ÁLGEBRA LINEAR I.
RESOLUÇÃO DE ALGUNS EXERCÍCIOS – LISTA 1.
PROF. MAURÍCIO.

02) $A \cdot A^t$ e $A^t \cdot A = ?$

Note que, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, temos que

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, e disso, temos:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+0 & 3-2+0 \\ 3-2+0 & 9+1+16 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 26 \end{pmatrix} ; \text{ e}$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2-3 & 0+12 \\ 2-3 & 4+1 & 0-4 \\ 0+12 & 0-4 & 0+16 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -1 & 12 \\ -1 & 5 & -4 \\ 12 & -4 & 16 \end{pmatrix} .$$

---

03) $D = (d_{ij})_{3\times3} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{pmatrix}$$

Logo; efetuando o produto, obtemos:

(I) $ax = 2$

(II) $b = 3$

(III) $2c = 10 \Rightarrow c = 5$

(IV) $3a = 6 \Rightarrow a = 2$

(V) $by = 12$

(VI) $5c = 25 \Rightarrow c = 5$

(VII) $2a = 4 \Rightarrow a = 2$.

(VIII) $cz = 20$.

De (I) e (VII) obtemos

$$2x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 1}.$$

De (II) e (V) obtemos

$$3y = 12 \Rightarrow \boxed{y = 4}$$

De (III) e (VIII) obtemos

$$5z = 20 \Rightarrow \boxed{z = 4}$$

Resposta: $x = 1$; $y = z = 4$.

---

04) É falso, pois, por exemplo, tomando $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, temos que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2\times2},$$

mas

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_{2\times2}.$$

Obs: PARA MOSTRAR QUE UMA SUPOSTA PROPRIEDADE NÃO VALE, OU SEJA, QUE ELA É FALSA, BASTA EXIBIR UM CONTRA-EXEMPLO QUALQUER. NÃO PRECISA ELABORAR UM CONTRA-EXEMPLO "MIRABOLANTE", BASTA UM BEM SIMPLES, COMO ACIMA.

---

09)

$$(A+B) \cdot A^{-1} \cdot (A-B) = (A+B) \cdot (A^{-1} \cdot A - A^{-1} \cdot B) =$$

$$= (A+B) \cdot (I - A^{-1} \cdot B) = (A+B) \cdot I - (A+B) \cdot A^{-1} \cdot B$$

$$= A + B - \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} \cdot B - B \cdot A^{-1} B = A + \cancel{B} - \cancel{B} - B \cdot A^{-1} \cdot B =$$

$$= A - BA^{-1}B \quad (*)$$ Por outro lado;

02

$$\underbrace{(A-B)A^{-1}\cdot(A+B)} = (A-B)\cdot(A^{-1}\cdot A + A^{-1}\cdot B) =$$

$$= (A-B)\cdot(I + A^{-1}\cdot B) = (A-B)\cdot I + (A-B)\cdot A^{-1}\cdot B$$

$$= A - B + \underbrace{A\cdot A^{-1}}_{\overset{\shortparallel}{I}}\cdot B - BA^{-1}B = A - \cancel{B} + \cancel{B} - BA^{-1}B$$

$$= \underline{A - BA^{-1}B}. \quad (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ segue a igualdade. $\square$

---

10) Note que $A$ é uma matriz triangular (superior) (ou inferior)
Como $A$ é inversível $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ temos que
$A$ é inversível $\Leftrightarrow$ $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \neq 0$ ( o determinante de uma matriz triangular é o ~~prod~~ produto dos elementos da diagonal). A inversa será

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}, \text{ pois nesse}$$

caso $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_n$. $\square$

- OUTRO ARGUMENTO DE RESOLUÇÃO, SEM USAR O CONCEITO DE DETERMINANTE:

Para $A$ ser inversível, a forma escalonada reduzida por linhas de $A$ deve ser $I_n$. Dessa forma, somos obrigados a concluir que todos os $a_i$ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ deveriam ser diferentes de zero, pois senão uma linha seria nula e daí $A$ não seria inversível. Além disso, a inversa de $A$ será $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}$, pois

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_n. \quad \square$$

12) $A_{m\times m}$ e $B_{m\times m}$ simétricas, i.e; $A^t = A$.

(a) $A+B$ é simétrica: De fato, basta notar que

$$\underbrace{(A+B)^t}_{} = A^t + B^t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pois } A^t = A \text{ e } B^t = B}}{=} \underbrace{A+B}_{}.$$

Logo, $A+B$ é simétrica!

(b) Se $AB = BA$, com $A$ e $B$ simétricas. Mostrar:

$A\cdot B$ é simétrica.

De fato:

$$(A\cdot B)^t = B^t . A^t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pois } B^t = B \\ \text{e } A^t = A}}{=} B.A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por hipótese}}}{=} A\cdot B \implies (A\cdot B)^t = A\cdot B.$$

Logo, $A\cdot B$ é simétrica.

$\square$

---

13) NÃO FAZER.

---

17) (b)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \underbrace{2 \quad 5 \quad 4}_{A} & & & \underbrace{0 \quad 0 \quad 1}_{I} & & \end{array}\right) \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{l_2 \hookrightarrow l_2 - 3l_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{l_3 \hookrightarrow l_3 - 2l_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{l_2 \to \frac{1}{4} l_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{l_3 \to l_3 - 5 l_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{11}{4} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{l_3 \to \frac{2}{21} l_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{42} & \frac{11}{42} & \frac{2}{21} \end{array}\right) \xrightarrow{l_2 \to l_2 + \frac{5}{2} l_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{84} & -\frac{8}{84} & \frac{5}{21} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{42} & \frac{11}{42} & \frac{2}{21} \end{array}\right) \xrightarrow{l_1 \to l_1 - 3 l_3} \left( \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I} \middle| \underbrace{\begin{matrix} \frac{15}{42} & \frac{9}{42} & -\frac{6}{21} \\ -\frac{4}{84} & -\frac{8}{84} & \frac{5}{21} \\ -\frac{5}{42} & \frac{11}{42} & \frac{2}{21} \end{matrix}}_{A^{-1}} \right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{15}{42} & \frac{9}{42} & -\frac{6}{21} \\ -\frac{4}{84} & -\frac{8}{84} & \frac{5}{21} \\ -\frac{5}{42} & \frac{11}{42} & \frac{2}{21} \end{pmatrix}.$$

PS.: confira os cálculos!

---

18) $A_{3\times 3}$. Achar $B$ tal que $BA$ resulta em efetuar em $A$: $l_1 \leftrightarrow l_2$ e depois $l_3 \to 6.l_3$. Logo;

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

são as matrizes elementares associadas às op. elementares dadas.

Logo; escreva $E_2 E_1 A = BA$; onde $B = E_2 . E_1$, ~~isto~~ é,

$$\underset{\sim}{B} = E_2 \cdot E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}.$$

---

20) Suponha $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$ uma matriz elementar.

Logo, a 3ª linha resulta de <u>apenas uma</u> operação elementar sobre linhas de $I_3$, e então só pode ser:

(i) $l_3 \hookrightarrow l_3 + b \cdot l_2$, e então $a = 0$ e $b \in \mathbb{R}$,
donde segue que $\underbrace{a \cdot b = 0}$;

(ii) $l_3 \hookrightarrow l_3 + a \cdot l_1$; e então $a \in \mathbb{R}$ e $b = 0$,
donde segue que $\underbrace{a \cdot b = 0}$.

(iii) $l_3 \hookrightarrow 1 \cdot l_3$, e então $a = b = 0$, donde segue que $\underbrace{a \cdot b = 0}$.

Em qualquer dos casos possíveis segue que $a \cdot b = 0$. $\square$

---

22) Sejam, A, B e C $n \times n$ tais que $A = B.C$

Suponha B inversível. Logo, existe uma seq. de op. elementares sobre linhas que reduz B à $I_n$. Como a cada op. elementar sobre linhas está associada a uma matriz elementar, segue que existem $E_1, E_2, \dots, E_k$ matrizes elementares tais que

$$E_k \cdots E_1 B = I$$

multiplicando à direita por C, temos

$$(E_k \cdots E_1 B) \cdot C = C \ ;$$

o que, por associatividade;

$$E_k \cdots E_1 \cdot (BC) = C$$ ; como $A = B.C$, temos

$$E_k \cdots E_1 \cdot A = C \ ;$$

ou seja, a mesma seq. de op. elementares sobre linhas que reduz B a $I_n$ também reduz A à C. $\square$.