



O ambiente dinâmico GeoGebra em atividades de Geometria para alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental: articulações amparadas segundo Raymond Duval

Franciele Isabelita Lopes Novak¹

GD2 – Educação Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental

A geometria consiste numa área da Matemática rica em possibilidades de desenvolvimento cognitivo, porém nem sempre valorizada sob esse ponto de vista. A partir dessa constatação, o subsídio da teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (2004, 2005, 2009, 2012a, 2012b), fornece a descrição de atividades cognitivas referentes ao desenvolvimento do pensamento matemático, bem como do pensamento geométrico, servindo de amparo para possibilidades de melhoria dos processos de ensino e aprendizagem. Aos processos cognitivos, específicos da Geometria, que se referem a apreensões, olhares e desconstrução dimensional, é proposto, nesse trabalho, uma articulação com o ambiente dinâmico GeoGebra. Desse modo, esse trabalho é o escopo de uma pesquisa em andamento que busca pela resposta do seguinte problema: Em que medida o dinamismo proporcionado pelo ambiente do software GeoGebra contribui para o desenvolvimento das apreensões, olhares e a desconstrução dimensional necessários e essenciais para aprendizagem de Geometria? Tal questionamento, suscitou como objetivo geral, apontar em que medida atividades propostas para o trabalho com a geometria no ambiente dinâmico GeoGebra, contribuem para o desenvolvimento do papel heurístico das figuras geométricas e para atividades cognitivas referentes aos tratamentos figurais, tipos de apreensões e olhares, específicos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Essa pesquisa qualitativa, delineada como estudo de caso, elegeu como sujeitos, alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do estado do Paraná e terá como instrumento de coleta de dados, além das observações e escritos da própria pesquisadora, as produções escritas e digitais dos sujeitos, no decorrer da aplicação de uma oficina. Nesse trabalho, são apresentadas algumas atividades que foram aplicadas como teste piloto para um grupo de alunos do mesmo nível de escolaridade.

Palavras – chave: Geometria. Anos finais do Ensino Fundamental. GeoGebra. Registro de Representações Semióticas.

Introdução

Esse trabalho contempla a geometria, aliada ao uso do ambiente dinâmico GeoGebra, por considerar pertinente um olhar do ponto de vista cognitivo para esta temática. Dentre problemáticas que envolvem a geometria, os estudos de Lorenzato (1995) e Pavanello (1993) apontam impasses, referindo-se à carência de conhecimentos dessa área da Matemática. Fatores como: a precariedade da presença da Geometria no currículo da formação docente, a promulgação de leis que concederam às escolas a liberdade de escolha para a organização do programa de disciplinas em que o ensino de Geometria por vezes é

¹ Universidade Estadual de Ponta Grossa, e-mail: franciele.isa@hotmail.com, orientador: Dr.^a Celia Finck Brandt



deixado para o último período do ano letivo, além do modo como os livros didáticos organizam o conhecimento da Geometria, por vezes, desligado da realidade e desvinculado de outros conceitos matemáticos, são exemplos da descaracterização e abandono dessa área da Matemática.

Neste cenário, outras pesquisas como as de Medeiros (2012), Silva (2011), Lovis (2009), Santos (2007), e Almouloud, *et al.*, (2004) procuraram por meio de um trabalho com a formação continuada dos professores, amenizar obstáculos do ensino de Geometria, no que diz respeito aos conhecimentos docentes, proporcionando aos grupos de professores com os quais trabalharam, oportunidades de trocas de conhecimentos, reflexões e alternativas para o trabalho com esse conteúdo da Matemática. Em todos esses estudos, o que chamou a atenção, foi que os pesquisadores buscaram, parcial ou totalmente, um amparo dos ambientes dinâmicos, a fim de proporcionar capacitação dos professores para o uso de recursos tecnológicos bem como, alternativas para o trabalho com a geometria.

Dentre ações didáticas que estimulam o pensamento geométrico, considera-se pertinente o uso dos ambientes dinâmicos, pois de acordo com Gravina *et. al.* (2012, p. 38) “são ferramentas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de figuras geométricas a partir das propriedades que as definem.”. Dentre algumas características, a possibilidade de exploração das figuras, ao arrastá-las, modificá-las ou reordená-las por meio do mouse, consiste num ponto positivo em relação a figura geométrica estática, em que ações como as mencionadas podem ser feitas, mas, com um custo de tempo elevado.

Por se tratar de uma fonte de conhecimento importante, a geometria é um campo em que “o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.”. (BRASIL, 1998, p. 51). Aliada às considerações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a concepção de Lorenzatto (1995, p. 06) sobre a Geometria reforça a escolha do estudo em contemplar esse contexto, pois “aqueles que procuram um facilitador de processos mentais, encontrarão na Geometria o que precisam: prestigiando o processo de construção do conhecimento, a Geometria valoriza o descobrir, o conjecturar e o experimentar.”.

O desenvolvimento do pensamento geométrico, segundo o que aponta Raymond Duval (2004, 2005, 2012b) contempla diferentes atividades cognitivas, denominadas de: apreensões (perceptiva, sequencial, operatória e discursiva), olhares (botânico, agrimensor,



construtor e inventor) e desconstrução dimensional (incluindo as dimensões: 0D (pontos) para 1D (retas, segmentos) ou para 2D (superfícies) e vice versa).

Ao considerar relevante um olhar para o ambiente dinâmico GeoGebra no contexto da Geometria, o presente estudo questiona: Em que medida o dinamismo proporcionado pelo ambiente do software GeoGebra contribui para o desenvolvimento das apreensões, olhares e a desconstrução dimensional necessários e essenciais para aprendizagem de Geometria? Em contrapartida, a questão norteadora, suscita um desmembramento de outras questões:

- 1) O trabalho com esse ambiente dinâmico envolvendo conteúdos de geometria, favorece a desconstrução dimensional de figuras referente a: dimensão D0 (para pontos), dimensão D1 (referente as retas ou segmentos) e dimensão D2 (relativa a superfícies)?
- 2) Que tipo de olhares poderão ser contemplados nas atividades de Geometria propostas no GeoGebra?
- 3) Como pode ser oportunizado o desenvolvimento da atividade cognitiva voltada para as apreensões perceptiva, sequencial, operatória e discursiva com o uso dos ambientes dinâmicos?
- 4) De que maneira os ambientes dinâmicos para o trabalho com objetos geométricos, contribuem para o desenvolvimento das modificações figurais mereológicas, posicionais e óticas que são características da apreensão operatória?

Para responder a todas as inquietações, a pesquisa objetiva, de maneira geral, apontar em que medida o trabalho com a geometria em ambientes dinâmicos, contribui para o desenvolvimento do papel heurístico das figuras geométricas e para atividades cognitivas referentes aos tratamentos figurais, tipos de apreensões e olhares, específicos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Especificamente, são considerados relevantes, os demais objetivos a seguir:

- Indicar se o registro figural dinâmico inibe ou facilita o reconhecimento das unidades figurais de uma figura geométrica (desconstrução dimensional).
- Apontar em que medida o ambiente dinâmico do Geogebra contribui para o desenvolvimento dos olhares: botanista, agrimensor, construtor e inventor na resolução de atividades propostas nos ambientes dinâmicos, das apreensões operatória, sequencial, perceptiva.
- Evidenciar a ocorrência das apreensões perceptiva, operatória, discursiva e sequencial em atividades propostas em um ambiente dinâmico.



A pesquisa de natureza qualitativa, cuja abordagem consiste num estudo de caso, analisará a produção de um grupo de alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual da cidade de Ponta Grossa – PR. Os instrumentos de coleta dos dados empíricos serão atividades propostas voltadas para o aprendizado da relação de Euler válida para os poliedros de Platão. No entanto, julgou-se necessária a elaboração de atividades que proporcionassem uma retomada de conceitos envolvendo a geometria plana a saber: polígonos e não polígonos e polígonos regulares e não regulares. As produções dos alunos, em arquivos digitais que serão salvos nos computadores e produções escritas solicitadas no decorrer das atividades constituirão os dados empíricos que serão submetidos à análises. Para um melhor encaminhamento do estudo, como metodologia de análise dos dados empíricos, serão utilizados os subsídios teóricos da proposta de Bardin (1977).

Para a realização deste estudo, se propôs a coleta de dados, por meio da oferta de uma oficina de geometria com o uso do ambiente dinâmico GeoGebra para uma turma de alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental. Optou-se pela escolha do ambiente dinâmico GeoGebra, por constituir-se de um software gratuito e compatível com os sistemas operacionais Linux e Windows, caracterizando-se portanto, num ambiente dinâmico de fácil acesso. No entanto, julgou-se necessária a aplicação de um teste piloto que proporcionasse uma análise preliminar para possíveis alterações.

A seguir, num primeiro momento, será apresentado um recorte do referencial teórico adotado, em seguida, num segundo momento, apresenta-se uma análise prévia a respeito das respostas dos alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, que fizeram parte do teste piloto sobre duas das atividades propostas.

A teoria das Representações Semióticas no tocante à Geometria

A matemática para ser conhecida e compreendida, faz uso de representações. A representação de conceitos matemáticos ocorre naquilo que Duval (2009, p. 14) denomina de “sistemas de expressão e representação”. Esses sistemas, além da língua natural, são também a escritura algébrica, as figuras geométricas, a escrita dos números de forma decimal ou fracionária e mesmo as notações científicas. Todos esses sistemas de expressão obedecem regras particulares e expressam conceitos matemáticos. (DUVAL, 2009).

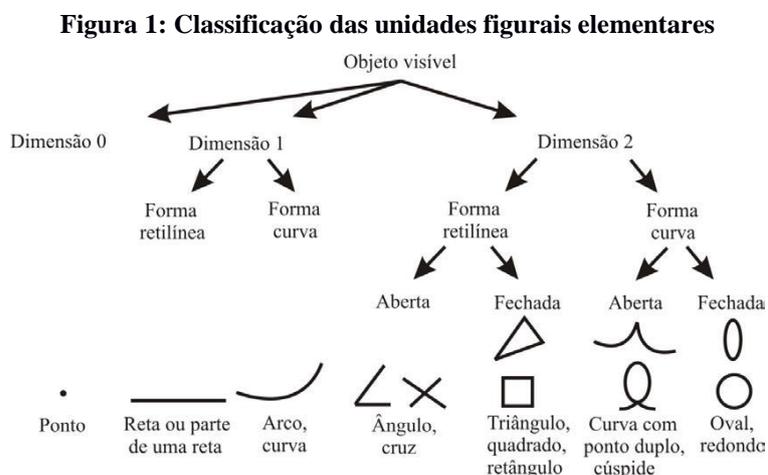


A aprendizagem em Geometria considerando os escritos de Duval (2004, 2005, 2011, 2012a, 2012b) é analisada de modo particular sendo considerada mais exigente, pois, depende da coordenação simultânea de dois tipos de Registros de Representação Semiótica: o registro discursivo, em língua natural e o registro figural.

O registro discursivo é utilizado para enunciar as definições, os teoremas ou as hipóteses, enquanto que o registro figural é necessário para evidenciar propriedades que estão contidas no desenho. (DUVAL, 2004) A relação entre os registros discursivo e figural ocorre porque uma figura permite abordagens conceituais variadas e para que se possa esclarecer a respeito de qual objeto matemático se trata é indispensável a indicação verbal, desta forma, “não há desenho sem legenda.”. (DUVAL, 2004, p. 168, tradução nossa)

Duval (2004) destaca que uma figura geométrica é constituída de valores dimensionais e qualitativos, denominados também de unidades figurais elementares. Essas unidades figurais elementares são qualitativas quando dizem respeito ao formato, por exemplo, linhas retas ou curvas, contornos abertos ou fechados. Os valores dimensionais, podem ser explicados pelo seguinte exemplo: ao considerar que um triângulo é uma figura de dimensão 2 (2D) possui como unidades figurais elementares qualitativas, os segmentos de retas, essas retas possuem a dimensão 1 (1D) e os três pontos de intercessão dos segmentos de reta que formam o triângulo possuem a dimensão 0 (0D). Duval (2004, p. 159, tradução nossa) explica que “uma figura geométrica é sempre uma configuração de ao menos duas unidades figurais elementares.”.

A figura 4 a seguir, mostra a classificação das unidades figurais elementares que constituem uma figura geométrica.



Fonte - DUVAL (2004, p. 159)



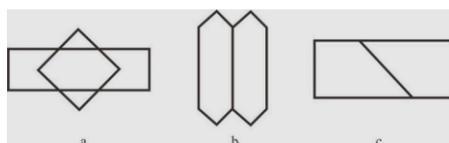
A visualização de uma figura geométrica deve contemplar, segundo Duval (2011, p. 87) a “[...] desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista, e isso sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel.”. Esta mudança de olhar é um salto cognitivo considerável, pois é contrário ao reconhecimento automático das formas, em que a unidade figural da dimensão superior se impõe de modo imediato à percepção. (DUVAL, 2011)

Duval (2004, 2005, 2011, 2012a, 2012b) estabelece diferentes maneiras de interpretar as representações em Geometria, e essas maneiras envolvem diferentes apreensões. As apreensões são distinguidas em quatro tipos: a apreensão perceptiva, a apreensão operatória, a apreensão discursiva e a apreensão sequencial.

Na apreensão perceptiva, de maneira imediata e automática, há o “reconhecimento das diferentes unidades figurais que são discerníveis em uma figura dada”. (DUVAL, 2004, p. 162, tradução nossa). Ela é considerada como o primeiro nível de apreensão das figuras geométricas, pois, “uma figura é uma organização de elementos de um campo perceptivo, não homogêneo, que constitui um objeto que se destaca deste campo.”. (DUVAL, 2012a, p. 121) Considerando a análise das variações qualitativas e dimensionais, a apreensão perceptiva permite também a interpretação da forma que uma figura está organizada.

As figuras 5a, 5b e 5c ilustram diferentes maneiras de interpretação visual de uma figura:

Figura 2: Exemplos de diferentes organizações perceptivas nas figuras



Fonte - (DUVAL, 2012a, p. 121)

De acordo com Duval (2012a), por meio da apreensão perceptiva, a figura 5a é composta pela superposição entre um retângulo e um quadrado, a figura 5b de maneira imediata indica duas formas iguais com um lado em comum enquanto que a figura 5c indica um retângulo dividido em duas partes. Isso caracteriza o que Duval (2012a) comenta de que a apreensão perceptiva é uma atividade imediata e automática em que uma figura destaca objetos independentemente do enunciado.

Duval (2011) comenta que ao considerar a mudança na maneira de ver uma figura, que contemple a desconstrução dimensional, esta contraria a percepção imediata que de certa maneira bloqueia o reconhecimento das demais unidades figurais. Retomando o exemplo



da figura 5a, pode ser feita outra decomposição em que a figura pode ser formada por dois triângulos, dois pentágonos e um hexágono justapostos. Essas organizações perceptivas das figuras geométricas suscitam o outro nível de apreensão, chamado de apreensão operatória.

A apreensão operatória ocorre com uma atitude controlada e está “centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações.” (DUVAL, 2012a, p. 125). Essa apreensão faz parte do processo heurístico de uma figura, “de descoberta da resolução do problema.” (MORETTI, BRANDT, 2015, p. 604). Uma figura geométrica pode ser modificada por meio de três maneiras diferentes: pela modificação mereológica, modificação ótica ou modificação de posição.

A modificação mereológica Duval (2004) também a denomina de reconfiguração, e a define como sendo um tipo de tratamento em que uma figura é decomposta em outras subfiguras de dimensão 2. A modificação ótica segundo Duval (2012b) ocorre pela variação de tamanho de uma mesma figura, conservando a forma e orientação no plano fronto – paralelo. É uma modificação que “consiste em ver em profundidade”. (DUVAL, 2004, p. 166). A modificação de posição é aquela em que na figura se conserva o tamanho e a forma, porém, ocorre a variação de orientação: rotação ou translação (DUVAL, 2012b). A apreensão operatória, composta pelas três classes de modificações apresentadas, permite que as figuras geométricas cumpram a função de suporte intuitivo favorecendo a interpretação das atividades de geometria.

Outra apreensão, denominada de sequencial segundo Duval (2012a, p. 120) “é explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura.”. É uma apreensão que é verificada pelo seguimento de um passo-a-passo de uma construção geométrica.

A apreensão discursiva, diferentemente da descrição de um procedimento de construção, está relacionada com o enunciado, em que “as propriedades pertinentes e as únicas aceitáveis dependem cada vez do que é dito no enunciado como hipótese.” (DUVAL, 2012a, p. 133) Consiste em compreender os elementos da construção geométrica em que o enunciado, por meio das hipóteses, determina quais pressupostos teóricos serão úteis para a resolução do problema proposto.

Na resolução de um problema de Geometria é possível que as quatro apreensões perceptiva, operatória, sequencial e discursiva apareçam, sendo que algumas dessas apreensões serão mais requisitadas que outras. No entanto, destaca-se que a apreensão



perceptiva é predominante numa atividade geométrica. A apreensão perceptiva está relacionada com a forma de olhar para um problema em Geometria. A partir desse pressuposto, Duval (2005, tradução nossa) leva em consideração quatro diferentes olhares para a atividade geométrica, apresentados a seguir:

- O primeiro deles é o olhar botanista, em que há o reconhecimento dos contornos das formas focalizando os aspectos qualitativos de uma figura. Assim, atividades que consideram este olhar são de certo modo, muito básicas em Geometria, porém, esse olhar é o que prepara o aluno para os demais.
- O segundo olhar é o agrimensor tem a finalidade de efetuar medidas, passando de uma escala de grandeza para outra. Como por exemplo, ao efetuar as medidas de um cômodo em uma casa é necessário passá-las para o papel.
- O terceiro olhar é chamado de construtor, que ocorre a partir do uso de instrumentos, como a régua não graduada, o compasso ou algum programa computacional, como por exemplo, o software GeoGebra para a tomada de consciência sobre uma propriedade geométrica que ocorre não apenas pela característica perceptiva.
- O quarto olhar é o do inventor, em que uma figura é reorganizada para análise de um problema. Por exemplo, como dividir um quadrado de modo a obter dois triângulos?

Assim como as apreensões, esses olhares também estão presentes em atividades de Geometria e são em maior ou menor intensidade privilegiados dependendo da atividade proposta.

Procedimentos metodológicos e análise preliminar de duas atividades do teste piloto

O estudo em andamento, com a pretensão de apontar a contribuição do ambiente dinâmico GeoGebra para o processo de aprendizagem da geometria, com base na teoria dos Registros de Representação Semiótica se caracteriza de natureza qualitativa, pois, de acordo com Bogdan e Biklen (1994, p.49) estudos com essa natureza “interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.”.

Considera-se que a abordagem será de estudo de caso, pois, analisará a produção de um grupo de alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual da cidade de Ponta Grossa – PR. De acordo com Triviños (1987, p. 110) um estudo de caso fornece “[...] o conhecimento aprofundado de uma realidade delimitada que os resultados



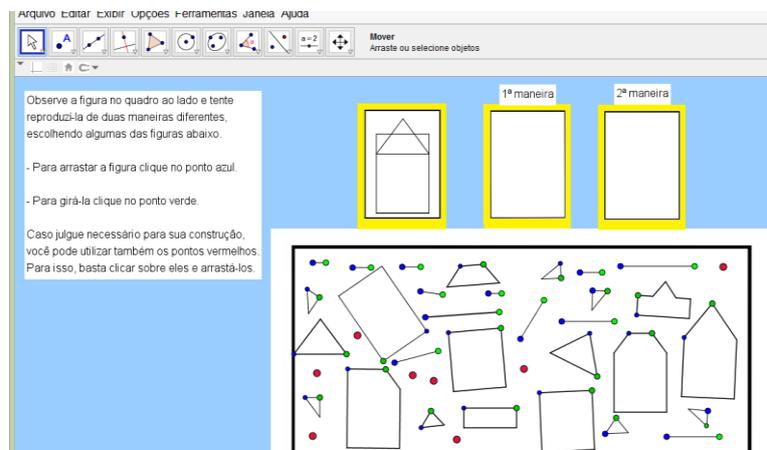
atingidos podem permitir e formular hipóteses para o encaminhamento de outras pesquisas.”.

Duas das atividades aplicadas em um teste piloto, feito com nove duplas de alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Ponta Grossa – PR serão apresentadas a seguir.

A primeira delas, intitulada como *reconfiguração* foi adaptada do trabalho de Assumpção (2015), foi proposta a fim de verificar de que maneira os sujeitos percebiam o desenho da tela do GeoGebra. Foi solicitado que o reproduzissem de dois modos diferentes fazendo uso das figuras disponíveis em um quadro. O propósito dessa atividade, foi verificar em alguma das reorganizações feitas pelos alunos, a desconstrução dimensional estaria presente. Para que isso ocorresse, os alunos deveriam considerar não apenas as formas de duas dimensões, mas também os segmentos de reta, cuja dimensão é um ou então poderiam fazer uso dos pontos (em vermelho na figura 3) cuja dimensão é zero.

A Figura 3 a seguir, mostra a atividade elaborada no GeoGebra.

Figura 3: Atividade Reconfiguração proposta no teste piloto



Fonte - a autora

A partir da análise dos modos como a figura de partida foi reorganizada pelos alunos, apenas uma das duplas considerou o uso dos segmentos para a reconfiguração da figura. O que corroborou com o que Duval (2011) afirma, que a mudança de uma dimensão a outra é um salto cognitivo considerável, pois, é contrário ao reconhecimento automático das formas, em que a unidade figural da dimensão superior se impõe de modo imediato à percepção.

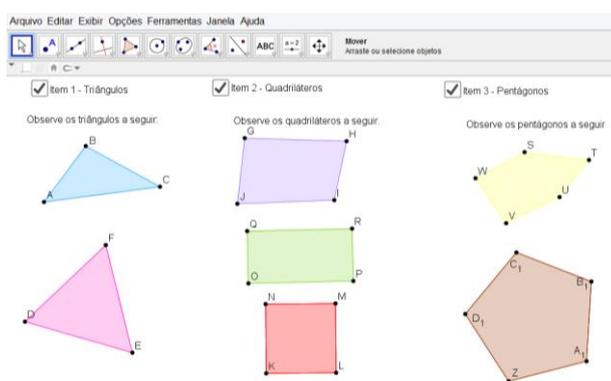
A segunda atividade, desenvolvida pela pesquisadora e intitulada como *polígonos regulares e irregulares*, foi composta por três itens. Ao clicar em cada item, apareciam na



tela do computador, um polígono regular e um polígono irregular. Foi solicitado aos alunos que efetuassem as medidas dos lados e dos ângulos internos de cada um dos polígonos por meio das ferramentas do GeoGebra. Em seguida, de forma escrita, responderam questionamentos contidos em um caderno da oficina, sobre quais alterações ocorriam nas medidas tanto dos lados, quanto dos ângulos, após o movimento dos vértices de cada polígono. Precisaram responder também sobre as diferenças que observaram entre os polígonos e que características poderiam ser atribuídas para um polígono regular.

A figura 4 a seguir, mostra a interface da atividade no GeoGebra com essa atividade.

Figura 4: atividade polígonos regulares e irregulares



Fonte - a autora

Com base nas respostas dessa atividade do teste piloto, foi possível identificar a presença da apreensão perceptiva e discursiva. A apreensão perceptiva se impunha no momento em que eram notadas as diferenças entre os polígonos, ao movimentá-los. Por exemplo, uma das duplas escreveu: *muda a medida, a diferença é que um dos triângulos os lados são iguais o outro é lado diferente*. A apreensão discursiva também foi identificada, pois, por meio do enunciado contido no caderno da oficina, foi dado direcionamento para olhares nas figuras que estavam na tela do computador. Esses olhares eram por vezes direcionados para a medida dos lados, como também para a medida dos ângulos, contemplando também uma desconstrução dimensional. Em relação às respostas dadas sobre as características dos polígonos regulares, o que chamou atenção até o momento, foi que nem todas as duplas responderam que tanto a medida dos ângulos (com duas dimensões) tanto a medida dos lados (formados por segmentos de reta, cuja dimensão é um) são as características que determinam que um polígono é regular. Das nove duplas, três elencaram as duas características. Do restante das duplas, apenas uma característica foi mencionada. Quatro duplas apresentaram que um polígono regular possui todos os ângulos internos iguais. Um



número significativo, que indica que a dimensão dois, presente ao efetuar a medida dos ângulos, continuou se impondo em detrimento do olhar para a dimensão um, referente à medida dos lados dos polígonos. Somente duas duplas mencionaram que um polígono regular possui a medida dos lados iguais, o que caracterizou uma desconstrução dimensional.

Considerações Finais

Pelo resultado preliminar das duas atividades expostas nesse trabalho, aplicadas no teste piloto, é possível afirmar que o dinamismo característico do GeoGebra, com funções de movimento, tem colaborado para que no trabalho com a geometria, sejam contemplados processos cognitivos importantes, como a desconstrução dimensional. Especificamente, ao objetivar na pesquisa em andamento, a indicação se o registro figural dinâmico, inibe ou facilita, o reconhecimento das unidades figurais de uma figura geométrica, ainda serão necessárias reflexões sobre como explorar ainda mais o ambiente dinâmico, a fim de estimular a mudança de olhar, voltado para a desconstrução dimensional. Pois, nas duas atividades apresentadas, a percepção imediata das formas de duas dimensões se impôs mais efetivamente.

Referências

- ASSUMPCÃO, P. G. S. **Perímetro e área de polígonos: abordagem através de um ambiente dinâmico sob o olhar das representações semióticas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física). Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria. 2015.
- ALMOULOUD, S. A. *et al*; A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 27, p. 94-108, Dez. 2004.
- BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução de L. A. Reta e A. Pinheiro. Lisboa: Edições 70, 1977.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos**. Tradução M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.
- BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO. **Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Fundamental - Matemática**. Brasília: MEC, SEF, 1998.
- DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Tradução de Myrian V. Restrebo. Santiago de Cali: Peter Lang, 2004.



_____. **Semiosis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. Lenio Fernandes Levy e Marisa Rosane Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

_____. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização: Tânia M.M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

_____. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática** – Revemat: Florianópolis v. 7, n. 1, p. 118-138, jul. 2012a.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática** – Revemat: Florianópolis, v.07, n.2, p. 266-297, 2012b.

GRAVINA, M. A; E. (Org.) et alii. Geometria Dinâmica na Escola. In: _____ **Matemática, Mídias Digitais e Didática:** tripé para formação de professores de Matemática. Porto Alegre: UFRGS, 2010. p. 37-60.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista.** São Paulo: SBEM, 1º semestre. v.4. p. 03-13, 1995.

LOVIS, K. A. **Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica:** o que pensam e o que sabem os professores. 2009. 148 f. Dissertação. (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática) Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

MEDEIROS, M. F. **Geometria dinâmica no ensino de transformações no plano:** Uma experiência com professores da Educação Básica. 2012. 172 f. Dissertação. (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

MORETTI, M. T.; BRANDT, C. F. Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras. **Educação Matemática Pesquisa.** v. 17, n. 3, p. 597-616, nov. 2015.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké.** n.º 7. Ano I. n.º 1, p. 07-17, 1993.

SANTOS, J. A. **Formação continuada de professores em geometria por meio de uma plataforma de educação a distância:** Uma experiência com professores de Ensino Médio. 2007. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2007.

SILVA S. H. **Conhecimento de professores polivalentes em geometria:** contribuições da teoria dos registros de representação semiótica. 2011. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza. 2011.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais.** São Paulo: Editora Atlas, 1987.