Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear
Lista 02 de Exercícios - Matrizes e Sistemas lineares
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Mostre através de uma exemplo que na álgebra das matrizes, pode acontecer que o produto de dois elementos não nulos pode resultar no neutro aditivo (matriz nula).

2. Sejam $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$ matrizes triangulares superiores. Mostre que AB é uma matriz triangular superior com diagonal $a_{11}b_{11}$, $a_{22}b_{22}$, ..., $a_{nn}b_{nn}$.

3. Prove que a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é inversível se, e somente se, $ad - bc \neq 0$. Neste caso, mostre que a inversa é dada por
$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

4. Mostre que, se A for uma matriz invertível, então A^t também é invertível, com $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

5. Suponha que A seja uma matriz inversível. Mostre que se $AB = AC$, então $B = C$. Dê um exemplo de uma matriz não nula A tal que $AB = AC$, mas $B \neq C$.

6. Utilizando-se do algoritmo para obter inversas de matrizes, encontre a inversa A^{-1} de A em cada caso, se A for inversível.
(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$
(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

7. Considere os sistemas lineares
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases}$$
   (a) Mostre que o primeiro sistema não possui soluções e escreva o que isso significa quanto aos planos representados por essas equações.
   (b) Mostre que o segundo sistema tem uma infinidade de soluções e escreva o que isso significa quanto aos plannos representados por essas equações.

8. Resolva cada sistema linear abaixo, pelo método de eliminação de Gauss-Jordan:
(a) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=8 \\ -x_1-2x_2+3x_3=1 \\ 3x_1-7x_2+4x_3=10 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x_1+2x_2+2x_3=0 \\ -2x_1+5x_2+2x_3=1 \\ 8x_1+x_2+4x_3=-1 \end{cases}$

9. Sejam e_1, e_2 e e_3, respectivamente, as operações sobre linhas:
"Trocar as linhas ℓ_1 e ℓ_2"; "Substituir ℓ_3 por $7\ell_3$" e *" Substituir ℓ_2 por $-3\ell_1 + \ell_2$"*.
Determine as matrizes quadradas elementares de ordem 3 correspondentes E_1, E_2 e E_3.

10. Reduza cada uma das matrizes abaixo à forma canônica escalonada reduzida por linhas.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 1 & 10 & 13 \\ 8 & 8 & -1 & 26 & 19 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

11. Considere o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases} \tag{1}$$

(a) Resolva-o aplicando operações elementares sobre linhas.

(b) Reescrevendo o sistema (1) na notação matricial

$$Ax = b\,, \tag{2}$$

podemos encontrar o valor da matriz-solução x, multiplicando (2) à esquerda por A^{-1}, se esta inversa existir. Encontre A^{-1} e obtenha o valor de x dessa forma. Compare sua resposta com a obtida no item anterior.

12. Verifique se o sistema homogêneo abaixo possui uma solução não nula:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 4y - z = 0 \\ 3x + 2x + 2y = 0 \end{cases} .$$

13. Resolva cada sistema linear abaixo:

(a) $\begin{cases} x + 2y - 4z = -4 \\ 2x + 5y - 9z = -10 \\ 3x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ -3x + y - 2z = -7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 5y - 8z = 4 \\ 3x + 8y - 13z = 7 \end{cases}$

14. Resolva o seguinte sistema de equações não-lineares para os ângulos incógnitos α, β e γ, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$ e $0 \leq \gamma \leq \pi$:

$$\begin{cases} 2\,\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\beta + 3\tan\gamma = 3 \\ 4\,\mathrm{sen}\,\alpha + 2\cos\beta - 2\tan\gamma = 2 \\ 6\,\mathrm{sen}\,\alpha - 3\cos\beta + \tan\gamma = 9. \end{cases}$$

Obs. Primeiramente mude de variáveis para transformar num sistema linear.

15. Uma técnica importante para resolução de integrais de funções racionais é decompor a expressão que define a função racional em frações parciais de uma forma adequada. Por exemplo, para resolver uma integral da forma $\int f(x)dx$, onde

$$f(x) = \frac{3x^3 + 4x^2 - 6x}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 1)},$$

a decomposição a ser feita é determinar as constantes A, B, C e D tais que

$$\frac{3x^3 + 4x^2 - 6x}{(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} + \frac{C}{x - 1} + \frac{D}{x - 1}$$

se torne uma identidade. Determine os valores das constantes A, B, C e D para que a igualdade acima se torne uma identidade.