Números Irracionais: Investigando o conceito de incomensurabilidade.

Rute Ribeiro Meireles Rocha[1]

GDn°4 – Educação Matemática no Ensino Superior

Resumo do trabalho. A pesquisa foi realizada com estudantes do Curso noturno de licenciatura em Matemática regularmente inscritos na disciplina Ensino de Matemática de uma universidade pública da Baixada Fluminense. O objetivo desta pesquisa é propor, durante a formação inicial de professores, situações didáticas de cunho investigativo para construção do conceito de incomensurabilidade. Dessa forma a aplicação de tarefas com questões abertas ou exploratórias com o intuito de promover novas ferramentas didáticas a serem propostas em salas de aula do Ensino Básico. O conteúdo escolhido é o dos números irracionais e neste trabalho apresentamos uma das tarefas aplicadas e pertencente a um conjunto de propostas, incluído no corpo de uma dissertação de mestrado em desenvolvimento. Como resultados foram observados benefícios para imagem conceitual dos números irracionais, sua representação geométrica e percepção histórica.

Palavras-chave: incomensuráveis, irracionalidade, investigação matemática.

Introdução

Neste artigo, apresentamos um recorte da pesquisa de mestrado, em andamento que visa verificar a potencialidade de uma sequência de atividades, sobre os números irracionais, apresentada a um grupo de estudantes regularmente inscritos na disciplina Ensino de Matemática de um curso noturno de licenciatura de uma universidade pública da Baixada Fluminense.

Os estudantes convidados foram esclarecidos sobre os procedimentos, objetivos da pesquisa, a forma como seriam identificados e sobre a possibilidade da não adesão, se assim o desejassem. Entretanto, todos participaram das tarefas, e neste trabalho são identificados pela inicial dos seus nomes e do período que frequentam.

É importante ressaltar ainda que, a turma já havia vivenciado atividades investigativas anteriormente com a professora responsável pela disciplina. Nesse artigo, apresentamos uma das tarefas aplicadas cujo tema contempla o conceito de incomensurabilidade e a origem histórica do conceito de número irracional. A construção deste conceito é fundamental para a percepção da imprescindibilidade do conjunto dos números irracionais, bem como de sua representação geométrica. Como instrumentos de coleta e análise de

---

[1]Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, rutermrocha@hotmail.com, orientadora: Dr[a]. Dora Soraia Kindel.

dados foram utilizados os registros escritos dos estudantes e gravação de áudio das discussões nos pequenos grupos de trabalho.

Esta pesquisa faz parte de uma dissertação de mestrado em desenvolvimento cujo tema apresenta uma abordagem para o ensino dos números irracionais.

Fundamentação Teórica

A matemática, apesar de existir há milhares de anos, é sem dúvida, uma das atividades humanas que mais tem sido adaptada e aplicada às diferentes áreas, ampliando seu domínio de forma assustadora em nossos tempos. No entanto, segundo Kindel (1998), "a matemática escolar parece não avançar nesse sentido, apesar dos esforços em busca de sua melhor adaptação à realidade" (p.16). De um modo geral, as aulas de matemática seguem o padrão em que o conteúdo é apresentado numa organização formal, que é o seu estado final. Parte-se da definição, apresentam-se exemplos e em seguida propõem-se alguns exercícios e por último algumas situações- problema. No caso do conjunto dos números irracionais, não é diferente. Talvez a única diferença seja a de que neste caso, apresentam-se comumente na educação básica, apenas três exemplos: o número pi, o número raiz de dois e raiz de três.

A abordagem didática das características e peculiaridades dos conjuntos dos números irracionais nem sempre corresponde às necessidades reais de aprendizagem dos alunos, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

Segundo Pommer (2012) o movimento do ensino direcionado aos aspectos operatórios, exatos, determinísticos e finitos consiste numa tendência que encobre aspectos importantes e significativos envolvendo os números.

Em um artigo apresentado no Congresso de Educación Matemática de América Central y El Caribe, Pietropaolo, Corbo e Campos (2013), ao examinar as respostas dos professores de matemática da Rede Pública de São Paulo, os autores concluíram que a imagem conceitual do conjunto dos números irracionais era prevalentemente constituída por noções pertencentes ao campo numérico, contendo, em alguns casos, concepções incorretas, muitas vezes relativas às representações e à classificação destes números.

Além disso, os conceitos de incomensurabilidade e de interpretação geométrica dos números irracionais não constavam no repertório de conhecimentos sobre o conteúdo.

Para Ponte (1994) investigar é procurar conhecer o que não se sabe. Para constituir um grau de comparação com o vocabulário, um significado muito próximo, senão equivalente em português temos os termos "pesquisar" e "inquirir". Em inglês, existem igualmente diversos termos com significados relativamente próximos para designar esta atividade: Research, investigate, inquiry, enquiry. Para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou entre estes e novos objetos matemáticos, procurando identificar e comprovar as respectivas propriedades.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2015) consideram que o conceito de número ocupa um lugar de destaque na Matemática escolar. Desenvolver o sentido de número, ou seja, adquirir uma compreensão global dos números e das operações e usá-la de modo flexível para analisar situações e desenvolver estratégias úteis para lidar com os números e as operações é um objetivo central da aprendizagem da Matemática. As investigações numéricas contribuem de modo decisivo, para desenvolver essa compreensão global dos números e operações, bem como as capacidades matemáticas importantes como a formulação e teste de conjecturas e a procura de generalizações.

Ponte (2003) baseou a sua argumentação numa perspectiva menos sagrada da investigação, como uma atividade natural à espécie humana, em contraponto com uma perspectiva elitista e restritiva, que reserva esta atividade para os "investigadores profissionais". Investigar pressupõe, sobretudo, uma atitude, uma vontade de perceber, uma capacidade para interrogar, uma disponibilidade para ver as coisas de outro modo e para pôr em causa aquilo que parecia certo. Investigar envolve, sobretudo, três atividades: estudar, conversar e escrever.

Implementação

O trabalho desenvolvido durante as aulas previa a organização da turma em pequenos grupos, com não mais do que 4 integrantes. Previa também a entrega da ficha de atividade para cada integrante do grupo, discussão no grupo das estratégias de solução, o registro escrito individual, material base da coleta de dados da pesquisa, gravação em áudio das discussões do grupo. Para a realização da próxima atividade, a primeira de um grupo de seis, os grupos também receberam material de apoio: um conjunto de peças do material Escala Cuisinaire, tiras de papel representando réguas genéricas e um roteiro de atividade contendo a imagem de quadrados concêntricos com medidas de lado iguais à 12cm, 9cm e 3cm.

Objetivos: Refletir sobre o conceito de incomensurabilidade. Experimentar as possibilidades de quebra de paradigma da medição através de unidades. Realizar a releitura do processo histórico da construção dos números irracionais.

No mesmo roteiro de atividade havia as seguintes orientações:

- A Partir dos recursos ofertados meça o lado dos quadrados e defina qual deles representará a unidade de medida. Registre.
- A partir desta definição de unidade meça os lados dos demais quadrados e suas respectivas diagonais. Registre da forma mais conveniente e clara.
- Procure uma forma de representar os registros de medida de forma numérica e registre essas relações.
- Foi possível encontrar um valor exato? Quais foram as dificuldades?

Os procedimentos previstos eram: a) Medir o lado e a diagonal dos quadrados diversos (em anexo no final do roteiro) utilizando réguas genéricas sem escala de medida; b) Repetir o processo anterior utilizando as réguas da Escala Cuisinaire e representando seus resultados através de numeração racional; c) Produção de registro dissertativo sobre as investigações e experiências.

Para realização desta tarefa, os estudantes foram orientados a escolher uma das peças (réguas) como unidade, e esta seriam sua base numérica para as demais medições. Durante a discussão das hipóteses construídas pelo grupo, um dos membros foi orientado a gravar um áudio com o uso de seu próprio celular e enviá-lo à pesquisadora.

A expectativa principal na aplicação desta atividade era a percepção, mesmo que intuitiva e basal, de que existem empecilhos para a medição exata da diagonal de qualquer quadrado com a utilização de uma unidade e suas frações. Também era esperado que surgissem relações entre as diagonais dos quadrados, visto que possuíam medidas proporcionais. No entanto por se tratar de uma tarefa de investigação, era sabido que cada grupo poderia formular processos e resultados diferenciados.

Figura 1: Escala ou régua Cuisinaire

Fonte – UTFPR,Disponível em:http://www.utfpr.edu.br/cornelioprocopio/cursos/licenciaturas/Ofertados-neste-Campus/matematica/laboratorios/material-didatico/escala-cuisenaire Acesso em: 14 de maio de 2017

Apresentamos a seguir as respostas dadas pelos integrantes dos cinco grupos, optamos por identificar os alunos pelas letras A, B, C e D.

Grupo 1, composto por três licenciandos.

Na audição das conversas entre eles é possível perceber que existe alguma dificuldade em representar o "pedacinho", possivelmente nenhuma das peças, por menor que fosse não representava com exatidão à medida que o grupo buscava. E a divisão em frações não parecia clara. Um dos integrantes A diz "a diagonal seria duas vezes?" E B complementa "dois e um pedacinho".

Nos trechos seguintes, o grupo começa a discutir sobre qual seria a melhor peça para identificar a unidade escolhida. A discussão gira em torno de escolher a peça que pudesse ser usada tanto para medir o lado quanto a diagonal do quadrado, simplificando assim os cálculos. O diálogo a seguir mostra que estão tentando usar a régua verde e o "natural" _nome dado à régua de madeira que não foi pintada, e que tem seus lados medindo 1cm.

Aluna B: _Duas verdes e duas vezes a natural.

Aluna A: _Se a gente encontrasse um tamanho.

Aluna C: _Mas ai ela vai passar...

Aluna B: _Tem certeza que podemos usar todos?

Aluna C: _Mas de qualquer forma vai entrar fração.

Aluna A: _De qualquer forma vamos usar fração

Aluna C: _Se menor, usaremos multiplicação.

Aqui é possível ver que os estudantes buscam encontrar uma unidade que caiba um número exato de vezes nos comprimentos do lado e da diagonal do quadrado, sem sucesso, no entanto. Repare no argumento de C quando A aparentemente escolhe uma régua diferente para medir. B questiona a existência dessa unidade "exata", digamos assim. E C, prefere "escapar" da idéia de usar frações preferindo usar uma quantidade inteira, daí a expressão "se menor, usaremos a multiplicação". Ou seja, é explícita a necessidade de se ter uma quantidade inteira de unidades para medir os lados e a diagonal do quadrado, quando diz "se menor, usaremos multiplicação".

Esta impossibilidade em encontrar uma unidade em que seja possível determinar exatamente a medida da diagonal do quadrado faz com que o grupo se disperse. Não é possível identificar o que dizem no áudio. Diante disso, o grupo muda de estratégia e passa a procurar uma unidade conveniente para medir a diagonal do quadrado, aparentemente acreditando que assim seja possível medir o lado em função dela.

Aluna A: _A lateral do quadrado menos. É 2/7 da unidade.
Aluna B: _Esse?
Aluna C: _Esse passou?
Aluna A: _3/7 dela?
Aluna A: _2 unidade mais 1/7
Aluna B: _Agora não sei perai...
Aluna C: _Ta sobrando...

Grupo 2: Também composto por 3 integrantes.

Através de simples observação foi possível notar que o grupo interagia menos do que os demais grupos. Os componentes decidiram distribuir tarefas. Enquanto um fazia teste com as peças, outro realizava cálculos algébricos e a terceira integrante ficou responsável por redigir o processo de investigação. No entanto ao acompanhar a gravação em áudio da discussão foi possível notar que, em diversos momentos, hipóteses valiosas eram consideradas.

Aluno A: _Acho que faltou... Faltou não, sobrou.

Aluno B: _Aqui já deu errado... Faltou.

Aluno A: _Caraca, tem alguma bruxaria aqui. Tem alguma coisa errada.

Este trecho acima representa o momento onde a medição começa a apresentar dificuldades. Repare como a impossibilidade de se encontrar uma medida "exata" sai do escopo da realidade e passa a ser algo sobrenatural sendo expresso por A, na última fala. No mundo da matemática escolar os resultados encontrados são sempre exatos e expressos por números inteiros, sendo talvez aceitável um valor expresso por uma fração. Desde que seja possível determiná-la exatamente.

Enquanto a dupla experimentava medir usando o material disponibilizado, o terceiro integrante tentava resolver o problema através do cálculo algébrico com a intenção de encontrar o resultado numérico e posteriormente representá-lo através das peças, sem sucesso, como vemos a seguir.

Aluno A: _No caso a diagonal eles usavam teorema de Pitágoras. Então pode usar?
Aluno A: _Será que essa figura (minha) é a mesma que aquela?
Aluno B: _Quando não sobra falta... Tenho dislexia. Não é possível.
Aluno A: _tá (sic) escrito aqui... Eles já usavam Pitágoras.
Aluno B: _Ai entra a parte do irracional... Deu 6 raiz de 2.
Aluno A: _vai dar um valor irracional esse daí...
Aluno B: _Usando Pitágoras dá 6 raiz de 2
Aluno B: _Pronto provei o irracional... tá aí.
Aluno A: _Mas eles não usavam irracional, usavam algoritmo de Euclides.
Aluno A: _O algoritmo de Euclides não era o resto da divisão?... Então, e agora?
Aluna C: _Como eu vou escrever alguma coisa que não existe?
Aluno B: _Então é aproximadamente... Escreve ai a diagonal do quadrado é aproximadamente tanto.

Mas, o grupo não fica satisfeito com o resultado e a constatação de que não seja possível encontrar uma unidade que possa ser usada para medir exatamente a diagonal do quadrado. Afinal, não encontravam uma forma de representar o número irracional encontrado com o uso das peças. E o problema da representação utilizando as referências unitárias continuava sendo um desafio. E procuram então testam todas as peças do material, como veremos a seguir:

Aluno A: _Me dá todas as peças ai... vou tentar fazer.
Aluno B: _não pode usar irracional... Coloca aproximadamente.
Aluno A: _nós não sabemos como representar. Meu problema é representar.

Aluno B: _É exatamente esse o problema. (risos)

Aluno A: _O cara precisa ter feito Harvard pra montar isso... (risos)

Em um determinado momento, o aluno B iniciou a proposta de construção de alguma sentença ou equação onde a incógnita representaria a porção desconhecida da medida do lado do quadrado:

Aluno B: Mais 5 menos 10...mais 5 menos quatro....dá um número real...tipo 15 menos 6. Dá 9 até aqui?

Aluno A: _Você ta fazendo o lado... Nós temos o lado. O problema é a diagonal. (risos)

Aluno A: _Encontramos 6 raiz de 2 então temos que encontrar o que pode representar isso.

Aluno B: _Deu 16 unidades (com as peças)... Mas por Pitágoras dá 12 raiz de 2.

Aluno B: _Podíamos dizer que o que sobra ou falta e chamar de x.

Aluna C: _Nem dá pra resolver...

Aluno B: _Coloca nos comentários assim... buguei. (risos)

Aluno A: _Aqui bateu certinho.

Aluno B: _Como pode bater certinho cara? Não pode... tem que dar 12 raiz de 2. Aqui deu ruim. Aqui bugou!

No trecho acima, foi possível notar que a discussão sobre a comparação do resultado encontrado com a medida das peças (16 unidades) e o resultado numérico irracional ($12\sqrt{2}$ =16, 9705627484...) causaram grande desequilíbrio entre as concepções e as certezas do grupo.

> Os conceitos de incomensurabilidade e de interpretação geométrica dos números irracionais não constam do repertório de conhecimento dos estudantes e isso faz com que continuem procurando encontrar uma unidade para medir os comprimentos, mudam de estratégia e consideram agora uma nova unidade, a medida da diagonal do cubinho.

Aluno A: _Vou usar como unidade a diagonal do cubinho. É uma idéia... Se vai dar certo...

Aluno B: _Falta pouca coisa... Alguns centímetros de diferença.

Aluno A: _Aqui deu 11. (raiz de 2)

Aluno B: _Mas é 12!

Aluno A: _Eu medi daqui até aqui. Deu 8 unidades e mais um pedacinho que eu chamei de x. b é 8 mais x.

Ai eu medi daqui até aqui, deu 11.

Ai medi daqui até aqui, deu duas unidades e mais um pedacinho. Eu chamei de y. Ai eu vou chamar de b'.

Ai eu sei que b' é 11. Beleza!

x + y = 1. Igual a uma unidade...

Os grupos 3 e 4 não conseguiram enviar os áudios das discussões desta tarefa, apresentando tão somente seu texto final e alguns registros aleatórios. As considerações serão feitas sobre este material.

Grupo 3: Ao analisar os registros escritos do grupo, é possível perceber que usaram aproximações muito distantes das medições reais. Ao calcular a diagonal do quadrado de unidade 1 informaram o valor 1 + 2/3, que em representação decimal corresponde ao valor 1,6666666666667. No entanto é possível notar que seus resultados não apresentavam certeza ao observar uma das respostas incluídas no roteiro:

Foi possível encontrar um valor exato? Quais foram as dificuldades?

Sim. A maior dificuldade foi medir a sobra das medidas.

Possivelmente, ao se defrontar com "sobras" difíceis de serem calculadas, o grupo optou por uma aproximação menos precisa que os demais.

Grupo 4: O grupo apresentou um perfil pouco investigativo, assim como o grupo 3. Ao calcular a medida dos lados e das diagonais dos quadrados chegou a apresentar resultados compostos por números naturais: Lado igual a 5 unidades e diagonal igual a 7 unidades. No entanto, assim como o grupo 3, ao responder ao mesmo questionamento sobre as dificuldades em realizar medições exatas a resposta do grupo foi:

Foi possível em alguns lados, pois com as peças propostas em sala não conseguimos preencher a diagonal de forma completa.

Tendo o grupo, ficado satisfeito com os resultados obtidos através da soma das medidas das peças e não se arriscando em buscar outra estratégia para compor o resultado usando, por exemplo, uma fração da unidade escolhida.

Grupo 5: O grupo apresentou certa descontração e afinidade, no entanto em muitos momentos houve dificuldades para realização das tarefas por falta de concentração e desvio da proposta.

No primeiro momento o grupo se ateve em procurar uma peça que representasse uma unidade mais conveniente, ou seja, que facilitasse todo o processo da tarefa, diminuindo a quantidade de cálculos.

Aluna a: _Todos os lados do quadrado e depois todas as diagonais.

Aluno B: _Vamos medir o lado depois as diagonais. Você pode usar mais de um. Amarelo e roxo.

Aluna A: _A diagonal não é exatamente a preta.

Aluna B: _Se usa a amarela como unidade a preta é igual a 2 amarelas

Aluna C: _Usamos a amarela e agora vai ficar difícil.

Aluno B:_ O problema não é medir esse troço, o problema é como vamos chamar.

Aluno A: _Essa aqui então é 1 mais 1/3.

Aluno B: _De qualquer maneira vamos ter que fazer conta.

Apesar da relutância em calcular a medida das diagonais dos diferentes quadrados é possível identificar que os participantes experimentam várias peças para serem usadas como unidade de medida, bem como usar a justaposição de peças com tamanhos diferentes e logo em seguida percebem que mesmo esta estratégia mostra a impossibilidade de uma medida “exata”. Ou seja, a incomensurabilidade da diagonal do quadrado, ou visto de outra forma: a impossibilidade de medir uma grandeza irracional através de unidades e suas frações e que é presente no próximo extrato da discussão entre os integrantes:

Aluno B: _Esse aqui é 1 mais 1/3. Não nos mínimos detalhes, estamos colocando assim, grossamente.

Aluno A: _é 1 e mais 1/3.

Aluno B: _É 1 + 1/3 não nos mínimos detalhes... Assim “grossamente”.

Aluno C: _Foi possível encontrar um valor exato?

Aluno A: _Claro que não.

Aluno B: _Claro que foi!

Aluno A: _Vocês estão metendo um monte de frações... Então foram valores aproximados...

Aluno B: _Então encontramos valores aproximados em relação à unidade escolhida.

Apesar da pouca certeza, e do fato de considerarem as frações medidas inexatas, foi possível notar que o grupo entrou em conflito no momento de expressar as medidas das diagonais.

Resultados e discussão

Diante do exposto na análise das respostas desta tarefa é possível indentificar que: os estudantes não possuem familiaridade em encontrar medidas incomensuráveis; se sentem desconfortáveis ao não encontrarem valores exatos. Foi possível identificar o surgimento do processo de construção do conceito de incomensurabilidade analisando a discussão dos grupos. Os conceitos de incomensurabilidade e de interpretação geométrica dos números irracionais permearam as dúvidas apresentadas pelos licenciandos sempre que encontravam barreiras ao utilizar as unidades ofertadas para a medição da diagonal do quadrado.

As tarefas possuem valor para a realização de explorações que visem à identificação da incomensurabilidade de segmentos, assim como é possível identificar outros valores além dos convencionais apresentados em sala de aula. E por fim, esta proposta apresenta potencial para aplicação na educação básica, tanto nos anos finais do ensino fundamental como no início do Ensino Médio, com o intuito de estruturar a apresentação dos demais números irracionais e a construção do conjunto dos números reais.

Referências

KINDEL, D. S.. **Discutindo os racionais na 7ª série visando a noção de densidade.** 1998, 202 f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática_ Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1998.

PIETRIPAOLO, R.C; CORBO, O; CAMPOS, T.M.M. Os números Irracionais e seu ensino delineando a imagem conceitual de um grupo de professores. In: CONGRESO DE EDUCACI"N MATEMÁTICA DE AMÉRICA CENTRAL Y EL CARIBE, 1., 2013, Santo Domingo, República Dominicana. **Anais... .** Santo Domingo, República Dominicana: Cemacyc, 2013. p. 15 - 30.

POMMER, W.M. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico**. 2012. 246 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ciências e Matemática, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

PONTE, J.P. da; BROCARDO, J; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na Sala de Aula.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. 159 p. (Tendências em Educação matemática).

PONTE, J.P.M da. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. **Grupo de Investigação Dif – Didáctica e Forma: Investigação em educação,** Lisboa, v. 2, n. 2, p.93-169, 1994.

PONTE, J.P.M. da. Investigar, ensinar e aprende. **Actas do Profmat,** Lisboa, v. 3, n. 2, p.25-39, 2003.