Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Trigonometria - Prof. Dr. Maurício Zahn
Lista 02 de Exercícios

1. Dados os arcos abaixo, obtenha a menor determinação, localizando em qual quadrante pertence, quantas voltas dá no ciclo trigonométrico e escreva sua expressão geral.

   (a) $\widehat{AM} = 1290°$ (b) $\widehat{AT} = 23550°$ (c) $\widehat{AP} = -2170°$

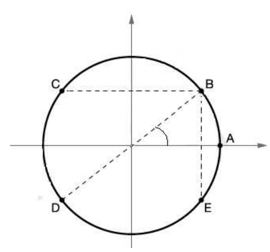
2. Calcule o valor numérico das expressões:

   (a) $y = \dfrac{4 \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} + 2 \cdot \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}}{\tan^2\dfrac{\pi}{6} - 1}$ (b) $y = \dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4} + \tan\dfrac{3\pi}{4}}{2 \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} - \tan 6\pi}$

3. Localize, em ordem crescente no ciclo trigonométrico, os números:

   (a) $\operatorname{sen} 40°$, $\operatorname{sen} 125°$, $\operatorname{sen} 244°$, $\operatorname{sen} 310°$.
   (b) $\cos 48°$, $\cos 100°$, $\cos 200°$ e $\cos 300°$.
   (c) $\tan 60°$, $\tan 120°$, $\tan 210°$ e $\tan 330°$.

4. Considere o arco $\widehat{AB} = 30°$. Determine, por simetria, os arcos $\widehat{AC}$, $\widehat{AD}$ e $\widehat{AE}$ destacados no ciclo trigonométrico abaixo. Em seguida, determine os valores do seno, cosseno e tangente de cada um desses arcos.



5. Considere um polígono regular de n lados com medida de cada lado igual a ℓ, inscrito numa circunferência de raio R. Da Geometria sabemos que, se traçarmos todas as diagonais desse polígono, formaremos n triângulos isósceles.

   (a) Destacando um desses triângulos isósceles do polígono regular, considerando o vértice onde está o centro da circnferência, conclua que a medida de seu ângulo interno, em radianos, é dada por $\frac{2\pi}{n}$.
   (b) Mostre que a área A_n do polígono regular de n lados pode ser determinado pela fórmula
   $$A_n = \frac{n \cdot \ell^2}{4 \cdot \tan\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}.$$
   (c) Usando a fórmula acima, encontre as fórmulas para determinar a área de um quadrado de lado ℓ, de um triângulo equilátero de lado ℓ e de um hexágono regular de lado ℓ.
   (d) Considerando que $\cos 36° = \frac{\varphi}{2}$, onde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é o número de ouro, determine uma fórmula para calcular a área de um pentágono regular.

6. No mesmo contexto do exercício anterior, mostre que a área A_n do polígono regular de n lados também é dada pela fórmula

$$A_n = n \cdot R^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

O que vamos encontrar ao calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$? Que conclusão tiramos disso?

7. Dado $\gamma = 1380°$, determine o valor de $M = \operatorname{sen}\gamma \cdot \cos\gamma$.

8. Considere um polígono regular de n lados, $n \geq 3$, inscrito no ciclo trigonométrico.

   (a) Mostre que $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{\ell_n}{2}$, onde ℓ_n denota a medida do lado do polígono regular de n lados inscrito no ciclo.

   (b) Usando a igualdade acima, verifique os valores do seno de $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{6}$.

   (c) Da Geomeria Plana, considerando um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência de raio R, temos que a medida do lado do polígono de $2n$ lados, também inscrito na circunferência, é dado por

   $$\ell_{2n} = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - \ell_n^2})}.$$

   Dessa forma, determine o valor de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$.

9. Considere a sequência $(x_n)_{n\geq 2}$ dada por $x_n = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

   (a) Verifique que a sequência (x_n) é limitada.

   (b) Faça um desenho no ciclo trigonométrico, justificando que essa sequência é decrescente.

   (c) Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. (**Obs.:** Este item é somente para quem já fez Cálculo II).

10. Determine o valor numérico de

    (a) $y = \dfrac{\csc\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \sec\frac{\pi}{3}}$ (b) $y = \dfrac{\cot^2\frac{\pi}{6} - \sqrt{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{3}\cdot\csc\frac{\pi}{6}}$

11. Usando da simetria no ciclo trigonométrico, determine os valores da cossecante de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$. Idem para a cotangente desses arcos.

12. Dado α um arco do primeiro quadrante, justifique que valem as seguintes relações complementares:

    (a) $\csc(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sec\alpha$ (b) $\sec(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \csc\alpha$ (c) $\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan\alpha$

13. Determine os valores de x para os quais

    (a) $\operatorname{sen} 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (b) $\sec\frac{2x}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. (c) $\csc(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

14. Determine a expressão geral, em radianos, dos arcos x, para os quais:

    (a) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{3x}{2} - \dfrac{\pi}{5}\right) = 1$. (b) $\sec\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right) = -1$.

15. Determine todos os valores de x para os quais $\tan\left(\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ não exista.

16. Calcule o valor de $y = \ln(\tan 1° \cdot \tan 2° \cdot \tan 3° \cdot ... \cdot \tan 88° \cdot \tan 89°)$.