Fundação Universidade Federal de Pelotas
Curso de Licenciatura em Matemática
Disciplina de Cálculo I - Prof. Maurício Zahn

Abaixo temos o enunciado e a prova do Teorema da fórmula de Leibniz, provado em aula e prometido ser postado, devido à dificuldade de escrita...

Teorema 1 *(Fórmula de Leibniz) Sejam u e v duas funções n vezes deriváveis na variável x. A derivada de ordem n do produto $u \cdot v$ é dada por*

$$D_x^n(u \cdot v) = \binom{n}{0} u^{(n-0)}v^{(0)} + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v^{(1)} + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v^{(2)} + ...$$
$$... + \binom{n}{n} u^{(n-n)}v^{(n)}$$

onde $u^{(p)}$, $v^{(p)}$ denotam as derivadas de ordem p de u e v, $p = 1, 2, ..., n$, e convencionamos $u^{(0)} = u$ e $v^{(0)} = v$ e ainda $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, com $p \leq n$ é o binomial de n sobre p.

Demonstração. Esta demonstração é feita usando-se indução matemática sobre a ordem de derivação n.
(i) Vale a base de indução, ou seja, quando $n = 1$ temos a regra do produto usual:

$$D_x^1(uv) = \binom{1}{0} u^{(1)}v^{(0)} + \binom{1}{1} u^{(0)}v^{(1)} = u'v + uv'.$$

(ii) Suponhamos que a igualdade seja verdadeira para $n = k - 1$, ou seja, que vale

$$D_x^{k-1}(uv) = \binom{k-1}{0} u^{(k-1)}v^{(0)} + \binom{k-1}{1} u^{(k-2)}v^{(1)} + ... + \binom{k-1}{k-1} u^{(0)}v^{(k-1)}.$$

Precisamos mostrar que vale para $n = k$, ou seja, mostrar que

$$D_x^k(uv) = \binom{k}{0} u^{(k)}v^{(0)} + \binom{k}{1} u^{(k-1)}v^{(1)} + ... + \binom{k}{k} u^{(0)}v^{(k)}.$$

Como $D_x^k(uv) = D_x(D_x^{k-1}(uv))$, temos que

$$D_x^k(uv) = D_x(D_x^{k-1}(uv)) = D_x \left[\binom{k-1}{0} u^{(k-1)}v^{(0)} + \binom{k-1}{1} u^{(k-2)}v^{(1)} + ... \right.$$
$$\left. ... + \binom{k-1}{k-1} u^{(0)}v^{(k-1)} \right] =$$
$$= \binom{k-1}{0} \left[u^{(k-1)}v^{(1)} + u^{(k)}v^{(0)} \right] + \binom{k-1}{1} \left[u^{(k-2)}v^{(2)} + u^{(k-1)}v^{(1)} \right] +$$
$$+ \binom{k-1}{2} \left[u^{(k-3)}v^{(3)} + u^{(k-2)}v^{(2)} \right] + ... + \binom{k-1}{k-1} \left[u^{(0)}v^{(k)} + u^{(1)}v^{(k-1)} \right] =$$
$$= \binom{k-1}{0} u^{(k)}v^{(0)} + \left[\binom{k-1}{0} + \binom{k-1}{1} \right] u^{(k-1)}v^{(1)} +$$
$$+ \left[\binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{2} \right] u^{(k-2)}v^{(2)} + ...$$

$$... + \left[\binom{k-1}{k-2} + \binom{k-1}{k-1}\right] u^{(1)}v^{(k-1)} + \binom{k-1}{k-1} u^{(0)}v^{(k)}.$$

Do estudo de números binomiais, lembrando da *relação de Stifell*

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1},$$

e ainda notando que $\binom{k-1}{0} = 1 = \binom{k}{0}$ e que $\binom{k-1}{k-1} = 1 = \binom{k}{k}$, temos

$$D_x^k(uv) = \binom{k}{0} u^{(k)}v^{(0)} + \binom{k}{1} u^{(k-1)}v^{(1)} + ... + \binom{k}{k} u^{(0)}v^{(k)}.$$

Isto conclui a prova da indução.

$\square$