Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear I
Dedução da propriedade associativa do produto de matrizes
Prof. Dr. Maurício Zahn

No que segue, faremos em detalhes a prova da propriedade associativa do produto de matrizes feita em aula, ou seja, dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$ e $C = (c_{ij})_{p\times q}$, mostraremos que

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Escreva $M = (A \cdot B)_{m\times p}$ e $W = (B \cdot C)_{n\times q}$. Assim, temos que os elementos m_{ij} de M e w_{ij} de W são, respectivamente, dados por

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \quad \text{e} \quad w_{ij} = \sum_{\ell=1}^{p} b_{i\ell} \cdot c_{\ell j}. \tag{1}$$

Note que, denotando

$$(A \cdot B) \cdot C = (M)_{m\times p} \cdot (C)_{p\times q} = (F)_{m\times q},$$

usando (1) temos que cada elemento f_{ij} de F é dado por

$$f_{ij} = \sum_{\ell=1}^{p} m_{i\ell} \cdot c_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{k\ell} \right) \cdot c_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} \cdot b_{k\ell} \cdot c_{\ell j}) =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (b_{k\ell} \cdot c_{\ell j}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{p} a_{ik} \cdot (b_{k\ell} \cdot c_{\ell j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{\ell=1}^{p} b_{k\ell} \cdot c_{\ell j} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot w_{kj}.$$

Por outro lado, denotando

$$A \cdot (B \cdot C) = A_{m\times n} \cdot W_{n\times q} = G_{m\times q},$$

onde

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot w_{kj} = f_{ij}.$$

Como $g_{ij} = f_{ij}$, $\forall i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $\forall j \in \{1, 2, ..., q\}$, concluímos que as matrizes F e G são iguais, ou seja, que

$$(A \cdot B) \cdot C = F = G = A \cdot (B \cdot C).$$

$\square$

Obs. Na prova acima usamos uma propriedade "comutativa" para somatórios, ou seja, vale a propriedade

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} F(i, j) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} F(i, j),$$

onde $F(i, j)$ é uma expressão qualquer que depende dos índices i e j.

Como um bom exercício, prove essa igualdade.