Universidade Federal de Pelotas
IFM – Departamento de Física
Mecânica Quântica I – UNIDADE I – Lista de Problemas

1. Resolva as questões e problemas do capítulo 6 do livro do Eisberg e Resnick .

2. Seja uma partícula de massa m sob a ação do seguinte potencial unidimensional,

$$V(x) = \begin{cases} \infty & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad 0 < x < a \\ V_0 & , \quad x > a \end{cases} \tag{1}$$

(a) Escreva a equação de Schödinger independente do tempo em cada uma das regiões (se aplicável); (b) escreva as soluções nas diferentes regiões em termos de constantes a determinar para o caso da energia total da partícula for menor que V_0; (c) idem para energia maior que V_0; (d) no caso $E < V_0$, somente encontre a equação transcendental que determina os autovalores de energia; (e) no caso $E > V_0$, encontre as autofunções em termos de um dos coeficientes, sem normalizar.

3. Calcule $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$, $\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ e $\sigma_x \sigma_p$ para a função de onda do estado fundamental do poço quadrado infinito.

4. Uma partícula livre de massa m e número de onda k_1 está viajando para a direita. No ponto $x = 0$, o potencial muda bruscamente de 0 para V_0 e permanece com este valor para todos os valores positivos de x. (a) Se a energia inicial da partícula é $E = 2V_0$ qual é o número de onda k_2 na região $x > 0$. Expresse em termos de k_1. (b) Calcule o coeficiente de reflexão do degrau de potencial e (c) o coeficiente de transmissão. (d) A cada milhão de partículas com número de onda k_1 que incidem no degrau, quantas partículas, em média, continuam a viajar no sentido de x positivo? Como este valor se compara ao resultado clássico?

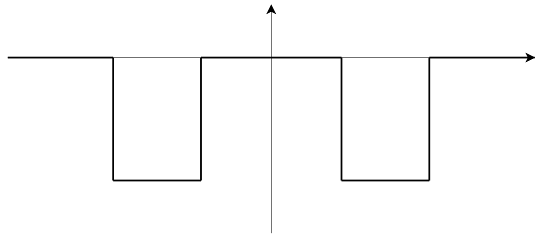
5. Sob que circunstâncias uma função potencial descontínua é uma aproximação razoável de um sistema real?

6. O estado inicial de uma partícula é dado por

$$\Psi(x{,}0) = \begin{cases} Ae^{ik_0(x-x_0)} & , \quad x_0 < x < x_0 + a \\ 0 & , \quad x < x_0 \text{ e } x > x_0 + a \end{cases}$$

com $k_0 = 2\pi/\lambda_0$. Determine a constante de normalização. Represente graficamente a densidade de probabilidade. Determine o valor médio da posição ($\langle x \rangle$). Calcule a incerteza associada a esse valor médio ($\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$).

7. Questão teórica: considere o potencial duplo poço de potencial. Este é um modelo aproximado do potencial que atua em um elétron em uma molécula diatômica unidimensional. Suponha que a profundidade V_0 e a largura a são fixas e suficientes para que existam diversos estados ligados. (a) Desenhe a função de onda do primeiro estado ligado (estado fundamental) e do primeiro estado excitado. (b) Qualitativamente, como as energias correspondentes dos estados acima se comportam, quando b varia de 0 até ∞? Em cada item explique seu raciocínio.



8. Seja uma partícula de massa m sob a ação do seguinte potencial unidimensional,

$$V(x) = \begin{cases} \infty & , \quad x < -a, x > +a \\ 0 & , \quad -a < x < 0 \\ V_0 & , \quad 0 < x < a \end{cases} \tag{2}$$

(a) Escreva a equação de Schödinger independente do tempo em cada uma das regiões (se aplicável); (b) escreva as soluções nas diferentes regiões em termos de constantes a determinar para os casos $E < V_0$ e $E > V_0$. (c) no caso $E < V_0$, somente encontre a equação transcendental que determina os autovalores de energia. A solução neste caso é normalizável?

9. Considere a seguinte função de onda,

$$\Psi(x{,}t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}$$

onde A, λ e ω são constantes reais positivas. (a) Normalize Ψ. (b) Calcule $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$. (c) Calcule $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$. (c) Desenhe um gráfico de $|\Psi|^2$ como função de x.

10. Seja uma partícula em um poço de potencial infinito entre 0 e a. As autofunções e as autoenergias são, respectivamente,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \quad n = 1{,}2{,}\ldots$$

Seja o seguinte estado inicial,

$$\Psi(x{,}0) = A[\psi_1(x) + \psi_2(x)].$$

Use a condição de ortogonalidade das funções de onda:

$$\int \psi_n^*(x)\psi_m(x)\, dx = \delta_{mn}$$

para: (a) normalizar $\Psi(x{,}0)$; (b) calcular

$$\Psi(x{,}t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$$

usando

$$c_n = \int_0^a \psi_n^*(x)\Psi(x{,}0)\, dx.$$

(c) calcular $|\Psi(x{,}t)|^2$. e $\langle x \rangle$.

11. Mostre por cálculo direto que as seguintes funções de onda *não* satisfazem a equação de Schöedinger dependente do tempo para a partícula livre,

$$\Psi_1(x{,}t) = A\sin(kx - \omega t), \quad \Psi_2(x{,}t) = A\cos(kx - \omega t),$$

mas que a combinação,

$$\Psi(x{,}t) = \Psi_2(x{,}t) + i\Psi_1(x{,}t),$$

satisfaz.

12. Questão teórica (cálculos proibidos). Seja o seguinte potencial,

$$V(x)=\alpha|x|=\begin{cases} -\alpha x \, , x<0 \\ +\alpha x \, , x>0 \end{cases} \tag{3}$$

onde α tem as unidades apropriadas. Este potencial corresponde a uma força constante aplicada à partícula. A solução da Eq. de Schrödinger é proporcional a função de Airy. Sem fazer cálculo algum, esquematize em um gráfico os dois primeiros auto-estados para esta potencial, explicando os raciocínios empregados.

13. Seja uma partícula de massa m sob a ação do seguinte potencial unidimensional,

$$V(x)=\begin{cases} \infty \quad , x<-a, \\ +V_0 \, , -a<x<0, \\ 0 \quad , 0<x<+a, \\ +V_1 \, , x>+a \end{cases} \tag{4}$$

(a) Escreva a solução da eq. de Schödinger independente do tempo em cada uma das regiões em termos de constantes a determinar para os casos (i) $0<E<V_0$, (ii) $V_0<E<V_1$, (iii) $E>V_1$. (b) Resolva os coeficientes para o caso (ii) em termos de um deles. (c) Encontre a equação transcendental que determina os autovalores de energia. (d) A solução do item (b) é normalizável? Justifique sem calcular.

14. Estime a energia do estado fundamental de um elétron confinado em uma região de tamanho $1{,}0\times10^{14}\,\mathrm{m}$, que é da ordem da dimensão do núcleo. Considere um potencial do tipo quadrado infinito. Compare esta energia com a energia gravitacional e eletroestática de um elétron e um próton separados pela mesma distância. Baseado nestes resultados, qual é a possibilidade de encontrar um elétron dentro de um núcleo? Dicas:

$$E_n=\frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2m_ea^2},\, U_g=\frac{Gm_pm_e}{r},\, U_e=\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\hbar=1{,}05\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s},\, m_e=9{,}11\times10^{-31}\,\mathrm{kg},$$

$$G=6{,}67\times10^{-11}\,\mathrm{N{\cdot}m^2/kg^2},\, m_p=1{,}67\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

$$e=1{,}60\times10^{-19}\,\mathrm{C},\, \epsilon_0=8{,}85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N{\cdot}m^2}$$

15. Seja a seguinte autofunção,

$$\psi(x)=A\exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2a}\right]\sin kx$$

(a) Normalize a autofunção. Faça um gráfico da função normalizada. (b) Onde a partícula tem maior chance de ser encontrada? (c) Calcule os valores esperados $\langle x\rangle$ e $\langle x^2\rangle$ e a dispersão na posição, $\sigma_x=\sqrt{\langle x\rangle^2-\langle x^2\rangle}$

16. Em uma região do espaço, uma partícula possui uma função de onda dada por $\psi(x)=A\exp(-x^2/2L^2)$ e uma energia $E=\hbar^2/2mL^2$. (a) Determine a energia potencial em função de x e faça um gráfico de $V(x)$. (b) Determine a energia cinética em função de x.

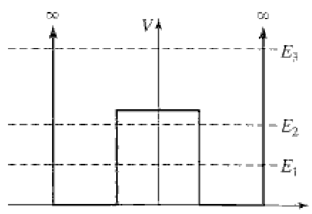
17. Calcule $\sigma_x=\sqrt{\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2}$, $\sigma_p=\sqrt{\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2}$ e $\sigma_x\sigma_p$ para a função de onda do primeiro estado excitado do poço quadrado infinito.

18. Seja o seguinte potencial

$$V(x)=\begin{cases} \infty \quad , x<0 \\ -V_0 \, , 0<x<a \\ 0 \quad , x>a \end{cases} \tag{5}$$

onde V_0 é uma constante positiva. Resolva a eq. de Schrödinger para este potencial no caso $-V_0<E<0$ e encontre a equação que determina os autovalores de energia. A solução é normalizável? Justifique sua resposta.

19. Esquematize as autofunções correspondentes aos 3 primeiros autovalores de energia para o potencial da figura abaixo.



20. Normalize a autofunção,

$$\Psi(x)=\begin{cases} Nx^2(L-x)\, , 0<x<L \\ 0 \qquad\qquad , \text{resto} \end{cases} \tag{6}$$

Calcule $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, $\langle p_x\rangle$, $\langle p_x^2\rangle$, σ_x, σ_{p_x}. São coerentes com o princípio de indeterminação de Heisenberg, $\sigma_x\sigma_{p_x}\geqslant\hbar/2$?

21. Uma partícula de massa m move-se em um poço de potencial quadrado infinito na região $0<x<L$. Adicionalmente, há uma função delta de potencial no centro do poço:

$$V(x)=\begin{cases} \infty \qquad\qquad , x<0 \\ \lambda\delta(x-L/2)\, , 0<x<L \\ \infty \qquad\qquad , x>L \end{cases}$$

onde λ é uma constante positiva. (a) Resolva a eq. de Schröedinger para cada uma das regiões p/ $E>0$. A solução é normalizável? Se sim, normalize-a. (b) Encontre a eq. transcendental que define os autovalores de energia para este potencial.