ALG. LINEAR PROF. MAURÍCIO ZAHN.
RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DA LISTA 03

05) Seja M tal que $\det M \neq 0$. Então M é inversível.
Logo, $\exists\, M^{-1}$ inversa de M.

Sendo $M.N = M.P$; multiplicando à esquerda por M^{-1}, obtemos

$$M^{-1}(MN) = M^{-1}(M.P)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(M^{-1}.M)}_{= I}.N = \underbrace{(M^{-1}.M)}_{= I}.P \Rightarrow \boxed{N = P}$$

---

08) $A \sim B$ se $\exists\, P$ tal que $B = P^{-1}.A.P$ (P inversível)

"SEMELHANTE"

Suponha que $A \sim B$. Mostrar: $\det A = \det B$.

Antes, porém precisamos provar uma propriedade, que não foi dada em aula:

LEMA: Se P for uma matriz inversível com inversa P^{-1}, então $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det P}$.

PROVA: De fato, como $P.P^{-1} = I$; e como $\det(X.Y) = \det X . \det Y$, segue que

$$\det(P.P^{-1}) = \det I = 1$$

$$\Rightarrow \det P . \det P^{-1} = 1 \Rightarrow \det P^{-1} = \frac{1}{\det P} \quad \square$$

Voltando ao exercício; precisamos mostrar que
$\det A = \det B$, onde.

$B = P^{-1}.A.P.$

De fato;

$\det B = \det(P^{-1}.A.P) = \det P^{-1}. \det A. \det P$

$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\cancel{\det P}} . \det A . \cancel{\det P} = \det A$

pelo LEMA

□

---

09) Seja A tal que $A^2 = A$, i.e; $A.A = A$.

Obter: $\det A$.

Note que, de $A.A = A$, calculando o determinante, vem:

$$\left.\begin{array}{l} \det(A.A) = \det A \\ \quad \parallel \\ \det A . \det A \end{array}\right\} \Rightarrow \det A . \cancel{\det A} = \cancel{\det A}$$

$$\boxed{\det A = 1}$$

□

---

10) Seja A tal que $A.A^T = I$. Mostrar que $\det A = \pm 1$.

De fato, sendo $A.A^T = I$, então

$$\left.\begin{array}{l} \det(A.A^T) = \det I = 1 \\ \quad \parallel \\ \det A . \det A^T \end{array}\right\} \Rightarrow \det A . \det A^T = 1,$$

e como $\det A = \det A^T$, segue que:

$\det A . \det A = 1$

$\Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{\det A = \pm 1}$ (02)

□

12) $A \cdot M = M \cdot B$, com M inversível , i.e, $\exists M^{-1}$ tal que $M \cdot M^{-1} = I$ e $M^{-1} \cdot M = I$.

Mostrar que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;

$$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$$

De fato, se $AM = MB$, então

$AM - MB = 0$; e como $\lambda M = M \lambda$;

$$AM - \lambda M + M\lambda - MB = 0$$

$$\Rightarrow (A - \lambda I) M + M(\lambda I - B) = 0$$

$$\Rightarrow (A - \lambda I) \cdot M = M(B - \lambda I) \quad ; \text{ logo; }$$

$$\det[(A - \lambda I) \cdot M] = \det[M \cdot (B - \lambda I)]$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda I) \cdot \det M = \det M \cdot \det(B - \lambda I) \; ; \quad (*)$$

e como M é inversível, segue que $\det M \neq 0$, e assim podemos simplificar $(*)$, dividindo por $\det M$; obtendo:

$$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I) \qquad \square$$

15) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(a) adj A :

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6-1=5$; $A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -(0-5) = 5$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0-10 = -10$; $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3+3) = -6$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6+15 = 21$; $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(2-5) = 3$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+6 = 7$; $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2-0) = -$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4-0 = 4.$$

$$\Rightarrow \text{adj}\, A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 5 & 21 & -2 \\ -10 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) det A :

$$\det A = 2 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 5 \cdot A_{31}$$

$$= 2 \cdot 5 + 0 \cdot (-6) + 5 \cdot 7 = 10 + 0 + 35 = \underline{\underline{45}}.$$

(c) A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}\, A = \frac{1}{45} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ 5 & 21 & -2 \\ -10 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

<u>Obs</u>: NÃO PRECISA DISTRIBUIR O ESCALAR $\frac{1}{45}$.