



Definição do conceito de limite apresentada por quatro estudantes de um curso de licenciatura em Matemática: uma análise a partir dos Três Mundos da Matemática

Gabriel de Oliveira Soares¹

GD4 – Educação Matemática no Ensino Superior

Resumo do trabalho. Esse trabalho objetiva identificar quais características dos Três Mundos da Matemática propostos por Tall estão presentes na definição conceitual de quatro estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática. Para tal, percorre-se um caminho teórico pautado nas ideias sobre Imagem do Conceito e Definição do Conceito (TALL; VINNER, 1981) e na Teoria dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2008; 2013). Foi aplicado um questionário a quatro estudantes que já cursaram uma disciplina de Cálculo de um curso de Licenciatura em Matemática de uma instituição pública do estado do Rio Grande do Sul. Após, analisaram-se as repostas dos alunos à luz do segundo quadro teórico apresentado. Constatou-se que os estudantes mostraram dificuldades ao definir o conceito de limite de uma função, sendo que apenas uma das quatro repostas estava totalmente correta. Identificou-se que todos os estudantes usaram uma linguagem natural para realizar a definição do conceito e ainda, apresentaram somente características do Mundo Conceitual Corporificado ao evocarem suas repostas à questão. Dessa forma, concluiu-se que a aprendizagem desses alunos ainda está em um nível mais básico de apropriação, levando a crer que se faz necessário repensar os objetivos das disciplinas de Cálculo nos cursos de formação de professores de matemática.

Palavras-chave: Limite de uma função; Formação de professores de matemática; Ensino de Cálculo Diferencial e Integral; David Tall.

Introdução

O conceito de limite de uma função é geralmente um dos primeiros conteúdos apresentados nas disciplinas de Cálculo nos cursos de graduação, das mais diferentes áreas do conhecimento. Deve-se a isso a necessidade do seu entendimento para a aprendizagem dos outros conceitos do Cálculo, como o da derivada, que é definida como um limite.

Entretanto, mesmo sendo um dos conteúdos iniciais e, teoricamente, mais básicos, relacionados à aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral, muitos trabalhos em Educação Matemática que discutem essa temática evidenciam dificuldades dos estudantes em

¹Centro Universitário Franciscano/RS, e-mail: gsoares8@outlook.com, orientador: Dra. Helena Noronha Cury.



XXI EBRAPEM

ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De 2 a 4 de novembro de 2017 - Pelotas - RS

compreender esse conceito (REZENDE, 1994; NASCIMENTO, 2003; ZUCHI E GONÇALVES, 2003; AMORIM, 2011; DOS SANTOS E ALMOULOU, 2014).

Essas dificuldades de aprendizagem do conceito de limite são baseadas em dois fatores principais: um relacionado a natureza epistemológica complexa do conceito de limite (CORNU, 1983); e outro relacionado aos processos mentais necessários para a aquisição desse conhecimento, que exige um elevado nível de abstração (ARTIGUE, 1995; TALL; VINNER, 1981).

Zuchi e Gonçalves (2003) destacam em sua experiência que as dificuldades dos estudantes são evidenciadas logo na aprendizagem do conceito intuitivo de limite, devido ao trabalho com os números infinitesimais, tornando-se maiores no momento da formalização dos conceitos, porque geralmente os alunos possuem pouco contato prévio com uma linguagem matemática mais formal.

Dessa forma, buscando visualizar as principais dificuldades que os estudantes têm na formalização do conceito de limite e, buscando entender sua definição desse conceito, surge a proposta deste trabalho, que objetiva identificar quais características dos Três Mundos da Matemática propostos por Tall (2008; 2013) estão presentes na definição conceitual (TALL; VINNER, 1981) de quatro estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática.

Destaca-se que esse trabalho faz parte dos resultados iniciais de uma pesquisa maior, intitulada “O conceito de limite na formação inicial de professores de matemática: Um estudo à luz dos Três Mundos da Matemática”, que tem por objetivo analisar o conceito de limite de uma função apresentado por estudantes de dois cursos de Licenciatura em Matemática, bem como suas estratégias de resolução de questões, à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática.

David Tall, as Definições Conceituais e os Três Mundos da Matemática

David Tall, matemático e educador matemático inglês, consolidou-se nos últimos anos como uma das principais referências em pesquisas no âmbito da psicologia da educação matemática e da aprendizagem em matemática. Sua tese trouxe grandes contribuições ao



XXI EBRAPEM

ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De 2 a 4 de novembro de 2017 – Pelotas – RS

ensino de Cálculo, especialmente relacionado ao uso de softwares, sendo que atualmente o autor tem se dedicado a estudar como o sujeito aprende matemática.

Esse interesse pela aprendizagem em matemática deu origem a duas importantes vertentes teóricas: as ideias sobre Imagem do Conceito e Definição do Conceito, em coautoria com o pesquisador israelense Shlomo Vinner, publicadas em 1981; e a Teoria dos Três Mundos da Matemática, de autoria de Tall e publicada pela primeira vez em 2004.

Ao embasar teoricamente a pesquisa da qual se origina esse trabalho, entende-se que as ideias se complementam, de tal maneira que as características dos Mundos da Matemática apresentadas pelos estudantes ao definirem limite de uma função estariam presentes na construção de sua Definição do Conceito. Desta forma, referenciam-se os dois quadros teóricos nesse trabalho.

Imagem de Conceito e Definição de Conceito

Vinner (1983) defende que a formação de conceitos é de extrema importância para os processos de ensino e aprendizagem, sendo que esses processos apresentam duas principais dificuldades: a primeira relacionada à noção do próprio conceito e a segunda, de determinar quando um conceito está corretamente formado na mente de um indivíduo.

E é nessa formação dos conceitos que surgem as questões relacionadas à Imagem do Conceito e à Definição de Conceito. Tall e Vinner (1981) definem a Imagem de Conceito como sendo:

toda a estrutura cognitiva que está associada ao conceito, inclui todas as imagens mentais e propriedades a elas associadas e os processos. É desenvolvido ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando tanto quando o indivíduo encontra novos estímulos, quanto quando amadurece (TALL; VINNER, 1981, p.152).

Dessa forma, a Imagem do Conceito é constituída na estrutura cognitiva de cada indivíduo, associada a um determinado conceito. Essa associação contém representações mentais que podem ser imagens de representações visuais, impressões, experiências e propriedades e ainda, podem ser elaboradas pelo indivíduo por intermédio de processos de pensamento sobre as representações mentais.



XXI EBRAPEM

ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De 2 a 4 de novembro de 2017 - Pelotas - RS

Além disso, a Imagem de Conceito pode apresentar-se através de palavras ou símbolos matemáticos, demonstrando o aprofundamento desse conceito adquirido por cada um. É válido destacar ainda que a Imagem de Conceito pode não ser a mesma para situações diferentes, sendo que é estimulada por cada uma das situações que o sujeito vive.

Em relação à Definição de Conceito, essa emerge da Imagem de Conceito, e é tido como,

uma reconstrução pessoal da definição feita pelo estudante. É então um tipo de palavra que o estudante usa para sua própria explanação de sua imagem de conceito. Se as definições de conceitos lhes são dadas ou construídas por si mesmo, podem variar de tempo em tempo. Dessa maneira uma definição pessoal de conceito pode ser diferente de uma definição formal de conceito, esta última sendo uma definição de conceito que é aceita pela comunidade matemática (TALL; VINNER, 1981, p.152).

Assim, ao evocar sua definição do conceito de limite de uma função, o estudante estará mostrando sua definição de conceito construída para esse conteúdo.

Três Mundos da Matemática

A Teoria dos Três Mundos da Matemática criada por David Tall surge como uma maneira de explicar como ocorre a aprendizagem em matemática. Sendo considerada uma evolução de quadros teóricos, como os de Piaget e Van Hiele, Tall sugere que um sujeito aprende matemática por três caminhos: o primeiro, pautado em um **Mundo Conceitual Corporificado**, em que o sujeito desenvolve imagens mentais na criação de signos mentais, sendo que essas passam a serem verbalizadas de uma maneira cada vez mais sofisticada; o segundo, pautado em um **Mundo Operacional Simbólico**, em que as aprendizagens são desenvolvidas através da transposição das ações corporificadas do homem em procedimentos simbólicos de manipulação e cálculo; e o terceiro, baseado em um **Mundo Axiomático Formal**, no qual constroem-se conhecimentos formais em sistemas axiomáticos específicos por definições teóricas, das quais as propriedades matemáticas são deduzidas por provas matemáticas. (TALL, 2013).

Uma questão relevante em relação a cada um dos Três Mundos são as questões da matemática que se desenvolvem em cada um desses mundos. Tall faz referência a uma Matemática Prática, que envolve os estágios mais básicos dos Mundos Conceitual



XXI EBRAPEM

ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De 2 a 4 de novembro de 2017 - Pelotas - RS

Corporificado e Operacional Simbólico, na qual são envolvidas experiências práticas e deduções a partir do espaço e das formas, baseadas apenas na percepções e cálculos aritméticos simples.

Ao desenvolver, e conseqüentemente evoluir suas aprendizagens, um sujeito passa para o que o autor chama de Matemática Teórica. Nesse estágio, o estudante é capaz de compreender as definições Euclidianas, por exemplo, e efetuar pequenas deduções e provas baseadas em uma álgebra numérica mais simples.

O terceiro estágio, de uma Matemática Formal, envolve as definições matemáticas formais e as provas de teoremas baseadas nessas definições. Nesse estágio, o estudante consegue concluir generalizações a partir desses teoremas e construir provas matematicamente coerentes.

Logo, ao investigar que características dos Três Mundos da Matemática estão presentes na Definição de Conceito de quatro estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática, busca-se identificar quais características são utilizadas para definir limite pelo estudante. Remetem-se à construção de imagens, ao simbolismo próprio desenvolvido com o conceito de limite, a uma linguagem natural ou a uma linguagem formal.

Metodologia

A pesquisa, da qual esse trabalho é derivada, é classificada como uma investigação qualitativa, levando em consideração que essa permite compreender e interpretar as particularidades dos comportamentos ou atitudes dos indivíduos (OLIVEIRA, 2002, p. 117), que nesse caso são compreendidas como as respostas dos estudantes.

São sujeitos da pesquisa maior, da qual esse artigo é oriundo, alunos de dois cursos de Licenciatura em Matemática do estado do Rio Grande do Sul que já haviam cursado ao menos uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral na sua trajetória acadêmica. Entretanto, como a pesquisa encontra-se em andamento, foram analisadas as respostas de quatro estudantes de um dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Levando em consideração o objetivo desta pesquisa, que busca evidenciar as características dos Três Mundos da Matemática propostos por Tall (2008; 2013) que estão



presentes na definição conceitual (TALL, VINNER, 1981) do conceito de limite dos alunos participantes, foi proposto um questionário como instrumento de coleta de dados, que continha a questão apresentada na Figura 1.

Figura 1: Questão de pesquisa relacionada ao conceito de limite

No decorrer do trabalho com as disciplinas de Cálculo você, provavelmente, foi apresentado a diversas maneiras de visualizar/compreender o conceito de limite de uma função, seja por aspectos visuais, simbólicos, gráficos ou por definições formais. Levando em consideração a importância desse conceito para o estudo do cálculo, explique o que significa dizer que, dada uma função f , o limite de $f(x)$, quando x tende para um número a , é igual a L .

Fonte –Dados da pesquisa

Após a resolução da questão pelos estudantes, as respostas foram analisadas da seguinte forma: inicialmente, foram classificadas em corretas, parcialmente corretas, incorretas ou em branco. Após, foi feito um levantamento do tipo das respostas dos estudantes, e assim foi feita uma classificação, criada a partir de uma análise comparativa proveniente do tratamento dos dados realizada em outros trabalhos que utilizam o mesmo quadro teórico, e que compõem a revisão de literatura da pesquisa maior, sendo essas referenciadas em um trabalho publicado pelo autor e pela orientadora desse artigo (SOARES; CURY, 2016).

Em seguida, foi realizada a análise a partir do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, observando as características desses que emergiram na resposta dos estudantes à questão apresentada na Figura 1.

Resultados e Discussões

É válido destacar, antes de apresentar os resultados da coleta de dados do questionário, que os alunos mostraram, ao responder as questões, que têm bastante dificuldade ao responder questões que se utilizem do conceito de limite, principalmente no momento de interpretá-las. Isso vem ao encontro de um dos objetivos específicos da pesquisa maior, que é investigar



como se dá o trabalho com o conceito de limite nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, na formação de professores de matemática.

Em se tratando da análise dos dados, a primeira etapa compreende a classificação das respostas dos estudantes em corretas, parcialmente corretas, incorretas ou em branco. O Quadro 1 apresenta essa classificação dos quatro estudantes analisados neste trabalho.

Quadro 2: Classificação das respostas dos alunos em relação à questão analisada

Aluno	Classificação da Resposta
Aluno 1	Correta
Aluno 2	Parcialmente correta
Aluno 3	Parcialmente correta
Aluno 4	Incorreta

Fonte – Dados da pesquisa

É importante destacar que, como o trabalho objetiva analisar quais características dos Três Mundos da Matemática aparecem na Definição de Conceito dos alunos acerca do conceito de limite de uma função, essa classificação foi feita com intuito de verificar se os alunos apresentaram dificuldades ao responder as questões. Para as análises, não importa se a resposta dada pelo estudante está correta, mas sim, que conhecimentos ele mobilizou para responder a questão.

Além disso, como são analisadas as respostas de apenas quatro estudantes para uma questão, as categorias criadas pelos tipos de respostas não são apresentadas. Optou-se por apresentar cada uma das respostas de cada um dos estudantes e fazer sua análise à luz do quadro teórico. A Figura 2 apresenta a resposta dada pelo Aluno 1 à questão.

Figura 2: Resposta do Aluno 1 à questão analisada

1 significa dizer que quando um número x está muito próximo do número a , estes dois da reta real, a imagem $f(x)$ estará muito próxima do número L . A cada x que fica a uma distância de a , essa distância fica menor e menor, perto de zero, enquanto a distância de $f(x)$ a L fica também menor e menor, ficando perto de zero.



Fonte – Dados da pesquisa

A resposta do Aluno 1 foi classificada como correta, pois está evidenciado que o aluno compreende o conceito de limite baseada na relação das distâncias infinitesimais ao redor dos valores de x e de $f(x)$. Percebe-se que o aluno utiliza uma linguagem natural para definir limite, o que remete às características do Mundo Conceitual Corporificado e do Mundo Operacional Simbólico. Entretanto, como a resposta é pautada na visualização das distâncias, destacando-se a proximidade dos valores do ponto e do limite, fica evidenciado que a construção do conceito de limite desse aluno em questão apresenta características do Mundo Conceitual Corporificado.

Já em relação ao Aluno 2, a resposta dele dada a mesma pergunta é apresentada na Figura 3.

Figura 3: Resposta do Aluno 2 à questão analisada

① $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ O limite de uma função é o valor ao qual essa função se aproxima, tanto pela direita quanto pela esquerda, em um gráfico.

Fonte – Dados da pesquisa

A resposta do Aluno 2 foi classificada como parcialmente correta, pois percebe-se que o aluno compreende a existência do limite pela existência e igualdade dos limites laterais, mas mesmo assim, não consegue expressá-la de maneira matematicamente correta. Percebe-se aqui também que o aluno se utiliza de uma linguagem natural e, como a resposta é pautada na visualização dos limites laterais e da aproximação, compreende-se que a construção do conceito de limite desse aluno em questão apresenta características do Mundo Conceitual Corporificado.

O Aluno 3 deu uma resposta semelhante à do Aluno 2 à questão. Essa resposta está apresentada na Figura 4.



Figura 4: Resposta do Aluno 3 à questão analisada

① $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Significa dizer que quando os limites pela esquerda e pela esquerda "vão" para um mesmo valor, quando existir esses limites laterais, não existem o limite, caso contrário, não. Portanto, limite significa apenas o "comportamento" da função $f(x)$ tende ao ponto a .

Fonte – Dados da pesquisa

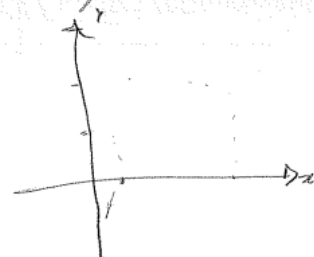
Mais uma vez, a definição do conceito de limite baseia-se na existência do limite pelos limites laterais. A linguagem é natural, evidenciando o pouco desenvolvimento de uma linguagem matemática mais formal. A definição do estudante é confusa ao dizer que “o comportamento” da função $f(x)$ tende ao ponto a ”, e fica claro que o aluno tem dificuldade ao perceber qual dos pontos da definição pertence ao domínio da função, e qual pertence à imagem. E, como os outros estudantes apresentados até o momento, o Aluno 3 tem uma definição conceitual com características apenas do Mundo Conceitual Corporificado, pois a breve escrita da generalização do limite não evidencia características do Mundo Operacional Simbólico em sua definição.

A resposta do Aluno 4 foi a única classificada como incorreta. A Figura 5 mostra a resposta desse estudante à questão analisada.

Figura 5: Resposta do Aluno 4 à questão analisada

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

O limite quer dizer que quando a função tende para um número a , ela é contínua naquele ponto dado.





XXI EBRAPEM

ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De 2 a 4 de novembro de 2017 - Pelotas - RS

Fonte – Dados da pesquisa

Percebe-se que a definição do conceito apresentada pelo estudante não remete à definição matematicamente correta do conceito de limite. O aluno utiliza a noção de continuidade para definir limite, que é um conteúdo geralmente apresentado quando se fala de limite de uma função, mas é um conhecimento erroneamente evocado na resposta dessa questão. E, assim como os outros três estudantes, a resposta do aluno foi dada utilizando uma linguagem totalmente natural, e referenciando as noções de tendência a construção gráfica, mostrando mais uma vez, características do Mundo Conceitual Corporificado.

Considerações sobre o trabalho

O objetivo desse trabalho é de identificar quais características dos Três Mundos da Matemática propostos por Tall (2008; 2013) estão presentes na definição conceitual (TALL; VINNER, 1981) de quatro estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática.

Apoiado nos quadros teóricos de autoria de David Tall apresentados como referencial para desenvolvimento da pesquisa, constatou-se que os alunos apresentaram dificuldades e alguns erros em sua definição do conceito de limite, ao ser comparada com uma definição aceita pela comunidade matemática.

Em relação às características dos Mundos da Matemática que surgiram nas definições dos alunos, todos apresentaram apenas características do Mundo Conceitual Corporificado, que é o mundo mais básico, em que as definições e aprendizagens são baseadas na visualização de objetos matemáticos (mentais ou reais).

Isso evidencia que, mesmo em um curso de formação de professores de Matemática, as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral priorizam um trabalho que não parece ser efetivo em relação à aprendizagem dos conceitos, e optam por privilegiar a resolução mecânica de exercícios.

Fica como questão para ser respondida: será que esse deveria ser o objetivo dessa disciplina em um curso de formação de professores? Que atitudes podem ser tomadas para melhorar os resultados apresentados neste trabalho? O desenvolvimento da pesquisa em



XXI EBRAPEM

ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De 2 a 4 de novembro de 2017 – Pelotas – RS

questão pretende discutir e propor melhorias nesse sentido, sempre focando no desenvolvimento profissional e acadêmico do professor de matemática.

Referências

- AMORIM, L. I. F. **A (re)construção do conceito de limite do cálculo para a análise: Um estudo com alunos do curso de Licenciatura em Matemática.** 2011. 133f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, 2011.
- ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, M. et. al. **Ingeniería Didáctica em Educación Matemática.** Bogotá: Grupo Editorial IberoAmérica, 1995. p. 97-140.
- CORNU, Bernard. **Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.** 1983. Tese (Doutorado em Matemática). Université Scientifique et Médicale de Grenoble, Grenoble, 1983.
- DOS SANTOS, M. B. S.; ALMOULOU, S. A. O conceito de limite: estudos das organizações matemáticas e didáticas em livros didáticos. **Perspectivas em Educação Matemática**, Campo Grande, v. 7, n. temático, p. 537-572, 2014.
- NASCIMENTO, J. C. **O conceito de limite em cálculo: Obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática.** 2003. 337f. Tese (Doutorado em Psicologia Cognitiva) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2003.
- OLIVEIRA, L. **Tratamento de metodologia científica.** São Paulo: Pioneira, 2002.
- REZENDE, W. M. **Uma análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite.** 1994. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática) – Universidade de Santa Úrsula. Rio de Janeiro, 1994.
- SOARES, G. O.; CURY, H. N. A Teoria dos Três Mundos da Matemática: Um olhar sobre a produção científica brasileira. In: Simpósio de Ensino, Pesquisa e Extensão, 20, 2016, Santa Maria, RS. **Anais...** Santa Maria: 2016. p. 1-9.
- TALL, D. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. **Mathematics Education Research Journal**, v. 20, n. 2, p. 5-24, 2008.
- TALL, D. **How humans learn to think mathematically.** Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- TALL, D. O.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematical with particular reference in Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151-169, 1981.
- VINNER, S. Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF



XXI EBRAPEM

ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De 2 a 4 de novembro de 2017 - Pelotas - RS

MATHEMATICS EDUCATION, 6, 1983, Antuérpia. **Proceedings...**Antuérpia: Antwerp University, p. 24-28, 1983.

ZUCHI, I; GONÇALVES, M. B. Investigação sobre os obstáculos de aprendizagem do conceito de limite. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 31., 2003, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: ABENGE, 2003. p. 2-11.