oplus \vec{v}) \stackrel{?}{=} \alpha \odot \vec{u} \oplus \alpha \odot \vec{v}$:

$$\alpha \odot (\vec{u} \oplus \vec{v}) = \alpha \odot (\vec{u} - \vec{v}) = -\alpha . (\vec{u} - \vec{v})$$
$$= -\alpha \vec{u} + \alpha \vec{v} \quad ; \text{ e}$$

$$\alpha \odot \vec{u} \oplus \alpha \odot \vec{v} = -\alpha . \vec{u} \oplus (-\alpha . \vec{v}) = -\alpha \vec{u} - (-\alpha \vec{v})$$
$$= -\alpha \vec{u} + \alpha \vec{v}.$$

Logo, M_1 é verdadeiro.

$\underline{M_2}$: $(\alpha+\beta)\odot\vec{u} \overset{?}{=} \alpha\odot\vec{u} \oplus \beta\odot\vec{u}$

$(\alpha+\beta)\odot\vec{u} = -(\alpha+\beta)\vec{u}$, ~~mas~~:

$\alpha\odot\vec{u} \oplus \beta\odot\vec{u} = -\alpha\vec{u} \oplus (-\beta\vec{u}) =$
$= -\alpha\vec{u} - (-\beta\vec{u}) = -(\alpha-\beta)\vec{u}$.

Logo, M_2 é falsa!

$\underline{M_3}$: $\alpha\odot(\beta\odot\vec{u}) \overset{?}{=} (\alpha.\beta)\odot\vec{u}$:

$\alpha\odot(\beta\odot\vec{u}) = \alpha\odot(-\beta\vec{u}) = -\alpha.(-\beta\vec{u}) = \alpha.(\beta\vec{u})$
$= (\alpha.\beta)\vec{u}$;

e:

$(\alpha.\beta)\odot\vec{u} = -(\alpha.\beta).\vec{u}$.

Logo, M_3 não vale.

$\underline{M_4}$: $1\odot\vec{u} \overset{?}{=} \vec{u}$:

$1\odot\vec{u} = -1.\vec{u} = -\vec{u}$. Logo, M_4 não vale.

$\underline{\text{Conclusão}}$: valem A_1; A_4 e M_1, apenas.

---

03) $V = \mathbb{R}^4$.

(a) $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0 \text{ e } z-t=0\}$.

Como,

$x+y=0 \Rightarrow y=-x$
$z-t=0 \Rightarrow t=z$, temos que

$W = \{(x,-x,z,z) : x,z \in \mathbb{R}\}$

Assim, dados $\vec{u}=(a,-a,b,b)$, $\vec{v}=(\alpha,-\alpha,\beta,\beta)$ em $\mathbb{R}^4$ e $m \in \mathbb{R}$, temos que:

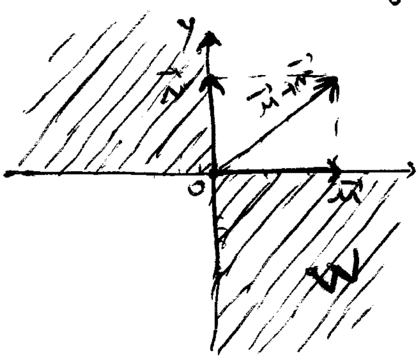
(a) $\vec{u}+\vec{v} = (a,-a,b,b)+(\alpha,-\alpha,\beta,\beta)$
$= (a+\alpha, -(a+\alpha); b+\beta, b+\beta) \in W$;

(b) $m.\vec{u} = m.(a,-a,b,b) = (ma,-ma,mb,mb) \in W$.

Logo, W é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

---

05) $V=\mathbb{R}^2$. Seja $W = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy \leq 0\}$.



W não é subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$, pois, por exemplo, $\vec{u}=(1,0)$ e $\vec{v}=(0,1)$; temos que $\vec{u},\vec{v}\in W$, mas $\vec{u}+\vec{v}=(1,1)\notin W$.

---

07) $V = \{f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$.
$V_p = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : f(x)=f(-x)\}$.
$V_i = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} : f(-x) = -f(x)\}$.

Mostrar: V_p e V_i são subespaços de V.

Vamos mostrar apenas que V_p é subespaço de V, e deixaremos a outra para o leitor. Dados $f,g\in V_p$ e $\alpha\in\mathbb{R}$. Então;

(a) $f+g \in V_p$: De fato, $\forall x\in\mathbb{R}$, temos que
$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = f(-x)+g(-x) =$$
$$= (f+g)(-x).$$

(b) $\alpha.f\in V_p$: De fato; $\forall x\in\mathbb{R}$, temos que
$$(\alpha.f)(x) = \alpha.f(x) = \alpha.f(-x) = (\alpha.f)(-x).$$ ☐

10) $V = C(\mathbb{R})$. Sejam $f(x) = \cos^2 x$ e $g(x) = \operatorname{sen}^2 x$.

Seja $[f, g]$ o subespaço gerado por f e g.

(a) $\cos 2x \in [f, g]$? Sim, pois

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = (1.f - 1.g)(x)$$

Logo, $\cos 2x \in [f, g]$.

(b) $3 + x^2 \notin [f, g]$.

(c) $1 \in [f, g]$, pois

$$1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = (1.f + 1.g)(x)$$

(d) $\operatorname{sen} x \notin [f, g]$.

(e) $0 \in [f, g]$, pois

$$0 = 0.\cos^2 x = 0.f$$, por exemplo.

---

11) $f(t) = \operatorname{sen} t$; $g(t) = \cos t$ e $h(t) = t$.

AF: f, g, h são L.I. :

De fato; dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha.f + \beta g + \gamma.h = 0 \iff$$

$$\iff \boxed{\alpha.\operatorname{sen} t + \beta.\cos t + \gamma.t = 0} \quad (*)$$

Derivando em t, obtemos:

$$\boxed{\alpha.\cos t - \beta.\operatorname{sen} t + \gamma = 0} \quad (\oplus)$$

Derivando, novamente em t;

$$-\alpha \operatorname{sen} t - \beta \cos t = 0 \iff \boxed{\alpha.\operatorname{sen} t + \beta \cos t = 0} \quad (**)$$

Juntando $(*)$ e $(**)$, obtemos:

$$\gamma.t = 0 \iff \boxed{\gamma = 0}$$

Montando $(\circledast)$ e $(**)$, obtemos: $(\gamma = 0)$

$$\begin{cases} \alpha \cos t - \beta \operatorname{sen} t = 0 \\ \alpha \cdot \operatorname{sen} t + \beta \cos t = 0 \end{cases}$$

Elevando ambos ao quadrado e somando, vamos obter:

$$+\begin{cases} \alpha^2 \cos^2 t - 2\alpha\beta \cancel{\operatorname{sen} t \cos t} + \beta^2 \operatorname{sen}^2 t = 0 \\ \alpha^2 \cdot \operatorname{sen}^2 t + 2\alpha\beta \cdot \cancel{\operatorname{sen} t \cdot \cos t} + \beta^2 \cos^2 t = 0 \end{cases}$$

$$\alpha^2 (\underbrace{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}_{=1}) + \beta^2 (\underbrace{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}_{=1}) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0 \iff \boxed{\alpha = \beta = 0}$$

Portanto, determinamos que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ou seja, f, g e h são L.I.

14) Suponha $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ L.I., mostrar que $\vec{u}+\vec{v}$; $\vec{u}+\vec{w}$ e $\vec{v}+\vec{w}$ também são L.I.

Como $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são L.I.; então, $\exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = \vec{0}. \qquad (*)$$

Note que:

$$\alpha \cdot (\vec{u}+\vec{v}) + \beta \cdot (\vec{v}+\vec{w}) + \gamma \cdot (\vec{u}+\vec{w}) = \vec{0} \iff$$

$$\iff \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} + \beta\vec{v} + \beta\vec{w} + \gamma\vec{u} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \iff$$

$$\iff \underbrace{(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w})}_{0} + (\gamma\vec{u} + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \vec{0} \iff$$

$$\gamma\vec{u} + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} = \vec{0}$$

$\alpha = \beta = \gamma = 0$, por $(*)$. !

Logo, também são L.I. $\square$

20) Mostrar: $\mathbb{R}^3 = [(1,1,1); (1,1,0); (0,1,1)]$.

(a) eles são L.I.:

$\alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,1,1) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow 0 + \gamma = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = 0}$

$\longrightarrow \alpha + \underbrace{\gamma}_{=0} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

$\underbrace{\alpha}_{0} + \beta = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$

Logo, os vetores são L.I.

(b) $\mathbb{R}^3 = [(1,1,1); (1,1,0); (0,1,1)]$:

Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Assim:

$(x,y,z) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,1,1) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha + \beta + \gamma = y \\ \alpha + \gamma = z \end{cases}$$

$\longrightarrow x + \gamma = y \Rightarrow \boxed{\gamma = y - x}$

$\longrightarrow \alpha + (y - x) = z \Rightarrow \boxed{\alpha = x - y + z}$

$\underbrace{\alpha + \beta}_{x} + \gamma = y \Rightarrow \boxed{\gamma = y - x}$

$\underline{\beta} = x - \alpha = x - (x - y + z) = \underline{y - z}$

Assim;

$(x,y,z) = (x - y + z).(1,1,1) + (y - z).(1,1,0) + (y - x)(0,1,1)$,

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Portanto, por (a) e (b) segue o resultado. $\square$