Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear
Lista 04 de Exercícios - Espaços vetoriais
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Seja $\mathbb{R}^\infty$ o conjunto de todas as sequências infinitas de números reais, ou seja,

$$\mathbb{R}^\infty = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \,:\, x_i \in \mathbb{R}\},$$

munido da operações de adição

$$(x_1, x_2, ..., x_n, ...) + (y_1, y_2, ..., y_n, ...) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n, ...),$$

e multiplicação por escalar

$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n, ...).$$

Mostre que $\mathbb{R}^\infty$ munido das operações acima é um espaço vetorial.

2. Em $\mathbb{R}^n$ defina as operações

$$\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{u} - \vec{v} \quad \text{e} \quad \alpha \odot \vec{u} = -\alpha \cdot \vec{u}.$$

Quais axiomas de espaço vetorial são satisfeitos para $(\mathbb{R}^n, \oplus, \odot)$?

3. Mostre que os seguntes subconjuntos do $\mathbb{R}^4$ são subespaços vetoriais:

   (a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$.

   (b) $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0\}$.

4. Verifique se são espaços vetoriais os seguintes conjuntos:

   (a) o $\mathbb{R}^2$ munido da adição usual e a multiplicação $\alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$.

   (b) o $\mathbb{R}^2$ munido da adição $(x_1, y_1)+(x_2, y_2) = (x_1+2x_2, y_1+2y_2)$ e a multiplicação por escalar usual.

   (c) o $\mathbb{R}^2$ munido da adição $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (y_1 + y_2, x_1 + x_2)$ e a multiplicação por escalar usual.

5. Seja $V = \mathbb{R}^2$ e considere o subconjunto

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy \leq 0\}.$$

Desenhe $W \subset \mathbb{R}^2$ e verifique se W é um subespaço vetorial, justificando sua resposta.

6. Seja V o espaço vetorial real de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Quais dos seguintes conjuntos de funções são subespaços de V?

   (a) de todas as funções f tais que $f(x^2) = f(x)^2$.

   (b) de todas as funções f tais que $f(0) = f(1)$.

   (c) de todas as funções f tais que $f(-1) = 0$.

   (d) de todas as funções contínuas.

7. Seja V o espaço vetorial de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Seja V_p o subconjunto de todas as funções pares, i.e., tais que $f(-x) = f(x)$; e seja V_i o subconjunto de todas as funções ímpares, i.e., tais que $f(-x) = -f(x)$. Prove que V_p e V_i são subespaços de V.

8. Escreva a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ como uma combinação linear das matrizes

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. Considere o espaccco vetorial $P_2 = \{at^2 + bt + c \; : \; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e os vetores $p_1 = t^2 - 2t + 1$, $p_2 = t + 2$ e $p_3 = 2t^2 - t$.

   (a) Escreva o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1, p_2 e p_3.

   (b) Determine uma condição para a, b e c de modo que o vetor $at^2 + bt + c$ seja uma combinação linear de p_2 e p_3.

10. Seja $V = C(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e considere os vetores $f = \cos^2 x$ e $g = \operatorname{sen}^2 x$. Quais dos seguintes vetores pertencem a $[f, g]$?

    (a) $\cos 2x$ (b) $3 + x^2$ (c) 1 (d) $\operatorname{sen} x$ (e) 0

11. Seja V o espaço vetorial das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mostre que $f, g, h \in V$ dados abaixo são linearmente independentes:

$$f(t) = \operatorname{sen} t, \; g(t) = \cos t \; \text{ e } \; h(t) = t.$$

12. Os vetores $\vec{u}_1 = (1, 1, 2, 4)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, -5, 2)$, $\vec{u}_3 = (1, -1, -4, 0)$ e $\vec{u}_4 = (2, 1, 1, 6)$ do $\mathbb{R}^4$ são L.I. ou L.D. ?

13. Mostre que o conjunto de vetores $\{1+x;\, 3x+x^2;\, 2+x-x^2\}$ é um conjunto linearmente independente em P_2.

14. Mostre que, se u, v e w são vetores LI, então $u + v$, $u + w$ e $v + w$ também são LI.

15. Considere $V[a, b]$ como sendo o espaço de todas as funções reais de uma variável real t de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$. Mostrar que os seguintes pares de vetores a seguir são LI:
    (a) t, t^2. (b) te^t, e^{2t}. (c) $\sin t, \cos t$. (d) $\cos t, \cos 3t$.

16. Defina a *média* $u \star v$ entre os vetores de um espaço vetorial V pondo $u \star v = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v$. Prove que $(u \star v) \star w = u \star (v \star w)$ se, e somente se, $u = w$.

17. Dados os espaços vetoriais V_1 e V_2, considere o conjunto $E = V_1 \times V_2$, cujos elementos são os pares ordenados $v = (v_1, v_2)$, onde $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$. Defina operações que tornem V um espaço vetorial.

18. Quais dos seguintes conjuntos formam uma base para $\mathbb{R}^3$?
    (a) $\{(1, 1, -1); (2, -1, 0); (3, 2, 0)\}$ (b) $\{(1, 0, 1); (0, -1, 2); (-2, 1, -4)\}$
    (c) $\{(2, 1, -1); (-1, 0, 1); (0, 0, 1)\}$ (d) $\{(1, 2, 3); (4, 1, 2)\}$

19. Mostrar que os vetores $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{w} = (3, 0, 2)$ e $\overrightarrow{s} = (2, -1, 1)$ geram o $\mathbb{R}^3$ e encontrar uma base dentre estes vetores.

20. Mostre que $\mathbb{R}^3 = [(1, 1, 1);\, (1, 1, 0);\, (0, 1, 1)]$.

21. Mostre que $P_3 = [x^2 + x^3;\, x;\, 2x^2 + 1;\, 3]$.

22. Encontre os valores de $a \in \mathbb{R}$ para que o conjunto

$$\beta = \{(a, 1, 0); (1, a, 1); (0, 1, a)\}$$

seja uma base para $\mathbb{R}^3$.

23. Mostre que os polinômios $1 - t^3$, $(1 - t^2)$, $1 - t$ e 1 geram o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 3.

24. (a) Um certo espaço vetorial V é gerado por cinco vetores LI. O que se pode dizer sobre a dimensão de V?

    (b) Um certo espaço vetorial V é gerado por cinco vetores LD. O que se pode dizer sobre a dimensão de V?

25. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e o conjunto $\beta = \{(0, 1, 1); (1, 1, 0); (1, 2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

    (a) Mostre que β não é uma base para $\mathbb{R}^3$.

    (b) Determine uma base para $\mathbb{R}^3$ que possua dois elementos de β.

26. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes subespaços: $S = [(1, -1, 2); (2, 1, 1)]$; $T = [(0, 1, -1); (1, 2, 1)]$; $U = \{(x, y, z) : x+y = 4x-z = 0\}$ e $V = \{(x, y, z) : 3x - y - z = 0\}$. Determine as dimensões de $S, T, U, V, S + T$ e $S \cap T$.

27. Qual é a dimensão do espaço das matrizes 2×2 diagonais?

28. Sejam S, T subespaços do $\mathbb{R}^4$ dados por

$$S = [(1, -1, 2, 3); (1, 1, 2, 0); (3, -1, 6, -6)]$$

e

$$T = [(0, -2, 0, -3); (1, 0, 1, 0)].$$

Determine as dimensões de S, T e $S \cap T$.

29. Mostre que cada conjunto a seguir é uma base para o $\mathbb{R}^2$. Em seguida, determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u} = (6, 2)$ em relação a cada uma das bases dadas.
    (a) $\alpha = \{(3, 0); (0, 3)\}$ (b) $\beta = \{(1, 2); (2, 1)\}$
    (c) $\gamma = \{(1, 0); (0, 1)\}$ (d) $\delta = \{(0, 1); (1, 0)\}$

30. Quais são as coordenadas de $\overrightarrow{u} = (1, 0, 0)$ em relação à base

$$\beta = \{(1, 1, 1); (-1, 1, 0); (1, 0, -1)\}$$

do $\mathbb{R}^3$?

31. Determinar as coordenadas do vetor $u = (2, 1, 4) \in \mathbb{R}^3$ em relação às bases:
    (a) canônica; (b) $\beta = \{(1, 1, 1); (1, 0, 1); (1, 0, -1)\}$.

32. Mostre que os vetores $v_1 = (2, 6, 3)$, $v_2 = (1, 5, 4)$ e $v_3 = (-2, 1, 7)$ formam uma base do $\mathbb{R}^3$. Expresse o vetor $v = (3, 7, 1)$ como uma combinação linear de v_1, v_2 e v_3. Quais são as coordenadas de v em relação à base $\{v_1, v_2, v_3\}$?

33. Determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ em relação a cada base do $\mathbb{R}^3$ dada.

    (a) $\beta = \{(1, 1, -1); (1, -1, 1); (-1, 1, 1)\}$

    (b) $\beta = \{(1, 0, 0); (1, 2, 1); (0, 5, 2)\}$

34. Ache a matriz de mudança de base da base $\beta = \{(1, 1, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 3)\}$ para a base canônica do $\mathbb{R}^3$.

35. No espaço $\mathbb{R}^2$ consideremos as bases $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ (canônica) e $\gamma = \{g_1, g_2, g_3\}$ relacionadas da seguinte maneira:

$$g_1 = e_1 + e_3$$

$$g_2 = 2e_1 + e_2 + e_3$$

$$g_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

    Determinar as matrizes de mudança de base de β para γ e de γ para β.