



Processos de transição no ensino de matemática: o caso da passagem do cálculo de uma a mais variáveis

Sandro René Cunha¹

GD4 – Educação Matemática no Ensino Superior

Este artigo apresenta as reflexões iniciais em um projeto de pesquisa que tem por foco a transição do ensino de cálculo de uma variável para o de mais variáveis. O objetivo é analisar as analogias e diferenças entre os conceitos para o entendimento do conteúdo de cálculo fragmentado em diferentes disciplinas. Neste momento buscamos refletir sobre os modos com que podemos entender o fenômeno da transição interna/externa no ensino de matemática, e com que podemos analisar as transições internas no ensino da matemática na universidade.

Palavras-chave: cálculo de várias variáveis; transição; educação matemática no ensino superior; tecnologias.

Apresentação

Inicialmente em 2011, ainda como aluno de Mestrado oferecido pelo PEMAT, e escolhendo entre os temas apresentados pelas linhas de pesquisa em Ensino de Matemática para o desenvolvimento da dissertação, a apresentação proposta pela professora Dra. Márcia Fusaro, durante nosso primeiro seminário, resultou na dissertação: *Uma Análise das Provas Unificadas de Cálculo 1 do Curso de Engenharia da UFRJ*(2013). Esta investigação teve por foco entendermos como o conhecimento é reproduzido a partir dessa prática específica em um sistema unificado, segundo aspectos típicos da cultura de uma turma de Cálculo I. Na ocasião, buscamos descrever os conhecimentos sobre limites, continuidade e derivada que vêm sendo considerados relevantes para a formação esperada dos alunos de turmas em que o modelo de prova unificada é adotado (CUNHA, 2013). Para tal, adotamos a perspectiva da *Teoria Antropológica do Didático*, de Yves Chevallard (1999), da organização matemática que observamos, e assim pudemos verificar que o bloco técnico é altamente valorizado e, mesmo que seja possível identificarmos a

¹ Universidade Federal do Rio de Janeiro, e-mail: sandrorene@hotmail.br. orientadora: Dr. Márcia Maria Fusaro Pinto, e-mail: marcia@im.ufrj.br.



XXI EBRAPEM

ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De 2 a 4 de novembro de 2017 - Pelotas - RS

tecnologia nas soluções divulgadas, não havia a preocupação em deixá-la visível, mas sim de mantê-la em um segundo nível de importância em relação à técnica. Aproximando-nos do ensino de algumas noções do *Pensamento Complexo*, trazidas e Edgar Morin (1990), entendemos que no ato de aprender “é preciso substituir um pensamento que isola e separa por um pensamento que distingue e une”(MORIN, 2003, p.87). O texto que apresento a seguir é uma proposta de pesquisa em estágio inicial sobre a transição no ensino do Cálculo de funções de uma a mais variáveis, decorrente de nosso interesse em abordagens que integrem e promovam uma boa articulação na passagem dos conceitos de uma a mais variáveis; reconstruam o conhecimento anterior colocando ordem, clareza, distinção e precisão no novo tema. Almejamos um saber não fragmentado, não reducionista, reconhecendo que qualquer conhecimento está inacabado, incompleto, havendo possibilidade de ser questionado, interrogado e reformulado. Compartilhamos com o filósofo francês que as “verdades profundas, antagônicas umas às outras, eram para mim complementares, sem deixarem de ser antagônicas” (MORIN, 2005, p.7). Assim, tencionamos um estudo focando uma transição, interna ao ensino de Cálculo, entre o conteúdo de funções de uma a mais variáveis, analisando as analogias e diferenças entre os conceitos para o entendimento do Cálculo esfacelado em diferentes disciplinas. Em outras palavras, queremos investigar como ocorre a aprendizagem dos conceitos matemáticos na passagem de uma etapa de seu ensino a outra. Este novo projeto, em estágio inicial, tem relação com o anterior, desenvolvido em meu mestrado, uma vez que, ao analisarmos as avaliações em Cálculo I, produzimos resultados que podem nos ajudar a entender possíveis dificuldades associadas à passagem do Cálculo Diferencial de Funções de Uma Variável ao de Duas ou Mais Variáveis. Por exemplo, o uso somente de procedimentos técnicos foram tomados como suficientes para esclarecer as soluções dos problemas, dispensando comentários mais detalhados que pudessem explicar os motivos pelos quais se chegou ao resultado, bem como ao ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo em sua totalidade.



Nesse primeiro momento da pesquisa, refletimos sobre os modos com que os resultados de pesquisas relacionadas a problemas sobre a transição de um curso no ensino superior de matemática a outro, ou do ensino médio para o ensino superior, referem-se a analogias; e de que modos identificam uma ruptura, que intervêm na forma como o conhecimento é construído no âmbito das práticas associada; em particular, aquelas associadas a transições internas ao cálculo. Para a redação deste artigo, buscamos responder aos seguintes questionamentos

1) De que modos podemos entender o fenômeno da transição interna/externa no ensino de matemática?

2) De que modos podemos analisar as transições internas no ensino da matemática na universidade?

Para isso, trazemos os pressupostos sócio-filosóficos em educação que fundamentam a perspectiva que adotamos. Em seguida passamos às nossas leituras mediante alguns trabalhos correlacionados. Finalizamos com nossas reflexões iniciais sobre as leituras realizadas, buscando respostas para as questões anteriormente colocadas....

Um olhar *complexo* para os problemas da transição no ensino

Nessa pesquisa adotamos a noção de *Pensamento Complexo* (MORIN, 1990) como perspectiva para investigar o processo de transição nos diversos cursos de Cálculo, pressupondo que é preciso reorganizar os saberes para compreendê-los em sua totalidade.

A Universidade enfrenta muitos desafios; dentre eles, uma primeira adversidade diz respeito

[...] a pressão superadaptativa que força a conformar o ensino e a pesquisa às demandas econômicas, técnicas, administrativas do momento, a se conformar aos últimos métodos, às últimas receitas no mercado, a reduzir o ensino geral, a marginalizar a cultura humanista. (MORIN, 2003, p.25).

Outro obstáculo para a educação superior deve-se às



XXI EBRAPEM

ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De 2 a 4 de novembro de 2017 – Pelotas – RS

[...] compartimentação e a disjunção entre cultura humanista e cultura científica, acompanhadas pela compartimentação entre as diferentes ciências e disciplinas. A não comunicação entre as duas culturas determina graves consequências para ambas. (idem, ibidem).

A reestruturação do pensamento para o ensino proposta por Edgar Morin é multidisciplinar e muito mais ampla do que pode alcançar a do nosso estudo sobre a transição do cálculo de uma a várias variáveis. Porém, apesar de nosso vislumbrar ser restrito se comparado à teoria do sociólogo, queremos ao menos “plantar uma semente” de inspiração, que guie nossa reflexão sobre os obstáculos na aprendizagem ao longo da trajetória de um curso ou tópico a outro em matemática superior; em particular, sobre a transição de um cálculo a outro de duas variáveis, retomando os trabalhos de Alves (2013).

Na seção seguinte resumimos alguns resultados da pesquisa produzida sobre o tema em estudo, destacando algumas abordagens e métodos que têm relação com a investigação que estamos propondo, e que está vinculada à nossa linha de pesquisa do PEMAT.

Algumas questões e resultados de pesquisa sobre as transições no ensino de matemática

Interessados em outras pesquisas que envolvem situações de transição em Ensino de Matemática, entendemos que os estudos a respeito da transição do ensino médio para o ensino superior, que identificamos como transição externa por envolver duas instituições de ensino diferentes, tem despertado interesse dos pesquisadores na área de educação matemática. Um dos motivos é o desejo de conhecer “as dificuldades, cada vez mais graves, apresentadas pelos alunos ingressantes, na primeira disciplina em Cálculo” (NASSER, SOUZA e TORRACA; 2012). Para esses autores, um dos problemas de aprendizagem relacionados ao baixo desempenho dos alunos de Cálculo, está na compreensão e na construção de gráficos. Em pesquisa realizada sobre a própria prática, Nasser (2009) aponta que “as dificuldades se devem, principalmente, à falta de preparação prévia”, e destaca algumas ações dos professores que podem ajudar nesse sentido, tais como “desenvolver estratégias de ensino apropriadas, de acordo com os estilos de



XXI EBRAPEM

ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De 2 a 4 de novembro de 2017 – Pelotas – RS

aprendizagem dos alunos, em particular, enfatizando exercícios sobre transformações de gráficos” (NASSER, 2009, p. 54). Completando, a pesquisadora também investigou o desempenho dos alunos em Cálculo III, e comenta ainda que no caso de gráficos de superfícies, como paraboloides, cones, cilindros e esferas, a construção por meio de transformações a partir de superfícies básicas também facilita a identificação e o entendimento do assunto (NASSER, 2009, p. 52).

Uma outra vertente de pesquisa trata a problemática de um movimento de transição interna à instituição de ensino superior de matemática, e foca o momento de mudança do Cálculo para Análise².

De fato, no caso do ensino de Cálculo, as ideias inicialmente propostas podem ser amparadas por uma abordagem sensorial das definições e demais proposições; enquanto que em Análise Real, “todos os conceitos recebem um tratamento formal desde o início, ao se definir formalmente o conjunto real” (BERGÉ, 2010). Retomando as palavras de Otero-Garcia (2012), acrescentamos ainda que

[...] para Pinto, o ensino do Cálculo é fundamentalmente diferente do de Análise, porque, enquanto nesse fundamentam-se os princípios axiomáticos e sistemáticos, com definições formais, naquele são enfatizados aspectos computacionais e de manipulação simbólica, visando obter uma resposta final. Essa diferença acarretaria num grande impacto na transição do cálculo para a análise. (p.756).

A relevância do tema escolhido nesta pesquisa é reafirmada em inúmeros artigos publicados em canais de divulgação de pesquisas em educação matemática nacionalmente e internacionalmente.³ Diante da vasta literatura de pesquisas que, de alguma forma,

² Nesta direção de investigação, destacamos os seguintes textos: PINTO, M. M. F. Entendendo Análise Real. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Serra Negra: SBEM, 2000. p.153 – 158; PINTO, M. M. F. Discutindo a Transição dos Cálculos para a Análise Real. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. A Prática Educativa sob o Olhar de Professores de Cálculo. Belo Horizonte: Fumarc, 2001. p. 123 – 145; PINTO, M. M. F. Revisitando uma Teoria: O Desenvolvimento Matemático de Estudantes em um Primeiro Curso de Análise Real. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, 2009. Cap. 2, p. 27 - 42.

³ Para citar uma pequena seleção, trazemos: THOMAS, M. et al. Key mathematical concepts in the transition from secondary school to university. 2015.; KAJANDER, L. Transition from secondary to tertiary mathematics: McMaster University experience. 2005; GUEUDET, Ghislaine; PEPIN, Birgit, Didactic



XXI EBRAPEM

ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De 2 a 4 de novembro de 2017 – Pelotas – RS

abordam o tema de transição ou da variedade de resultados divulgados mundialmente em torno de desempenho de alunos e professores em periódicos de educação, as investigações em ensino assumem uma extensa e complexa relação envolvendo, entre outras coisas, a problemática da passagem de um estágio a outro do ensino.

A seguir, o caso da transição do Cálculo de uma a duas variáveis proposta por Alves (2011), por se tratar de uma situação que reflete a respeito de duas possibilidades: transição interna e externa.

Problemas na Transição dos Cálculos

Na literatura de pesquisa sobre o tema que queremos investigar encontramos os trabalhos de Alves (2011) referindo-se à transição interna do Cálculo de uma Variável para o Cálculo a Várias Variáveis.⁴ Em sua pesquisa, o autor procura identificar e descrever categorias para o raciocínio intuitivo, adotando a perspectiva de Fishbein (1987). Esse último aponta a dissonância de significados atribuídos ao termo “conhecimento intuitivo”, discutindo as duas formas de cognição: Intuitivas e Lógicas. Estas são exploradas em fases previstas pela sequência Fedathi (Borges Neto, 2001), sequência didática que se baseia no ensino/aprendizagem por meio de resolução de problemas conforme explorados por Polya nos anos 70. São categorizados os níveis de desenvolvimento do pensamento lógico que uma pessoa utiliza quando é solicitada a resolver um problema, conforme as seguintes fases: tomada de posição, maturação, solução do problema e prova.

Como complemento ao aporte teórico, Alves (2011) utiliza uma visão da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 1991, 1995a). Segundo Alves(2011), há poucos estudos no Brasil e no exterior acerca do Ensino e Aprendizagem do Cálculo

contract and secondary-tertiary transition: a focus on resources and their use. 2015; WADE, S.; SADLER, H; WATSON, ?.A Comparison of Mathematics Teachers' and Professors' Views on Secondary Preparation for Tertiary Calculus”. 2016; e TALL, D.O. From school to university: The transition from elementary to advanced mathematical thinking.1997.

⁴ Em sua tese em Educação Matemática, intitulada Aplicação da Sequência Fedathi na Promoção do Raciocínio Intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis.



Diferencial e Integral a Várias Variáveis, principalmente com ênfase em descrição interna em Cálculo. Em seu estudo empírico, este mesmo autor verificou as dificuldades dos estudantes para desenvolver e entender argumentos lógico-formais. Porém, os conceitos apresentados no Cálculo a Várias Variáveis, que possuem uma fundamentação formal em Análise no \mathbb{R}^n , são explorados, de modo predominante, no espaço \mathbb{R}^3 (ALVES, 2012, p.7).

Nos estudos realizados, Alves (2012) afirma que

[...] podemos discutir situações do Cálculo de Várias Variáveis que admitem uma interpretação imediata no contexto do Cálculo de Uma Variável e possíveis ligações conceituais evidenciadas pelo CAS Maple. Tal perspectiva que orienta uma abordagem didática pode favorecer o aluno no entendimento acerca da ligação conceitual, com apoio na representação gráfica, dos conceitos abordados tanto nos estudos das funções tratadas em Cálculo I, como daquelas em Cálculo II. (p.5)

Ainda no mesmo texto, o autor afirma que a percepção e o entendimento, a partir da visualização e da descrição geométrica dos objetos conceituais em Cálculo no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 , podem atuar no sentido de proporcionar uma transição interna adequada em Cálculo. Para isso o autor utiliza os softwares Geogebra e o Cas Maple, como forma de um complementar as limitações do outro, no caso do Geogebra, o autor utilizou apenas a janela de visualização para o espaço \mathbb{R}^2 , por outro lado, esse software oferece os recursos da geometria dinâmica.

Reflexões iniciais sobre a transição no ensino do Cálculo

Para finalizar, trazemos as nossas primeiras reflexões sobre

- 1) Como analisar o fenômeno da transição interna/externa no ensino de matemática?
- 2) De que modos podemos analisar as transições internas no ensino da matemática na universidade?

Primeiro, mesmo que o tratamento de um estudo seja somente sobre problemas decorrentes da reestruturação dos conceitos em cálculo, por exemplo, relativos à passagem de funções de uma a mais variáveis, não podemos assumir de imediato que as dificuldades observadas



XXI EBRAPEM

ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De 2 a 4 de novembro de 2017 – Pelotas – RS

em cálculo I nas pesquisas sobre a transição do ensino médio para o ensino superior deixaram de existir em um curso seguinte. Assim como, analisar a transição do Cálculo à Análise, diz respeito ao interesse em compreender as dificuldades que podem existir, decorrentes das próprias diferenças que fundamentam as duas disciplinas. A partir desses pressupostos tentamos revelar nossos entendimentos no que se refere à transição interna no ensino.

De forma clara, fenômenos relacionados à transição no ensino tornam-se um objeto de investigação por parte dos pesquisadores da área quando, na passagem de um estágio de transmissão de conhecimento ou prática de ensino à outra, emergem dificuldades ou deficiências no processo de ensino-aprendizagem. Por outro lado, não precisamos entender os movimentos de transição em Cálculo como dificuldades abissais se criarmos condições adequadas aos alunos para que possam transitar entre as diferentes práticas. Conforme o caso, podemos discutir meios para minimizar os efeitos negativos de uma transição no ensino, ou até mesmo desenvolver situações que sejam atraentes neste sentido.

Por outro lado os problemas de transição, apesar de serem identificados na passagem de um estágio de transmissão de conhecimento ou prática de ensino à outra e quando observamos alguma dificuldade ou deficiência no processo de ensino-aprendizagem, propagam-se em nossas práticas em instituição cultural por causa ou efeito constituintes na própria formação da instituição. Assumimos uma problemática da dinâmica de transição no ensino de matemática, que até o presente momento na literatura permanece apenas como uma expressão, usada para mencionar a respeito de alguma dificuldade de entendimento de um conceito em matemática, seja por conta das diferenças em relação às abordagens dos assuntos prévios ou ainda ao despreparo de alunos ou professores.

Em relação ao que Alves (2011) diz a respeito da utilização da expressão “Transição Interna”, não há explicação do seu significado para o ensino de Cálculo. O esquema a seguir ilustra, ainda que de modo breve, nosso entendimento em relação a dois entendimentos possíveis para casos de transição no ensino de Cálculo.

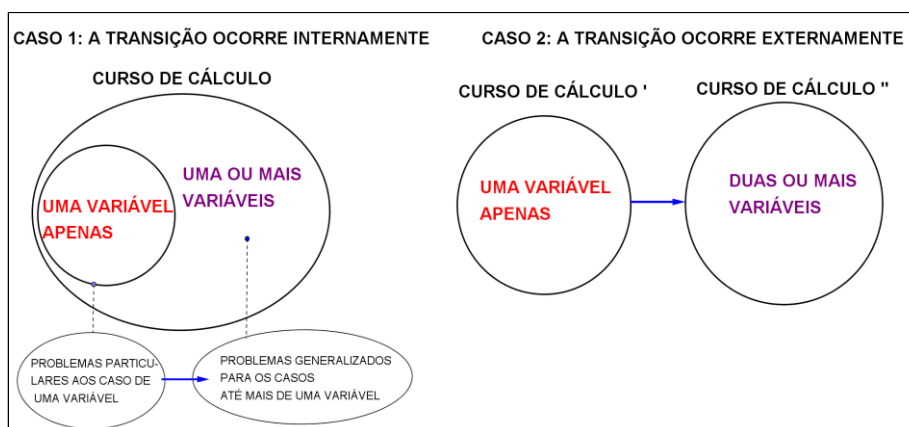


XXI EBRAPEM

ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De 2 a 4 de novembro de 2017 - Pelotas - RS

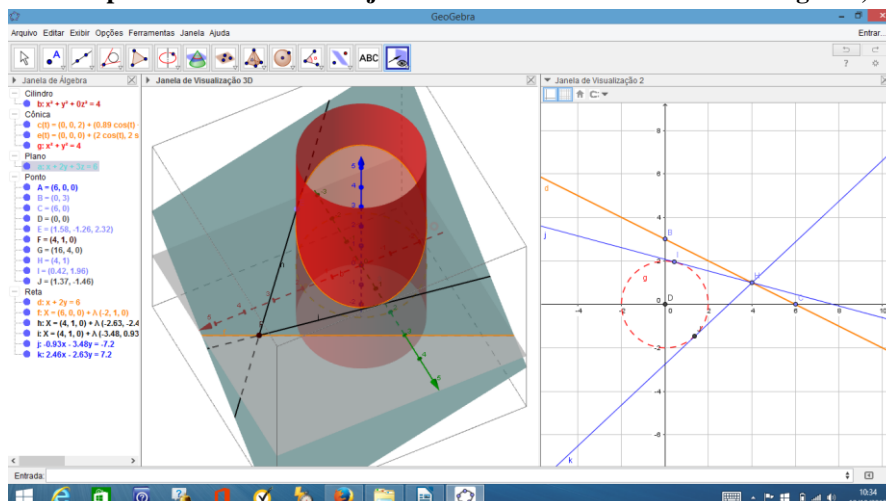
Figura 1. Diagrama das Transições interna e externa do Cálculo.



Fonte: arquivo pessoal

Uma outra questão que ocorre em Alves (2011), quanto visualização e à descrição geométrica dos objetos conceituais em Cálculo no \mathbb{R}^2 e no \mathbb{R}^3 , aponta para a utilização dos softwares Geogebra e o Cas Maple, como forma de complementar as limitações do outro. Porém, atualmente, com os avanços dos recursos para a geometria dinâmica, podemos utilizar no software Geogebra, duas janelas (uma 2D e outra 3D) para construções geométricas e de gráficos de funções simultaneamente. A figura seguinte serve apenas para ilustrar um momento em que há duas janelas de visualização abertas no Geogebra, possibilitando construções geométricas nos dois casos.

Figura 2. Exemplo mostrando as duas janelas abertas na mesma tela do Geogebra, uma 2D e outra 3D.





XXI EBRAPEM

ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De 2 a 4 de novembro de 2017 - Pelotas - RS

Fonte: arquivo pessoal.

Referências

ADLER, J. Conceptualising resources as a theme for teacher education. **Journal of Mathematics Teacher Education**. n.3, p. 205-224. 2000.

ALVES, Francisco Régis Vieira. Uma discussão do uso do Geogebra no contexto do Cálculo a Várias Variáveis. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 2, p. 5-19, 2013.

ALVES, Francisco Régis Vieira. Transição Interna Do Cálculo: Uma discussão do uso do Geogebra no contexto do Cálculo a várias variáveis. In: **Conferência Latino americana de Geogebra**, 2012, Montevideo. Conferência Latinoamericana de Geogebra. Montevideo: Editora Universitária, 2012. v. 1. p. 1-8.

BORGES NETO, Hermínio. et al. A Seqüência Fedathi como proposta metodológica no ensino-aprendizagem de Matemática e sua aplicação no ensino de retas paralelas, **XV EPENN - Encontro de Pesquisa Educacional Do Nordeste**, São Luis, 2001, p. 590-609.

CUNHA, S. R. ; PINTO, M. M. F. . O conhecimento esperado sobre limites e continuidade a partir de uma análise das provas unificadas de Cálculo I na UFRJ. **Educação Matemática Pesquisa** (Online), v. 16, p. 259-278, 2014.

DUVAL, Raymond. Structure du raisonnement déductif e apprentissage de la démonstration, In : **Educational Studies in Mathematics**, 22, 1991, p. 233-261.

FISCHBEIN, Efrain. Intuition in science and mathematics: an educational approach, Netherlands: D. Reidel Public, **Mathematics Educational Library**, 1987.

LAVE, J. Teaching, as Learning, in Practice. *Mind, Culture, and Activity*, v.3, n. 3. 1996.

OTERO-GARCIA, S.C. A Transição do Cálculo para a Análise: uma Resenha de Três Trabalhos de Márcia Maria Fusaro Pinto. **Bolema**, Rio Claro, p. 755 - 761, 01 abr. 2012.



XXI EBRAPEM

ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De 2 a 4 de novembro de 2017 - Pelotas - RS

EDGAR, MORIN. Introduction à la pensée complexe. **ESF éditeur, coll. communication et**, 1990.

MOURIN, Edgar. **Introdução ao Pensamento Complexo**. Instituto Piaget, Portugal, 1995.

MORIN, Edgar. **A cabeça bem-feita repensar a reforma reformar o pensamento**. Bertrand Brasil, 2003.

MORIN, Edgar. A necessidade de um pensamento complexo. **Representação e complexidade**. Rio de Janeiro: **Garamond**, p. 69-77, 2003.

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: Frota, M.C.R. e Nasser, L (org.). **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**, p. 43-58. SBEM, 2009.

NASSER, Lilian; SOUSA, geneci A.; TORRACA, Marcelo. Transição Do Ensino Médio Para O Superior: Como Minimizar As Dificuldades Em Cálculo? In: **V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, 2012, Petrópolis - RJ. Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Brasília - DF: SBEM, 2012.

PINTO, M. M. F. Entendendo Análise Real. In: **Seminário Internacional De Pesquisa Em Educação Matemática**. Serra Negra: SBEM, 2000. p.153 – 158.

PINTO, M. M. F. . Re-visitando uma teoria: O desenvolvimento matemático de estudantes em um primeiro curso de análise real. In: Maria Clara Rezende Frota; Lilian Nasser. (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior**. Ed.Recife: Grafica A Unica Ltda, 2009, v. 1, p. 27-42.

PINTO, M. M. F. . Discutindo a Transição dos Cálculos para a Análise Real. In: Jonas Lachini; João Bosco Laudares. (Org.). **A Prática Educativa sob o olhar dos Professores de Cálculo**¹. ed. Belo Horizonte: Editora Funarc, 2001, v. 1, p. 123-145.