Fundação Universidade Federal de Pelotas
Disciplina de Álgebra Linear
Lista 1 de Exercícios - Matrizes
Prof. Dr. Maurício Zahn

1. Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, calcule $3A + 4B - 2C$.

2. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, encontre as matrizes AA^t e A^tA, se existirem.

3. Sejam as matrizes $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & y & 5 \\ 2 & 3 & z \end{pmatrix}$ e $D = (d_{ij})$ uma matriz diagonal de ordem 3. Determine os valores de x, y e z para os quais se verifique

$$AD = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 6 & 12 & 25 \\ 4 & 9 & 20 \end{pmatrix}.$$

4. É verdade que se $A \cdot B = 0$, então $B \cdot A = 0$?

5. Dê um exemplo de duas matrizes A e B de mesmo tamanho tais que

$$(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2.$$

6. É verdade, de modo geral, que $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$, onde A e B são matrizes?

7. Calcule a inversa das matrizes $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, caso existam.

8. Uma maneira de codificar uma mensagem é através de multiplicação de matrizes. Vamos associar as letras do nosso alfabeto aos números, de acordo com a correspondência abaixo

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	–
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	0

Suponhamos que a nossa mensagem seja "PUXA VIDA". Podemos formar uma matriz 3×3 da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} P & U & X \\ A & - & V \\ I & D & A \end{pmatrix},$$

que usando a correspondência numérica fica:

$$\begin{pmatrix} 15 & 20 & 23 \\ 1 & 0 & 21 \\ 9 & 4 & 1 \end{pmatrix} = M$$

Agora seja uma matriz C qualquer 3×3 *inversível*, por exemplo,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos nossa matriz da mensagem por C, obtendo MC:

$$MC = \begin{pmatrix} -5 & 83 & 58 \\ 1 & 21 & 22 \\ 5 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

Transmitimos esta nova matriz (na prática, envia-se a cadeia de números -5 83 58 1 21 22 5 13 14). Quem recebe a mensagem decodifica-a através da multiplicação pela inversa: $(MC)C^{-1} = M$ e posterior transcrição dos números pelas letras. C é chamada de *matriz chave* para o código.

(a) Você recebeu a mensagem: -12 48 23 -2 42 26 1 42 29. Utilizando a mesma chave, traduza a mensagem.

(b) Aconteceu que o inimigo descobriu a sua chave. O seu comandante manda você substituir a matriz chave por $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Você transmite a mensagem "CRETINO..." a ele (codificada, naturalmente!). Por quê não será possível a ele decodificar a mensagem? Com esta nova chave codifique a mensagem "AO ATAQUE".

9. Se A e B são matrizes quadradas e A é inversível, verifique que

$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B).$$

10. Em que condições a matriz diagonal $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}$ é inversível e qual é sua inversa?

11. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{pmatrix}$. Se $A^t = A$, encontre o valor de x.

12. Dadas duas matrizes simétricas $n \times n$ A e B.

(a) Prove que $A + B$ é simétrica.

(b) Prove que se $AB = BA$, então AB é simétrica.

13. Seja a matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule A^{-2}.

(b) Encontre $p(A)$ para $p(x) = x + 2$.

(c) Encontre $p(A)$ para $p(x) = x^2 - 2x + 1$.

14. Você sabe que, em geral, o produto de matrizes não comuta, i.e., nem sempre se tem $AB = BA$. Suponhamos que a matriz quadrada B, de ordem 2, comuta com toda matriz quadrada A, i.e., $AB = BA$. Mostre que $B = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ para algum escalar (número real) k.

15. **Definição 1** Dizemos que uma matriz quadrada A é *idempotente* se

$$A^2 = A.$$

De acordo com a definição acima

(a) Mostre que se A é idempotente, então $I - A$ também é idempotente.

(b) Mostre que se A é idempotente, então $2A - I$ é invertível e é sua própria inversa.

16. Encontre, se houver, todos os valores de k para os quais a matriz A dada seja invertível.

a) $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ k & k \end{pmatrix}$.   b) $A = \begin{pmatrix} -k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$.

17. Utilizando-se do algoritmo para obter inversas de matrizes, encontre a inversa A^{-1} de A em cada caso, se A for inversível.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

18. Seja A uma matriz 3×3. Encontre uma matriz B para a qual BA é a matriz que resulta de A permutando as duas primeiras linhas e depois multiplicando a terceira linha por seis.

19. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Encontre matrizes elementares E_1 e E_2 tais que $E_2 E_1 A = I$.

(b) Escreva A^{-1} como um produto de matrizes elementares.

20. Mostre que se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}$ é uma matriz elementar, então $ab = 0$.

21. Prove que se A e B são matrizes quadradas e de mesmo tamanho e se AB é inversível, então A e B são inversíveis.

22. Sejam A, B e C matrizes $n \times n$ tais que $A = BC$. Prove que se B é invertível, então qualquer sequência de operações elementares sobre as linhas que reduz B a I_n, também reduz A a C.