Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo I - Prof. Maurício Zahn

Questão. Sendo $a > 0$, usando a definição de limite, prove que

$$\lim_{x\to a} \ln x = \ln a.$$

Solução. Sendo $a > 0$, conforme a teoria dos limites laterais, é suficiente mostrar que

$$\lim_{x\to a^+} \ln x = \ln a \ \text{ e que } \ \lim_{x\to a^-} \ln x = \ln a.$$

(a) Prova de $\lim\limits_{x\to a^+} \ln x = \ln a$:

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$ tal que, $\forall x > 0$ tal que $a < x < a + \delta$, implique em $|\ln x - \ln a| < \varepsilon$.
Vamos estimar $|\ln x - \ln a|$: usando de propriedade operatória dos logaritmos, temos

$$|\ln x - \ln a| = |\ln \frac{x}{a}|$$

Como neste caso $x > a$, temos que $\frac{x}{a} > 1$ (lembre que $a > 0$) e daí

$$|\ln x - \ln a| = |\ln \frac{x}{a}| = \ln \frac{x}{a},$$

Agora, observe que, neste caso, como $x < a+\delta$, segue que $\frac{x}{a} < \frac{a+\delta}{a}$, e como $f(x) = \ln x$ é uma função crescente, concluímos que

$$|\ln x - \ln a| = \ln \frac{x}{a} < \ln \frac{a+\delta}{a}.$$

Como a estimativa acima deve ser controlada por ε, se escrevermos $\varepsilon = \ln \frac{a+\delta}{a}$, isolando δ obtemos $\delta = a(e^{\varepsilon} - 1)$, como desejado (note que tal δ depende da escolha do ε).

Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, conseguimos encontrar $\delta > 0$ (mais precisamente, $\delta = a(e^{\varepsilon} - 1)$), tal que $\forall x$ tal que $a < x < a + \delta$, implica em $|\ln x - \ln a| < \varepsilon$, ou seja, provamos que

$$\lim_{x\to a^+} \ln x = \ln a. \tag{1}$$

(b) Prova de $\lim\limits_{x\to a^-} \ln x = \ln a$:

Dado $\varepsilon > 0$, precisamos achar $\delta > 0$ tal que, $\forall x > 0$ tal que $a - \delta < x < a$, implique em $|\ln x - \ln a| < \varepsilon$.
Vamos estimar $|\ln x - \ln a|$: usando de propriedade operatória dos logaritmos, temos

$$|\ln x - \ln a| = |\ln \frac{x}{a}|$$

Como neste caso $0 < x < a$, temos que $0 < \frac{x}{a} < 1$ (lembre que $a > 0$) e daí

$$|\ln x - \ln a| = |\ln \frac{x}{a}| = -\ln \frac{x}{a},$$

Agora, observe que, neste caso, como $x > a - \delta$, segue que $\frac{x}{a} > \frac{a-\delta}{a}$, e como $g(x) = -\ln x$ é uma função decrescente, concluímos que

$$|\ln x - \ln a| = -\ln \frac{x}{a} < -\ln \frac{a-\delta}{a}.$$

Como a estimativa acima deve ser controlada por ε, se escrevermos $\varepsilon = -\ln \frac{a-\delta}{a}$, isolando δ obtemos $\delta = \frac{a(e^{\varepsilon}-1)}{e^{\varepsilon}}$, como desejado (note que tal δ depende da escolha do ε).

Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, conseguimos encontrar $\delta > 0$ (mais precisamente, $\delta = \frac{a(e^{\varepsilon}-1)}{e^{\varepsilon}}$), tal que $\forall x$ tal que $a - \delta < x < a$, implica em $|\ln x - \ln a| < \varepsilon$, ou seja, provamos que

$$\lim_{x \to a^-} \ln x = \ln a. \tag{2}$$

Portanto, por (1) e (2) concluímos que

$$\lim_{x \to a} \ln x = \ln a.$$