

# FÍSICA



R. RESNICK  
D. HALLIDAY

1

4<sup>a</sup> edição



LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS EDITORA

## ALGUMAS CONSTANTES FÍSICAS

(Para maiores informações, ver o Apêndice B, que contém os principais valores experimentais).

Velocidade da luz	$c$	$3,00 \times 10^8$ m/s
Relação massa-energia	$c^2$	$8,99 \times 10^{16}$ J/kg 931 MeV/u
Constante gravitacional	$G$	$6,67 \times 10^{-11}$ N · m <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup>
Constante universal dos gases*	$R$	8,31 J/mol · K 0,0832 li · atm/mol · K
Constante de permeabilidade	$\mu_0$	$1,26 \times 10^{-6}$ H/m
Constante dielétrica	$\epsilon_0$	$8,85 \times 10^{-12}$ F/m
Constante de Avogadro*	$N_0$	$6,02 \times 10^{23}$ moléculas/mol
Constante de Boltzmann	$k$	$1,38 \times 10^{-23}$ J/molécula · K $8,36 \times 10^{-5}$ eV/molécula · K
Constante de Planck	$h$	$6,63 \times 10^{-34}$ J · s $4,14 \times 10^{-15}$ eV · s
Carga elementar	$e$	$1,60 \times 10^{-19}$ C
Massa de repouso do elétron	$m_e$	$9,11 \times 10^{-31}$ kg
Razão carga/massa para o elétron	$e/m_e$	$1,76 \times 10^{11}$ C/kg
Massa de repouso do próton	$m_p$	$1,67 \times 10^{-27}$ kg

\*Neste livro, consideramos "1 mol" = "1 molécula-grama" (=  $10^{-3}$  kg · mol)

## PROPRIEDADES FÍSICAS

Ar (seco, a 20°C e a 1 atm)	1,29 kg/m <sup>3</sup>
Massa específica	$1,00 \times 10^3$ J/kg · K
Calor específico a pressão constante	0,240 cal/g · K
	1,40
	331 m/s
Razão de calores específicos ( $\gamma$ )	
Velocidade do som	
Água (20°C e 1 atm)	$1,00 \times 10^3$ kg/m <sup>3</sup>
Massa específica	1,00 gm/cm <sup>3</sup>
Velocidade do som	1,460 m/s
Índice de refração ( $\lambda = 5.890\text{Å}$ )	1,33
Calor específico a pressão constante	4,180 J/kg · K
	1,00 cal/g · K
Calor de fusão (0°C)	$3,33 \times 10^5$ J/kg
	79,7 cal/g
Calor de vaporização (100°C)	$2,26 \times 10^6$ J/kg
	539 cal/g
Terra	
Massa	$5,98 \times 10^{24}$ kg
Raio médio	$6,37 \times 10^6$ m
	3,960 mi
Distância média entre a Terra e o Sol	$1,49 \times 10^8$ km
	$9,29 \times 10^7$ mi
Distância média entre a Lua e a Terra	$3,80 \times 10^5$ km
	$2,39 \times 10^5$ mi
Gravidade padrão	9,81 m/s <sup>2</sup>
	32,2 ft/s <sup>2</sup>
Atmosfera padrão	$1,01 \times 10^5$ Pa
	14,7 lb/in <sup>2</sup>
	760 mm-Hg
	29,9 in-Hg*

25,00

# FÍSICA

R. RESNICK  
D. HALLIDAY

1



99

43544

CONHEÇA AS OBRAS DA LTC

AZEVEDO	– Mecânica Clássica
AZEVEDO	– Eletrodinâmica Clássica
GOLDEMBERG	– Energia no Brasil
HALLIDAY/RESNICK	– Física vols. 1, 2, 3 e 4
OREAR	– Fundamentos da Física vols. 1, 2 e 3
OREAR	– Física
SEARS/ZEMANSKY/YOUNG	– Física vols. 1, 2 e 3
WILLIAMS	– Física – Guia p/ Estudantes vol. I-2
WILLIAMS	– Física – Guia p/ Estudantes vol. II-1
WILLIAMS	– Física – Guia p/ Estudantes vol. II-2

# FÍSICA

---

**R. RESNICK**

PROFESSOR DE FÍSICA DO  
RENSSELAER POLYTECHNIC INSTITUTE

**D. HALLIDAY**

PROFESSOR DE FÍSICA DA  
UNIVERSITY OF PITTSBURGH

---

**1**

4ª EDIÇÃO REVISTA



**LIVROS  
TÉCNICOS E  
CIENTÍFICOS EDITORA LTDA.**

Rio de Janeiro-RJ • São Paulo-SP

Copyright © 1960, 1962, 1966, 1978, by John Wiley & Sons, Inc.

All rights reserved.

Authorized translation from English language edition published by John Wiley & Sons, Inc.

Copyright © 1960, 1962, 1966, 1978, by John Wiley & Sons, Inc.

Todos os direitos reservados.

Tradução autorizada da edição em língua inglesa publicada por John Wiley & Sons, Inc.

Edição brasileira:

3ª edição: 1979

Reimpressões: 1980, 1981 (duas), 1982 (três) e 1983

4ª edição: 1983

Reimpressões: 1984 (duas), 1985, 1986 (duas), 1987 (duas) e 1988 (duas)

Proibida a reprodução dos  
textos originais, mesmo parcial,  
e por qualquer processo, sem  
autorização do Autor e da Editora.

CIP-Brasil. Catalogação-na-fonte  
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ.

Resnick, Robert.  
R342f Física / Robert Resnick [e] David Halliday;  
4v. tradução [de] Antonio Máximo R. Luz [et al];  
Revisão técnica [de] Adir Moyses Luiz. –  
4ª ed. – Rio de Janeiro: LTC – Livros Técni-  
cos e Científicos Editora S.A., 1983.  
  
Tradução de: Physics  
Apêndice  
  
1. Física I. Halliday, David II. Título  
  
CDD – 530  
CDU – 53  
83-0275

ISBN: 85-216-0299-5 (vol. 1)

ISBN: 85-216-0300-2 (vol. 2)

ISBN: 85-216-0301-0 (vol. 3)

ISBN: 85-216-0302-9 (vol. 4)

ISBN: 85-216-0298-7 (obra completa)

ISBN: 0-471-02456-2 (John Wiley & Sons, Inc.)

Direitos reservados por:



**LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS EDITORA LTDA.**

MATRIZ	FILIAL
Rua Vieira Bueno, 21 20.920 – Rio de Janeiro – RJ Brasil – End. Telefônico: LITECE Tels.: 580-6055 Vendas: 580-9374	Rua Vitória, 486 – 2º andar 01.210 – São Paulo – SP Tel.: (011) 223-9866 Caixa Postal 4.817

Participaram na elaboração da edição brasileira:

**Na tradução**

para a Segunda edição

Professores

Antônio Máximo R. Luz  
Beatriz Alvarenga Alvarez

Jésus de Oliveira

Marcio Quintão Moreno

*do Dept.<sup>o</sup> de Física do Instituto de Ciências  
Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais*

e, para a terceira edição,

Professor

Edgard Pedreiro de Cerqueira Neto  
*do Dept.<sup>o</sup> de Física do Instituto Militar  
de Engenharia*

**Na revisão técnica**

Professores

Paulo Cesar Pfaltzgraff Ferreira  
*Engenheiro Eletricista  
Professor de Eletromagnetismo – UCP*

Adir Moysés Luiz, D. Sc.  
*Professor Adjunto do Instituto de  
Física – UFRJ*

**Coordenação geral  
(até a 3ª edição)**

Professor

Nicim Zagury, Ph. D.  
*Dept.<sup>o</sup> de Física – PUC/Rio*

**Responsável pela reformulação dos problemas da 4ª edição**

Professor

Adir Moysés Luiz, D. Sc.  
*Professor Adjunto do Instituto de  
Física – UFRJ*

aos quais a Editora deixa aqui consignado o seu agradecimento.

# **prefácio à 4ª edição**

A quarta edição brasileira desta obra, apresentada também em 4 volumes, inclui modificações em relação à anterior. O texto sofreu nova revisão técnica e gráfica. Os problemas foram inteiramente revistos e muitos deles modificados e adaptados à realidade brasileira. Entretanto, essas modificações não alteraram a orientação didática da edição original, nem modificaram significativamente a forma e o grau de dificuldades dos problemas propostos na terceira edição. A reformulação foi feita pelo professor Adir Moysés Luiz que possui larga experiência no campo do ensino da Física, onde leciona essa disciplina há 15 anos ininterruptos no ciclo básico do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro. O professor Adir Moysés Luiz é doutor em ciência (D. Sc.) pela UFRJ e possui cerca de 50 trabalhos publicados.

Na terceira edição, somente os problemas ímpares possuíam respostas ao passo que nesta quarta edição são os problemas pares que oferecem essas respostas. Esperamos que o esforço de melhoria desta obra, cuja adoção no Brasil é bastante ampla, seja aceita por professores e alunos e estamos ao inteiro dispor de toda a comunidade acadêmica brasileira para receber críticas e sugestões objetivando futuras atualizações.

Rio de Janeiro, setembro de 1983

A EDITORA



# **prefácio à 3ª edição**

A primeira edição em inglês desta obra foi publicada em 1960 (*Physics for Students of Science and Engineering*), a segunda, em 1966 (*Physics*) e a terceira em 1978 (*Physics*).

O texto é dirigido aos alunos que estudam cálculo, concomitantemente, com os de Ciências Exatas e Engenharia. O objetivo principal é estruturar uma base sólida com os princípios da Física Clássica e capacitar o estudante para solucionar problemas. Deu-se também atenção à aplicação prática, às teorias mais modernas, e ao interesse histórico e filosófico dos eventos. Isto é feito com inclusão de seções especiais e de questões que exigem mais raciocínio e com a apresentação da matéria em forma integrada. Há um grande número de exemplos desenvolvidos e uma quantidade considerável de problemas ao final de cada capítulo. Dispensou-se cuidado especial aos artifícios pedagógicos que se têm mostrado eficazes para o bom aprendizado.

A segunda edição de Física em inglês deu-se há onze anos. Durante todo este período, a obra foi e continua sendo bem recebida por toda parte. A correspondência com aqueles que dela fazem uso didático tem sido copiosa em todos estes anos. Chegou-se, então, à conclusão de que seria oportuna, agora, uma nova edição.

Tendo em vista o crescente uso do sistema métrico decimal nos Estados Unidos, bem como, de um modo geral, em todo o mundo, decidimos enfaticamente adotar a total aplicação das unidades e nomenclaturas do "Sistema Internacional" (SI).

A obra foi cuidadosamente revisada no sentido de obter maior rendimento pedagógico, com base, principalmente, na experiência dos que lecionam a matéria e na literatura científica mais recente. Em consequência, reestruturou-se, de modo significativo, partes previamente selecionadas, visando a melhor apresentação, a precisão e a física propriamente dita. Foram incluídos novos exemplos desenvolvidos em tópicos ou setores nos quais sentiu-se haver necessidade. As referências foram atualizadas e maior número de figuras proporciona maior clareza do assunto. As tabelas e os apêndices foram ampliados e atualizados com dados mais recentes e maiores informações. Acrescentou-se, ainda, um tópico suplementar sobre a teoria da relatividade.

Acentuados melhoramentos foram feitos nas questões e problemas, somente na parte da Mecânica, Calor e Acústica houve acréscimo de 35%, contando-se agora 1567. Nas questões, passou-se de 413 para 611, cobrindo campo maior e dando força às aplicações, com referências atualizadas à literatura científica popular. Tal como nas questões, a maioria dos problemas anteriores foi mantida e revista para maior clareza da exposição. 225 novos melhoram a cobertura do material e permitem elevar o nível de conhecimento do estudante, dando ao professor maior possibilidade de escolha.

Nas partes de Eletromagnetismo, Ótica e Física Quântica foram acrescentados assuntos (semicondutores, indução mútua, magnetismo terrestre, radioastronomia, objetos virtuais e instrumentos óticos) que não constavam da edição anterior. O capítulo de oscilações eletromagnéticas, muito longo na 2ª edição, foi dividido em dois, reescritos para maior clareza do assunto, acrescentando-se, ainda, um capítulo, inteiramente novo, sobre correntes alternadas. Com os acréscimos feitos nesta fonte, o número total de questões aumentou de 57%, passando de 778 para 1219, enquanto que os problemas cresceram 29%, aumentando de 1441 para 1864. A maioria dos novos problemas e questões foi testada em salas de aulas.

Para auxiliar alunos e professores no desenvolvimento e resolução de tão extenso número de problemas: 1º) os problemas foram grupados em cada capítulo de acordo com o número da seção; por exemplo, a primeira seção precisa ser estudada para que seja possível solucionar os respectivos problemas; 2º) cada conjunto de problemas foi disposto em ordem aproximada de crescente dificuldade. Naturalmente que tal disposição, por seção ou por dificuldade, não é incondicional, tendo em vista as diferentes formas para resolver certos problemas, sem contar as preferências e conveniências pedagógicas; 3º) as ilustrações foram relacionadas; 4º) as respostas dos problemas de número ímpar foram colocados logo após o enunciado, ao invés de fazê-lo no final do livro.

Uma nova diagramação do livro dá melhor aspecto, menos compacto e monótono que o anterior, tomando mais fácil ao estudante ler a matéria, fazer anotações e distinguir os vários componentes de cada capítulo (texto, figuras, exemplos, tabelas, citações, referências, perguntas, problemas e assim por diante).

O texto, dentro de cada capítulo, que trata do assunto mais avançado, especializado ou histórico, está impresso em tipo menor.

Somos gratos a John Wiley and Sons e a Donald Deneck, editor de física, pela prestimosa cooperação. Ao Dr. Edward Derringh nosso reconhecimento pelo inestimável auxílio nas séries de problemas apresentados, assim como à Sra. Carolyn Clemente, por sua valiosa colaboração nos trabalhos de secretaria exigidos para a concretização desta obra.

Agradecemos ainda aos professores e alunos que enviaram críticas à edição anterior e particularmente a Robert P. Bauman, Kenneth Brownstein, Robert Karplus e Brian A. McInnes, que nos assessoraram de várias maneiras.

Esperamos que esta terceira edição possa contribuir para o aprimoramento do ensino de Física.

Janeiro 1978

ROBERT RESNICK  
DAVID HALLIDAY

# sumário

1-1	Grandezas, Padrões e Unidades Físicas	1	<b>1</b>
1-2	O Sistema Internacional de Unidades	2	<b>MEDICÃO 1</b>
1-3	O Padrão de Comprimento	4	
1-4	O Padrão de Massa	6	
1-5	O Padrão de Tempo	8	
2-1	Vetores e Escalares	14	<b>2</b>
2-2	Adição de Vetores, Método Geométrico	15	<b>VETORES 14</b>
2-3	Decomposição e Adição de Vetores, Método Analítico	17	
2-4	Multiplicação de Vetores	21	
2-5	Os Vetores e as Leis da Física	24	
3-1	Mecânica	30	<b>3</b>
3-2	Cinemática da Partícula	30	<b>MOVIMENTO EM</b>
3-3	Velocidade Média	31	<b>UMA DIMENSÃO 30</b>
3-4	Velocidade Instantânea	33	
3-5	Movimento em uma Dimensão – Velocidade Variável	34	
3-6	Aceleração	37	
3-7	Movimento Unidimensional – Aceleração Variável	38	
3-8	Movimento Unidimensional – Aceleração Constante	39	
3-9	Coerência de Unidades e Dimensões	41	
3-10	Corpos em Queda Livre	44	
3-11	Equações do Movimento de Queda Livre	45	
4-1	Deslocamento, Velocidade e Aceleração	55	<b>4</b>
4-2	Movimento em um Plano com Aceleração Constante	56	<b>MOVIMENTO EM UM</b>
4-3	Movimento de um Projétil	57	<b>PLANO 55</b>

- 4-4 Movimento Circular Uniforme 62
- 4-5 Aceleração Tangencial no Movimento Circular 66
- 4-6 Velocidade e Aceleração Relativas 68

- 5-1 Mecânica Clássica 76
- 5-2 Primeira Lei de Newton 78
- 5-3 Força 80
- 5-4 Massa; Segunda Lei de Newton 81
- 5-5 A Terceira Lei de Newton 83
- 5-6 Sistemas de Unidades Mecânicas 85
- 5-7 As Leis da Força 87
- 5-8 Peso e Massa 88
- 5-9 Procedimento Estático para Medir Forças 90
- 5-10 Algumas Aplicações das Leis de Movimento de Newton 91

- 6-1 Introdução 102
- 6-2 Forças de Atrito 102
- 6-3 Dinâmica do Movimento Circular Uniforme 108
- 6-4 Classificação das Forças; Forças Inerciais 111
- 6-5 Mecânica Clássica, Mecânica Relativística e Mecânica Quântica 113

- 7-1 Introdução 121
- 7-2 Trabalho Realizado por uma Força Constante 122
- 7-3 Trabalho Realizado por uma Força Variável – Caso Unidimensional 126
- 7-4 Trabalho de uma Força Variável – Caso Bidimensional 128
- 7-5 Energia Cinética e o Teorema do Trabalho – Energia 130
- 7-6 Significação do Teorema do Trabalho – Energia 133
- 7-7 Potência 133

- 8-1 Introdução 139
- 8-2 Forças Conservativas 139
- 8-3 Energia Potencial 143
- 8-4 Sistemas Conservativos Unidimensionais 146
- 8-5 Solução Completa do Problema para Forças – Unidimensionais
  - Dependentes Apenas da Posição 150
- 8-6 Sistemas Conservativos Bi e Tridimensionais 153
- 8-7 Forças Não Conservativas 155
- 8-8 A Conservação da Energia 157
- 8-9 Massa e Energia 159

- 9-1 Centro de Massa 169
- 9-2 Movimento do Centro de Massa 174
- 9-3 Momento Linear de uma Partícula 176
- 9-4 Momento Linear de um Sistema de Partículas 177
- 9-5 Conservação do Momento Linear 178
- 9-6 Algumas Aplicações do Princípio de Conservação do Momento Linear 181
- 9-7 Sistemas de Massa Variável 182

- 10-1 Que é uma Colisão? 195
- 10-2 Impulso e Momento Linear 196
- 10-3 Conservação do Momento Linear Durante as Colisões 197
- 10-4 Colisões em Uma Dimensão 198
- 10-5 A Medida “Verdadeira” de uma Força 205
- 10-6 Colisões em Duas e Três Dimensões 206
- 10-7 Seção de Choque Eficaz 211
- 10-8 Reações e Processos de Desintegração 214

## **5**

### *DINÂMICA DA PARTÍCULA – I 76*

## **6**

### *DINÂMICA DA PARTÍCULA – II 102*

## **7**

### *TRABALHO DE ENERGIA 121*

## **8**

### *CONSERVAÇÃO DA ENERGIA 139*

## **9**

### *CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR 169*

## **10**

### *COLISÕES 195*

11-1 Movimento de Rotação	224	<b>11</b>	
11-2 Cinemática da Rotação – as Variáveis	226	<i>CINEMÁTICA DA</i>	
11-3 Rotação com Aceleração Angular Constante	227	<i>ROTAÇÃO</i>	224
11-4 Grandezas Vetoriais na Rotação	230		
11-5 Relação entre a Cinemática Linear e a Cinemática Angular de uma Partícula em Movimento Circular – Forma Escalar	232		
11-6 Relação entre a Cinemática Linear e a Cinemática Angular de uma Partícula em Movimento Circular – Forma Vetorial	234		
12-1 Introdução	241	<b>12</b>	
12-2 Torque Sobre uma Partícula	242	<i>DINÂMICA DA</i>	
12-3 Momento Angular de uma Partícula	243	<i>ROTAÇÃO I</i>	241
12-4 Sistemas de Partículas	246		
12-5 Energia Cinética de Rotação e Momento de Inércia	247		
12-6 Dinâmica de Rotação de um Corpo Rígido	253		
12-7 Movimento Combinado de Translação e Rotação de um Corpo Rígido	259		
13-1 Introdução	272	<b>13</b>	
13-2 O Pião	272	<i>DINÂMICA DA</i>	
13-3 Momento Angular e Velocidade Angular	276	<i>ROTAÇÃO – II E A</i>	
13-4 Conservação do Momento Angular	281	<i>CONSERVAÇÃO DO</i>	
13-5 Alguns Outros Aspectos da Conservação do Momento Angular	285	<i>MOMENTO ANGULAR</i>	272
13-6 Dinâmica da Rotação – Revisão	287		
14-1 Corpos Rígidos	294	<b>14</b>	
14-2 Equilíbrio de um Corpo Rígido	294	<i>EQUILÍBRIO DE</i>	
14-3 Centro de Gravidade	296	<i>CORPOS RÍGIDOS</i>	294
14-4 Exemplos de Equilíbrio	299		
14-5 Equilíbrio Estável, Instável e Indiferente dos Corpos Rígidos em um Campo Gravitacional	305		
I Relação entre Cinemática Linear e Cinemática Angular Movimento Plano	312	<i>TÓPICOS</i>	
II Vetores Polares e Vetores Axiais	315	<i>SUPLEMENTARES</i>	312
III A Relatividade Restrita – Um Sumário de Conclusões	316		
A O Sistema Internacional de Unidades	322	<i>APÊNDICES</i>	322
B Algumas Constantes Fundamentais da Física	325		
C Dados Sobre a Terra, Lua e o Sol	326		
D O Sistema Solar	327		
E Tabela Periódica dos Elementos	328		
F As Partículas da Física	329		
G Fatores de Conversão	330		
H Símbolos Matemáticos e Alfabeto Grego	335		
I Fórmulas Matemáticas	336		
J Valores das Funções Trigonométricas	339	<i>ÍNDICE</i>	
K Vencedores do Prêmio Nobel de Física	339	<i>REMISSIVO</i>	345

# 1 medição

Os blocos utilizados na construção da Física são as grandezas físicas que usamos para expressar suas leis. Entre essas, estão o comprimento, a massa, o tempo, a força, a velocidade, a massa específica, a resistividade, a temperatura, a intensidade luminosa, a intensidade do campo magnético e outras mais. Muitas dessas palavras fazem parte do nosso vocabulário cotidiano, porém, em se tratando da ciência física, devemos definir os termos com os quais associamos grandezas físicas de modo claro e preciso, sem confundi-los com outros significados que possam ter no uso corrente.

Ao definirmos uma grandeza física como, por exemplo, massa, estabelecemos uma série de procedimentos para medir essa grandeza e atribuir-lhe uma unidade como, por exemplo, o quilograma. Ou seja, instituímos um padrão. Os métodos usados são inteiramente arbitrários. Podemos definir o quilograma da maneira que quisermos. O importante é, porém, defini-lo prática e objetivamente, bem como lograr uma aceitação dessa definição, em âmbito internacional.

Há tantas grandezas físicas que difícil se torna organizá-las. Elas não são, entretanto, independentes umas das outras. Por exemplo, a velocidade é a relação entre o comprimento e o tempo. O que fazemos é selecionar, entre todas as grandezas físicas possíveis, um número pequeno delas que chamamos fundamentais, sendo todas as demais grandezas derivadas delas. Daí, atribuímos padrões para cada uma dessas grandezas fundamentais e para nenhuma outra. Se, por exemplo, escolhermos o comprimento como gran-

1-1

*GRANDEZAS, PADRÕES E  
UNIDADES FÍSICAS*

deza fundamental, elegeremos um padrão que chamaremos de metro (ver Seq. 1-3) e defini-lo-emos em termos de operações precisas no laboratório.

Surgem, em conseqüência, várias perguntas: (a) Quantas grandezas fundamentais deveriam ser selecionadas? (b) Quais seriam? (c) Quem as selecionaria?

As duas primeiras perguntas, respondemos que selecionamos o menor número de grandezas físicas que conduzirá a uma descrição completa da física nos termos mais simples. Muitas escolhas são possíveis. Em um dado sistema, por exemplo, força é uma grandeza fundamental. No sistema que selecionamos (ver Seq. 1-2), é uma grandeza derivada.

A resposta à terceira pergunta depende de acordo internacional. Compete ao Bureau Internacional de Pesos e Medidas, localizado nas imediações de Paris, e fundado em 1875, tratar dessa matéria. Ele mantém contato com laboratórios de padrões em todo o mundo, inclusive com a Repartição Nacional de Padrões dos Estados Unidos.<sup>1</sup> A Conferência Geral sobre Pesos e Medidas, também um organismo internacional, reúne-se, periodicamente, a fim de tomar resoluções e ditar recomendações. Sua primeira assembléia deu-se em 1889 e em 1971, sua décima quarta reunião.

Uma vez estabelecido um padrão básico (citemos como exemplo o comprimento), devemos também estabelecer métodos que possibilitem medir a extensão de qualquer objeto, por simples comparação com o padrão estabelecido. Isso significa que o padrão deve ser acessível. Também, todas as vezes que quisermos comparar um objeto dado com o padrão, queremos, dentro de limites razoáveis, obter a mesma resposta. Isso significa que o padrão deve ser invariável. Estes dois requisitos são freqüentemente incompatíveis. Se escolhermos o comprimento como uma grandeza fundamental, estabelecermos seu padrão como sendo a distância entre a extremidade do nariz de uma pessoa e as pontas dos dedos de seu braço estendido e determinarmos, assim, a jarda como a unidade, teremos um padrão que certamente será acessível, porém jamais invariável. As exigências da ciência e tecnologia estimulam-nos a encontrar outro método. Para obtermos acessibilidade, basta criarmos padrões secundários, terciários etc., mais facilmente acessíveis, e atribuímos maior importância à invariabilidade.

Freqüentemente, fazemos comparações com um padrão fundamental por meios bastante indiretos. No caso do comprimento, consideremos os problemas de medição: (a) da distância à Grande Nebulosa de Andrômeda; (b) de sua altura e (c) das distâncias entre os núcleos na molécula  $\text{NH}_3$ . É claro que as técnicas de comparação variam grandemente. Por exemplo, não podemos usar uma régua para resolver o primeiro e o terceiro problemas.

A 14.<sup>a</sup> Conferência Geral sobre Pesos e Medidas (1971), estruturada no trabalho de conferências e comitês internacionais precedentes, selecionou como unidades básicas as sete grandezas apresentadas na Tab. 1-1. Esta é a base do Sistema Internacional de

## 1-2 O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ver "Standards of Measurement", Allen V. Astin, *Scientific American*, junho, 1968, e "A Short History of Measurement Standards at the National Physical Laboratory", H. Barnell, *Contemporary Physics* 9, 205 (1968).

<sup>2</sup> Ver NBS Special Publication 330. 1972. "The International System of Units (SI)". Escreva para o U. S. Government Printing Office, Washington, D.C. 20402.

Unidades, abreviado SI, do francês "Le Système International d'Unités".

Daremos muitos exemplos de unidades derivadas do SI, como velocidade, força, resistência elétrica etc., que resultam da Tab. 1-1. Por exemplo, a unidade de força do SI, denominada *newton* (abreviatura N), é definida, em termos de unidades bases do SI, como

$$1 \text{ N} = 1 \text{ m} \cdot \text{kg/s}^2,$$

como explicaremos no Cap. 5.

**Tabela 1-1**

Unidades básicas do SI

Grandeza	Nome	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	Ampère	A
Temperatura termodinâmica	Kelvin	K
Quantidade de substância	mol	mol
Intensidade luminosa	candela	cd

Se expressarmos propriedades físicas, como o raio da Terra ou o intervalo de tempo entre dois eventos nucleares, em unidades do SI (fundamental ou derivada), teremos números muito grandes ou muito pequenos. Por conveniência, a 14.<sup>a</sup> Conferência Geral sobre Pesos e Medidas, igualmente estruturada em trabalhos anteriores, recomendou os prefixos mostrados na Tab. 1-2. Assim, podemos escrever o raio médio da Terra ( $= 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ ) como 6,37 Mm e um intervalo de tempo da ordem de  $2,35 \times 10^{-9} \text{ s}$ , freqüentemente encontrado na Física Nuclear, como 2,35 ns. Os prefixos para fatores maiores que a unidade têm raízes gregas e os menores que a unidade, raízes latinas.

**Tabela 1-2**

Prefixos do SI

Fator	Prefixo	Símbolo	Fator	Prefixo	Símbolo
$10^1$	deca	da	$10^{-1}$	deci	d
$10^2$	hecto	h	$10^{-2}$	centi	c
$10^3$	quilo	k	$10^{-3}$	milli	m
$10^6$	mega	M	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^9$	giga	G	$10^{-9}$	nano	n
$10^{12}$	tera	T	$10^{-12}$	pico	p
$10^{15}$	peta	P	$10^{-15}$	femto	f
$10^{18}$	exa	E	$10^{-18}$	atto	a

Para completar a Tab. 1-1, necessitamos de sete conjuntos de métodos operacionais que nos ditem como obter, no laboratório, as sete unidades fundamentais do SI. Nas três seções seguintes deste capítulo, discutiremos métodos para obtenção das unidades de comprimento, massa e tempo.



Dois outros sistemas de unidades rivalizam com o Sistema Internacional (SI). Um é o sistema Gaussiano, também muito utilizado em Física. Não usaremos este sistema no presente livro. No Apêndice G, apresentamos os fatores para conversão às unidades do SI.

O segundo sistema é o britânico, ainda em uso corrente nos EUA e Grã-Bretanha, principalmente. As unidades fundamentais, em Mecânica, são o comprimento (pé), a força (libra) e o tempo (segundo). Também no Apêndice G, apresentamos os fatores de conversão para o SI. Usaremos, em geral, neste livro as unidades do SI.

Em engenharia, ainda é muito comum utilizar um sistema métrico um pouco diferente do SI: trata-se do *sistema técnico*, em que a força constitui uma das grandezas fundamentais, passando a massa a ser grandeza derivada; as unidades de comprimento e de tempo são as mesmas do SI.

Em 1970, ainda não haviam adotado o sistema métrico (que posteriormente surgiu como SI) ou mesmo mencionado que intencionavam fazê-lo oficialmente, o Ceilão (hoje Sri Lanka), Gâmbia, Guiana, Jamaica, Libéria, Malawi, Nigéria, Serra Leoa e os Estados Unidos.<sup>3</sup>

O Bureau Internacional de Pesos e Medidas mantém, sob sua guarda, o primeiro padrão de comprimento internacional, chamado metro-padrão, uma barra feita com uma liga de platina iridiada. Definiu-se como um metro a distância entre dois finos traços gravados próximo às extremidades da barra, estando ela a 0°C e suportada mecanicamente, de um modo determinado. Historicamente, o metro foi planejado para ser um décimo-milionésimo da distância do pólo norte ao equador, ao longo da linha do meridiano que passa por Paris. Entretanto, medidas mais precisas mostraram que a barra metro-padrão diferia ligeiramente (cerca de 0,023%) deste valor.

Foram feitas reproduções idênticas ao metro-padrão, por não ser este muito acessível, e enviadas a laboratórios de padrões em todo o mundo. Esses padrões secundários foram usados para calibrar outras barras mais acessíveis. Assim, até recentemente, cada barra ou instrumento de medição derivava seu valor legal do metro-padrão, através de complicada cadeia de comparações, utilizando-se microscópios e máquinas de dividir. Assim, desde 1959, a jarda, cuja definição legal nos Estados Unidos foi adotada nesse ano, passou a valer:

$$1 \text{ jarda} = 0,9144 \text{ metro (exatamente),}$$

o que é equivalente a

$$1 \text{ polegada} = 2,54 \text{ cm (exatamente).}$$

### 1-3 O PADRÃO DE COMPRIMENTO<sup>4</sup>

<sup>3</sup> Ver "Conversion to the Metric System", Lord Ritchie-Calder, *Scientific American*, julho, 1970. O periódico *Metric News* (Swani Publishing Company, P. O. Box 248, Roscoe, Illinois 61073) dá informações atualizadas sobre problemas de "metrificação", bem como o *Metric System Guide* — Bulletin (J. J. Keller Associates, 145 W. Wisconsin Avenue, Neenah, Wisconsin 54956).

<sup>4</sup> Ver "The Metre", H. Barrell, *Contemporary Physics* 3, 415 (1962).

Há várias objeções à barra-metro como padrão primário de comprimento: além de não ser muito acessível, é potencialmente destrutível, por incêndio ou guerra, por exemplo. Por ocasião do incêndio nas Câmaras do Parlamento, na Inglaterra, em 1834, a jarda padrão britânica e a libra peso padrão foram destruídas. A França instituiu como zona neutra internacional o Bureau International de Pesos e Medidas e, felizmente, assim foi respeitada pelos nazistas durante a II Guerra Mundial.

Muito mais importante ainda, é o fato de que a ciência e tecnologia modernas não mais se satisfazem com a técnica de comparar finos traços por meio do microscópio. Tal método tornou-se inoperante nos dias de hoje, como evidenciam as correções mínimas de curso em missões espaciais. Se, entre outras coisas, não soubéssemos a distância da Terra à Lua em metros, em função do tempo, com certa precisão, tais missões seriam muito mais difíceis.

J. Babinet, em 1828, foi o primeiro a sugerir que o comprimento de uma onda luminosa fosse usado como padrão. O desenvolvimento posterior do interferômetro (ver Cap. 45) dotou os cientistas de um instrumento de precisão ótica, com o qual uma onda luminosa poderia ser usada como elemento de prova para comparação de comprimentos. A luz visível tem um comprimento de onda de cerca de  $0,5 \mu\text{m}$  (ver Tab. 1-2) e as medidas de comprimento de barras, ainda que de muitos centímetros de extensão, podem ser feitas com precisão de uma pequena fração do comprimento de onda. Usando-se ondas luminosas, pode-se obter uma precisão de 1 parte em  $10^9$  ao se comparar comprimentos.

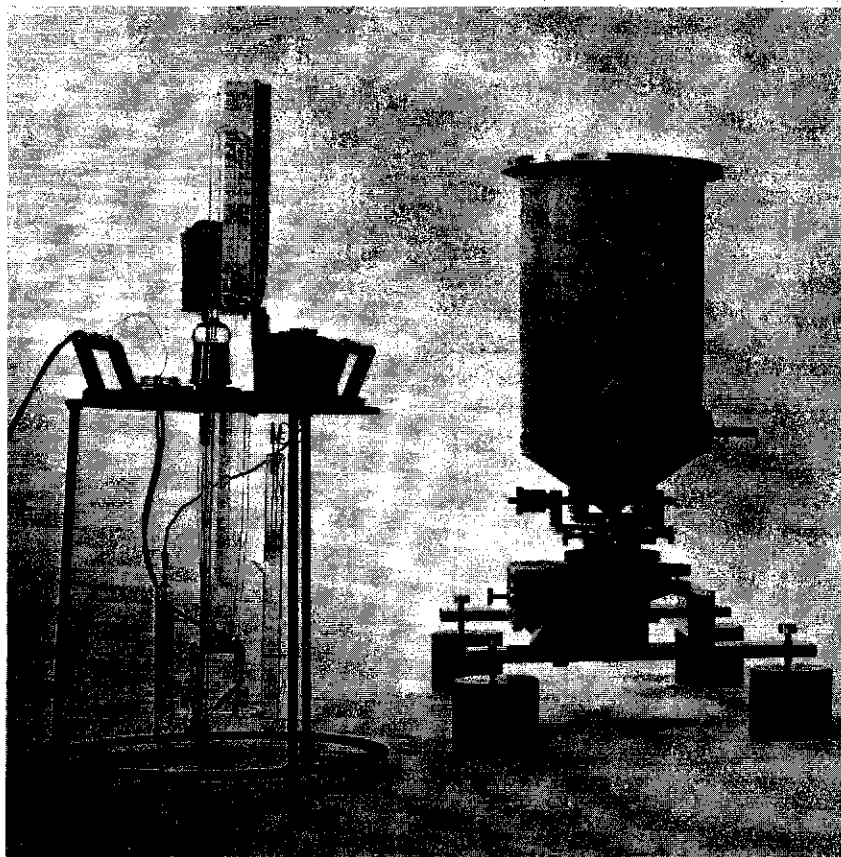


figura 1-1  
Uma fonte de luz do  $\text{Kr}^{86}$  fora do recipiente que a encerra. Durante a operação, a lâmpada é resfriada com nitrogênio líquido. (Cortesia do National Physical Laboratories, de Teddington, Inglaterra. Direitos reservados à Coroa.)

Em 1960, a 11.<sup>a</sup> Conferência Geral sobre Pesos e Medidas adotou um padrão atômico para o metro. Foi escolhido o comprimento de onda no vácuo de uma particular radiação laranja-avermelhada, identificada pela notação espectroscópica  $2p_{10} - 5d_5$  e emitida por átomos de um isótopo particular do criptônio,  $Kr^{86}$ , em descarga elétrica (ver Fig. 1-1). Especificamente, um metro é, atualmente definido, como sendo 1 650 763,73 comprimentos de onda desta luz. Chegou-se a este número, medindo-se cuidadosamente o comprimento da barra metro-padrão em função destas ondas luminosas. Esta comparação foi feita de modo que o novo padrão, baseado no comprimento da onda luminosa, pudesse ser tão compatível quanto possível com o velho padrão, este baseado na barra-metro. As comparações entre comprimentos, efetuadas com o novo padrão, são melhores do que as feitas com a barra-metro, por um fator de dez.

A escolha de um padrão atômico oferece vantagens outras, além de maior precisão nas medições de comprimento. Os átomos do  $Kr^{86}$  são disponíveis em toda parte, são idênticos e emitem luz do mesmo comprimento de onda. O comprimento de onda particular escolhido é característica exclusiva do  $Kr^{86}$ , sendo muito bem definido. O isótopo pode facilmente ser obtido na forma pura.

Tomando como fundamental o padrão de comprimento atômico, ainda assim necessitamos de padrões secundários adequados, calibrados em comparação com ele, para uso prático. Amiúde, como acontece ao medir distâncias interestelares ou intramoleculares, não podemos fazer uma comparação direta com o padrão. Devemos usar métodos indiretos para relacionar a distância em questão com o padrão primário de comprimento. Por exemplo, sabemos as distâncias das estrelas mais próximas à Terra porque suas posições, em relação ao conjunto de estrelas muito mais distantes, variam enquanto a Terra se move ao longo de sua órbita. Se medirmos esta variação angular (paralaxe) e se conhecermos o diâmetro da órbita da Terra em metros, poderemos calcular a distância à estrela mais próxima.

A Tab. 1-3 mostra alguns comprimentos medidos. Note que eles variam por um fator de cerca de  $10^{37}$ .

**Tabela 1-3**  
Alguns comprimentos medidos

Comprimentos	Metros
Distância à galáxia mais próxima (em Andrômeda)	$2 \times 10^{22}$
Raio de nossa galáxia	$6 \times 10^{19}$
Distância à estrela mais próxima (Alfa do Centauro)	$4,3 \times 10^{16}$
Raio médio da órbita do planeta mais distante (Plutão)	$5,9 \times 10^{12}$
Raio do Sol	$6,9 \times 10^8$
Raio da Terra	$6,4 \times 10^6$
Altura do Monte Everest	$8,9 \times 10^3$
Altura de um homem médio	$1,8 \times 10^0$
Espessura de uma página deste livro	$1 \times 10^{-4}$
Tamanho de um vírus da poliomielite	$1,2 \times 10^{-8}$
Raio de um átomo de hidrogênio	$5,0 \times 10^{-11}$
Raio efetivo de um próton	$1,2 \times 10^{-15}$

O padrão de massa do SI é um cilindro feito com uma liga de platina iridiada, guardado no Bureau Internacional de Pesos e Me-

didas, e designado, por acordo internacional, como sendo a massa de um quilograma. Padrões secundários são remetidos a laboratórios de padrões de outros países, e as massas de outros corpos podem ser determinadas pela técnica da balança de braços iguais, com precisão de duas partes em  $10^8$ .

A reprodução americana do padrão de massa internacional, conhecida como Quilograma Protótipo n.º 20, está encerrada numa campânula na Repartição Nacional de Padrões dos Estados Unidos (ver Fig. 1-2). Uma vez por ano ela é removida, para que se confirmem os valores de padrões terciários. Desde 1889, o Protótipo n.º 20 foi levado para a França duas vezes, para ratificar a comparação com o quilograma original. Duas pessoas estão sempre presentes para acompanhar sua remoção da campânula, uma para carregá-lo com pinças e a outra para apanhá-lo no caso da outra pessoa cair.



**figura 1-2**  
Este é o quilograma padrão n.º 20 sob a guarda do "National Bureau of Standards" nos EUA. É uma reprodução fiel do padrão internacional que se acha preservado no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, próximo de Paris. O quilograma padrão é o cilindro de platina no interior da campânula menor.

A Tab. 1-4 mostra algumas massas medidas. Note que elas variam por um fator de cerca de  $10^{70}$ . A maioria das massas tem sido medida por métodos indiretos, em função do quilograma padrão. Por exemplo, podemos medir a massa da Terra (ver Seç. 16-3) ao medir, no laboratório, a força de atração gravitacional entre duas esferas de chumbo. Suas massas devem ser conhecidas por meio da comparação direta com o quilograma padrão, usando, digamos, uma balança de braços iguais.

**Tabela 1-4**

Algumas massas medidas

Elementos	Quilogramas
Nossa galáxia	$2,2 \times 10^{41}$
O Sol	$2,0 \times 10^{30}$
A Terra	$6,0 \times 10^{24}$
A Lua	$7,4 \times 10^{22}$
As águas dos oceanos	$1,4 \times 10^{21}$
Um transatlântico	$7,2 \times 10^7$
Um elefante	$4,5 \times 10^3$
Uma pessoa	$5,9 \times 10^1$
Uma uva	$3,0 \times 10^{-3}$
Uma partícula de poeira	$6,7 \times 10^{-10}$
Um vírus de tabaco	$2,3 \times 10^{-13}$
Uma molécula de penicilina	$5,0 \times 10^{-17}$
Um átomo de urânio	$4,0 \times 10^{-26}$
Um próton	$1,7 \times 10^{-27}$
Um elétron	$9,1 \times 10^{-31}$

**Tabela 1-5**

Algumas massas atômicas medidas

Isótopos	Massas em unidades de massa atômica
H <sup>1</sup>	$1,00782522 \pm 0,00000002$
C <sup>12</sup>	12,00000000 (exatamente)
Cu <sup>64</sup>	$63,9297568 \pm 0,0000035$
Ag <sup>102</sup>	$101,911576 \pm 0,000024$
Cs <sup>137</sup>	$136,907074 \pm 0,000005$
Pt <sup>190</sup>	$189,959965 \pm 0,000026$
Pu <sup>238</sup>	$238,049582 \pm 0,000011$

Na escala atômica, temos um segundo padrão de massa e que não é uma unidade do SI. É a massa do átomo C<sup>12</sup> que, por acordo internacional, foi designada como sendo uma massa de 12 unidades de massa atômica (abreviação u), exatamente, e por definição. Podemos encontrar massas de outros átomos com precisão considerável ao usar um espectrômetro de massa. A Tab. 1-5 mostra algumas massas atômicas selecionadas, incluindo os erros

prováveis de medida. Há necessidade de um segundo padrão de massa, porque as técnicas atuais de laboratório permitem-nos comparar massas atômicas entre si com maior precisão do que com o quilograma padrão. A relação é, aproximadamente:

$$1 \text{ u} = 1,660 \times 10^{-27} \text{ kg.}$$

A medição do tempo apresenta dois aspectos: a seqüência e a durabilidade (intervalo de tempo) dos acontecimentos. Tanto na vida diária, quanto para alguns propósitos científicos, necessitamos saber a hora para ordenar os acontecimentos. Na maioria dos trabalhos científicos, nós desejamos saber a duração do evento (o intervalo de tempo). Assim, qualquer padrão de tempo deve ser capaz de responder às seguintes perguntas: "a que horas isso ocorre?" e "quanto tempo dura?" A Tab. 1-6 mostra a faixa dos intervalos de tempo que podem ser medidos. Eles variam por um fator de cerca de  $10^{40}$ .

## 1-5 PADRÃO DE TEMPO<sup>5</sup>

**Tabela 1-6**

Alguns intervalos de tempo medidos

Intervalos de Tempo	Segundos
Idade da Terra	$1,3 \times 10^{17}$
Idade da Pirâmide de Quéops	$1,5 \times 10^{11}$
Duração provável da vida humana (EUA)	$2 \times 10^9$
Duração da órbita da Terra em torno do Sol (1 ano)	$3,1 \times 10^7$
Duração da rotação da Terra em torno do seu eixo (1 dia)	$8,6 \times 10^4$
Período do satélite Eco II	$5,1 \times 10^3$
Meia-vida do nêutron livre	$6,6 \times 10^2$
Tempo entre as batidas normais do coração	$8,0 \times 10^{-1}$
Período do diapasão de nota lá	$2,3 \times 10^{-3}$
Vida média do múon	$2,2 \times 10^{-6}$
Período de oscilação das microondas de 3 cm	$1,0 \times 10^{-10}$
Período típico de rotação de uma molécula	$1 \times 10^{-12}$
Vida média do pión neutro	$0,9 \times 10^{-16}$
Período de oscilação de um raio gama de 1 MeV (calculado)	$4 \times 10^{-21}$
Tempo para uma partícula elementar rápida passar através de um núcleo de tamanho médio (calculado)	$2 \times 10^{-23}$

Podemos usar como medida de tempo qualquer fenômeno que se repita. O método de medição consiste em contar as repetições. Por exemplo, poderíamos usar um pêndulo em oscilação, um sistema massa-mola, ou um cristal de quartzo. Dos muitos fenômenos repetitivos existentes na Natureza, a rotação da Terra sobre seu eixo, que determina a duração do dia, tem sido usada, durante séculos, como um padrão de tempo. Ela é ainda a base do nosso padrão usual de tempo; define-se um segundo (solar médio) como sendo a fração  $1/86\,400$  de um dia (solar médio). O tempo definido em termos da rotação da Terra é denominado tempo universal (TU).

O tempo universal deve ser medido através de observações astronômicas durante várias semanas. Sendo assim, precisamos de um bom relógio terrestre, calibrado astronômicamente. Os relógios

<sup>5</sup> Ver "Accurate Measurement of Time", Louis Essen, *Physics Today*, 1960.

de cristal de quartzo, cujo sistema é baseado nas vibrações periódicas (sustentadas eletricamente) de um cristal de quartzo, servem como padrões de tempo secundários. Funcionam durante um ano com margem de erro máximo de 0,02 s.

É muito comum utilizar-se um padrão de tempo para medir frequências. Podem-se fazer, eletronicamente, comparações de frequência entre ondas de rádio e um relógio de quartzo, com precisão de pelo menos 1 parte em  $10^{10}$  e, muitas vezes, necessitamos deste tipo de precisão. No entanto, esta precisão é cerca de 100 vezes maior que aquela com a qual se pode calibrar um relógio de quartzo por meio de observações astronômicas. Tendo em vista a necessidade de se obter um melhor padrão de tempo, desenvolveram-se, em vários países, os relógios atômicos, utilizando-se, como padrão, as vibrações atômicas periódicas.

Um tipo particular de relógio atômico, baseado na frequência característica associada ao isótopo  $Cs^{133}$ , funciona, ininterruptamente, desde 1955, no Laboratório Nacional de Física da Inglaterra. A Fig. 1-3 mostra um relógio semelhante a este, que se encontra na Repartição Nacional de Padrões, nos Estados Unidos.

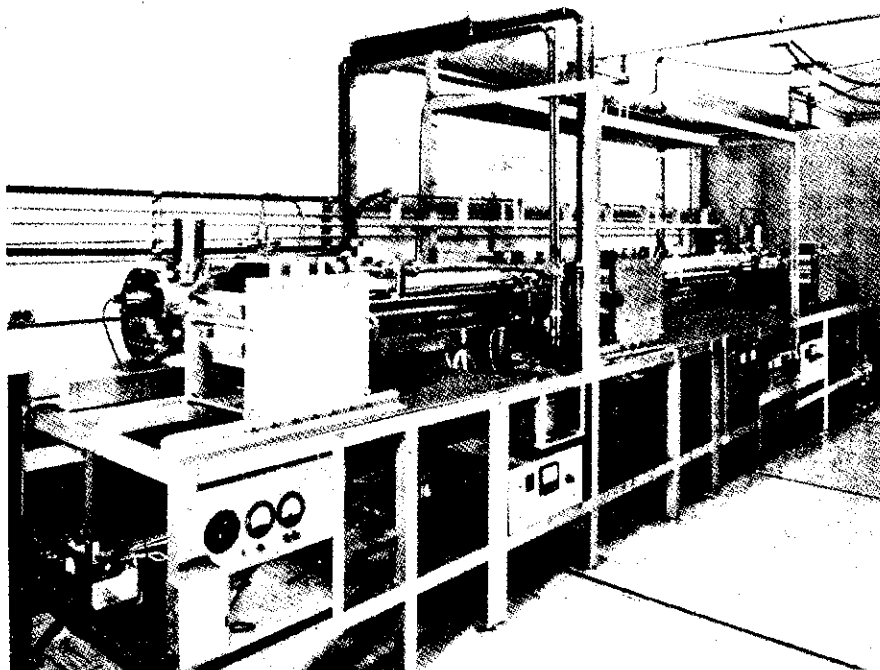


figura 1-3  
Padrão de frequência dos raios atômicos do césio, nos laboratórios da Repartição Nacional de Padrões em Boulder, Estados Unidos.

Em 1967, a 13.<sup>a</sup> Conferência Geral de Pesos e Medidas adotou, como padrão internacional, o segundo, baseado no relógio de césio. O segundo foi, então, definido como sendo 9 192 631 770 períodos de determinada transição particular do  $Cs^{133}$ . Essa resolução aumentou a precisão das medições do tempo para 1 parte em  $10^{12}$ , o que significa um aumento da precisão associada aos métodos astronômicos de cerca de  $10^3$ . Assim, se dois relógios de césio fossem operados com esta precisão, não havendo outras fontes de erro, eles iriam diferir, após decorrerem 6 000 anos, em apenas um segundo. Ainda assim, continua-se a estudar um relógio atômico ainda mais preciso.

A Fig. 1-4 mostra as variações na velocidade de rotação da Terra, em um período de, aproximadamente, três anos, comparadas

com um relógio de césio. Note-se que a frequência de rotação da Terra é alta no inverno e mais baixa no verão (hemisfério sul), ocorrendo uma diminuição constante de ano para ano. Poder-se-ia indagar como asseguramos que o erro está na rotação da Terra e não no relógio de césio. Há duas respostas: (1) A relativa simplicidade do átomo leva-nos a imputar à Terra qualquer diferença entre esses dois relógios. O atrito entre a terra e a água devido ao movimento das marés, por exemplo, causa uma desaceleração da rotação da Terra. Da mesma forma, o movimento sazonal dos ventos introduz uma variação sazonal na rotação. Outras variações podem ser relacionadas com o descongelamento e congelamento das calotas polares. (2) O sistema solar contém outros cronômetros como os planetas e seus satélites. Também com relação a esses astros, a rotação da Terra apresenta variações semelhantes, embora sejam observadas com menor precisão do que as da Fig. 1-4.

A transmissão pelo rádio pode chegar a lugares remotos, tornando, pois, acessível o padrão de tempo.<sup>6</sup> As estações WWV, em Colorado, e WWVH, no Havai, são das que atingem lugares distantes, sendo ambas operadas pela Repartição Nacional de Padrões nos Estados Unidos. Elas transmitem em frequências de 2,5; 5; 10; 15; e 20 e  $25 \times 10^6$  Hz estabilizadas em 1 parte por  $10^{11}$ , por comparação com um relógio de césio. Um Hertz (abreviatura Hz) representa 1 ciclo/segundo. A intervalos de 5 minutos, a WWV transmite alternadamente um tom preciso de 440 Hz (nota lá) e um tom de 600 Hz. Dez vezes por hora, emite sinais de tempo, usando um sistema de código digital binário. Duas outras estações, a WWVB e a WWVL, ambas de Fort Collins, no Colorado, fornecem padrões de muito maior precisão para fins especiais.

1. Como você criticaria esta afirmativa: "Uma vez tendo selecionado um padrão, pela própria definição de 'padrão', é ele 'invariável'?"
2. Muitos pesquisadores idôneos acreditam na existência real da percepção extra-sensorial. Presumindo-se que esta percepção é, na verdade, um fato da natureza, a que grandeza ou grandezas físicas você recorreria para descrever este fenômeno quantitativamente?
3. De acordo com a opinião de alguns físicos e filósofos, se não pudermos estabelecer métodos para determinar uma grandeza física, dizemos que não é mensurável e devemos abandoná-la por não possuir veracidade física. Nem todos os cientistas aceitam este ponto de vista. Quais, em sua opinião, são as vantagens e desvantagens desta atitude?
4. Você acha que uma definição de uma grandeza física, para a qual não é atribuído nenhum método de medição, tem significado?
5. Enumere outras características, além da acessibilidade e invariabilidade, desejáveis para um padrão físico.
6. Pode-se conceber um sistema de unidades básicas (Tab. 1-1) em que o tempo não foi incluído?
7. Das sete unidades básicas citadas na Tab. 1-1, apenas uma, o quilograma, tem um prefixo (ver Tab. 1-2). Seria correto redefinir a massa do cilindro de platina iridiada existente no Bureau Internacional de Pesos e Medidas como um grama, em vez de um quilograma?
8. Podemos definir a temperatura como uma grandeza derivada, em termos de comprimento, massa e tempo? Pense em um pêndulo.
9. O metro foi originalmente planejado para ser um décimo-milionésimo da linha do meridiano que vai do pólo norte ao equador, passando por Paris. Na Seq. 1-3, vimos que esta definição estava em desacordo com a barra-metro

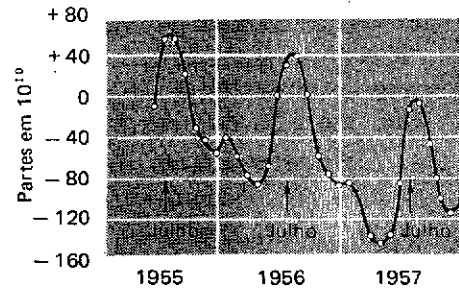


figura 1-4

Variação na frequência de rotação da Terra, revelada por comparação com o relógio de césio. (Adaptada de L. Essen, *Physics Today*, julho de 1960.)

## questões

<sup>6</sup> Veja "NBS Time and Frequency Dissemination Services; Special Publication 432", National Bureau of Standards, janeiro, 1976 (escrever para o US Government Printing Office, Washington, D. C. 20402).

- padrão em 0,023%. Isto quer dizer que a barra-metro padrão tem precisão igual a este valor?
10. Ao definir a barra-metro como padrão de comprimento por que especificamos sua temperatura? Pode o comprimento ser chamado de grandeza fundamental se outra grandeza física tal como a temperatura, deve ser especificada ao escolhermos um padrão?
  11. Se alguém dissesse que todas as coisas tiveram suas dimensões contraídas até a metade de seu valor de um dia para o outro, você poderia refutar esta afirmação?
  12. Pode-se medir o comprimento ao longo de uma linha curva? Em caso afirmativo, como?
  13. Que método você proporia para medir (a) o raio da Terra; (b) a distância entre o Sol e a Terra e (c) o raio do Sol?
  14. Que método você proporia para medir (a) a espessura de uma folha de papel; (b) a espessura da película de uma bolha de sabão e (c) o diâmetro de um átomo?
  15. Por que consideramos de utilidade ter dois padrões de massa, o quilograma e o átomo de  $C^{12}$ ?
  16. Como se obtém a relação entre a massa do quilograma padrão e a massa do átomo de  $C^{12}$ ?
  17. O quilograma padrão em vigor é acessível? invariável? reproduzível? indestrutível? Ele é um padrão simples quando o utilizamos para fins de comparação? Um padrão atômico seria melhor dentro de determinadas circunstâncias? Por que não usamos um único padrão atômico como o fazemos para o comprimento e o tempo?
  18. Sugira métodos práticos pelos quais se poderia determinar a massa dos vários elementos que figuram na Tab. 1-4.
  19. Sugira elementos cujas massas iriam incidir entre a de um transatlântico e a das águas dos oceanos (Tab. 1-4). Estime suas massas.
  20. Cite vários fenômenos repetitivos que ocorrem na natureza, os quais poderiam servir como razoáveis padrões de tempo.
  21. Poder-se-iam definir as 120 pulsações do atual presidente da Sociedade Brasileira de Física como sendo "um segundo". Galileu usou definição semelhante em alguns de seus trabalhos. Deixando de lado considerações de invariabilidade, por que é melhor uma definição com base no relógio atômico?
  22. Que critérios deve um bom relógio satisfazer?
  23. O tempo que a Lua gasta para voltar à posição inicial em relação às estrelas fixas é chamado mês sideral. O intervalo de tempo entre fases idênticas da Lua é chamado mês lunar. O mês lunar é mais longo que o sideral. Por quê?
  24. Pelo que você já conhece sobre os pêndulos, cite desvantagens de usar o período de um pêndulo como um padrão de tempo.
  25. Você pode conceber um método para definir um padrão de comprimento nos termos de um padrão de tempo ou vice-versa? Pense no que acontece em um relógio de pêndulo. Em caso afirmativo, podem o comprimento e o tempo ser considerados como grandezas fundamentais?
  26. Críticos do sistema métrico frequentemente procuram obscurecer a situação quando dizem: "Ao invés de comprar uma libra de manteiga você terá que pedir 0,452 kg", numa insinuação de que a vida estaria mais complicada pelo fato de se ter usado o sistema métrico. Como você refutaria esta afirmação?

## SEÇÃO 1-2

1. Use os prefixos da Tab. 1-2 para designar: (a)  $10^6$  litros, (b)  $10^{-6}$  Farads, (c)  $10^3$  Henrys, (d)  $10^9$  Coulombs, (e)  $10^{-12}$  metros, (f)  $10^{12}$  segundos, (g)  $10^{-18}$  Ohms.

## SEÇÃO 1-3

2. O raio da Terra vale aproximadamente  $6,4 \times 10^6$  m. Determine o raio da Terra em milhas. Para obter o fator de conversão de milhas para metros use a seguinte seqüência de conversões: 1 milha = 5 280 pés, 1 pé = 12 pol, 1 pol = 2,54 cm.  
Resposta: 3 977 milhas.
3. Converta 12 polegadas para metros. A quantas polegadas correspondem 0,003 metros?

**problemas**



4. A milha mencionada no Probl. 2 é a *milha inglesa*. Além da milha inglesa também existe a *milha métrica* que vale aproximadamente 1 500 metros. Nas competições esportivas às vezes se usa a jarda como unidade de comprimento. (a) Qual é a diferença entre 300 jardas e 300 metros? (b) Calcule a diferença entre 100 milhas inglesas e 100 milhas métricas.  
 Resposta: (a) 300 m = 300 jardas mais 25,68 m, (b) 100 milhas = 100 milhas métricas mais 10 900 metros.
5. No Probl. 2 você verificou que 1 milha vale aproximadamente 1 609 metros. Um foguete está a uma distância de 490 milhas da Terra. Calcule esta distância em quilômetros.
6. (a) Qual é a precisão da medida do metro da barra padrão de Pt-Ir? (b) Qual a precisão da medida do metro feita usando-se como padrão uma fonte de  $Kr^{86}$ ? (c) Verifique se é possível medir uma barra de 1 metro de comprimento com precisão de 1 Å.  
 Resposta: (a) A barra-metro de Pt-Ir possui uma precisão máxima de  $10^{-7}$  m. (b) A precisão máxima de um padrão de  $Kr^{86}$  corresponde a  $10^{-9}$  m. (c) Não é possível realizar a medida com tal precisão uma vez que  $1 \text{ Å} = 10^{-10}$  m e a precisão máxima obtida por um interferômetro ótico de boa qualidade é de  $10^{-9}$  m.
7. As distâncias astronômicas são muito maiores do que as distâncias medidas na Terra. Assim sendo, é necessário definir unidades convenientes para que as distâncias astronômicas não sejam indicadas com um número muito grande de zeros. Uma *unidade astronômica* é equivalente à distância média entre o Sol e a Terra, ou seja, cerca de  $1,49 \times 10^8$  km. Um *parsec* é a distância para a qual uma unidade astronômica subtende um ângulo de 1 segundo. Um *ano-luz* é a distância percorrida pela luz no vácuo durante um ano; a velocidade da luz no vácuo vale aproximadamente 300 000 km/s. (a) Determine a distância da Terra ao Sol em parsecs e em anos-luz. (b) Expresse um ano-luz em quilômetros e em milhas. (c) Expresse um ano-luz em unidades astronômicas. (d) Quanto tempo a luz do Sol leva para chegar até a Terra?
8. Suponha que a distância média entre a Terra e o Sol seja  $Y$  vezes a distância entre a Lua e a Terra. Num eclipse total do Sol é possível obter a razão entre o raio do Sol  $r_S$  e o raio da Lua  $r_L$  em função de  $Y$ . Analogamente, sendo  $R$  o raio de uma moeda que produza eclipse total da Lua Cheia, é possível determinar a distância média entre a Terra e a Lua medindo-se a distância  $x$  entre a moeda e o olho do observador ou o ângulo do cone da observação. (a) Obtenha uma relação entre o raio do Sol e o raio da Lua em função de  $Y$ . (b) Deduza uma expressão para a determinação da distância  $d$  em função de  $x$ , de  $r_L$  e de  $R$ .  
 Resposta: (a)  $r_S = Yr_L$ . (b)  $d = xr_L/R$ .
9. Transforme para o SI as seguintes unidades: (a) 1 cm<sup>2</sup>, (b) 1 km<sup>2</sup>, (c) 1 nm<sup>2</sup>, (d) 1 dm<sup>3</sup> (ou 1 litro), (e) 1 mililitro.

## SEÇÃO 1-4

10. O número de Avogadro é dado por  $N_A = 6,02 \times 10^{23}$  moléculas/mol. Considere a massa molecular do gás oxigênio ( $O_2$ ) igual a 32 g/mol. Calcule a massa em quilogramas equivalente a  $6,02 \times 10^{27}$  moléculas de  $O_2$ .  
 Resposta: 320 kg.
11. Usando algumas noções deste Capítulo determine o número de átomos de hidrogênio (H) contidos em meio quilograma do gás hidrogênio ( $H_2$ ).
12. (a) Suponha que a *massa específica* (massa/volume) da água seja exatamente igual a um grama por cm<sup>3</sup>; expresse a massa específica da água em kg/m<sup>3</sup> e em kg/l. (b) Um recipiente de 15 litros de água leva 5 horas para ser completamente esvaziado. Calcule a *vazão mássica* (massa/tempo) da água em kg/s.  
 Resposta: (a) 10<sup>3</sup> kg/m<sup>3</sup>; 1 kg/l. (b)  $8,3 \times 10^{-4}$  kg/s.

## SEÇÃO 1-5

13. Um *shake* é uma unidade de tempo equivalente a  $10^{-8}$  s. (a) Converta  $1,2 \times 10^{-2}$  shakes para nanossegundos. (b) A quantos shakes correspondem 15 microssegundos?
14. (a) Quantos segundos existem num dia solar médio? (b) Quantos segundos existem num ano solar médio? (c) O período de rotação do satélite Eco II era de  $5,1 \times 10^3$  s; calcule o número de rotações completas realizadas por este satélite durante um ano solar médio.  
 Resposta: (a) 86 400 s. (b)  $3,1 \times 10^7$  s. (c) 6 078 rotações completas.
15. Utilize a Fig. 1-4 para estimar a diminuição da frequência de rotação da Terra durante um ano.

16. (a) Um homem possui velocidade aproximada de 13 m/s. (b) Um coelho possui velocidade de 35 milhas/hora. (c) Um leão possui uma velocidade de 22 m/s. Converta todas estas velocidades para km/h.  
*Resposta:* (a) 46,8 km/h. (b) 57,6 km/h. (c) 79,2 km/h.
17. A diminuição do período de rotação da Terra é indicada por observações feitas durante diversos eclipses de Sol no intervalo de um século. De acordo com estas observações verificou-se que a duração do dia aumenta uniformemente em 0,001 s durante o século. Calcule o efeito acumulativo na medida do tempo durante um intervalo de um milênio.
18. Quatro relógios são testados em laboratório. Exatamente à meia-noite anotaram-se simultaneamente as marcações dos relógios através de leituras automáticas feitas por um sistema eletrônico especial. As leituras forneceram os seguintes dados durante uma semana:

Relógio	Domingo	2 <sup>a</sup> -feira	3 <sup>a</sup> -feira	4 <sup>a</sup> -feira	5 <sup>a</sup> -feira	6 <sup>a</sup> -feira	Sábado
A	0:36:40	0:36:56	0:37:12	0:37:27	0:37:44	0:37:59	0:38:14
B	0:30:40	0:31:40	0:32:40	0:33:40	0:34:40	0:35:40	0:36:40
C	0:30:10	0:29:00	0:30:20	0:28:50	0:29:30	0:29:50	0:30:30
D	0:20:10	0:20:20	0:20:22	0:20:30	0:20:20	0:20:40	0:20:41

- (a) Verifique qual destes relógios apresenta a menor variação média de tempo de um dia para outro. (b) Tomando-se como critério de exatidão a constância da variação de um dia para outro, verifique qual destes relógios apresenta a maior exatidão.  
*Resposta:* (a) O relógio D. (b) O relógio B.
19. A unidade astronômica (DU) já foi definida no Probl. 7 deste Capítulo. Calcule a velocidade da luz no vácuo em DU/s.
20. A velocidade da luz no vácuo vale  $c = 3 \times 10^8$  m/s. Expresse a velocidade da luz no vácuo em: (a) km/h, (b) km/s, (c) mm/ps, (d) cm/s, (e) cm/ns.  
*Resposta:* (a)  $1,08 \times 10^9$  km/h, (b)  $3 \times 10^5$  km/s, (c) 0,3 mm/ps, (d)  $3 \times 10^{10}$  cm/s, (e) 30 cm/ns.
21. A massa da Terra vale  $5,98 \times 10^{24}$  kg. O raio da Terra é aproximadamente igual a  $6,35 \times 10^6$  m. Determine o valor aproximado da massa específica da Terra. Dê a resposta em: (a) g/cm<sup>3</sup>, (b) kg/m<sup>3</sup>, (c) g/l.
22. O ano-luz já foi definido no Probl. 7 deste Capítulo. Uma astronave se desloca com uma velocidade de 72 000 m/s. Calcule o valor desta velocidade em anos-luz/século.  
*Resposta:*  $6,67 \times 10^{-3}$  anos-luz/século.
23. Para medir a distância entre a Terra e a Lua basta medir o tempo que a luz (ou qualquer onda eletromagnética) leva para ir até a Lua e voltar para a Terra (refletida pela Lua). Medidas realizadas por este método mostraram que a distância entre a Terra e a Lua era igual a  $3,75 \times 10^8$  m. Calcule o tempo total gasto pelo raio de luz para ir e voltar à Lua durante esta experiência.

# 2

## vetores

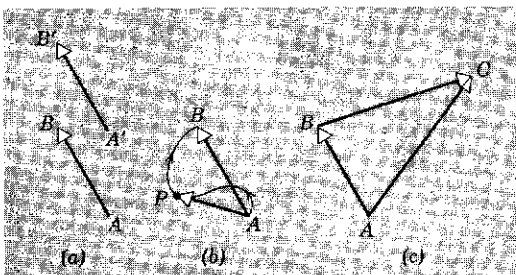
Denomina-se *deslocamento* a variação da posição de uma partícula. Se uma partícula se deslocar da posição  $A$  para a posição  $B$  (Fig. 2-1a), seu deslocamento pode ser representado pelo segmento de reta  $AB$ . O sentido do deslocamento será indicado por uma flecha, cuja extremidade é colocada no ponto  $B$ , para mostrar que o deslocamento foi do ponto  $A$  para o ponto  $B$ . A trajetória da partícula não é necessariamente o segmento  $AB$ ; a flecha representa apenas o efeito resultante do movimento, e não a trajetória real da partícula.

### 2-1

#### VETORES E ESCALARES

figura 2-1

Vetores-deslocamento. (a) Os vetores  $AB$  e  $A'B'$  são idênticos, pois têm o mesmo comprimento e estão orientados no mesmo sentido. (b) A trajetória real da partícula, ao mover-se de  $A$  para  $B$ , pode ser a curva indicada; o deslocamento continua sendo o vetor  $AB$ . O deslocamento, desde  $A$  até uma posição intermediária  $P$ , é o vetor  $AP$ . (c) Após o deslocamento  $AB$ , a partícula sofre outro deslocamento,  $BC$ . O resultado final dos dois deslocamentos é representado pelo vetor  $AC$ .



Na Fig. 2-1b, por exemplo, traçamos a trajetória de uma partícula que se deslocou de  $A$  para  $B$ . Esta trajetória não coincide com o deslocamento  $AB$ . Se fotografássemos a partícula na sua posição inicial,  $A$ , e em uma posição intermediária,  $P$ , obteríamos o deslocamento  $AP$ , que representa o efeito resultante do movimento no intervalo de tempo decorrido entre os dois instantâneos, apesar de continuarmos a ignorar a trajetória real da partícula entre estes dois pontos. O deslocamento  $A'B'$  da Fig. 2-1a, que é paralelo a  $AB$ , tendo, portanto, a mesma direção e sentido deste, representa a mesma *variação de posição*. Não fazemos nenhuma distinção entre estes dois deslocamentos. O que caracteriza, portanto, um deslocamento é seu *comprimento*, sua *direção* e seu *sentido*.

De maneira semelhante, pode-se representar o deslocamento subsequente do ponto  $B$  para o ponto  $C$  (Fig. 2-1c). O efeito resultante dos dois deslocamentos será o deslocamento  $AC$ . Ao segmento  $AC$  denominamos *soma* ou *resultante* dos deslocamentos  $AB$  e  $BC$ . É preciso notar que esta adição não obedece às regras da álgebra ordinária e que um número apenas não basta para caracterizá-la.

As grandezas que se comportam como deslocamentos são chamadas *vetores*.<sup>1</sup> Os vetores são grandezas que, para serem caracterizadas, exigem a especificação de um módulo, uma direção e um sentido e que se combinam segundo certas regras de adição. Estas regras serão estabelecidas adiante. O vetor deslocamento é um protótipo de vetor conveniente. Força, velocidade, aceleração, intensidade de campo elétrico e indução magnética são exemplos de grandezas vetoriais. Muitas leis da Física podem ser expressas numa forma compacta pelo uso de vetores e os cálculos que envolvem estas leis ficam, desta forma, muito simplificados.

As grandezas que ficam bem caracterizadas apenas por um número e uma unidade, tendo conseqüentemente apenas um valor numérico, são denominadas *escalares*. Massa, comprimento, tempo, densidade, energia e temperatura são exemplos de grandezas escalares. Os escalares se combinam de acordo com as regras da álgebra ordinária.

Nos diagramas, os vetores são representados por flechas. O comprimento da flecha é proporcional ao módulo do vetor (isto é, escolhe-se uma escala); a direção e o sentido da flecha dão a direção e o sentido do vetor.

Por exemplo, um deslocamento de 40 metros para nordeste, numa escala 1,0 cm por 10 metros, seria representado por uma flecha de 4,0 cm de comprimento, formando um ângulo de  $45^\circ$  com a direção horizontal e com a ponta da flecha na extremidade superior direita. Um vetor é representado, de maneira conveniente, nos textos impressos, por uma letra em negrito, por exemplo:  $\mathbf{d}$ . Em manuscrito é mais conveniente usar uma seta sobre o símbolo representativo do vetor, como por exemplo  $\vec{d}$ . Muitas vezes, é o módulo do vetor que nos interessa, e não sua direção e sentido. O módulo do vetor  $\mathbf{d}$  pode ser escrito como  $|\mathbf{d}|$ , valor absoluto de  $\mathbf{d}$ ; nos textos impressos usa-se mais freqüentemente o símbolo em itálico,  $d$ . O

## 2-2

### ADIÇÃO DE VETORES, MÉTODO GEOMÉTRICO

<sup>1</sup> A palavra *vetor* é de origem latina e significa portador, o que lembra deslocamento. Você deve querer rever o que seus livros-textos de geometria analítica e cálculo dizem sobre vetores. Uma boa referência, que explora o assunto com profundidade, é "About Vectors", de Banesh Hoffman, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1966.

símbolo em **negrito** representa todas as características do vetor, isto é, módulo, direção e sentido.

Consideremos a Fig. 2-2, na qual estão desenhados e rotulados os vetores da Fig. 2-1c. A relação entre estes vetores-deslocamento pode ser escrita como:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{r}.$$

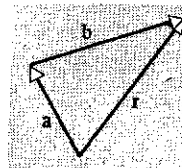


figura 2-2

A soma vetorial  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{r}$ . Compare com a Fig. 2-1c.

São as seguintes as regras que devem ser seguidas para efetuar geometricamente esta adição: Traça-se em escala, sobre um diagrama, o vetor-deslocamento  $\mathbf{a}$ , em seguida traça-se  $\mathbf{b}$  com origem na extremidade de  $\mathbf{a}$ , e, então, une-se a origem do deslocamento  $\mathbf{a}$  à extremidade do deslocamento  $\mathbf{b}$ ; deste modo é obtido o vetor soma  $\mathbf{r}$ . Este deslocamento resultante é equivalente em direção, módulo e sentido, aos deslocamentos sucessivos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Este procedimento pode ser generalizado para qualquer número de deslocamentos sucessivos.

Uma vez que os vetores são grandezas novas, é de se esperar que as regras de sua manipulação também o sejam. O símbolo "+", na Eq. 2-1, tem significado diferente de seu significado aritmético e algébrico ordinário. Aqui, esse símbolo indica um conjunto de operações diferentes.

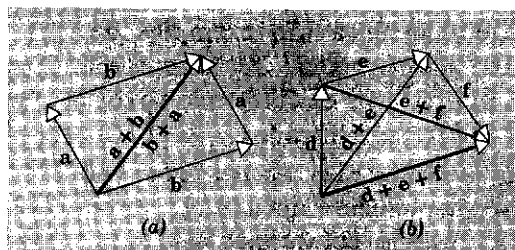


figura 2-3

(a) A propriedade comutativa da soma vetorial, que estabelece  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ .  
 (b) A propriedade associativa, que estabelece que  $\mathbf{d} + (\mathbf{e} + \mathbf{f}) = (\mathbf{d} + \mathbf{e}) + \mathbf{f}$ .

Usando a Fig. 2-3, provamos as duas propriedades importantes da adição vetorial:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \text{ (propriedade comutativa)} \quad (2-2)$$

e

$$\mathbf{d} + (\mathbf{e} + \mathbf{f}) = (\mathbf{d} + \mathbf{e}) + \mathbf{f} \text{ (propriedade associativa).} \quad (2-3)$$

Essas propriedades afirmam que a ordem das parcelas, bem como a maneira de agrupá-las, não influem na soma. Sob este aspecto, a adição de vetores e a adição de escalares seguem as mesmas regras.

Podemos introduzir a subtração em nossa álgebra vetorial definindo o negativo de um vetor como outro vetor de mesmo módulo e mesma direção, mas de sentido oposto. Então:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}), \quad (2-4)$$

como mostra a Fig. 2-4.

Lembre-se de que, apesar de termos usado deslocamentos para ilustrar estas operações, essas regras se aplicam a todo e qualquer vetor.

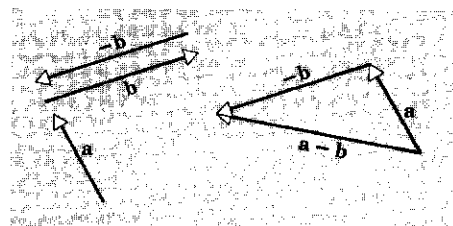


figura 2-4

O vetor diferença  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ .

O método geométrico de adicionar vetores não é muito útil, quando se trata de vetores no espaço tridimensional; mesmo no plano, este método muitas vezes é inconveniente. Um outro modo de adicionar vetores é o método analítico, que consiste em decompor os vetores em relação a um sistema de coordenadas particular.

A Fig. 2-5a mostra um vetor,  $\mathbf{a}$ , de origem coincidente com a origem de um sistema de coordenadas retangulares. Baixando perpendiculares da extremidade de  $\mathbf{a}$  aos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , obtêm-se os segmentos  $a_x$  e  $a_y$ , chamados *componentes* do vetor  $\mathbf{a}$ . Este processo é chamado *decomposição do vetor segundo os eixos  $Ox$  e  $Oy$* .

Na Fig. 2-5 representamos, por conveniência, um caso bidimensional, nossas conclusões podem ser estendidas, sem dificuldade, para o caso tridimensional.

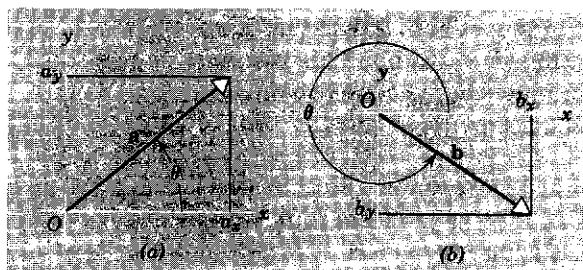


figura 2-5  
Dois exemplos de decomposição de um vetor em suas componentes escalares, em um sistema de referência particular.

Um vetor pode ter vários conjuntos de componentes. Por exemplo, se rodássemos os eixos da Fig. 2-5a de  $10^\circ$  no sentido anti-horário, os componentes de  $\mathbf{a}$  seriam outros. Além disso, poderíamos escolher um sistema de eixos não retangulares, isto é, em que o ângulo formado pelos eixos fosse diferente de  $90^\circ$ ; deste modo, modificaríamos também os componentes de  $\mathbf{a}$ . Assim, para especificar de maneira única os componentes de um vetor, é necessário caracterizar claramente o sistema particular de coordenadas a ser usado. Não é necessário traçar o vetor com sua origem na origem do sistema de coordenadas para decompô-lo. Se assim o fizemos, foi meramente por conveniência; o vetor pode ser deslocado à vontade no espaço de coordenadas. Se forem mantidos os ângulos que a direção do vetor forma com os eixos coordenados, os componentes do vetor não mudam.

Os componentes  $a_x$  e  $a_y$  na Fig. 2-5a são facilmente obtidos de:

$$a_x = a \cos \theta \quad \text{e} \quad a_y = a \sin \theta, \quad (2-5)$$

onde  $\theta$  é o ângulo que o vetor  $\mathbf{a}$  faz com o semi-eixo positivo  $Ox$ , medido no sentido anti-horário a partir deste semi-eixo. Note que, dependendo do ângulo  $\theta$ , os componentes  $a_x$  e  $a_y$  podem ser positivos ou negativos. Por exemplo, na Fig. 2-5b,  $b_y$  é negativo e  $b_x$  é positivo. Os componentes de um vetor, em um sistema particular de coordenadas, se comportam como escalares, uma vez que basta para especificá-los apenas um número com sinal algébrico.

Uma vez feita a decomposição de um vetor, pode-se usar os seus próprios componentes para especificá-lo. Ao invés de termos os dois números,  $a$  (módulo do vetor) e  $\theta$  (ângulo que a direção do vetor forma com o eixo  $Ox$ ), temos agora os dois números  $a_x$  e  $a_y$ .

Podemos, sem dificuldade, passar de uma descrição para outra. Para obter  $a$  e  $\theta$ , a partir de  $a_x$  e  $a_y$ , notamos na Fig. 2-5a que:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (2-6a)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a_y}{a_x} \quad (2-6b)$$

O quadrante de  $\theta$  é determinado pelos sinais de  $a_x$  e de  $a_y$ . Para decompor vetores, muitas vezes é conveniente introduzirmos um vetor de comprimento unitário paralelo ao vetor dado. Assim o vetor  $\mathbf{a}$  na Fig. 2-6a pode ser escrito como:

$$\mathbf{a} = a\mathbf{u}_a, \quad (2-7)$$

onde  $\mathbf{u}_a$  é o *vetor unitário* na direção de  $\mathbf{a}$ . Frequentemente, convém traçar vetores unitários paralelos aos eixos de coordenadas escolhidos. No sistema de coordenadas retangular, usam-se os símbolos especiais  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  para representar os vetores unitários paralelos aos eixos positivos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , respectivamente; veja a Fig. 2-6b. É

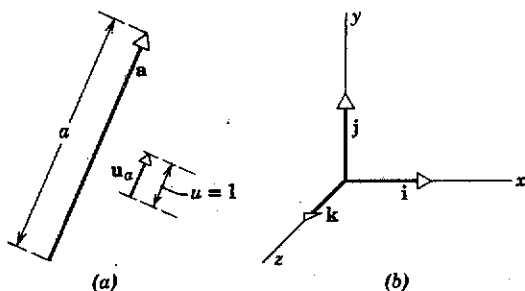


figura 2-6

(a) O vetor  $\mathbf{a}$  pode ser escrito como  $a\mathbf{u}_a$ , sendo  $\mathbf{u}_a$  o vetor unitário da direção de  $\mathbf{a}$ . (b) Os vetores unitários  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$ , usados para indicar o sentido positivo de  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , respectivamente.

preciso notar que não é necessário localizar  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  e  $\mathbf{k}$  na origem do sistema de coordenadas. Como qualquer vetor, estes podem ser transladados à vontade no espaço de coordenadas, uma vez que suas direções relativas aos eixos não sejam modificadas. Os vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  da Fig. 2-5 podem ser escritos, em termos de componentes e de vetores unitários, como:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} \quad (2-8a)$$

$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}; \quad (2-8b)$$

veja a Fig. 2-7. A relação vetorial, Eq. 2-8a, é equivalente à relação escalar, Eq. 2-6; cada qual relaciona o vetor ( $\mathbf{a}$ , ou  $|\mathbf{a}|$  e  $\theta$ ) com seus componentes ( $a_x$  e  $a_y$ ). Muitas vezes chamamos a quantidade  $a_x\mathbf{i}$  e  $a_y\mathbf{j}$  da Eq. 2-8a de *componentes vetoriais* do vetor  $\mathbf{a}$ ; eles estão traçados como vetores na Fig. 2-7a. A palavra *componente*, sozinha, continuará a significar as grandezas escalares  $a_x$  e  $a_y$ .

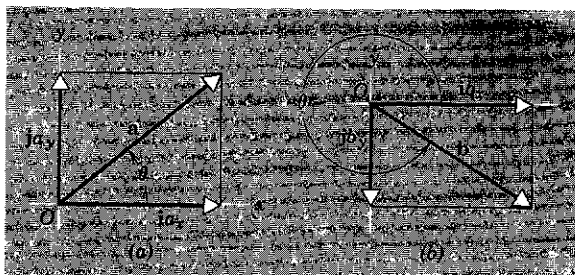


figura 2-7

Dois exemplos de decomposição de um vetor em suas componentes vetoriais, em um sistema de coordenadas particular; comparar com a Fig. 2-5.

Consideremos, agora, a adição de vetores pelo método analítico. Seja  $\mathbf{r}$  a soma de dois vetores,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , contidos no plano  $xOy$ , tal que:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}. \quad (2-9)$$

Em um dado sistema de coordenadas, dois vetores,  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ , só podem ser iguais se, e somente se, seus respectivos componentes forem iguais, ou seja:

$$r_x = a_x + b_x \quad (2-10a)$$

e

$$r_y = a_y + b_y. \quad (2-10b)$$

Estas duas equações algébricas simultâneas equivalem à relação vetorial única dada pela Eq. 2-9. Das Eqs. 2-6 podemos obter  $r$  e o ângulo  $\theta$  que a direção de  $\mathbf{r}$  faz com o eixo  $Ox$ , isto é:

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

e

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r_y}{r_x}.$$

Deste modo, podemos formular a seguinte regra para a adição analítica de vetores: Decompomos cada vetor em um sistema dado de coordenadas; a soma algébrica dos componentes, ao longo de cada eixo, é o componente do vetor soma ao longo daquele eixo; o vetor soma pode ser reconstruído, uma vez que seus componentes são conhecidos. Este método de adicionar vetores pode ser generalizado para qualquer número de vetores e para um espaço tridimensional (veja os Probs. 13 e 18).

Em relação à adição geométrica direta, que utiliza relações trigonométricas apropriadas, o método de decomposição de vetores apresenta a vantagem de sempre lidarmos com triângulos retângulos, simplificando, por isso, os cálculos.

Quando se usa o método analítico, a escolha do sistema de eixos determina quão simples será o processo de adição dos vetores. Algumas vezes, os componentes dos vetores em relação a certos eixos são conhecidos; neste caso, a escolha dos mesmos é óbvia. Em outros casos, uma escolha inteligente do sistema de eixos simplifica muito o trabalho de decomposição dos vetores em seus componentes. Por exemplo, os eixos podem ser orientados de tal maneira que um dos vetores seja paralelo a um dos eixos.

## EXEMPLO 1

Um avião percorre 130 km em uma linha reta, que faz um ângulo de  $22,5^\circ$  com a direção norte-sul. Quais são os deslocamentos do avião nas direções norte-sul e leste-oeste?

Escolhemos como positivos o sentido de oeste para leste e o sentido de sul para norte. Em seguida (Fig. 2-8), traçamos o vetor deslocamento passando pela origem (ponto de partida do avião) e fazendo um ângulo de  $22,5^\circ$  com o eixo  $Oy$  (direção sul-norte), no 1.º quadrante. O comprimento do vetor deve representar, em escala, os 130 km. Se chamarmos este vetor de  $\mathbf{d}$ , então  $d_x$  representa a distância percorrida para leste e  $d_y$  a distância percorrida para norte. Temos:

$$\theta = 90,0^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ$$



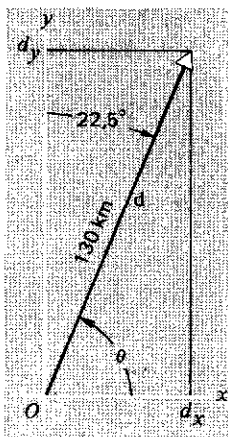


figura 2-8.  
Exemplo 1

então (veja a Eq. 2-5)

$$d_x = d \cos \theta = (130 \text{ km}) \cos 67,5^\circ = 50 \text{ km}$$

e

$$d_y = d \sin \theta = (130 \text{ km}) \sin 67,5^\circ = 120 \text{ km}.$$

Um automóvel percorre 30 km para leste, numa estrada plana. Num cruzamento ele vira para o norte e percorre mais 40 km. Achar o deslocamento resultante do automóvel.

Escolhamos um referencial fixo em relação à Terra, com o semi-eixo positivo  $Ox$  apontando para leste e o semi-eixo positivo  $Oy$  apontando para o norte. Os dois deslocamentos sucessivos,  $a$  e  $b$ , são desenhados como mostra a Fig. 2-9. O deslocamento resultante,  $r$ , é obtido da relação

$$r = a + b.$$

Como  $b$  não tem componente segundo  $Ox$ , nem  $a$  tem componente segundo  $Oy$ , temos (veja Eqs. 2-10):

$$r_x = a_x + b_x = 30 \text{ km} + 0 = 30 \text{ km},$$

$$r_y = a_y + b_y = 0 + 40 \text{ km} = 40 \text{ km}.$$

O módulo e a direção de  $r$  são então (veja Eqs. 2-6):

$$r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{(30 \text{ km})^2 + (40 \text{ km})^2} = 50 \text{ km},$$

$$\text{tg } \theta = \frac{r_y}{r_x} = \frac{40 \text{ km}}{30 \text{ km}} = 1,33$$

$$\theta = \text{arc tg } (1,33) = 53^\circ.$$

O vetor-deslocamento resultante,  $r$ , tem módulo igual a 50 km e faz um ângulo de  $53^\circ$  com a direção oeste-leste.

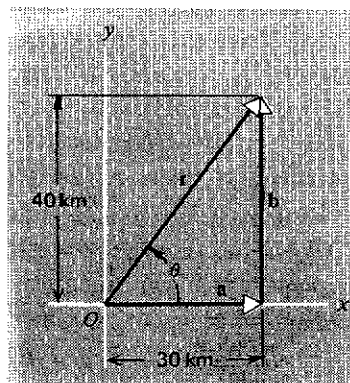


figura 2-9  
Exemplo 2

Três vetores coplanares são expressos, em relação a um sistema de referência ortogonal, como:

$$a = 4i - j$$

$$b = -3i + 2j$$

e

$$c = -3j,$$

### EXEMPLO 3

sendo os componentes dados em unidades arbitrárias.

Determine o vetor  $r$ , soma desses vetores.

Das Eqs. 2-10, temos:

$$r_x = a_x + b_x + c_x = 4 - 3 + 0 = 1,$$

$$r_y = a_y + b_y + c_y = -1 + 2 - 3 = -2,$$

$$\mathbf{r} = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}.$$

Na Fig. 2-10 estão representados esses quatro vetores. Das Eqs. 2-6 obtemos o módulo de  $r$ , que é  $\sqrt{5}$ , e o ângulo que  $r$  faz com o semi-eixo positivo  $Ox$ , medido no sentido anti-horário a partir desse semi-eixo, o qual é:

$$\text{arc tg } (-2/1) = 297^\circ.$$

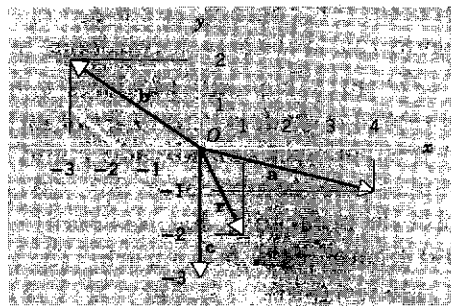


figura 2-10  
Três vetores  $a$ ,  $b$  e  $c$  e sua soma vetorial,  $r$ .

Na discussão precedente supusemos, implicitamente, que os vetores a serem adicionados fossem do mesmo tipo, isto é, vetores-deslocamento somados a vetores-deslocamento e vetores velocidade a vetores velocidade. Do mesmo modo que não faria sentido adicionar grandezas escalares de naturezas diferentes, por exemplo, massa e temperatura, a adição de grandezas vetoriais de natureza diferente, tais como deslocamento e intensidade de campo elétrico, é desprovida de significado.

Entretanto, tal como os escalares, vetores de tipos diferentes podem ser multiplicados, gerando, assim, grandezas de dimensões físicas novas. Porque os vetores têm direção, sentido e módulo, a multiplicação vetorial não pode seguir exatamente as mesmas regras da álgebra dos escalares. É necessário que sejam estabelecidas novas regras de multiplicação para os vetores.

Achamos útil definir três tipos de multiplicação para os vetores:

- (1) multiplicação de um vetor por um escalar,
- (2) multiplicação de dois vetores de modo a resultar um escalar, e
- (3) multiplicação de dois vetores de modo a resultar um outro vetor. Existem ainda outras possibilidades, mas não as consideraremos aqui.

A multiplicação de um vetor por um escalar tem um significado simples: o produto de um escalar,  $k$ , por um vetor,  $\mathbf{a}$ , escrevendo-se  $k\mathbf{a}$ , é definido como um novo vetor cujo módulo é  $k$  vezes o módulo do vetor  $\mathbf{a}$ . O novo vetor tem mesma direção e mesmo sentido de  $\mathbf{a}$ , se  $k$  for positivo, e mesma direção e sentido oposto, se  $k$  for negativo. Para dividir um vetor por um escalar basta multiplicá-lo pelo inverso do escalar.

Tratando-se do produto de um vetor por outro vetor, é preciso distinguir o *produto escalar* do *produto vetorial*. O *produto escalar* de dois vetores,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , indicado por  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , é definido por:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \phi, \quad (2-11)$$

<sup>2</sup> O assunto discutido nesta seção será utilizado posteriormente no texto. O produto escalar será utilizado pela primeira vez no Cap. 7 e o produto vetorial no Cap. 11. O instrutor, se desejar, poderá adiar a apresentação desta seção. Sua apresentação, aqui, dá um tratamento unificado para a álgebra vetorial e serve de referência conveniente para o trabalho posterior.

## 2-4 MULTIPLICAÇÃO DE VETORES<sup>2</sup>

onde  $a$  é o módulo de  $\mathbf{a}$  e  $b$  é o módulo de  $\mathbf{b}$ ,  $\cos \phi$  é o cosseno do ângulo que o vetor  $\mathbf{a}$  forma com o vetor  $\mathbf{b}$ <sup>3</sup> (veja a Fig. 2-11).

Como  $a$  e  $b$  são escalares e  $\cos \phi$  um número puro, o *produto escalar de dois vetores é um escalar*. O produto escalar de dois vetores pode ser considerado como produto do módulo de um dos vetores pelo componente do outro na direção do primeiro. Por causa da notação  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , o produto escalar é às vezes chamado "produto ponto" de  $\mathbf{a}$  por  $\mathbf{b}$  e lê-se "a ponto b" ou "a escalar b".

Poderíamos ter definido  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  por qualquer operação que quiséssemos, como por exemplo:  $a^{1/3} b^{1/4} \operatorname{tg} \phi/2$ , mas isso não teria utilidade em Física.

Nossa definição de produto escalar permite-nos descrever um número bastante importante de grandezas físicas. Algumas delas são trabalho mecânico, energia potencial gravitacional, potencial elétrico, potência elétrica e densidade de energia eletromagnética. Quando tais grandezas forem discutidas, mais tarde, sua ligação com o produto escalar será lembrada.

O *produto vetorial* de dois vetores,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , indicado por  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , é um outro vetor,  $\mathbf{c}$ , sendo  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , cujo módulo é:

$$c = ab \operatorname{sen} \phi, \quad (2-12)$$

sendo  $\phi$  o ângulo<sup>3</sup> entre  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ .

A *direção* de  $\mathbf{c}$ , produto vetorial de  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , é por definição, perpendicular ao plano determinado por  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Para especificar o sentido do vetor  $\mathbf{c}$  fazemos referência à Fig. 2-12. Imagine um parafuso de rosca direita, cujo eixo seja perpendicular ao plano determinado por  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , e que gire de  $\mathbf{a}$  para  $\mathbf{b}$  de um ângulo  $\phi$ . O sentido de avanço do parafuso dá o sentido do produto vetorial  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  (Fig. 2-12a). Uma outra maneira conveniente de obter o sentido

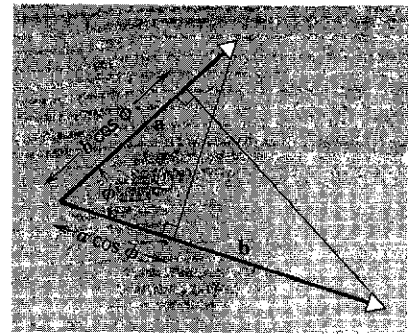


figura 2-11

O produto escalar,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} (= ab \cos \phi)$ , é o produto do módulo de um dos vetores ( $a$ , por exemplo) pelo componente do outro na direção do primeiro ( $b \cos \phi$ ).

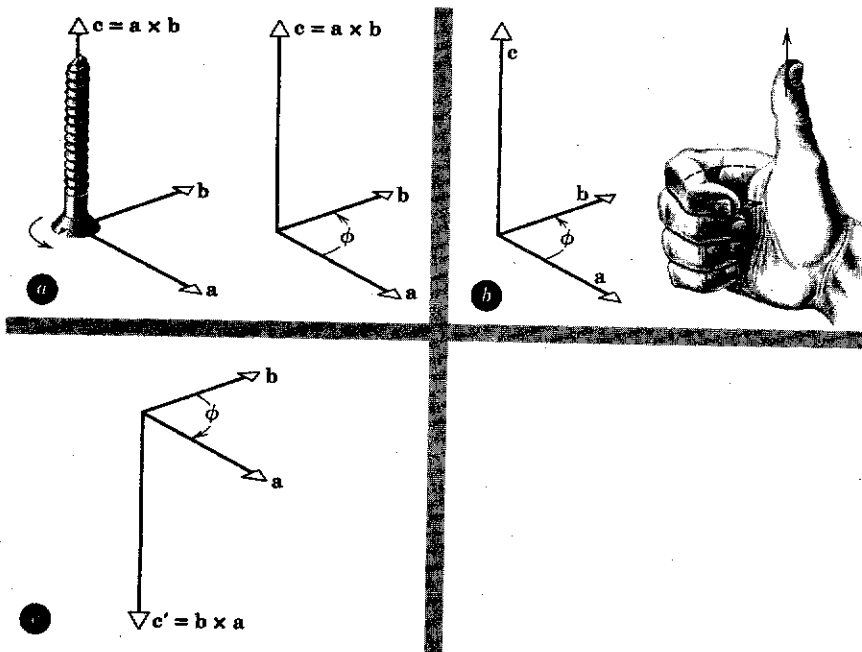


figura 2-12

O produto vetorial. (a) Em  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  o sentido de  $\mathbf{c}$  é o de avanço de um parafuso de rosca direita, quando girado de  $\mathbf{a}$  para  $\mathbf{b}$  através do menor ângulo. (b) O sentido de  $\mathbf{c}$  também pode ser obtido pela "regra da mão direita": mantém-se a mão direita de forma que os dedos se curvem seguindo a rotação de  $\mathbf{a}$  para  $\mathbf{b}$ ; o polegar estendido apontará no sentido de  $\mathbf{c}$ . (c) O produto vetorial muda de sinal quando a ordem dos fatores é invertida:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ . Aplique a regra da mão direita, ou a regra para o avanço de um parafuso de rosca direita, para mostrar que  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{c}'$  têm sentidos opostos.

<sup>3</sup> Há dois ângulos diferentes, dependendo do sentido de rotação. Na multiplicação vetorial sempre escolhemos o *menor* dos dois. Na Eq. 2-11 não há alteração porque  $\cos(2\pi - \phi) = \cos \phi$ . Entretanto na Eq. 2-12 a alteração se deve a  $\operatorname{sen}(2\pi - \phi) = -\operatorname{sen} \phi$ .

do produto vetorial é a seguinte: Imagine um eixo perpendicular ao plano determinado por  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  e que passe pela origem desses vetores. Envolve este eixo com os dedos da mão direita, empurre com as pontas dos dedos o vetor  $\mathbf{a}$  para que este se superponha ao vetor  $\mathbf{b}$ , descrevendo o menor ângulo entre eles, e mantenha ereto o polegar; o polegar ereto indica o sentido do produto vetorial  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  (Fig. 2-12b).<sup>4</sup> Por causa da notação  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , o produto vetorial é às vezes chamado de “produto cruz” de  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ ; lê-se “ $\mathbf{a}$  cruz  $\mathbf{b}$ ” ou “ $\mathbf{a}$  vetor  $\mathbf{b}$ ”.

Note que  $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$  é um vetor diferente de  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , pois a ordem dos vetores no produto vetorial é importante. No produto de escalares isto não é verdade, pois a ordem dos fatores na álgebra e na aritmética não afeta o produto. Na realidade,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$  (Fig. 2-12c). Isto decorre do fato de que  $ab \sin \phi$  é igual a  $ba \sin \phi$ , mas o sentido de  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  é oposto ao sentido de  $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ . Isto ocorre porque o parafuso avança num sentido quando é girado de  $\mathbf{a}$  para  $\mathbf{b}$  de um ângulo  $\phi$  e no sentido oposto quando de  $\mathbf{b}$  para  $\mathbf{a}$ . O estudante pode obter o mesmo resultado aplicando a regra da mão direita. Se  $\phi$  for  $90^\circ$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c} (= \mathbf{a} \times \mathbf{b})$  formam ângulo reto uns com os outros e determinam um sistema de coordenadas dextrógiro.

A razão pela qual o produto vetorial foi definido dessa maneira é que esta é de utilidade na Física. Encontramos sempre grandezas físicas que são vetores e cujo produto, definido como acima, resulta em uma grandeza vetorial que tem significado físico importante. Alguns exemplos de grandezas físicas que são produtos vetoriais são: momento de uma força, momento angular, força sobre uma carga em movimento em um campo magnético e fluxo de energia eletromagnética. Quando tais grandezas forem discutidas, mais tarde, sua ligação com o produto vetorial de dois vetores será lembrada.

O produto escalar, em que a ordem dos fatores não altera o resultado, é o mais simples produto de dois vetores; o produto vetorial está logo a seguir em complexidade. Aqui, a ordem dos fatores afeta o produto, mas apenas por um fator menos um, o que implica em uma inversão de sentido. Outros produtos de vetores são úteis, porém mais complicados. Por exemplo, um tensor pode ser gerado, multiplicando cada um dos três componentes de um vetor pelos três componentes de um outro vetor. Logo, um tensor (de segunda ordem) tem nove números associados a ele, um vetor tem três e um escalar apenas um. Algumas grandezas físicas que podem ser representadas por tensores são a tensão mecânica, a tensão elétrica, momentos e produtos de inércia, e a deformação. Grandezas físicas ainda mais complexas são possíveis; entretanto, neste livro estamos interessados apenas em escalares e vetores.

## EXEMPLO 4

Um vetor,  $\mathbf{a}$ , contido no plano  $xOy$  localiza-se a  $250^\circ$  no sentido anti-horário, a partir do semi-eixo positivo  $Ox$ , e tem intensidade de 7,4 unidades. O vetor  $\mathbf{b}$  tem intensidade de 5,0 unidades e está orientado paralelamente ao eixo  $Oz$ . Calcule (a) o produto escalar  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  e (b) o produto vetorial  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

(a) Como  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são perpendiculares entre si, o ângulo  $\phi$  entre eles é  $90^\circ$  e  $\cos \phi = \cos 90^\circ = 0$ . Portanto, da Eq. 2-11, o produto escalar é

<sup>4</sup> O procedimento descrito na Fig. 2-12 é uma convenção. Dois vetores tais como  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  determinam um plano existindo, portanto, dois sentidos de percurso sobre a direção perpendicular a este plano. A que foi selecionada (por convenção) utiliza a mão direita e o parafuso de rosca direito; a mão esquerda e o parafuso de rosca esquerdo seriam uma outra escolha para o sentido de  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \phi = ab \cos 90^\circ = (7,4)(5,0)0 = 0,$$

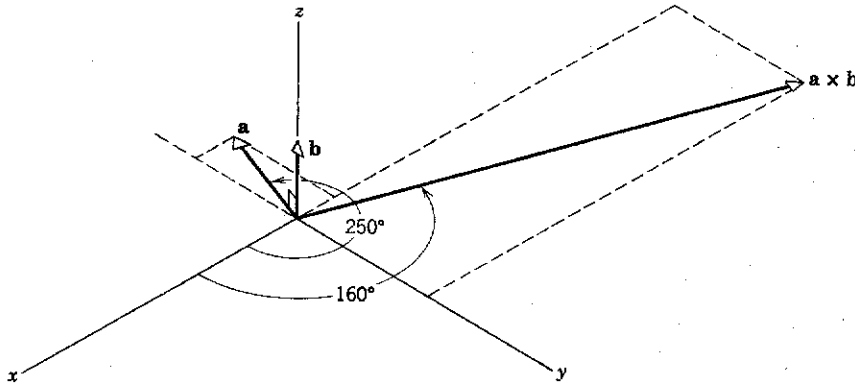
consistente com a assertiva de que nenhum vetor tem componente na direção do outro.

(b) A intensidade do produto vetorial é, da Eq. 2-12,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \phi = (7,4)(5,0) \sin 90^\circ = 37.$$

A direção do produto vetorial é perpendicular ao plano formado por  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Portanto, como mostra a Fig. 2-13, ele se encontra no plano  $xOy$  (perpendicular a  $\mathbf{b}$ ) formando um ângulo de  $250^\circ - 90^\circ = 160^\circ$  com o semi-eixo  $Ox$  positivo (perpendicular a  $\mathbf{a}$ ), de conformidade com a regra da mão direita.

figura 2-13  
Exemplo 4



Os vetores são de grande utilidade na Física. Será proveitoso examinarmos mais profundamente porque isso é verdade. Consideremos três vetores,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{r}$  de componentes  $a_x, a_y, a_z; b_x, b_y, b_z$  e  $r_x, r_y, r_z$ , num sistema de coordenadas particular  $Oxyz$  do nosso referencial. Suponhamos, além disso, que os três vetores estejam relacionados de modo que

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}. \quad (2-13)$$

Numa simples extensão das Eqs. 2-10 isto significa:

$$r_x = a_x + b_x; \quad r_y = a_y + b_y \quad \text{e} \quad r_z = a_z + b_z. \quad (2-14)$$

Consideremos um outro sistema de coordenadas  $O'x'y'z'$  que tenha as propriedades seguintes: (1) sua origem não coincida com a origem do primeiro sistema ( $Oxyz$ ) e (2) seus três eixos não sejam paralelos aos eixos correspondentes do primeiro sistema.

Em outras palavras, o segundo conjunto de coordenadas foi *transladado* e *girado* em relação ao primeiro.

Os componentes dos vetores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{r}$  no novo sistema serão, em geral, diferentes. Esses serão representados, respectivamente, por:

$$a_{x'}, a_{y'}, a_{z'}; \quad b_{x'}, b_{y'}, b_{z'}; \quad \text{e} \quad r_{x'}, r_{y'}, r_{z'}.$$

Esses novos componentes serão, entretanto, relacionados (veja Probl. 39) por:

$$r_{x'} = a_{x'} + b_{x'}; \quad r_{y'} = a_{y'} + b_{y'}; \quad \text{e} \quad r_{z'} = a_{z'} + b_{z'}. \quad (2-15)$$

Quer dizer, no novo sistema encontraríamos ainda (veja Eq. 2-13) que:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

## 2-5 OS VETORES E AS LEIS DA FÍSICA

Numa linguagem mais formal: *Relações entre vetores*, das quais a Eq. 2-13 é um exemplo, são invariantes em relação à translação ou rotação de coordenadas.

Verifica-se experimentalmente que as experiências, nas quais as leis da Física se fundamentam, e, na verdade, as próprias leis físicas, não mudam de forma quando os sistemas de referência são girados ou transladados.

Deste modo, a linguagem vetorial é ideal para exprimir as leis da Física. Se pudermos exprimir uma lei na forma vetorial, a invariância desta lei, em relação à translação e à rotação do sistema de coordenadas, está assegurada por esta propriedade puramente geométrica dos vetores.

Pensava-se, até cerca de 1956, que todas as leis físicas fossem invariantes em relação a um outro tipo de transformação de coordenadas, a substituição de um sistema dextrógiro por um levógiro (veja Fig. 2-14). Naquele ano, entretanto, algumas experiências relativas ao decaimento de certas partículas elementares evidenciaram a dependência entre os resultados experimentais e a orientação do sistema de coordenadas. Em outras palavras, a experiência e sua imagem especular levariam a resultados diferentes.<sup>5</sup> Este resultado surpreendente levou a reexame a questão das simetrias nas leis físicas; até hoje, estes estudos permanecem entre os mais desafiadores da Física moderna.

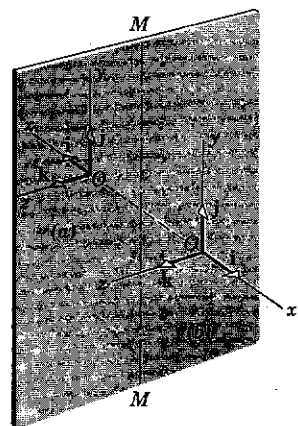


figura 2-14

Sistemas de coordenadas (a) levógiro e (b) dextrógiro. Note que (a) e (b) estão relacionados, pois cada um pode ser considerado como a imagem do outro no espelho  $MM$ . A "orientação" de um sistema de coordenadas não pode ser alterada quando ele sofre uma rotação. Note que em (b)  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ , enquanto em (a)  $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{k}$ .

## questões

- Três astronautas partem do Cabo Kennedy em direção à Lua, voltam e descem no Oceano Pacífico. Um almirante deseja-lhes boa sorte por ocasião da partida e depois, já no Pacífico, içá-os a bordo de um porta-aviões. A quem corresponde o maior deslocamento, aos astronautas ou ao almirante?
- Podem-se combinar dois vetores de módulos diferentes para que se tenha uma resultante nula? E três vetores?
- Pode um vetor ter módulo nulo se um dos seus componentes não o é?
- Faz algum sentido chamar de vetor uma grandeza, quando seu módulo é nulo?
- Se a soma de três vetores é nula, devem todos estar em um mesmo plano. Torne isso plausível.
- Um vetor unitário tem unidades?
- Enumere várias grandezas escalares. O valor de uma grandeza escalar depende do sistema de coordenadas escolhido?
- Podemos ordenar os eventos no tempo. Por exemplo, o evento  $b$  pode preceder ao evento  $c$ , mas seguir o evento  $a$ , causando uma ordenação dos acontecimentos  $a, b, c$  no tempo. Daí, haver um decurso de tempo, distinguindo-se passado, presente e futuro. Conseqüentemente, o tempo é um vetor? Se não, por quê?
- As leis comutativa e associativa aplicam-se à subtração vetorial?
- Pode um produto escalar ser uma grandeza negativa?
- (a) Se  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , conclui-se que  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são perpendiculares um ao outro? (b) Se  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ , conclui-se que  $\mathbf{b}$  é, necessariamente, igual a  $\mathbf{c}$ ?
- Se  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ , conclui-se que  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são paralelos um ao outro? (b) A recíproca é verdadeira?
- (a) Mostre que se todos os componentes de um vetor estão em sentido contrário aos de um outro vetor, em conseqüência, o próprio vetor também está em sentido contrário. (b) Mostre que se os componentes de um produto vetorial estão todos em sentido contrário, o produto vetorial não se altera. (c) O produto vetorial é, então, um vetor?
- Até aqui, temos tratado sobre adição, subtração e multiplicação de vetores. Que acha de não termos incluído divisão de vetores? É possível definir tal operação?

<sup>5</sup> C. N. Yang e T. D. Lee foram agraciados com o Prêmio Nobel, em 1957, por terem previsto teoricamente que isto aconteceria. Ver "The Overthrow of Parity" por Phillip Morrison, *Scientific American*, abril 1957, para maiores esclarecimentos sobre este assunto.

15. Você deve especificar um sistema de coordenadas para (a) somar dois vetores. (b) formar seu produto escalar. (c) formar seu produto vetorial, (d) achar seus componentes?
16. Por convenção, usa-se a mão direita em regras da álgebra vetorial. Que mudanças seriam necessárias se, ao invés, fosse adotada uma convenção utilizando a mão esquerda?

## SEÇÃO 2-2

**problemas**

1. Descreva dois vetores  $a$  e  $b$  que satisfaçam às seguintes condições:

- (a)  $a + b = c$  ;  $a + b = c$   
 (b)  $a - b = c$  ;  $a - b = c$   
 (c)  $a + b = c$  ;  $c^2 = a^2 + b^2$   
 (d)  $a + b = a - b$

2. Um deslocamento possui módulo  $s_1 = 30$  cm. Outro deslocamento possui módulo  $s_2 = 40$  cm. (a) Determine literalmente o módulo  $s$  do deslocamento resultante supondo que os dois deslocamentos sejam perpendiculares entre si. (b) Se o módulo de  $s$  for igual a 70 cm, qual seria a orientação relativa dos deslocamentos? (c) E se o módulo do deslocamento resultante for igual a 10 cm? (d) Calcule o módulo do deslocamento resultante supondo que os deslocamentos componentes sejam perpendiculares entre si.  
*Resposta:* (a)  $s = (s_1^2 + s_2^2)^{1/2}$ . (b) Os dois deslocamentos seriam paralelos e de mesmo sentido. (c) Os dois deslocamentos seriam paralelos e de sentidos contrários. (d)  $s = 50$  cm.

3. Um carro percorre uma distância de 30 km no sentido Oeste-Leste; a seguir percorre 10 km no sentido Sul-Norte e finalmente percorre 5 km numa direção que forma um ângulo de  $30^\circ$  com o Norte e  $60^\circ$  com o Leste. (a) Use um sistema cartesiano e ache o módulo do deslocamento resultante. (b) Obtenha o ângulo entre o vetor deslocamento resultante e o sentido Oeste-Leste.

4. Seja  $a$  o módulo de  $a$  e  $b$  o módulo de  $b$ . (a) Qual é o limite superior para o módulo da resultante destes dois vetores? (b) Obtenha o limite inferior para o módulo da soma vetorial destes dois vetores. (c) Supondo  $a = 2b$ , qual deveria ser o limite superior e o limite inferior para o módulo da soma destes dois vetores?

*Resposta:* (a)  $a + b$ , (b)  $|a - b|$ , onde as barras verticais indicam o valor absoluto. (c) Limite superior:  $3b$ ; limite inferior:  $b$ .

5. Um vetor  $a$  tem módulo de 10 unidades e sentido de Oeste para Leste. Um vetor  $b$  tem módulo de 20 unidades e sentido de Sul para Norte. Determine o módulo dos seguintes vetores: (a)  $a + b$ , (b)  $a - b$ .

6. Um jogador de golfe dá três tacadas para colocar a bola num buraco. A primeira tacada desloca a bola 6 m para o Norte, a segunda desloca a bola 2 m para o Leste e a terceira desloca a bola 2 m para o Nordeste. Determine o módulo, a direção e o sentido do deslocamento equivalente que poderia ser obtido com uma única tacada.

*Resposta:* módulo: 8,16 m; direção: formando um ângulo de  $65,3^\circ$  com a direção Oeste-Leste; sentido: de baixo para cima.

## SEÇÃO 2-3

7. (a) Um homem sai da sua casa, caminha 50 m de Oeste para Leste, 20 m de Norte para o Sul e a seguir tira uma pedra do bolso deixando-a cair de um penhasco de 500 m de altura. Calcule o módulo do deslocamento total da pedra. (b) A seguir o homem retorna a sua casa percorrendo um caminho diferente. O módulo do deslocamento do homem na ida pode ser calculado pelos dados acima. Calcule o módulo do deslocamento total do homem durante a volta.

8. Determine os módulos dos componentes da resultante e o módulo da resultante da soma de dois deslocamentos vetoriais  $a$  e  $b$ . Suponha que os vetores  $a$  e  $b$  possuam os seguintes componentes em  $m$ , em relação a um sistema cartesiano ortogonal:

$$a_x = 4, b_x = -2; a_y = 0, b_y = 5; a_z = 3, b_z = -1$$

*Resposta:* Módulos dos componentes: 2 m, 5 m, 2 m. Módulo da resultante: 5,74 m.

9. Uma sala tem as seguintes dimensões: 3 m  $\times$  4 m  $\times$  3 m. Um inseto voa desde um canto da sala até o outro canto diametralmente oposto. (a) Calcule o módulo do deslocamento total do inseto. (b) O deslocamento total depende da trajetória? (c) Faça um esquema usando um sistema cartesiano tri-ortogonal para indicar os componentes do vetor deslocamento total. (d) Se o inseto andasse, em vez de voar, qual seria a trajetória de menor comprimento entre os dois pontos considerados?

10. Dois vetores são dados por:  $a = 3i - 2j - k$  e  $b = 3i - j - 2k$ . Determine: (a)  $a + b$ , (b)  $a - b$ , (c)  $-a + b$ .  
*Resposta:* (a)  $6i - 3j - 3k$ ; (b)  $-j + k$ ; (c)  $j - k$ .
11. Dois vetores de módulos  $a$  e  $b$  formam entre si um ângulo  $\theta$ . Determine o módulo  $s$  do vetor resultante da soma destes vetores.
12. Dados dois vetores  $a = 2i - j$  e  $b = i - j$ , determine o módulo e a direção de  $a$ , de  $b$ , de  $(a - b)$ , de  $(a + b)$  e de  $(b - a)$ .  
*Resposta:* Os módulos são: 2,24; 1,41; 1; 3,61; 1. As direções destes vetores fazem com o eixo  $Ox$  os seguintes ângulos:  $-26,6^\circ$ ;  $-45^\circ$ ;  $0^\circ$ ;  $-33,7^\circ$ ;  $180^\circ$ .
13. Os vetores  $a$  e  $b$  estão orientados conforme indica a Fig. 2-15. A resultante da soma destes vetores vale  $R$ . Temos:  $a = b = 5$  unidades. Determinar: (a) Os componentes de  $R$  segundo  $Ox$  e segundo  $Oy$ , (b) O módulo de  $R$ , (c) O ângulo que  $R$  forma com o eixo  $Ox$ .
14. Obtenha uma expressão analítica geral para determinar o módulo e a direção da resultante de uma soma vetorial de  $N$  vetores em duas dimensões.  
*Resposta:* Sendo  $R$  o vetor resultante, os seus componentes  $R_x$  e  $R_y$  são calculados pelas relações:

$$R_x = \sum u_x; R_y = \sum u_y;$$

onde  $u_x$  e  $u_y$  são os componentes dos vetores ao longo do eixo  $Ox$  e  $Oy$  e a soma é feita para todos os componentes dos  $N$  vetores. O módulo da resultante é dado por:  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ . A direção do vetor resultante com o sentido positivo do eixo  $Ox$  é dada por:  $\theta = \text{arc tg}(R_y/R_x)$ .

15. A resultante de uma soma vetorial de dois vetores possui módulo igual a 4 m. O módulo de um dos vetores componentes é igual a 2 m e o ângulo entre os dois vetores componentes é igual a  $60^\circ$ . Calcule o módulo do outro vetor componente.
16. Uma partícula sofre três deslocamentos sucessivos sobre um plano: 2 m de Norte para Sul, 4 m de Oeste para Leste e 12 m de baixo para cima numa direção que forma um ângulo de  $60^\circ$  com a direção Oeste-Leste. Escolha o eixo  $Ox$  apontando no sentido Oeste-Leste e o eixo  $Oy$  no sentido Sul-Norte. Faça a origem  $O$  coincidir com a origem dos deslocamentos. Determine: (a) os componentes de cada deslocamento, (b) os componentes do deslocamento  $R$  resultante, (c) o módulo, a direção e o sentido do deslocamento resultante.  
*Resposta:* (a)  $a_x = 0$ ,  $a_y = -2$  m  
 $b_x = 4$  m,  $b_y = 0$   
 $c_x = 6$  m,  $c_y = 10,39$  m  
 (b)  $R_x = 10$  m;  $R_y = 8,39$  m  
 (c)  $R = 13,05$  m.

*Direção e sentido:*  $R$  forma um ângulo de  $40^\circ$  com o sentido positivo do eixo  $Ox$ , no sentido de rotação anti-horário.

17. Use o mesmo método do Probl. 14 e obtenha expressões gerais para os componentes da resultante, para o módulo e para a direção da resultante da soma vetorial de  $N$  vetores em três dimensões.
18. Uma pessoa viaja de um local situado a uma latitude  $30^\circ$  S e a uma longitude de  $40^\circ$  L para um local situado a  $30^\circ$  S e a  $80^\circ$  L. Usando um sistema de coordenadas cartesianas com origem no centro da Terra e um sistema de coordenadas esféricas, determine: (a) o deslocamento entre os dois pontos, (b) o comprimento da trajetória percorrida supondo que a pessoa viaje em linha reta sobre o círculo paralelo ao Equador situado a  $30^\circ$  S. Faça  $r_T = 6\,400$  km.  
*Resposta:* (a) 3 791 km, (b) 3 869 km.
19. Considere um triângulo equilátero. Faça o eixo  $Ox$  coincidir com um dos lados do triângulo, sendo a origem  $O$  um dos vértices do triângulo. Oriente vetores ao longo dos lados do triângulo no sentido anti-horário. Usando o método da soma vetorial verifique que a soma vetorial destes vetores é igual a zero (isto é verdade para a soma de vetores ao longo de uma poligonal fechada). Usando a decomposição vetorial destes vetores ao longo dos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , mostre que:

$$1 + \cos 120^\circ + \cos 240^\circ = 0$$

$$\text{sen } 120^\circ + \text{sen } 240^\circ = 0$$

A utilização do método da indução finita (ou de qualquer outro método) pode conduzir à generalização do resultado acima obtido para um triângulo equilátero. Generalize este resultado para um polígono regular com um número de lados igual a  $N$  e obtenha uma relação: (a) para a soma dos cossenos dos ângulos formados entre os vetores consecutivos do lado do polígono e o eixo  $Ox$ , (b) para a soma dos senos destes ângulos.

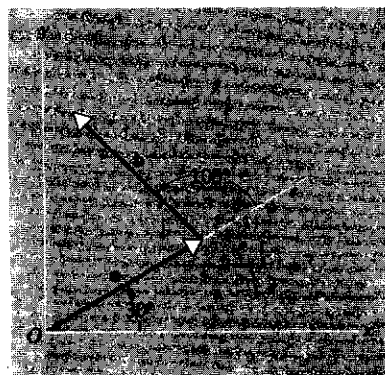


figura 2-15



SEÇÃO 2-4

20. Considere o Probl. 10 deste Capítulo. Determine o vetor  $3a - 2b$ .  
*Resposta:*  $6i - 4j + k$ .
21. Um vetor  $v$  possui módulo igual a 4 m e está situado a  $45^\circ$  com a direção Oeste-Leste no sentido anti-horário. Determine o módulo, a direção e o sentido dos seguintes vetores: (a)  $v/2$ , (b)  $-2v$ .
22. Considere a Fig. 2-6b. (a) Determine o valor do produto escalar de cada vetor unitário pelo próprio vetor unitário de cada direção. (b) Obtenha o produto escalar do vetor unitário de uma direção pelo vetor unitário de outra direção.  
*Resposta:* (a)  $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$ , (b)  $i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0$
23. No sistema dextrógiro de coordenadas cartesianas ortogonais indicado na Fig. 2-6b mostre que o produto vetorial de um vetor unitário pelo vetor unitário da mesma direção é igual a zero. Verifique que o produto vetorial de dois vetores unitários de direções diferentes obedece à seguinte regra cíclica:

$$i \times j = k; j \times k = i; k \times i = j$$

24. (a) Quanto vale o produto vetorial de um vetor por outro vetor paralelo? (b) Como se pode calcular o módulo de um vetor  $v$  usando-se um produto escalar?

*Resposta:* (a) zero. (b)  $v = (v \cdot v)^{1/2}$ .

25. Considere um vetor  $a$  na direção  $+Ox$  e um vetor  $b$  na direção  $+Oy$  num sistema dextrógiro de coordenadas cartesianas. Seja  $d$  uma grandeza escalar. (a) Qual é a direção e o sentido do vetor  $a \times b$ ? (b) Qual é a direção e o sentido do vetor  $b \times a$ ? (c) Qual é a direção e o sentido do vetor  $db$ ? (d) Quanto vale o produto escalar  $b \cdot a$ ?

26. Para os vetores mencionados no Probl. 13 determine: (a)  $b \cdot a$ , (b)  $a \times b$ .

*Resposta:* (a)  $-6,47$ , (b)  $24,15 k$ .

27. Um vetor  $u$  tem módulo igual a 15 unidades e um vetor  $v$  possui módulo igual a 10 unidades. Os dois vetores formam entre si um ângulo de  $45^\circ$ . Calcule: (a) o produto escalar destes vetores, (b) o módulo do produto vetorial destes vetores.

28. Considere a Fig. 2-16. Calcule o módulo do produto vetorial entre os vetores  $a$  e  $b$  e compare o resultado com a área do triângulo indicado na ilustração.

*Resposta:*  $|a \times b| = a \cdot b \sin \phi = 2 \times \text{área do triângulo}$ .

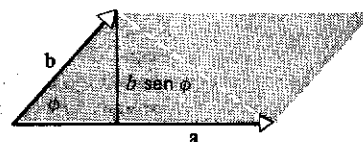


figura 2-16

29. Mostre que o módulo de um produto vetorial é numericamente igual à área do paralelogramo que possui os vetores como lados (ver a Fig. 2-16).

30. Calcule o volume de um paralelepípedo formado por três vetores não coplanares  $a, b$  e  $c$ .

*Resposta:* Volume:  $a \cdot (b \times c)$ .

31. Suponha que  $(a + b) \cdot (a - b) = 0$ . Qual a relação entre  $a$  e  $b$ ?

32. Considere dois vetores dados por:

$$u = iu_x + ju_y + ku_z; \quad v = iv_x + jv_y + kv_z$$

Determine o produto escalar  $u \cdot v$ .

*Resposta:*  $u \cdot v = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$

33. Use a definição de produto escalar  $u \cdot v = uv \cos \phi$  e o resultado do Probl. anterior para determinar uma expressão para o ângulo  $\phi$  entre os vetores  $u$  e  $v$ .

34. Obtenha analiticamente o produto vetorial dos vetores  $u$  e  $v$  mencionados no Probl. 32 em termos dos componentes destes vetores.

*Resposta:*  $u \times v = (u_y v_z - u_z v_y)i + (u_z v_x - u_x v_z)j + (u_x v_y - u_y v_x)k$

35. Três vetores são dados por:  $a = 2i - 3j - k$ ,  $b = i - j - k$ ,  $c = i + j - 2k$ . Determine: (a)  $a \cdot (b \times c)$ , (b)  $b \cdot (a \times c)$ , (c)  $a \cdot (b - c)$ , (d)  $a \times (b - c)$ .

36. Considere a Fig. 2-17. Sejam  $b$  e  $c$  as diagonais que se interceptam, pertencentes a um cubo de aresta  $a$ . (a) Encontre os componentes do vetor  $d$  obtido pelo produto vetorial  $b \times c$ . (b) Calcule os valores  $b \cdot c$ ,  $b \cdot d$  e  $c \cdot d$ . (c) Ache o ângulo entre  $b$  e  $c$ , entre  $b$  e  $d$  e entre  $c$  e  $d$ . (d) Determine o ângulo entre a diagonal de uma das faces (representada por  $b$ ) e a diagonal do cubo  $e$ .

*Resposta:* (a)  $d_x = d_z = a^2$ ,  $d_y = -a^2$ . (b)  $b \cdot c = a^2$ ,  $b \cdot d = c \cdot d = 0$   
 (c)  $60^\circ, 90^\circ, 90^\circ$ . (d)  $35,3^\circ$ .

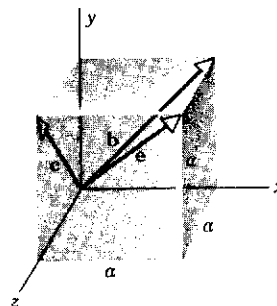


figura 2-17

37. Suponha que  $u, v$  e  $w$  sejam vetores não coplanares. (a) Mostre que

$$u \cdot (v \times w) = w \cdot (u \times v) = v \cdot (w \times u)$$

(b) Seja  $a = u \cdot (v \times w)$  e considere os vetores

$$A = (1/a)(v \times w), \quad B = (1/a)(u \times w), \quad C = (1/a)(w \times u)$$

- (c) Determine o produto escalar dos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  pelos vetores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{C}$ . (d) Se  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  possuem dimensão de comprimento, ache a dimensão de  $\vec{A}$ , de  $\vec{B}$  e de  $\vec{C}$ .
38. Dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  possuem componentes, em  $m$ , dadas por:  $u_x = 3$ ,  $u_y = 2$ ;  $v_x = 1$ ,  $v_y = 6$ . (a) Ache o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . (b) Determine os componentes de um vetor  $\vec{w}$  perpendicular ao vetor  $\vec{v}$  contido no plano  $xOy$  e que possua módulo igual a 4 m. (c) Obtenha os componentes e o módulo do vetor  $2\vec{u} - \vec{v}$ .
- Resposta: (a)  $46,8^\circ$ . (b)  $w_x = +3,95$  m;  $w_y = +0,66$  m. (c) 5 m, -2 m; módulo = 5,39 m.
39. Já vimos que a propriedade comutativa não se aplica ao produto vetorial, ou seja,  $\vec{a} \times \vec{b}$  é diferente de  $\vec{b} \times \vec{a}$ . (a) Mostre que a propriedade comutativa se aplica ao produto escalar, isto é:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ . (b) Mostre que a propriedade distributiva se aplica tanto ao produto escalar quanto ao produto vetorial, isto é, mostre que

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad \text{e que } \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

40. Use um sistema de coordenadas cartesianas  $xyz$  para verificar a validade da seguinte identidade:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c}$$

Se  $\vec{a}$  for paralelo ao eixo  $Ox$ ,  $\vec{b}$  paralelo ao eixo  $Oy$  e  $\vec{c}$  paralelo ao eixo  $Oz$ , calcule o valor do triplo produto vetorial indicado acima.

Resposta: 0.

41. As coordenadas de três pontos são dadas por:  $A(2, 2, 5)$ ;  $B(1, 0, 2)$ ;  $C(1, 1, 2)$ . Considere um vetor  $\vec{u}$  com origem no ponto  $C$  e extremidade no ponto  $A$  e outro vetor com origem no ponto  $B$  e extremidade no ponto  $A$ . Determine: (a)  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , (b)  $\vec{u} \times \vec{v}$ .

## SEÇÃO 2-5

42. *Invariância da soma vetorial em relação à rotação de um sistema de coordenadas.* A Fig. 2-18 mostra dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  e dois sistemas cartesianos ortogonais diferentes. Os eixos  $x'Ox$  e  $y'Oy$  fazem entre si um ângulo igual a  $\phi$ . Mostre que  $\vec{a} + \vec{b}$  possui a mesma direção, o mesmo módulo e o mesmo sentido em ambos os sistemas de coordenadas. Se o módulo de  $\vec{a} - \vec{b}$  for igual a 5 unidades em relação ao sistema  $xOy$ , qual será o módulo de  $\vec{a} - \vec{b}$  em relação ao sistema  $x'Oy'$ ?

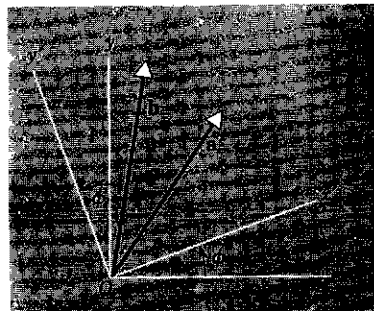


figura 2-18

Resposta: 5 unidades.

43. Considere a Fig. 2-14 (ver o final da Seção 2-5). (a) Verifique quais dos três vetores unitários mudam de sentido na imagem do espelho. (b) Considere um vetor  $\vec{u}$  situado no plano  $Oxy$  do sistema de coordenadas indicado pela letra (b) da Fig. 2-14; considere outro vetor  $\vec{u}'$  como sendo a imagem do vetor  $\vec{u}$  no sistema indicado pela letra (a) da Fig. 2-14. Verifique se o sentido do produto vetorial  $\vec{u} \times \vec{j}$  possui sentido igual ou contrário ao do produto vetorial  $\vec{u}' \times \vec{j}$ .

# 3

## **movimento em uma dimensão**

A Mecânica, a mais antiga das ciências físicas, estuda o movimento dos objetos. Entre seus problemas encontramos o cálculo da trajetória de uma cápsula de artilharia ou de uma sonda espacial enviada da Terra para Marte e, também, a análise dos traços que aparecem nas câmaras de bolha, causados pelas colisões, desintegrações e interações de partículas elementares (ver Fig. 10-11 e Apêndice F).

Quando descrevemos os movimentos, estamos tratando com a parte da Mecânica denominada *Cinemática*. Ao relacionarmos os movimentos com as forças a eles associadas e com as propriedades dos objetos que se deslocam, entramos no campo da *Dinâmica*. Neste capítulo definiremos algumas grandezas cinemáticas e as estudaremos para o caso especial do movimento em uma dimensão. No Cap. 4 discutiremos alguns tipos de movimentos em duas e em três dimensões. No Cap. 5 serão tratadas situações mais gerais da Dinâmica.

Um objeto, enquanto se desloca, pode também girar. Por exemplo, uma bola de futebol, ao descrever uma certa trajetória como um todo, pode, também, girar em torno de si mesma. Um corpo, como acontece com uma gota de chuva ao cair, pode também vibrar ao se deslocar. Entretanto, se considerarmos o movimento de um corpo ideal, que será denominado *partícula*, estas complicações poderão ser evitadas. Matematicamente, uma partícula é tratada como um ponto, um objeto sem dimensões,

3-1

*MECÂNICA*

3-2

*CINEMÁTICA DA  
PARTÍCULA*

de tal maneira que rotações e vibrações não estão envolvidas em seu movimento.

Realmente, um objeto sem dimensões não existe na Natureza. Entretanto, o conceito de "partícula" é muito útil, porque os objetos reais, com boa aproximação, muitas vezes se comportam como partículas. Para ser tratado como partícula, um corpo não precisa ser "pequeno", no sentido comum que se atribui a esta palavra. Por exemplo, a Terra e o Sol, em relação à distância que separa estes dois astros, podem ser considerados como partículas e podemos, sem erro apreciável, descobrir muita coisa sobre o movimento do Sol e dos planetas, tratando estes corpos como partículas. Bolas de futebol, moléculas, prótons e elétrons podem, freqüentemente, ser tratados como partículas. Mesmo que um corpo seja muito grande para ser tratado como uma partícula, em um problema particular, ele poderá, sempre, ser considerado como constituído de um grande número de partículas e o estudo do movimento das partículas poderá ser útil na análise do problema. Então, para simplificar, trataremos, por enquanto, do movimento de partículas.

Corpos que apresentam apenas movimento de translação comportam-se como partículas. Um observador, situado em um sistema de referência  $Oxyz$ , por exemplo, dirá que um objeto está em movimento de *translação* em relação a ele se os eixos  $Ox'$ ,  $Oy'$  e  $Oz'$ , supostos rigidamente ligados ao objeto, se mantiverem durante o movimento sempre paralelos a  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ . Na Fig. 3-1, por exemplo, mostra-se o movimento de translação de um objeto, que se desloca de  $A$  para  $B$ , e daí para  $C$ . Observe que a trajetória seguida pelo objeto não é necessariamente retilínea. Observe, ainda, que os deslocamentos de todos os pontos do corpo, durante o movimento, são iguais entre si. Assim, podemos tratar o corpo como uma partícula porque, descrevendo-se o movimento de um dos seus pontos, estaremos descrevendo o movimento de todo o corpo.

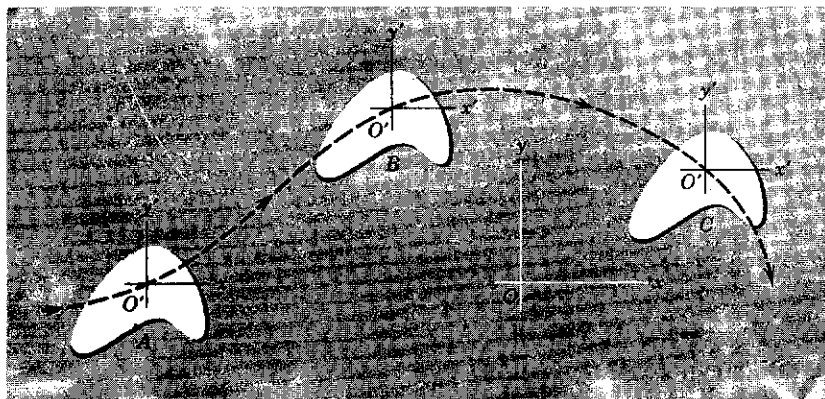


figura 3-1

Movimento de translação de um objeto. A translação pode ocorrer em três dimensões, mas, para simplificar, são mostradas apenas translações em duas dimensões.

O deslocamento, a velocidade e a aceleração de uma partícula são vetores. Como este capítulo trata somente do movimento unidimensional, realmente não necessitaríamos usar todo o poderio do método vetorial. Entretanto, julgamos útil iniciar considerando o movimento em duas dimensões (a extensão para três não é difícil). Daí então, simplifica-se para o caso particular unidimensional. Este procedimento permite lembrar sempre o caráter vetorial de todo movimento.

### 3-3

### VELOCIDADE MÉDIA

Velocidade de uma partícula é a razão segundo a qual sua posição varia com o tempo. A posição de uma partícula, em um dado referencial, é caracterizada pelo *vetor posição* da partícula, traçado da origem do referencial ao ponto ocupado pela mesma. Seja a partícula no ponto *A*, na Fig. 3-2a, no instante  $t_1$ ; sua posição no plano  $xOy$  é definida pelo vetor posição  $\mathbf{r}_1$ .

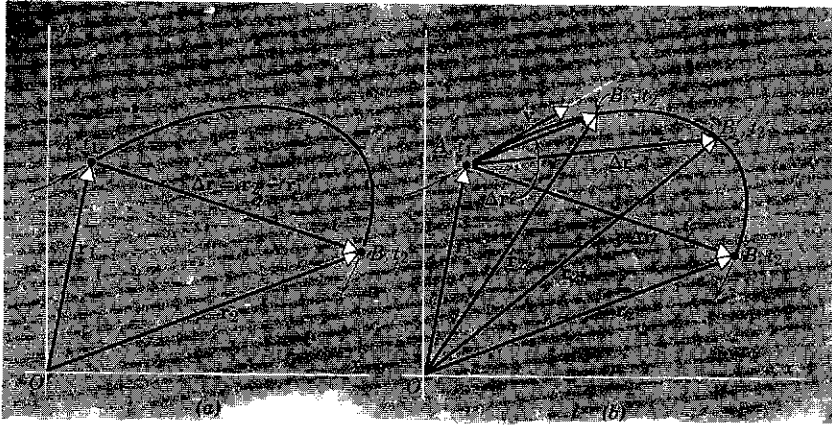


figura 3-2

(a) Uma partícula move-se de *A* para *B* no intervalo de tempo  $\Delta t (= t_2 - t_1)$ , efetuando um deslocamento  $\Delta \mathbf{r} (= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$ . A *velocidade média*  $\bar{\mathbf{v}}$  entre *A* e *B* está dirigida segundo  $\Delta \mathbf{r}$ . (b) Quando *B* se move no sentido de *A*, a *velocidade média* aproxima-se da *velocidade instantânea*  $\mathbf{v}$  em *A*;  $\mathbf{v}$  é tangente à trajetória em *A*.

Em um instante posterior,  $t_2$ , a partícula estará no ponto *B*, definido pelo vetor posição  $\mathbf{r}_2$ . O vetor *deslocamento*, que descreve a mudança de posição da partícula quando ela vai de *A* para *B*, é  $\Delta \mathbf{r} (= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$  e o intervalo de tempo empregado neste deslocamento é  $\Delta t (= t_2 - t_1)$ . A *velocidade média* da partícula, neste intervalo de tempo, é definida por

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\text{deslocamento (vetor)}}{\text{intervalo de tempo (escalar)}} \quad (3-1)$$

Um traço sobre o símbolo de uma grandeza indica um valor médio para a grandeza considerada.

A grandeza  $\bar{\mathbf{v}}$  é um vetor, pois foi obtida pelo cociente do vetor  $\Delta \mathbf{r}$  pelo escalar  $\Delta t$ . Velocidade é, então, um conceito que envolve módulo, direção e sentido. Sua direção e sentido são os de  $\Delta \mathbf{r}$  e seu módulo é  $|\Delta \mathbf{r} / \Delta t|$ . O módulo é expresso em unidade de distância dividida por unidade de tempo, como, por exemplo, metro por segundo ou quilômetro por hora.

A velocidade definida pela Eq. 3-1 é denominada *velocidade média* porque a medida do *deslocamento* (tal como foi definido) e do intervalo de tempo não nos dá detalhes sobre o movimento entre os pontos *A* e *B*. A trajetória pode ser curvilínea ou retilínea e o movimento pode ter sido uniforme ou variado. A velocidade média envolve, apenas, o deslocamento total e o intervalo de tempo total. Por exemplo, para um homem que deixa sua casa, para uma viagem de automóvel, e retorna, depois de um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a velocidade média da viagem é zero, porque seu deslocamento, no intervalo de tempo  $\Delta t$ , foi nulo.

Se determinássemos o instante em que a partícula atingiu cada um dos inúmeros pontos existentes entre *A* e *B*, na trajetória por ela descrita (Fig. 3-2a), poderíamos descrever o movimento com maiores detalhes. Se encontrássemos para as velocidades médias,

entre dois pontos quaisquer, os mesmos valores (em módulo e direção), poderíamos concluir que a partícula estaria se deslocando com *velocidade constante*, isto é, estaria se deslocando em linha reta (direção constante) e em movimento uniforme (módulo constante).

Suponhamos que uma partícula esteja em movimento e que a velocidade média desta partícula, calculada para intervalos de tempo diferentes, não tenha se mantido constante. Dizemos que a partícula se desloca com velocidade variável. Então, deveremos obter a velocidade da partícula em cada instante, a qual chamaremos de *velocidade instantânea*.

### 3-4 VELOCIDADE INSTANTÂNEA

A *velocidade* pode variar, sofrendo alterações em seu módulo, em sua direção, ou em ambos. Para o movimento representado na Fig. 3-2a, a velocidade média no intervalo  $t_2 - t_1$  é diferente, tanto em módulo como em direção, da velocidade média obtida em um outro intervalo de tempo,  $t_2' - t_1$ . Este fato é ilustrado na Fig. 3-2b, na qual fazemos o ponto *B* se aproximar sucessivamente de *A*. Os pontos *B'* e *B''* mostram duas posições intermediárias da partícula, correspondentes aos instantes  $t_2'$  e  $t_2''$  e definidos pelos vetores posição  $\mathbf{r}_2'$  e  $\mathbf{r}_2''$ , respectivamente. Os deslocamentos vetoriais,  $\Delta\mathbf{r}$ ,  $\Delta\mathbf{r}'$  e  $\Delta\mathbf{r}''$ , diferem em direção e seus módulos diminuem sucessivamente. Os intervalos de tempo, correspondentes a estes deslocamentos,  $\Delta t (= t_2 - t_1)$ ,  $\Delta t' (= t_2' - t_1)$  e  $\Delta t'' (= t_2'' - t_1)$  tornam-se, também, cada vez menores.

À medida que continuamos neste processo, fazendo *B* aproximar-se de *A*, verificamos que a relação correspondente se aproxima de um valor limite definido. Embora o deslocamento se torne, assim, extremamente pequeno e também o intervalo de tempo para o qual o deslocamento foi considerado, a relação entre estas quantidades não será necessariamente pequena. Da mesma forma, à medida que seu módulo vai diminuindo, a direção do vetor deslocamento tende para uma direção limite, a direção da tangente à trajetória da partícula, no ponto *A*. Este valor limite de  $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$  é chamado de *velocidade instantânea* da partícula no ponto *A* ou de velocidade da partícula no instante  $t_1$ .

Se  $\Delta\mathbf{r}$  é o deslocamento em um pequeno intervalo de tempo  $\Delta t$ , tomado após o instante  $t$ , a velocidade no instante  $t$  é o valor limite do qual se aproxima  $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ , quando  $\Delta\mathbf{r}$  e  $\Delta t$  tendem ambos para zero. Isto é, se representarmos a velocidade instantânea por  $\mathbf{v}$ ,

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

A direção de  $\mathbf{v}$  será a direção limite que  $\Delta\mathbf{r}$  toma quando *B* se aproxima de *A*, ou quando  $\Delta t$  tende para zero. Como vimos, esta direção limite é a da tangente à trajetória da partícula, no ponto *A*.

O valor limite de  $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ , quando  $\Delta t$  tende para zero, pela notação do cálculo diferencial, é escrita na forma  $d\mathbf{r}/dt$  e é chamada derivada de  $\mathbf{r}$  em relação a  $t$ . Vem, então,

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{3-2}$$

O módulo  $v$ , da velocidade instantânea é chamado de *velocidade escalar instantânea* e é, simplesmente, o valor absoluto de  $\mathbf{v}$ ,

isto é,

$$v = |\mathbf{v}| = |d\mathbf{r}/dt|. \quad (3-3)$$

A velocidade escalar instantânea, sendo o módulo de um vetor, será essencialmente positiva. Assim como uma partícula é um conceito físico obtido pelo uso do conceito matemático de ponto, a velocidade, que acabamos de definir, é um conceito físico que utiliza o conceito matemático de diferenciação. Na verdade, o cálculo foi inventado para servir de ferramenta matemática apropriada para o tratamento de problemas fundamentais da Mecânica.

Na próxima seção examinaremos detalhadamente o conceito de velocidade instantânea para o caso especial do movimento em uma dimensão, às vezes chamado de movimento retilíneo.

Outra vez, aqui, o tratamento do problema unidimensional é feito considerando primeiro o movimento a duas dimensões e simplificando, em seguida, para o caso especial unidimensional.

A Fig. 3-3 mostra uma partícula que se desloca ao longo de uma trajetória no plano  $xOy$ . No instante  $t$  sua posição em relação à origem é definida pelo vetor posição  $\mathbf{r}$  (veja Fig. 3-3a) e sua velo-

### 3-5 MOVIMENTO EM UMA DIMENSÃO — VELOCIDADE VARIÁVEL

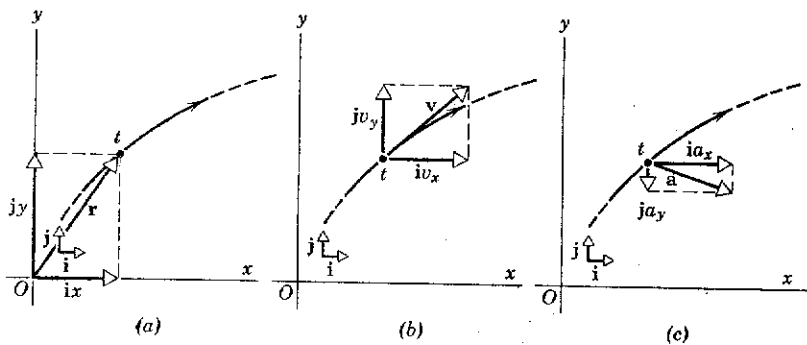


figura 3-3

Uma partícula no instante  $t$  tem (a) uma posição descrita por  $\mathbf{r}$ , (b) uma velocidade instantânea  $\mathbf{v}$  e (c) uma aceleração instantânea  $\mathbf{a}$ . Os componentes vetoriais  $x_i$  e  $y_j$  da Eq. 3-4,  $v_x i$  e  $v_y j$  da Eq. 3-5 e  $a_x i$  e  $a_y j$  da Eq. 3-10 são também mostrados, como o são os vetores  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$

cidade é  $\mathbf{v}$  (veja Fig. 3-3b), tangente à trajetória, como mostra a figura. Pode-se escrever (veja Eq. 2-8)

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad (3-4)$$

sendo  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  os vetores unitários das direções  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente, e  $x$  e  $y$  os componentes (escalares) do vetor  $\mathbf{r}$ . Como  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  são vetores constantes, combinando as Eqs. 3-2 e 3-4, teremos:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j},$$

que podemos expressar na forma

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} \text{ (movimento em duas dimensões),} \quad (3-5)$$

onde  $v_x (= dx/dt)$  e  $v_y (= dy/dt)$  são os componentes (escalares) do vetor  $\mathbf{v}$ .

Considerando, agora, o movimento em uma direção apenas, escolhido, por conveniência, como sendo no eixo  $Ox$ , teremos  $v_y = 0$  ficando a Eq. 3-5 reduzida a

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} \text{ (movimento unidimensional).} \quad (3-6)$$

Como  $i$  tem o sentido da orientação positiva do eixo  $Ox$ ,  $v_x$  será positivo e igual a  $(+v)$  quando  $v$  tiver aquele sentido, e negativo e igual a  $(-v)$ , se  $v$  apontar em sentido contrário. No estudo do movimento unidimensional só existem, então, uma direção possível de  $v$  e duas opções para o seu sentido, razão pela qual não temos necessidade de usar os recursos mais gerais do método vetorial, bastando trabalhar, apenas, com o componente escalar,  $v_x$ , da velocidade.

## EXEMPLO 1

"O processo do limite". Como ilustração do uso do "processo do limite", em uma dimensão, consideremos a tabela de dados que se segue, tomados de um movimento ao longo do eixo  $Ox$ . As quatro primeiras colunas são constituídas de dados experimentais. Os símbolos se referem à Fig. 3-4, na qual a partícula está se deslocando da esquerda para a direita, isto é, no sentido positivo do eixo  $Ox$ . A partícula estava na posição  $x_1$  (100 cm da origem), no instante  $t_1$  (1,00 s) e na posição  $x_2$  no instante  $t_2$ . Ao considerar diferentes valores para  $x_2$  e os correspondentes diferentes instantes  $t_2$ , encontraremos os valores tabelados a seguir.

$x_1$ (cm)	$t_1$ (s)	$x_2$ (cm)	$t_2$ (s)	$x_2 - x_1$ $= \Delta x$ (cm)	$t_2 - t_1$ $= \Delta t$ (s)	$\Delta x/\Delta t$ (cm/s)
100,0	1,00	200,0	11,00	100,0	10,00	10,0
100,0	1,00	180,0	9,60	80,0	8,60	9,3
100,0	1,00	160,0	7,90	60,0	6,90	8,7
100,0	1,00	140,0	5,90	40,0	4,90	8,2
100,0	1,00	120,0	3,56	20,0	2,56	7,8
100,0	1,00	110,0	2,33	10,0	1,33	7,5
100,0	1,00	105,0	1,69	5,0	0,69	7,3
100,0	1,00	103,0	1,42	3,0	0,42	7,1
100,0	1,00	101,0	1,14	1,0	0,14	7,1

A Eq. 3-2, que é válida para o caso geral do movimento em três dimensões, é:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

Para o movimento em uma dimensão, ao longo do eixo  $Ox$ , teremos uma relação semelhante, porém escalar, na qual cada vetor é substituído pelo componente correspondente, isto é,

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (3-7)$$

Fica claro, através da tabela, que, à medida que tomamos valores de  $x_2$  mais próximos de  $x_1$ ,  $\Delta t$  se aproxima de zero e a relação  $\Delta x/\Delta t$  tende para o valor aparente do limite, +7,1 cm/s.

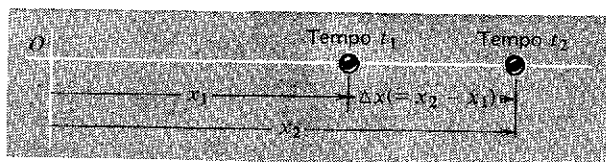


figura 3-4

Uma partícula move-se para a direita, ao longo do eixo  $Ox$ .

No instante  $t_1$ , então, tanto quanto foi possível aproximar através dos dados, o valor de  $v_x$  será igual a +7,1 cm/s. Como  $v_x$  é positivo, a velocidade  $v (=v_x i)$ ; veja Eq. 3-6) apontará para a direita na Fig. 3-4. Sua direção será tangente à trajetória, e seu sentido será o do movimento, como era de esperar.



A Fig. 3-5a mostra seis "instantâneos" sucessivos do movimento de uma partícula que se desloca ao longo do eixo  $Ox$  com velocidade escalar variável. No instante  $t = 0$  ela está na posição  $x = 1,00$  cm à direita da origem, no instante  $t = 2,5$  s ela estava em repouso na posição  $x = +5,00$  cm; no instante  $t = 4,0$  s ela está de volta na posição  $x = +1,40$  cm. A Fig. 3-5b é um diagrama de  $x$  em função de  $t$  para este movimento.

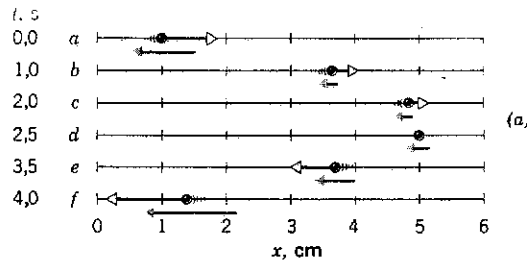
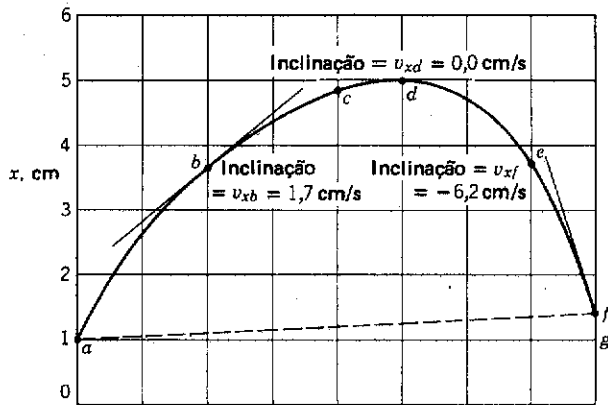
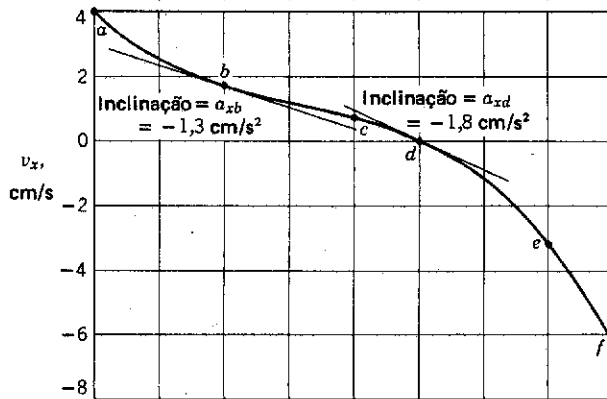


figura 3-5

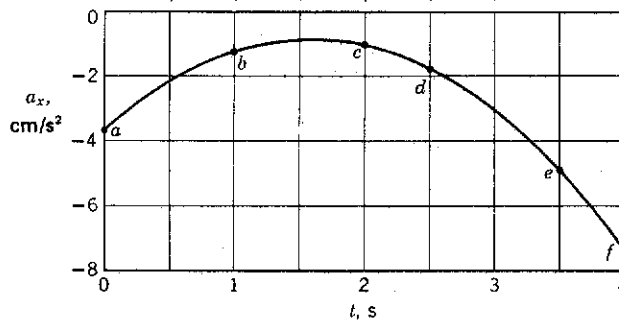
(a) Seis "instantâneos" consecutivos de uma partícula que se desloca ao longo do eixo  $Ox$ . O vetor junto à partícula é sua velocidade instantânea; o que está por baixo da partícula é sua aceleração instantânea.



(b) Diagrama de  $x$  em função de  $t$  para o movimento da partícula.



(c) Diagrama de  $v_x$  em função de  $t$ .



(d) Diagrama de  $a_x$  em função de  $t$ .

O vetor *velocidade média*, para todo o movimento, é o cociente do deslocamento, ou mudança de posição (+0,40 cm), pelo intervalo de tempo correspondente (4,0 s), isto é,  $\bar{v}_x = +0,10$  cm/s. (Nos movimentos em uma dimensão designaremos a velocidade média por  $\bar{v}_x$  e a velocidade instantânea por  $v_x$ , sem o símbolo vetorial, embora estas grandezas não sejam escalares. Este procedimento é usual e não deverá causar equívoco. Estas grandezas não são velocidades escalares porque poderão ter valores negativos e as velocidades escalares são essencial-

mente positivas.) A velocidade média,  $\bar{v}$ , aponta no sentido positivo do eixo  $Ox$  (isto é, para a direita na Fig. 3-5a) porque o deslocamento aponta neste sentido. O valor de  $\bar{v}_x$  pode ser obtido diretamente da inclinação da linha interrompida  $af$  na Fig. 3-5b, onde por inclinação se entende a relação entre o deslocamento  $gf$  e o intervalo de tempo  $ga$ . (A inclinação não é o valor da tangente do ângulo  $fag$ , medido no gráfico com um transferidor. A medida deste ângulo é arbitrária, porque depende das escalas que se escolherem para a representação de  $x$  e  $t$ .)

A velocidade  $v_x$ , em cada instante, é encontrada pela inclinação da curva da Fig. 3-5b, naquele instante. A Eq. 3-7 é de fato a relação pela qual se define, no cálculo diferencial, a inclinação de uma curva em um ponto. No nosso exemplo, a inclinação em  $b$ , que é o valor de  $v_x$  em  $b$ , é  $+1,7$  cm/s; a inclinação em  $d$  é zero e a inclinação no ponto  $f$  é  $-6,2$  cm/s. Tendo determinado a inclinação  $dx/dt$  em cada instante  $t$ , pode-se traçar o gráfico de  $v_x$  em função de  $t$ , como mostra a Fig. 3-5c. Observe que, no intervalo  $0 < t < 2,5$  s,  $v_x$  é positiva, uma vez que o vetor  $v$  aponta para a direita na Fig. 3-5a; no intervalo  $2,5$  s  $< t < 4,0$  s,  $v_x$  é negativa, já que o vetor  $v$  aponta para a esquerda, na mesma figura.

Quando se observa o movimento de um corpo, verifica-se que muitas vezes sua velocidade varia, ora em módulo, ora em direção e ora em ambas. Diz-se, então, que o corpo possui aceleração. *A aceleração de uma partícula é a razão segundo a qual sua velocidade varia com o tempo.* Suponhamos que no instante  $t_1$  uma partícula, como na Fig. 3-6, esteja no ponto  $A$ , deslocando-se no plano  $xOy$ , com uma certa velocidade instantânea  $v_1$  e que em um instante posterior,  $t_2$ , ela esteja em  $B$ , deslocando-se com a velocidade instantânea  $v_2$ . A *aceleração média*  $\bar{a}$ , durante o movimento de  $A$  para  $B$ , é definida pelo cociente da *variação da velocidade* pelo intervalo de tempo, ou seja

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (3-8)$$

A grandeza  $\bar{a}$  é um vetor porque foi obtida dividindo-se o vetor  $\Delta v$  pelo escalar  $\Delta t$ . A aceleração é, pois, caracterizada em módulo, direção e sentido. Sua direção e seu sentido são os de  $\Delta v$  e seu módulo é  $|\Delta v/\Delta t|$ . O valor da aceleração é expresso em unidade de velocidade dividida por unidade de tempo, como por exemplo, m/s por s (que se escreve  $m/s^2$  e se lê "metro por segundo quadrado"),  $cm/s^2$  e  $pé/s^2$ .

O vetor  $\bar{a}$  da Eq. 3-8 é chamado *aceleração média* porque ele não informa como a velocidade varia com o tempo, durante o intervalo  $\Delta t$ . Conhecem-se, apenas, a variação total da velocidade e o intervalo de tempo em que se verificou esta variação. Se o cociente da variação da velocidade (que é uma grandeza vetorial) pelo correspondente intervalo de tempo,  $\Delta v/\Delta t$ , permanecer constante para qualquer intervalo de tempo em que se calcular a aceleração, teremos um movimento com *aceleração constante*. Aceleração constante significa, pois, que a *variação* da velocidade com o tempo é uniforme, em módulo, direção e sentido. Se a velocidade *não variar*, ou seja, se ela permanecer constante em módulo, direção e sentido,  $\Delta v$  será nulo, para qualquer intervalo de tempo e a aceleração será zero.

Se uma partícula está se deslocando de tal maneira que sua aceleração média, medida em diferentes intervalos de tempo, *não* se mantém constante, dizemos que a partícula possui *aceleração variável*. A aceleração poderá variar em módulo, direção ou em

### 3-6 ACELERAÇÃO

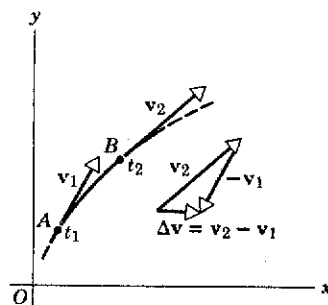


figura 3-6

Uma partícula tem velocidade  $v_1$  no ponto  $A$  e move-se para o ponto  $B$ , onde sua velocidade é  $v_2$ . O triângulo mostra a variação (vetorial) da velocidade  $\Delta v (= v_2 - v_1)$  experimentada pela partícula quando ela se move de  $A$  para  $B$ .

ambos. Neste caso, precisamos determinar a aceleração da partícula em cada instante, chamada aceleração instantânea.

A aceleração instantânea é definida por

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (3-9)$$

Isto é, a aceleração de uma partícula no instante  $t$  é o valor limite de  $\Delta \mathbf{v}/\Delta t$ , no instante  $t$ , quando tanto  $\Delta \mathbf{v}$  como  $\Delta t$  se aproximam de zero. A direção da aceleração instantânea  $\mathbf{a}$  é a direção limite do vetor  $\Delta \mathbf{v}$ . O módulo,  $a$ , da aceleração instantânea é simplesmente  $a = |\mathbf{a}| = |d\mathbf{v}/dt|$ . Quando a aceleração é constante, a aceleração instantânea é igual à aceleração média. O estudante deve observar que a relação entre  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{v}$ , expressa na Eq. 3-9, é a mesma que existe entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{r}$  na Eq. 3-2.

Dois casos especiais ilustram que a aceleração pode surgir tanto da variação do módulo da velocidade, como da variação em sua direção. No primeiro caso teremos um movimento ao longo de uma linha reta, com variação uniforme na velocidade escalar (como na Sec. 3-8). Neste caso, a velocidade não sofre variação de direção mas seu módulo varia uniformemente com o tempo. Este é o caso em que a aceleração é constante. No segundo caso teremos um movimento circular com a velocidade escalar constante (Sec. 4-4). Aqui a velocidade muda constantemente de direção mas seu módulo permanece constante. Este é, também, um movimento acelerado; a direção da aceleração não é constante. Mais tarde, encontraremos outros importantes exemplos de movimentos acelerados.

Através das Eqs. 3-5 e 3-9, podemos escrever, para o movimento em duas dimensões, como na Fig. 3-3,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{j}$$

ou

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}, \quad (3-10)$$

onde  $a_x (= dv_x/dt)$  e  $a_y (= dv_y/dt)$  são os componentes (escalares) da aceleração  $\mathbf{a}$  (veja Fig. 3-3c).

Novamente restringiremos nosso estudo ao movimento em uma dimensão apenas, escolhida, por conveniência, como sendo a do eixo  $Ox$ . Como  $v_y$ , para este movimento, não varia com o tempo (é, de fato, zero),  $a_y$ , que é  $dv_y/dt$ , será também nula, de tal modo que

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} \quad (3-11)$$

Como  $\mathbf{i}$  aponta para o sentido positivo de  $Ox$ ,  $a_x$  será positiva se  $\mathbf{a}$  apontar para a direita, e negativa se  $\mathbf{a}$  tiver sentido contrário.

### 3-7

## MOVIMENTO UNIDIMENSIONAL — ACELERAÇÃO VARIÁVEL

### EXEMPLO 3

O movimento mostrado na Fig. 3-5a apresenta aceleração variável ao longo do eixo  $Ox$ . Para encontrar a aceleração<sup>1</sup>  $a_x$  em cada instante precisamos determinar  $dv_x/dt$  nestes instantes. Estes valores serão simplesmente as inclinações da

<sup>1</sup> Como fizemos para a velocidade, comumente chamaremos de  $a_x$  a aceleração em um movimento em uma dimensão, embora a aceleração seja um vetor e  $a_x$  seja exatamente um componente da aceleração. Se o eixo for tomado ao longo da reta em que se observa o movimento unidimensional, haverá apenas um componente dos vetores posição, velocidade e aceleração.

curva de  $v_x$  em função de  $t$ , em cada instante. Na Fig. 3-5c a inclinação no ponto  $b$  é  $-1,3 \text{ cm/s}^2$  e no ponto  $d$  é  $-1,8 \text{ cm/s}^2$ . O resultado, que se obtém, calculando a inclinação para todos os pontos, é mostrado na Fig. 3-5d. Observe que  $a_x$  é negativa em todos os instantes, o que significa que a aceleração  $a$  aponta no sentido negativo de  $Ox$ . Isto indica, ainda, que  $v_x$  decresce sempre com o tempo, o que é evidenciado na Fig. 3-5c. O movimento é um daqueles no qual a aceleração tem direção constante e módulo variável (veja Fig. 3-5a).

Nesta seção, limitando nosso estudo ainda mais, consideraremos movimentos que ocorrem em uma dimensão (o eixo  $Ox$ ) e que têm  $a_x = \text{constante}$ . Se tal aceleração é constante, a aceleração média, para qualquer intervalo, é igual à aceleração instantânea  $a_x$  (constante). Sejam  $t_1 = 0$  e  $t_2$  um instante arbitrário,  $t_2 = t$ . Sejam  $v_{x0}$  o valor de  $v_x$  em  $t = 0$  e  $v_x$  o seu valor no instante  $t_2$ . Com esta notação, teremos para  $a_x$  (veja Eq. 3-8):

$$a_x = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_x - v_{x0}}{t - 0}$$

ou

$$v_x = v_{x0} + a_x t. \quad (3-12)$$

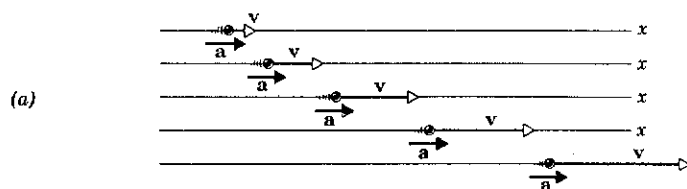
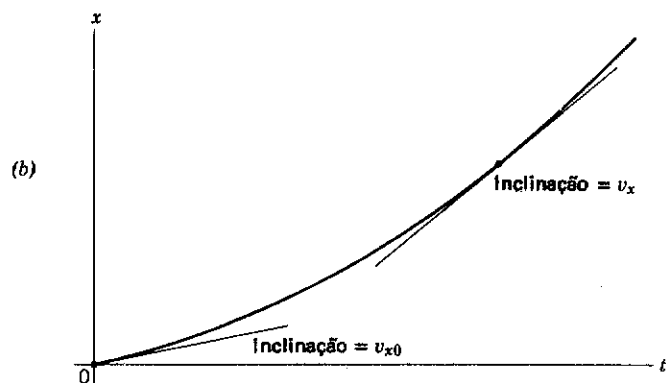
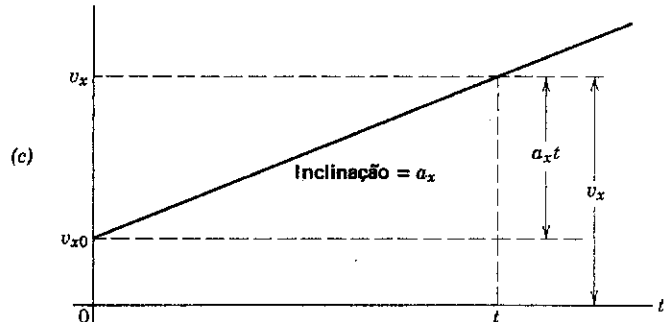


figura 3-7

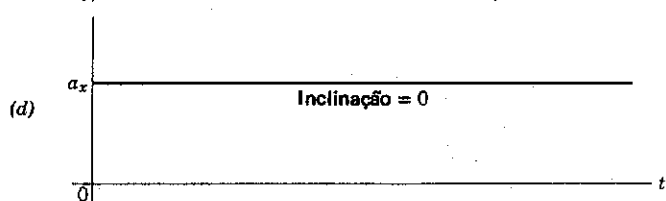
(a) Cinco "instantâneos" sucessivos do movimento retilíneo com aceleração constante. As setas nas esferas representam  $v$ ; as que estão por baixo representam  $a$ .



(b) O deslocamento aumenta quadraticamente, de acordo com  $x = v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ . Sua inclinação aumenta uniformemente e em cada instante tem o valor  $v_x$ , a velocidade.



(c) A velocidade  $v_x$  cresce uniformemente de acordo com  $v_x = v_{x0} + a_x t$ . Sua inclinação é constante e em cada instante tem o valor  $a_x$ , a aceleração.



(d) A aceleração  $a_x$  tem um valor constante; sua inclinação é zero. A Fig. 3-5 mostra diagramas semelhantes para movimento em uma dimensão no qual a aceleração não é constante.

Esta equação estabelece que o valor de  $v_x$  em um instante  $t$  é obtido pela soma do seu valor,  $v_{x_0}$ , no instante  $t = 0$ , com a variação da velocidade no intervalo de tempo  $t$ , que é dada por  $a_x t$ .

A Fig. 3-7c mostra o gráfico de  $v_x$  em função de  $t$  para este caso de aceleração constante, isto é, o gráfico da Eq. 3-12. Observe que a inclinação da curva, que representa a variação da velocidade com o tempo, é constante, como deveria ser, uma vez que a aceleração  $a_x (= dv_x/dt)$  é constante, conforme mostra o gráfico  $d$  da Fig. 3-7.

Quando a velocidade  $v_x$  varia uniformemente com o tempo, seu valor médio em qualquer intervalo de tempo é igual à média dos valores de  $v_x$  no início e no fim do intervalo. Isto é, a velocidade média  $\bar{v}_x$ , entre  $t = 0$  e  $t = t$ , é

$$\bar{v}_x = \frac{v_{x_0} + v_x}{2}. \quad (3-13)$$

Esta relação não seria verdadeira se a aceleração não fosse constante, pois então o gráfico de  $v_x$  em função de  $t$  não seria retilíneo.

Se a posição da partícula no instante  $t = 0$  é  $x_0$ , sua posição  $x$  em  $t = t$  pode ser obtida pela relação

$$x = x_0 + \bar{v}_x t$$

que, combinada com a Eq. 3-13, nos fornece

$$x = x_0 + \frac{v_{x_0} + v_x}{2} \cdot t. \quad (3-14)$$

O deslocamento no intervalo  $t$  será  $x - x_0$ . Quase sempre a escolha da origem é feita de tal maneira que  $x_0 = 0$ .

Observe que, sem considerar as condições iniciais do problema, isto é, os valores de  $x$  e  $v_x$  em  $t = 0$  (no nosso caso  $x = x_0$  e  $v_x = v_{x_0}$ ), existem quatro parâmetros no movimento estudado. São o deslocamento,  $x$ , a velocidade,  $v_x$ , a aceleração,  $a_x$ , e  $t$ , o intervalo de tempo. Se sabemos, apenas, que a aceleração é constante, mas desconhecemos seu valor, o conhecimento de dois quaisquer destes parâmetros nos permitirá obter os outros dois. Por exemplo, se  $a_x$  e  $t$  são conhecidos, a Eq. 3-12 nos dá  $v_x$  e uma vez obtido  $v_x$ , acharemos  $x$  pela Eq. 3-14.

Na maioria dos problemas relacionados com movimentos uniformemente acelerados, dois parâmetros são conhecidos e um terceiro é procurado. É conveniente, então, obter relações entre três dos quatro parâmetros mencionados. A Eq. 3-12 contém  $v_x$ ,  $a_x$  e  $t$ , mas não apresenta  $x$ ; a Eq. 3-14 contém  $x$ ,  $v_x$  e  $t$  e não contém  $a_x$ . Para completar nosso sistema de equações precisaremos obter mais duas relações, uma contendo  $x$ ,  $a_x$  e  $t$  e não contendo  $v_x$  e outra apresentando  $x$ ,  $v_x$  e  $a_x$  e não  $t$ . Elas serão facilmente obtidas combinando as Eqs. 3-12 e 3-14.

Se substituirmos na Eq. 3-14 o valor de  $v_x$ , obtido na Eq. 3-12, eliminaremos  $v_x$  e teremos

$$x = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2. \quad (3-15)$$

Quando a Eq. 3-12 é resolvida em relação a  $t$  e este valor de  $t$  é levado na Eq. 3-14, obteremos

$$v_x^2 = v_{x_0}^2 + 2a_x(x - x_0). \quad (3-16)$$

As Eqs. 3-12, 3-14, 3-15 e 3-16 (veja Tab. 3-1) formam o conjunto completo de equações para o movimento ao longo de uma linha reta com aceleração constante.

**Tabela 3-1**

Equações que descrevem o movimento retilíneo com aceleração constante.

(A posição  $x_0$  e a velocidade  $v_{x_0}$  no instante inicial  $t = 0$  são as condições iniciais dadas.)

Equação Número	Equação	Variáveis			
		$x$	$v_x$	$a_x$	$t$
3-12	$v_x = v_{x_0} + a_x t$	x	✓	✓	✓
3-14	$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{x_0} + v_x)t$	✓	✓	x	✓
3-15	$x = x_0 + v_{x_0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	✓	x	✓	✓
3-16	$v_x^2 = v_{x_0}^2 + 2a_x(x - x_0)$	✓	✓	✓	x

Um caso particular de movimento com aceleração constante é aquele no qual a aceleração é nula, isto é,  $a_x = 0$ . Neste caso, as quatro equações apresentadas na Tab. 3-1 se reduzem a  $v_x = v_{x_0}$  (o vetor velocidade não varia) e  $x = x_0 + v_{x_0}t$  (o deslocamento varia linearmente com o tempo), como era de esperar.

A curva da Fig. 3-7b é o gráfico do deslocamento em função do tempo para o movimento com aceleração constante; isto é, a figura é o gráfico da Eq. 3-15, na qual  $x_0 = 0$ . A inclinação da tangente à curva no instante  $t$  é a velocidade  $v_x$  neste instante. Observe que a inclinação cresce continuamente com o tempo desde  $v_{x_0}$ , no instante  $t = 0$ . A taxa da variação desta inclinação com o tempo deve fornecer-nos a aceleração  $a_x$ , que neste caso é constante. A curva da Fig. 3-7b, é uma parábola, uma vez que a Eq. 3-15 é a equação de uma parábola com um coeficiente angular  $v_{x_0}$  em  $t = 0$ . Por diferenciação sucessiva, da Eq. 3-15, obtemos,

$$x = x_0 + v_{x_0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$dx/dt = v_{x_0} + a_x t \quad \text{ou} \quad v_x = v_{x_0} + a_x t,$$

que nos dá a velocidade  $v_x$  no instante  $t$  (compare este resultado com a Eq. 3-12), e

$$dv_x/dt = a_x,$$

a aceleração constante. O diagrama deslocamento-tempo para o movimento uniformemente acelerado será, portanto, sempre parabólico.

O estudante não deve ser levado a memorizar relações como as da Tab. 3-1. O que é importante é que seja capaz de seguir o raciocínio utilizado para obtê-las. Depois de o estudante usar estas relações repetidas vezes na solução de problemas, elas serão automaticamente lembradas por ele, em parte como um resultado da vivência adquirida, mas, principalmente, em virtude da melhor compreensão destas relações obtidas através das aplicações.

Pode-se usar qualquer unidade conveniente de tempo e distância nestas equações. Se decidirmos medir o tempo em segundos e a distância em metros, deveremos expressar a velocidade em m/s e a aceleração em m/s<sup>2</sup>, para que haja coerência. Se nos forem fornecidos dados nos quais as unidades de uma das grandezas, como

#### EXEMPLO 4

### 3-9 COERÊNCIA DE UNIDADES E DIMENSÕES

velocidade, por exemplo, não forem consistentes com as unidades de outra grandeza, como aceleração, deveremos, antes de utilizá-los em nossas equações, transformar as unidades de maneira a torná-las coerentes entre si. Ao serem escolhidas as unidades para as grandezas fundamentais, ficam automaticamente definidas, coerentemente com elas, as unidades das grandezas derivadas. Ao efetuar qualquer tipo de cálculo, deve-se acrescentar ao resultado final a unidade apropriada, pois o resultado não teria significado sem esta especificação.

### EXEMPLO 5

Suponhamos que desejamos determinar a velocidade escalar de uma partícula que recebe uma aceleração uniforme de  $5,00 \text{ cm/s}^2$  durante  $0,5$  hora, sabendo que sua velocidade inicial é  $305 \text{ cm/s}$ . Se decidirmos tomar o  $\text{cm}$  como nossa unidade de comprimento e o segundo como unidade de tempo, deveremos fazer as seguintes transformações

$$t = t - t_0 = 0,5 \text{ h} = 0,5 \text{ h} \cdot \frac{60 \text{ min}}{\text{h}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{\text{min}} = 1\,800 \text{ s}$$

Tomando o instante inicial  $t_0 = 0$ , como na Eq. 3-12, teremos

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x0} + a_x t = 305 \text{ cm/s} + (5,00 \text{ cm/s}^2) (1\,800 \text{ s}) \\ &= 9,30 \times 10^3 \text{ cm/s.} \end{aligned}$$

Uma das maneiras de verificar se uma equação apresenta erro, é examinar as *dimensões* de cada um de seus termos. As dimensões de uma grandeza física qualquer podem sempre ser expressas em termos de uma combinação entre as unidades das grandezas fundamentais, das quais ela derivou, tais como a massa, o comprimento e o tempo. As dimensões da velocidade são comprimento ( $L$ ) dividido pelo tempo ( $T$ ); as dimensões da aceleração são comprimento dividido por tempo ao quadrado etc. *Em qualquer equação física autêntica as dimensões de todos os termos devem ser as mesmas.* Isto significa que não se pode igualar um termo que tenha dimensão de velocidade, por exemplo, com outro termo que tenha dimensão de aceleração. As dimensões correspondentes às diversas grandezas podem ser tratadas exatamente como se fossem grandezas algébricas e podem ser combinadas, canceladas etc., como se fossem fatores em uma equação.

Para verificar a homogeneidade dimensional da Eq. 3-15,  $x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$ , por exemplo, observamos que  $x$  e  $x_0$  têm dimensões de um comprimento. Então os outros dois termos devem também apresentar esta dimensão. A dimensão do termo  $v_{x0} t$  é

$$\frac{\text{comprimento}}{\text{tempo}} \times \text{tempo} = \text{comprimento}$$

ou

$$(L/T) \times T = L,$$

e a do termo  $\frac{1}{2} a_x t^2$ ,

$$\frac{\text{comprimento}}{\text{tempo}^2} \times \text{tempo}^2 = \text{comprimento},$$

ou

$$(L/T^2) \times T^2 = L.$$

A equação é, pois, *dimensionalmente correta*.

O estudante deverá verificar as dimensões de todas as equações físicas que usar.

## EXEMPLO 6

A velocidade de um automóvel, que viaja exatamente para leste, é reduzida uniformemente de 72 km/h para 36 km/h em uma distância de 60 metros.

(a) Qual é o módulo e o sentido da aceleração?

Escolhamos, arbitrariamente, a direção oeste-leste como eixo  $Ox$  e como positivo o sentido de oeste para leste. Foram dados  $x$  e  $v_x$  e procuramos  $a_x$ . O tempo não foi envolvido. A equação que deveremos usar será então a Eq. 3-16 (veja a Tab. 3-1). Temos  $v_x = 36$  km/h,  $v_{x0} = 72$  km/h e  $x - x_0 = 60$  m = 0,060 km. Da Eq. 3-16,  $v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$  obteremos

$$a_x = \frac{v_x^2 - v_{x0}^2}{2(x - x_0)}$$

ou

$$a_x = \frac{(36 \text{ km/h})^2 - (72 \text{ km/h})^2}{2 \times 0,060 \text{ km}} = -3,24 \times 10^4 \text{ km/h}^2 = -2,5 \text{ m/s}^2.$$

O sentido da aceleração é para oeste, isto é, no sentido negativo do eixo  $Ox$ , porque  $a_x$  é negativo. O movimento do carro é retardado, pois a sua velocidade é dirigida para leste e a sua aceleração para o oeste. Quando a velocidade de um corpo decresce dizemos que ele se desacelera.

(b) Qual o intervalo de tempo decorrido durante a desaceleração?

Se usarmos apenas os dados originais, a Tab. 3-1 mostra que a Eq. 3-14 é que deverá ser usada. Da Eq. 3-14,  $x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{x0} + v_x)t$ , obtemos

$$t = \frac{2(x - x_0)}{v_{x0} + v_x}$$

ou

$$t = \frac{2 \times 0,60 \text{ km}}{(72 \text{ km/h} + 36 \text{ km/h})} = \frac{1}{900} \text{ h} = 4,0 \text{ s}.$$

Se usarmos os dados provenientes da solução da parte (a), a equação apropriada será a Eq. 3-12. Isto servirá como verificação. Da Eq. 3-12,  $v_x = v_{x0} + a_x t$ , teremos

$$t_x = \frac{v_x - v_{x0}}{a_x}$$

ou

$$t = \frac{36 \text{ km/h} - 72 \text{ km/h}}{-3,24 \times 10^4 \text{ km/h}^2} = \frac{1}{900} \text{ h} = 4,0 \text{ s}.$$

(c) Supondo que o carro continue se desacelerando na mesma proporção, quanto tempo gastará para chegar ao repouso, a partir da velocidade de 36 km/h?

A Fig. 3-12 será útil agora. Temos  $v_{x0} = 36$  km/h,  $a_x = -3,24 \times 10^4$  km/h<sup>2</sup> e a velocidade final  $v_x$  deverá ser nula. Então, da Eq. 3-12,  $v_x = v_{x0} + a_x t$ , obtemos

$$t = \frac{v_x - v_{x0}}{a_x}$$

ou

$$t = \frac{0 - 36 \text{ km/h}}{-3,24 \times 10^4 \text{ km/h}^2} = \frac{1}{900} \text{ h} = 4,0 \text{ s}.$$

(d) Qual a distância total que o carro percorrerá, a partir da velocidade 36 km/h, até parar?



Aqui, a Eq. 3-15 é que deverá ser usada. Temos  $v_{x_0} = 36 \text{ km/h}$ ,  $a_x = -3,24 \times 10^4 \text{ km/h}^2$  e  $t = (1/900) \text{ h}$ . Da Eq. 3-15,  $x = x_0 + v_{x_0} \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2$ , obtemos

$$x - x_0 = v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

ou

$$\begin{aligned} x - x_0 &= (36 \text{ km/h}) \left( \frac{1}{900} \text{ h} \right) + \frac{1}{2} (-3,24 \times 10^4 \text{ km/h}^2) \left( \frac{1}{900} \text{ h} \right)^2 = \\ &= 0,038 \text{ km} = 38 \text{ m}. \end{aligned}$$

### EXEMPLO 7

O núcleo de um átomo de hélio (partículas alfa) passa através de um tubo, reto e oco, de 2,0 metros de comprimento, que faz parte de um acelerador de partículas.

(a) Supondo que sua aceleração seja constante, quanto tempo a partícula leva para atravessar o tubo, se penetra nele com a velocidade de  $1,0 \times 10^6 \text{ m/s}$  e o abandona com  $5,0 \times 10^6 \text{ m/s}$ ?

(b) Qual é a aceleração da partícula neste intervalo?

(a) Consideremos o eixo  $Ox$  coincidindo com o eixo do tubo, seu sentido positivo sendo o sentido do próprio movimento, sua origem estando na entrada do tubo. Os dados foram  $x$ ,  $v_x$  e  $v_{x_0}$  e procuramos  $t$ . A aceleração  $a_x$  não foi mencionada nesta primeira questão. Então, vamos usar a Eq. 3-14,  $x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{x_0} + v_x) t$ ,

$$t = \frac{2x}{v_{x_0} + v_x}$$

ou

$$t = \frac{2 \times 2,0 \text{ m}}{(500 + 1) \times 10^4 \text{ m/s}} = 8,0 \times 10^{-7} \text{ s}$$

ou 0,80 microssegundos.

(b) A aceleração poderá ser obtida pela Eq. 3-12,  $v_x = v_{x_0} + a_x t$ ,

$$a_x = \frac{v_x - v_{x_0}}{t} = \frac{(500 - 1) \times 10^4 \text{ m/s}}{8,0 \times 10^{-7} \text{ s}} = +6,3 \times 10^{12} \text{ m/s}^2$$

ou 6 trilhões de metros por segundo por segundo! Embora esta aceleração seja enorme, comparada com a do exemplo anterior, ela ocorre durante um intervalo de tempo extremamente pequeno. O vetor aceleração está dirigido no sentido positivo do eixo  $Ox$ , que é o sentido no qual a partícula se move, porque  $a_x$  tem um valor positivo.

O exemplo mais comum de movimento com aceleração (aproximadamente) constante é o de um corpo caindo na superfície terrestre. Desprezando a resistência do ar, verifica-se que todos os corpos caem com a mesma aceleração, em um mesmo ponto da superfície terrestre, não importando seu tamanho, seu peso ou sua constituição; se a altura de queda não for muito grande, a aceleração permanecerá constante durante todo o movimento. Este movimento ideal, no qual são desprezadas a resistência do ar e alguma pequena variação da aceleração com a altitude, é chamado "queda livre".

A aceleração de um corpo em queda livre é chamada aceleração da gravidade e é representada pelo símbolo  $g$ . Próximo à superfície da Terra seu valor é aproximadamente igual<sup>2</sup> a  $9,8 \text{ m/s}^2$

### 3-10 CORPOS EM QUEDA LIVRE

<sup>2</sup> Ver "Absolute value of  $g$  at the National Bureau of Standards" por D. R. Tate, *J. Res. NBS* 70C, abril-junho, 1966.

ou  $980 \text{ cm/s}^2$  ( $32 \text{ pés/s}^2$ ); sua direção é normal à superfície terrestre e seu sentido para o centro dela. A variação de seu valor exato com a latitude e a altitude será discutida posteriormente (Cap. 16).

A natureza do movimento de um objeto em sua queda foi, há muito tempo, objeto de estudo da "Filosofia Natural". Aristóteles afirmava que "o movimento para baixo de qualquer corpo pesado é tanto mais rápido quanto maior for seu tamanho". Somente muitos séculos depois, quando Galileu Galilei (1564-1642), cientista italiano da Renascença, proclamou e publicou a verdade sobre este assunto, que ele conseguiu descobrir, lançando mão de experiências, é que a autoridade de Aristóteles sobre a questão foi seriamente abalada. Nos últimos anos de sua vida, Galileu escreveu um tratado, intitulado *Diálogo Sobre Duas Notas Ciências*, no qual apresenta seus estudos sobre os movimentos. Este tratado pode ser considerado como o marco inicial do estudo da Dinâmica.

A crença de Aristóteles de que um objeto mais pesado cai mais depressa é um ponto de vista comumente defendido. Aparentemente, ela é confirmada por uma experiência muito conhecida na qual se deixam cair, no mesmo instante e de uma mesma altura, uma bola e uma folha de papel, a bola atingindo o solo antes da folha. Entretanto, se a folha de papel for bem amassada (embolada) e a experiência repetida, verificar-se-á que a bola e o papel atingirão o solo praticamente no mesmo instante. Foi a resistência do ar, maior sobre a folha de papel, que tornou sua queda mais lenta do que a da bola, na primeira experiência. Na segunda experiência o efeito da resistência do ar sobre o papel foi reduzido, tornando-se praticamente a mesma para os dois corpos e assim eles caíram aproximadamente no mesmo tempo. Naturalmente pode-se realizar uma comprovação direta, deixando os corpos cair no vácuo. Mesmo em vácuos parciais, de fácil obtenção, pode-se verificar que uma pena e uma bola de chumbo, milhares de vezes mais pesada do que a pena, apresentam tempos de queda cuja diferença é imperceptível.

Na época de Galileu, entretanto, não havia meios eficientes de obter um vácuo parcial nem equipamentos capazes de medir o tempo de queda com precisão suficiente para obter dados numéricos dignos de confiança. Apesar disso, Galileu comprovou sua conclusão, mostrando, primeiro, que as características do movimento de uma bola, ao rolar para baixo em um plano inclinado, eram as mesmas de uma bola em queda livre.<sup>3</sup> O plano inclinado é utilizado apenas para reduzir a aceleração da gravidade e conseqüentemente para tornar o movimento mais lento. Volumes de água escoados de um tanque foram usados para medir os intervalos de tempo e foi possível, assim, analisar a velocidade e a aceleração desses movimentos.<sup>4</sup> Galileu mostrou que, se a aceleração ao longo do plano inclinado fosse constante, a aceleração da gravidade também o seria, pois a aceleração no plano inclinado era apenas um componente da aceleração da gravidade e ao longo de um plano de inclinação constante a relação entre as duas acelerações se manteria constante.

Ele concluiu, através de suas experiências, que as distâncias percorridas em intervalos de tempos consecutivos eram proporcionais aos números ímpares, 1, 3, 5, 7, ... etc. As distâncias totais correspondentes aos intervalos de tempo consecutivos são então proporcionais a  $1 + 3$ ,  $1 + 3 + 5$ ,  $1 + 3 + 5 + 7$  etc., isto é, ao quadrado dos números inteiros, 1, 2, 3, 4 etc. Mas se a distância percorrida é proporcional ao quadrado do tempo decorrido, a velocidade adquirida é proporcional ao tempo decorrido, resultado este que só é verdadeiro se o movimento for uniformemente acelerado. Ele ainda verificou que estes mesmos resultados eram válidos independentemente da massa da bola usada.

Escolheremos um referencial rigidamente ligado à Terra. A direção do eixo  $Oy$  será vertical e seu sentido positivo para cima. Então a aceleração da gravidade,  $g$ , será um vetor apontando verticalmente para baixo (para o centro da Terra), no sentido negativo de  $Oy$ . (Esta escolha é arbitrária. Em outros problemas poderá ser mais conveniente escolher o sentido para baixo como positivo.) Nossas equações para os movimentos de aceleração constante serão

### 3-11 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DE QUEDA LIVRE

<sup>3</sup> Ver "Galileo's Discovery of the Law of Free Fall" por Stillman Drake, *Scientific American*, maio, 1973.

<sup>4</sup> Ver "The Role of Music in Galileo's Experiments" por Stillman Drake, *Scientific American*, junho, 1975.

aplicáveis aqui. Simplesmente trocaremos  $x$  por  $y$  e faremos  $y_0 = 0$ , nas Eqs. 3-12, 3-14, 3-15 e 3-16, obtendo

$$\begin{aligned}v_y &= v_{y_0} + a_y t, \\y &= \frac{1}{2}(v_{y_0} + v_y) t, \\y &= v_{y_0} t + \frac{1}{2} a_y t^2, \\v_y^2 &= v_{y_0}^2 + 2a_y y,\end{aligned}\quad (3-17)$$

e, nos problemas de queda livre, teremos  $a_y = -g$ . Observe que escolhemos a posição inicial na origem, isto é, fizemos  $y_0 = 0$  em  $t = 0$ . Observe ainda que  $g$  é o módulo da aceleração da gravidade.

Deixa-se cair um corpo em queda livre, partindo do repouso. Determine a posição e a velocidade do corpo depois de decorridos 1,0 s, 2,0, 3,0 e 4,0 s.

O ponto de partida é suposto na origem. Conhecemos a velocidade inicial e a aceleração, e os tempos são fornecidos. Para acharmos a posição usaremos

$$y = v_{y_0} t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Então  $v_{y_0} = 0$  e  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , e para  $t = 1,0 \text{ s}$ , obteremos

$$y = 0 - \frac{1}{2}(9,8 \text{ m/s}^2) (1,0 \text{ s})^2 = -4,9 \text{ m}.$$

Para achar a velocidade em  $t = 1,0 \text{ s}$ , usaremos

$$v_y = v_{y_0} - g t,$$

resultando

$$v_y = 0 - (9,8 \text{ m/s}^2) (1,0 \text{ s})^2 = -9,8 \text{ m/s}.$$

Depois de 1,0 s de queda, o corpo, partindo do repouso, está a 4,9 m do seu ponto de partida e tem uma velocidade de 9,8 m/s dirigida para baixo; o sinal negativo para  $y$  e  $v_y$  mostra que cada um dos vetores associados a estes símbolos está orientado para baixo, isto é, no sentido negativo do eixo  $Oy$ .

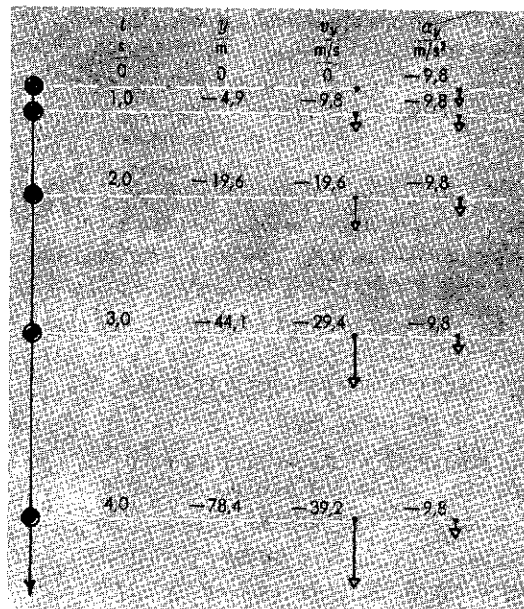


figura 3-8

Corpo em queda livre, são mostrados  $y$ ,  $v_y$  e  $a_y$  em determinados instantes.

O estudante deverá, agora, mostrar que os valores de  $y$ ,  $v_y$  e  $a_y$  obtidos para os instantes  $t = 2,0 \text{ s}$ ,  $3,0 \text{ s}$  e  $4,0 \text{ s}$  são aqueles mostrados na Fig. 3-8.

## EXEMPLO 9

Uma bola é arremessada verticalmente para cima, partindo do chão, com uma velocidade de 25 m/s.

(a) Quanto tempo levará para atingir o ponto mais alto de sua trajetória?

No ponto mais alto,  $v_y = 0$  e foi dado  $v_{y0} = +25$  m/s. Para obter o tempo  $t$  usaremos  $v_y = v_{y0} - gt$ , ou

$$t = \frac{v_{y0} - v_y}{g}$$

$$t = \frac{(25 - 0) \text{ m/s}}{9,8 \text{ m/s}^2} = 2,6 \text{ s.}$$

(b) Que altura a bola atingirá?

Usando apenas os dados originais devemos usar a relação  $v_y^2 = v_{y0}^2 - 2gy$ , ou

$$y = \frac{v_{y0}^2 - v_y^2}{2g}$$

$$y = \frac{(25 \text{ m/s})^2 - 0}{2 \times 9,8 \text{ m/s}^2} = 31,9 \text{ m}$$

(c) Em que instante a bola estará a 30 m acima do chão?

Usando a relação  $y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$ , teremos

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_{y0}t + y = 0,$$

$$\frac{1}{2}(9,8 \text{ m/s}^2) \cdot t^2 - (25 \text{ m/s}) \cdot t + 30 \text{ m} = 0,$$

ou  $4,9t^2 - 25t + 30 = 0$ , que nos fornece os valores  $t = 1,9$  s e  $t = 3,2$  s.

No instante  $t = 1,9$  s a bola está subindo com a velocidade de 6,4 m/s, pois

$$v_y = v_{y0} - gt = 25 \text{ m/s} - (9,8 \text{ m/s}^2)(1,9 \text{ s}) = 6,4 \text{ m/s.}$$

No instante  $t = 3,2$  s a bola já estará voltando, deslocando-se para baixo com a mesma velocidade, pois,

$$v_y = v_{y0} - gt = 25 \text{ m/s} - (9,8 \text{ m/s}^2)(3,2 \text{ s}) = -6,4 \text{ m/s.}$$

Observe que no intervalo de  $(3,2 - 1,9) \text{ s} = 1,3$  s a velocidade variou de +6,4 m/s para -6,4 m/s, ou seja,  $-6,4 \text{ m/s} - (+6,4 \text{ m/s}) = -12,8 \text{ m/s}$  que corresponde a uma aceleração de

$$\frac{-12,8 \text{ m/s}}{1,3 \text{ s}} = -9,8 \text{ m/s}^2.$$

O estudante deverá se convencer de que, na ausência da resistência do ar, a bola gastará o mesmo tempo para subir e para descer e que ela terá, em cada ponto, o mesmo módulo para sua velocidade, tanto ao subir como ao descer.

1. Você se lembra de algum fenômeno em que a Terra esteja envolvida e no qual ela não possa ser tratada como uma partícula?
2. A cada segundo, um coelho percorre a metade da distância que separa seu nariz de um pé de alface. Conseguirá ele alcançar o pé de alface? Qual o valor limite de sua velocidade média? Faça diagramas mostrando suas velocidade e posição em função do tempo.
3. Velocidade escalar média pode significar módulo da velocidade média (vetor). Um outro significado a ela atribuído é de ser igual ao comprimento total da trajetória percorrida, dividido pelo tempo decorrido no percurso. Estas duas afirmações são diferentes? Em caso afirmativo, dê um exemplo.
4. Quando a velocidade é constante, o vetor velocidade média em um certo intervalo difere do vetor velocidade instantânea em um instante qualquer?

**questões**

5. A velocidade média de uma partícula que se move ao longo do eixo  $Ox$  é  $\frac{1}{2}(v_{x_0} + v_x)$ , quando o movimento não é uniformemente acelerado? Teste sua resposta pelo uso de gráficos.
6. O velocímetro de um automóvel registra a velocidade escalar tal como ela foi definida?
7. (a) Um corpo pode ter velocidade nula e estar sendo acelerado? (b) Pode um corpo ter velocidade escalar constante e um vetor velocidade variável? (c) Um corpo pode ter um vetor velocidade constante e uma velocidade escalar variável?
8. Um corpo pode ter uma velocidade dirigida para leste enquanto recebe uma aceleração para oeste?
9. A direção da velocidade de um corpo pode variar enquanto seu vetor aceleração se mantém constante?
10. Um corpo pode ter sua velocidade escalar aumentando, enquanto sua aceleração diminui? Explique.
11. Qual das seguintes situações é a impossível? (a) Um corpo com velocidade e aceleração para o leste; (b) um corpo com velocidade para leste e aceleração para oeste; (c) um corpo com velocidade nula e aceleração não nula; (d) um corpo com aceleração constante e velocidade variável; (e) um corpo com velocidade constante e aceleração variável.
12. Se uma partícula é abandonada do repouso ( $v_{y_0} = 0$ ), no instante  $t = 0$ , da posição  $y = 0$ , a Eq. 3-17 para aceleração constante, nos fornece, dois instantes  $+\sqrt{2y/a_y}$  e  $-\sqrt{2y/a_y}$ , nos quais a partícula ocupa a posição  $y$ . Qual o significado físico do valor negativo fornecido pela equação do segundo grau?
13. O que acontece às equações da cinemática quando se substitui  $t$  por  $-t$ , isto é, quando se supõe o tempo regredindo? Explique.
14. Considere uma bola lançada verticalmente para cima. Levando em conta a resistência do ar, você acha que o tempo que ela leva para subir é maior ou menor que o que ela gasta para descer?
15. (a) Um corpo é arremetido para cima com uma certa velocidade em um mundo onde a aceleração devida à força da gravidade é o dobro da da Terra. A que altura o corpo se eleva comparada à altura que ele se elevaria na Terra? (b) Se a velocidade inicial fosse dobrada, que diferença isso faria?
16. Pode haver um movimento em duas dimensões enquanto a aceleração se mantém em uma única dimensão?
17. Uma pessoa do alto de um penhasco, a uma certa altura em relação ao solo, lança uma bola verticalmente para cima, com velocidade inicial  $u$  e depois lança outra bola, verticalmente para baixo com a mesma velocidade inicial. Alguma delas chegará ao solo com maior velocidade que a outra? Despreze a resistência do ar.
18. Um tubo, na forma de um retângulo com os cantos arredondados, está colocado em um plano vertical, como mostrado na Fig. 3-9. Introduzem-se duas bilhas no canto superior à direita. Uma percorre o trajeto  $AB$  e a outra, o  $CD$ . Qual delas chegará primeiro ao canto inferior esquerdo?

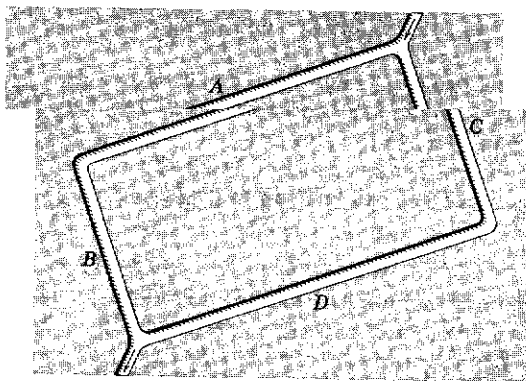


figura 3-9  
Questão 18.

19. Esperamos que uma relação verdadeiramente geral seja válida, qualquer que seja o sistema de coordenadas escolhido. Ao impormos que equações sejam dimensionalmente consistentes, asseveramos que sejam válidas não obstante as unidades escolhidas. Pergunta-se: podem, pois, ser dispensáveis os sistemas de coordenadas ou as unidades?

20. Pelo que você sabe sobre a medida de ângulos que *dimensões* você atribuiria a um ângulo? Uma grandeza pode possuir uma unidade de medida sem possuir dimensões?
21. Sendo  $m$  uma pedra leve e  $M$ , uma pesada, de acordo com Aristóteles,  $M$  deveria cair mais depressa que  $m$ . Galileu tentou mostrar que o pensamento de Aristóteles era logicamente inconsistente, usando o seguinte argumento: Amarre  $m$  a  $M$  de modo a formarem uma pedra dupla. Assim, ao cair,  $m$  retardaria  $M$  que por isto deveria cair mais lentamente e o conjunto das duas pedras cairia mais rapidamente que  $m$  e mais devagar que  $M$ ; mas, de acordo com Aristóteles o conjunto ( $m + M$ ), mais pesado que  $M$ , cairia mais depressa que  $M$ .

Se você considera correto o raciocínio de Galileu, poderá concluir que  $M$  e  $m$  cairão ao mesmo tempo? Qual é a necessidade de fazer uma experiência neste caso? Se julga o raciocínio de Galileu incorreto, explique porquê.

## SEÇÃO 3-3

1. Um automóvel se desloca com velocidade constante de 23 m/s. Suponha que o motorista feche os olhos (ou que olhe para o lado) durante 2 s. Calcule o espaço percorrido pelo automóvel neste intervalo de tempo.
2. Não confunda *velocidade média* com a *média* de um conjunto de velocidades (média das velocidades). Calcule a *velocidade média* de uma atleta nos seguintes casos: (a) A atleta anda 150 m com velocidade de 1,5 m/s e depois corre 100 m com velocidade de 4 m/s ao longo de uma pista retilínea. (b) A atleta anda 2 minutos com velocidade de 1,5 m/s e a seguir corre durante 3 minutos com velocidade de 4,5 m/s ao longo de um caminho em linha reta.  
Resposta: (a) 2 m/s. (b) 3,3 m/s.
3. O limite de velocidade numa rodovia é alterado de 100 km/h para 80 km/h. Se um automóvel levava um tempo  $t$  para percorrer uma distância  $x$  com velocidade constante de 100 km/h, quanto tempo levará o automóvel para percorrer a mesma distância  $x$  com velocidade constante de 80 km/h?
4. Dois trens, cada qual com velocidade escalar de 60 km/h, seguem em linha reta se aproximando entre si sobre os mesmos trilhos. Os maquinistas dos dois trens percebem simultaneamente o perigo no momento em que a distância entre os trens é de 150 m. Suponha que os dois maquinistas percam, simultaneamente, o mesmo intervalo de tempo de 0,2 s desde o instante mencionado acima até o momento em que os freios dos trens são acionados. A ação dos freios é igual nos dois trens e faz cada trem parar depois de percorrer 50 m. Verifique se haveria ou não colisão. Qual seria a distância crítica para a colisão?  
Resposta: Não haveria colisão. Para que houvesse colisão a distância entre os dois trens no momento em que os maquinistas percebem o perigo deveria ser menor do que 106,7 m.
5. Um trem se desloca com velocidade constante, de Oeste para Leste, sendo o módulo do vetor velocidade igual a 60 km/h durante 50 minutos. A seguir, toma uma direção Nordeste, com a mesma velocidade escalar, durante 30 minutos. Finalmente, mantendo a velocidade escalar, segue para Oeste, durante 10 minutos. Calcule a velocidade média do trem durante este percurso (isto é, ache o módulo, a direção e o sentido da velocidade média).

**problemas**

## SEÇÃO 3-6

6. Um automóvel se desloca numa estrada retilínea e sua velocidade aumenta desde 5 m/s até 15 m/s num intervalo de tempo de 20 s. A seguir sua velocidade passa de 15 m/s para 35 m/s num intervalo de tempo de 80 s. Calcule o módulo da *aceleração média*: (a) na primeira etapa do percurso, (b) na segunda etapa do percurso. (c) Calcule a *média aritmética* das acelerações obtidas nos itens anteriores. (d) Calcule a *aceleração média* do percurso total, isto é, desde o momento inicial ( $v_0 = 5$  m/s) até o instante final ( $v_f = 35$  m/s).  
Resposta: (a) 0,5 m/s<sup>2</sup>. (b) 0,25 m/s<sup>2</sup>. (c) 0,375 m/s<sup>2</sup>. (d) 0,30 m/s<sup>2</sup>.
7. Uma partícula, deslocando-se ao longo do eixo  $Ox$ , tem as seguintes posições em diversos instantes:
- |                     |       |       |       |       |       |       |       |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x$ (em metros) =   | 0,080 | 0,050 | 0,020 | 0,010 | 0,015 | 0,040 | 0,080 |
| $t$ (em segundos) = | 0,0   | 1,0   | 2,0   | 3,0   | 4,0   | 5,0   | 6,0   |

(a) Faça um gráfico da posição da partícula contra o tempo. (b) Faça um gráfico do deslocamento da partícula contra o tempo. (c) Ache a velocidade média da partícula nos seguintes intervalos de tempo: 0,0 até 1,0 s, de 0,0 até 3,0 s, de 0,0 até 4,0 s, de 0,0 até 5,0 s. (d) Determine a *inclinação* (ângulo formado pela tangente da curva com o eixo  $Ox$ ) da curva traçada no item (b) nos seguintes pontos:  $t = 1,0$ ;  $t = 3,0$ ;  $t = 4,0$  e  $t = 5,0$  s. (e) Faça um gráfico das inclinações em função do tempo. (f) Mediante o gráfico traçado no item (e) obtenha a aceleração da partícula nos instantes 1,0; 2,0; 4,0 e 5,0 s.

SEÇÃO 3-7

8. A Fig. 3-10a mostra o gráfico de  $x$  em função de  $t$  para uma partícula em movimento retilíneo. (a) Em que ponto existe *descontinuidade* para a velocidade da partícula (ou seja, mudança brusca do valor da velocidade)? (b) Desprezando o comportamento nos pontos extremos dos intervalos, verifique se existe algum intervalo em que a aceleração seja visivelmente variável. (c) Indique, para cada intervalo, se a velocidade  $v_x$  é +, - ou 0 e se a aceleração  $a_x$  é +, - ou 0.

Resposta: (a) No ponto C. (b) Não. (c)

	OA	AB	BC	CD
$v_x$	+	+	0	-
$a_x$	0	-	0	+

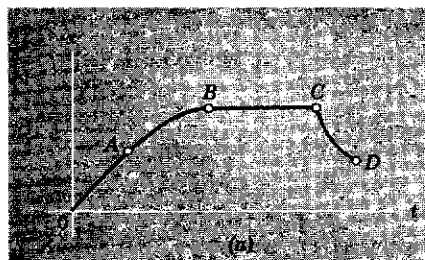


figura 3-10a

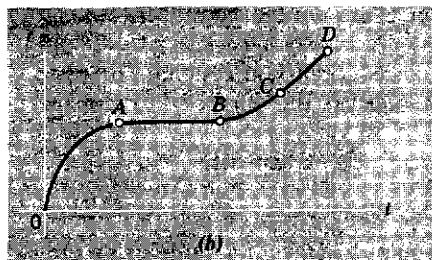


figura 3-10b

9. Responda as perguntas do problema anterior para o movimento representado pelo gráfico indicado na Fig. 3-10b.
10. Um elétron parte do repouso e sofre uma aceleração que cresce linearmente com o tempo, isto é,  $a = kt$ , sendo  $k = 2 \text{ m/s}^3$ . A partir do gráfico de  $a$  em função de  $t$  obtenha o gráfico de  $v$  em função de  $t$ . Depois de traçar o gráfico em função de  $t$  obtenha o gráfico de  $x$  em função de  $t$  (estamos supondo movimento retilíneo). Usando estes gráficos ou então através do método analítico responda às seguintes questões: (a) Qual é a expressão de  $v$  em função de  $t$ ? (b) Qual é a expressão de  $x$  em função de  $t$ ? (c) Calcule o valor de  $v$  para  $t = 2$  s. (d) Calcule o valor de  $x$  para  $t = 3$  s.
- Resposta: (a)  $v = kt^2/2$ . (b)  $x = kt^3/6$ . (c)  $v = 4 \text{ m/s}$ . (d)  $x = 9 \text{ m}$ .
11. A Fig. 3-11 mostra o deslocamento em função do tempo de uma partícula que se move ao longo do eixo  $Ox$ . Esboce a curva de  $v$  em função de  $t$ .

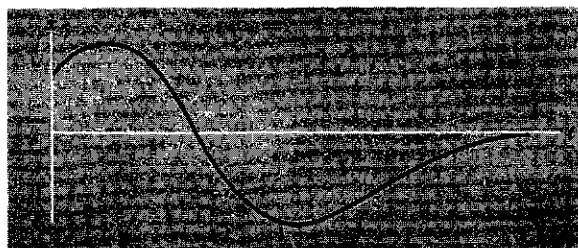


figura 3-11

12. A posição de uma partícula que se desloca ao longo do eixo  $Ox$  varia com o tempo de acordo com a relação

$$x = x_0 (1 - e^{-kt})$$

onde  $x_0$  e  $k$  são constantes. Esboce um gráfico de  $x$  em função de  $t$ , outro gráfico de  $v$  em função de  $t$  e um outro gráfico de  $a$  em função de  $t$ . Determine: (a) o valor de  $x$  para  $t = 0$ , (b) o valor de  $x$  para  $t = \infty$ , (c) a distância total percorrida desde  $t = 0$

até  $t = \infty$ , (d) a expressão da velocidade  $v$  em função do tempo  $t$ , (e) A aceleração deste movimento é constante ou variável? (f) Obtenha a expressão da aceleração em função do tempo  $t$ , (g) Obtenha a expressão de  $a$  em função de  $v$ , (h) Calcule os valores de  $v$  e de  $a$  para  $t = \infty$ , (i) Calcule os valores de  $x$ , de  $v$  e de  $a$  para  $t = 1$  s. Considere  $x$  em metros e  $t$  em segundos; suponha  $k = 1 \text{ s}^{-1}$ ,  $x_0 = 2$  m.

Resposta: (a) 0, (b)  $x_0$ , (c)  $x_0$ , (d)  $v = kx_0 \exp(-kt)$ , (e) Variável.

(f)  $a = -k^2 x_0 \exp(-kt)$ , (g)  $a = -kv$ , (h)  $v = 0$ ,  $a = 0$ .

(i)  $x = 1,26$  m;  $v = 0,74$  m/s;  $a = -0,74$  m/s<sup>2</sup>.

### SEÇÃO 3-8

13. Um jato jumbo necessita alcançar uma velocidade de 360 km/h na pista para poder levantar vôo. Suponha que o comprimento da pista de decolagem seja de 1,6 km. Qual a aceleração constante mínima que ele deve desenvolver para poder decolar desta pista?

14. Um automóvel aumenta uniformemente sua velocidade de 25 para 45 km/h em 40 segundos. Uma pessoa pedalando uma bicicleta aumenta uniformemente sua velocidade desde 0 até 20 km/h em um intervalo de tempo  $t$ , (a) Calcule a aceleração do automóvel, (b) Determine o tempo  $t$  necessário para que a aceleração do automóvel seja igual à aceleração da bicicleta.

Resposta: (a) 0,14 m/s<sup>2</sup>, (b) 40 s.

15. Um veículo é impulsionado por um foguete e desliza sobre um trilho retilíneo. Este veículo é usado para verificação experimental dos efeitos fisiológicos das grandes acelerações sobre seres vivos. Partindo do repouso, este veículo pode atingir uma velocidade de 1 800 km/h em 2 segundos, (a) Admita que a aceleração seja constante e compare o valor numérico desta aceleração com o valor da aceleração da gravidade  $g$ , (b) Calcule a distância percorrida neste intervalo de tempo.

16. Um automóvel parte do repouso e sofre uma aceleração constante de 4 m/s<sup>2</sup> numa trajetória retilínea, (a) encontre o tempo necessário para que o automóvel atinja uma velocidade de 36 m/s, (b) Calcule a distância total percorrida desde o instante inicial até o instante em que sua velocidade atinge o valor de 36 m/s.

Resposta: (a) 9 s, (b) 162 m.

17. Uma flecha ao ser disparada por um arco é acelerada até uma distância de 80 cm. No momento em que abandona o arco a velocidade da flecha vale 50 m/s. Calcule a aceleração média imprimida pelo arco. Justifique qualquer hipótese simplificadora que você achar conveniente fazer.

18. Duas estações de trem estão separadas por uma distância de 3,6 km. Um trem, partindo do repouso de uma das estações, sofre uma aceleração constante de 1,0 m/s<sup>2</sup> até atingir 2/3 do percurso entre as estações. A seguir o trem se desacelera até atingir a outra estação com velocidade nula. Determine: (a) a velocidade máxima do trem atingida na primeira etapa do percurso, (b) o módulo da aceleração negativa durante a diminuição da velocidade na segunda etapa do percurso, (c) o tempo total gasto durante o percurso entre as duas estações.

Resposta: (a) 69,3 m/s, (b) 2 m/s<sup>2</sup>, (c) 103,9 s.

19. Suponha que um advogado contrate você para opinar sobre um problema relacionado com a física, surgido em um dos seus casos. A questão seria saber se um motorista excedeu ou não a velocidade limite de 60 km/h, antes de fazer uma parada de emergência ao aplicar os freios do veículo. As marcas do pneu na estrada, produzidas pelo deslizamento das rodas, tinham um comprimento de 8,0 m. O inspetor fez o cálculo da velocidade do automóvel levando em consideração que a desaceleração produzida pelos freios não poderia exceder, em módulo, o valor local de  $g$  e deteve o motorista por excesso de velocidade. Refaça os cálculos do inspetor e verifique se estes cálculos estavam corretos ou não. Com base na hipótese de que a desaceleração era igual a  $g$ , qual seria a velocidade do automóvel no momento da aplicação dos freios?

20. Um automóvel faz uma ultrapassagem a 120 km/h. Entretanto, um outro automóvel vem em sentido contrário a 100 km/h. Suponha que os dois motoristas acionem simultaneamente os freios e os dois automóveis passem a sofrer uma desaceleração constante de módulo igual a 6 m/s<sup>2</sup>. Determine a distância mínima entre os automóveis no início da freada para que não haja colisão entre os veículos.

Resposta: 156,9 m.

21. Um trem parte do repouso e se desloca com aceleração constante. Num dado instante sua velocidade era de 10 m/s e a 60 m adiante sua velocidade passa para 17 m/s. Calcule: (a) a aceleração, (b) o tempo necessário para percorrer a distância de 60 m mencionada, (c) o tempo necessário para atingir a velocidade de 10 m/s, (d) a distância percorrida desde o repouso até atingir a velocidade de 10 m/s.



22. Um elétron com velocidade inicial  $v_0 = 1,5 \times 10^4$  m/s penetra numa região de 1,0 cm de largura onde ele é acelerado pela ação de um campo elétrico (ver a Fig. 3-12). O elétron emerge do campo considerado com velocidade igual a  $5,0 \times 10^6$  m/s. Calcule a aceleração do elétron. Suponha que o movimento do elétron seja retilíneo e que a aceleração seja constante.

Resposta:  $1,25 \times 10^{15}$  m/s<sup>2</sup>.

23. Um méson é disparado com uma velocidade de  $4,0 \times 10^6$  m/s para uma região onde um campo elétrico o acelera num sentido contrário ao da velocidade inicial, porém, na mesma direção. Suponha que o módulo desta desaceleração seja constante e igual a  $2 \times 10^{14}$  m/s<sup>2</sup>. (a) Calcule a distância percorrida pelo méson desde o instante da aplicação do campo elétrico até o instante em que ele pára (momentaneamente). (b) Qual o tempo que ele leva para percorrer a distância mencionada no item anterior?

24. Um carro se desloca com aceleração constante em módulo, direção e sentido. O carro percorre em 5 s a distância de 50 metros que separa dois pontos. Sua velocidade quando ele passa pelo primeiro ponto vale 4 m/s. (a) Calcule a velocidade com que ele passa pelo segundo ponto. (b) Calcule a aceleração do carro. (c) A que distância antes do primeiro ponto o carro partiu do repouso? (d) Calcule o tempo gasto pelo carro desde o repouso até o momento em que sua velocidade atinge o valor de 10 m/s.

Resposta: (a) 12,67 m. (b) 1,734 m/s. (c) 4,614 m. (d) 5,8 s.

25. A velocidade de um automóvel viajando de Leste para Oeste é uniformemente reduzida de 25 m/s para 15 m/s numa distância de 50 m. (a) Calcule o módulo e o sentido da aceleração constante. (b) Ache o tempo decorrido durante esta redução de velocidade. (c) Se o carro continua se desacelerando com a mesma intensidade, qual seria o tempo necessário para que sua velocidade decresça de 25 m/s até zero. (d) Ache o espaço total percorrido no intervalo de tempo mencionado no item anterior.

26. No momento em que um sinal de tráfego acende a luz verde, um automóvel parte com uma aceleração constante de 2 m/s<sup>2</sup>. No mesmo instante um ônibus, deslocando-se com velocidade constante de 60 km/h ultrapassa o automóvel. (a) A que distância do seu ponto de partida o automóvel ultrapassará o ônibus? (b) Calcule a velocidade do automóvel neste instante.

Resposta: (a) 277,78 m. (b) 120 km/h.

27. Um automóvel viajando em linha reta a 120 km/h está a 60 m de uma barreira quando o motorista aperta os freios. Três segundos mais tarde o carro vai de encontro à barreira. (a) Calcule o módulo da aceleração negativa do automóvel. (b) Que velocidade desenvolvia o automóvel ao sofrer o impacto? (c) Qual deveria ser a desaceleração mínima do automóvel para que não ocorresse o impacto?

28. O maquinista de um trem, que se move com velocidade  $v_1$ , vê à sua frente, a uma distância  $d$ , um trem de carga que se desloca sobre a mesma linha com uma velocidade no mesmo sentido e de módulo  $v_2$  menor do que  $v_1$ . Ele aciona os freios, comunicando ao trem uma desaceleração com módulo igual a  $a$ . Faça um gráfico para os dois movimentos. (a) Determine a condição para que não haja colisão. (b) Suponha  $v_1 = 2v_2$ ,  $v_2 = 60$  km/h,  $d = 100$  m e  $a = 2$  m/s. Verifique se com estes dados ocorrerá ou não colisão.

Resposta: (a) Não ocorrerá colisão se  $(v_1 - v_2)^2$  for menor do que o produto  $2ad$ . (b) Não ocorrerá colisão.

29. Um manual de instruções para motorista estabelece que um automóvel com bons freios e viajando a 80 km/h pode parar a 56 m de distância do ponto onde o automóvel se encontrava no momento da aplicação dos freios. A distância correspondente a uma velocidade de 48 km/h é de 24 m. No cálculo destes espaços se leva em conta também o tempo de reação do motorista, durante este intervalo de tempo a aceleração é nula e o carro continua com velocidade constante. Suponha que tanto o tempo de reação quanto a desaceleração sejam iguais nos dois casos. Calcule: (a) o tempo médio de reação do motorista, (b) a desaceleração.

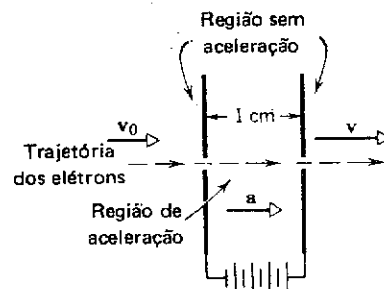


figura 3-12

### SEÇÃO 3-9

30. A posição de uma partícula que se desloca ao longo do eixo  $Ox$  é dada por:

$$x = b_1 t^3 - b_2 t^4$$

onde  $b_1$  e  $b_2$  são constantes. Se  $x$  for dada em metros e  $t$  em segundos, mostre que  $b_1$  deve ser dado em m/s<sup>3</sup> e que  $b_2$  deve ser dado em m/s<sup>4</sup>. (a) Obtenha uma expressão para a velocidade da partícula. (b) Obtenha uma expressão para a aceleração da partícula. Nas perguntas seguintes considere  $b_1 = 2$  m/s<sup>3</sup> e  $b_2 = 1$  m/s<sup>4</sup>. (c) Em que instante a partícula alcança o ponto no qual o valor de  $x$  é máximo? (d) Qual a distância total percorrida pela partícula nos 3 s iniciais? (e) Qual a velocidade da partícula

para  $t = 1$  s? (f) Qual a aceleração da partícula para  $t = 2$  s? (g) Qual a velocidade média para o intervalo de tempo entre  $t = 2$  e  $t = 4$  s?

Resposta: (a)  $v = 3b_1t - 4b_2t^2$ . (b)  $a = 6b_1t - 12b_2t^2$ . (c)  $t = 1,5$  s.

(d)  $-17$  m. (e)  $v = 2$  m/s. (f)  $a = -24$  m/s<sup>2</sup>. (g)  $v_{\text{méd}} = -64$  m/s.

### SEÇÃO 3-11

31. (a) Com que velocidade deve ser uma pedra lançada verticalmente de baixo para cima para alcançar uma altura de 20 m? (b) Quanto tempo ela permanecerá no ar?
32. Deixa-se cair uma bola de pingue-pongue de uma altura de 1,50 m. Depois do impacto com o solo, a bola se reflete e sobe até uma altura  $h = 1,20$  m. A bola permanece em contato com o chão durante um intervalo de tempo  $\Delta t = 0,01$  s. (a) Obtenha uma expressão para a aceleração média da bola. (b) Calcule o valor desta aceleração média.

Resposta: (a)  $a_m = \Delta v / \Delta t$ . (b)  $a_m = 1\,026$  m/s<sup>2</sup>.

33. Uma pessoa debruçada sobre um muro de uma passarela, deixa cair uma bola exatamente quando a dianteira de um caminhão passa bem abaixo do muro. Se o veículo está se movendo a 40 km/h e tem 10 m de comprimento, determine: (a) a altura da passarela em relação ao caminhão para que a bola atinja a traseira do caminhão, (b) a trajetória descrita pela bola em relação a um observador situado na passarela, (c) a trajetória descrita pela bola em relação a um observador situado no caminhão.

34. Uma bola de chumbo é largada de um trampolim a 5,5 m acima de uma piscina. Ela atinge a superfície da água com uma certa velocidade, penetra no seio da água com esta mesma velocidade a qual permanece constante até atingir o fundo da piscina. A bola atinge o fundo da piscina 2 s após o instante em que ela é largada. (a) Com que velocidade a bola atinge a superfície da piscina? (b) Qual o intervalo de tempo desde o momento em que a bola é largada até o momento em que ela atinge a superfície da água? (c) Qual é a profundidade da piscina? (d) Qual é a velocidade média da bola? (e) Suponha que a piscina seja esvaziada. A bola é lançada com velocidade inicial de modo que ela atinja o fundo da piscina novamente em 2 s. Qual é a velocidade inicial da bola?

Resposta: (a) 10,39 m/s. (b) 1,06 s. (c) 9,8 m. (d) 7,65 m/s. (e) 2 m/s de baixo para cima.

35. Um foguete é lançado verticalmente e sobe com aceleração vertical constante de 21 m/s<sup>2</sup> durante 30 s. Seu combustível é inteiramente consumido e ele continua viajando somente sob a ação da gravidade. (a) Qual é a altitude máxima alcançada? (b) Qual é o tempo total decorrido desde o lançamento até que o foguete volte à Terra?

36. Um balão sobe com velocidade de 15 m/s e está a 100 m acima do solo quando dele se deixa cair um saco de areia. Determine: (a) o espaço total percorrido pelo saco de areia, (b) o intervalo de tempo em que o saco de areia permanece no ar, ao percorrer a trajetória mencionada no item anterior.

Resposta: (a) 123 m. (b) 6,3 s.

37. Uma pedra é largada de uma ponte a 50 m acima do nível da água. Uma outra é lançada verticalmente para baixo 1,5 s após a primeira pedra ter sido largada. Ambas atingem a água ao mesmo tempo. (a) Qual foi a velocidade inicial da segunda pedra? (b) Faça o gráfico da velocidade em função do tempo para cada pedra, considerando nulo o instante em que a primeira pedra foi largada.

38. Um elevador aberto está subindo com uma velocidade constante  $v = 10$  m/s. Um menino no elevador, quando este está a uma altura  $h = 20$  m acima do solo, joga direto para cima uma bola. A velocidade inicial da bola em relação ao elevador é  $v_0 = 20$  m/s. (a) Obtenha uma expressão literal para a altura máxima  $H_m$  atingida pela bola; (b) Calcule a altura  $H_m$  pelos dados anteriores; (c) Quanto tempo passa para que a bola retorne ao elevador?

Resposta: (a)  $H_m = h + (v + v_0)^2 / 2g$ . (b) 65,9 m. (c) 3,5 s.

39. Uma flecha é atirada em linha reta, para cima, com velocidade inicial de 80 m/s. Se ao atingir o solo, ela encrava 0,20 m, achar (a) a aceleração (suposta constante) necessária para parar a flecha e (b) o tempo necessário para que ela pare. Despreze a resistência do ar durante o trajeto da flecha.

40. Um pára-quedista, após saltar de um avião, cai 80 m, sem atrito. Quando o pára-quedista se abre, o pára-quedista recebe um retardamento de 2,0 m/s<sup>2</sup> e atinge o solo com a velocidade de 3,5 m/s. (a) Quanto tempo durou a queda livre? (b) Qual a velocidade do pára-quedista no final da queda livre? (c) Qual o tempo total em que o pára-quedista permaneceu no ar? (d) De que altura o pára-quedista saltou?

Resposta: (a) 5,7 s. (b) 55,9 m/s. (c) 32 s. (d) 858 m.

41. Um foguete propulsionado pela queima de combustível é lançado verticalmente de uma plataforma de lançamento. Faça um gráfico qualitativo de  $a_y$  em função de  $t$ ,  $v_y$  em função de  $t$  e de  $y$  em função de  $t$ . (a) Determine uma expressão para a altura máxima

atingida pelo foguete; (b) Obtenha uma expressão para o tempo em que o foguete permanece no ar.

42. Um corpo é largado de uma altura  $h$  sem velocidade inicial e percorre a terça parte do seu trajeto no último segundo de sua queda. (a) Ache as duas raízes da equação necessária para obter a velocidade final e mostre que uma delas é fisicamente inaceitável; (b) calcule a altura  $h$ .

Resposta: (a)  $v_1 = 26,7$  m/s e  $v_2 = 2,7$  m/s; a velocidade final não pode ser menor do que  $gt$  no intervalo final ( $\Delta t = 1$  s), logo  $v_2 = 2,7$  m/s é uma solução inaceitável; (b)  $h = 36,4$  m.

43. Para um movimento ao longo de uma linha reta já sabemos que  $v_y = dy/dt$  e que  $a_y = dv_y/dt$ . Utilizando os conceitos básicos do Cálculo Diferencial e Integral deduza as relações (3-17).

44. A aceleração da gravidade na superfície de Júpiter é aproximadamente igual a  $26$  m/s<sup>2</sup>. Uma pedra é lançada verticalmente de baixo para cima na superfície de Júpiter. Sabendo que a pedra atinge uma altura máxima de  $30$  m ache o módulo da velocidade inicial da pedra.

Resposta:  $39,5$  m/s.

45. Dois corpos são largados com um intervalo de tempo de  $1,5$  s, de uma mesma altura. Quanto tempo depois do primeiro começar a cair estarão os dois corpos separados por  $15$  m?

46. Uma bola de tênis cai do telhado de um edifício, sem velocidade inicial. Um observador, parado na frente de uma janela de  $1,20$  m de altura, nota que a bola leva  $1/8$  do segundo para cair desde o alto da janela até sua base. A bola de tênis continua a cair, choca-se elasticamente com a calçada horizontal e reaparece na parte inferior da janela  $3$  s depois de ter passado naquele ponto de descida. No choque elástico há conservação de energia cinética. Qual é a altura do edifício?

Resposta:  $31,6$  m.

47. Gotas de água caem de um chuveiro sobre o piso, situado  $2,0$  m abaixo. As gotas caem em intervalos regulares e quando a primeira gota atinge o chão a quinta gota está começando a cair. Determine a posição de cada gota no instante em que cada uma atinge o chão.

48. Um elevador sobe com uma aceleração, para cima, de  $2$  m/s<sup>2</sup>. No instante em que sua velocidade é de  $4,0$  m/s, um parafuso solto cai do teto do elevador, que está a  $2,5$  m do seu piso. Calcule: (a) o tempo que o parafuso gasta para atingir o piso; (b) o seu deslocamento em relação ao poço do elevador.

Resposta: (a)  $0,65$  s; (b)  $0,53$  m.

49. Um menino vê uma bola subir e descer verticalmente através de uma janela de  $1,5$  m de altura. A bola gasta um tempo de  $0,2$  s para atravessar a janela na subida. Determine: (a) o tempo que a bola gasta para atravessar a janela na descida; (b) a altura que ela atinge acima da janela.

50. Um meteorito entra verticalmente na atmosfera terrestre e passa a "cair" em direção ao centro da Terra com uma aceleração variável dada por:

$$a = kgt^{1/2}$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade na superfície terrestre,  $t$  é o tempo em segundos e  $k = 1$  s<sup>-1/2</sup>. Considere a velocidade inicial do meteorito igual a  $40$  m/s. Determine:

(a) A aceleração do meteorito para  $t = 100$  s, (b) a velocidade do meteorito para  $t = 100$  s.

Resposta: (a)  $98$  m/s<sup>2</sup>. (b)  $6,58$  km/s.

51. Considere a queda do meteorito mencionado no problema anterior. Seja  $r_0$  o valor da distância do meteorito ao centro da Terra para  $t = 0$ . Obtenha uma expressão para a determinação da distância  $r$  do meteorito ao centro da Terra em função do tempo.

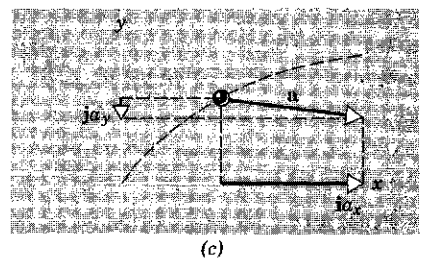
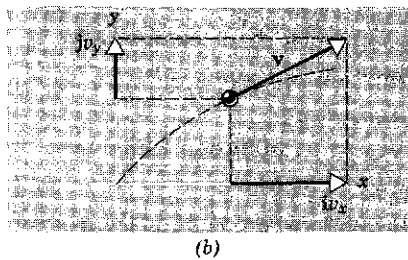
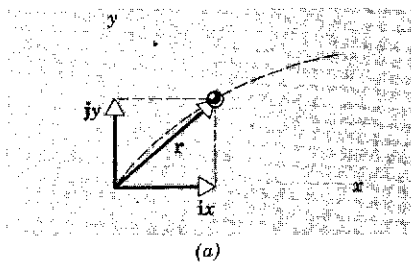
# 4

## movimento em um plano

Neste capítulo voltamos a considerar o movimento em duas dimensões que, por conveniência, suporemos realizar-se no plano  $xOy$ . A Fig. 4-1 mostra a partícula no instante  $t$ , movendo-se ao longo de uma trajetória curvilínea nesse plano.

### 4-1

#### DESLOCAMENTO, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO



Sua *posição*, ou deslocamento a partir da origem, é especificada pelo vetor  $r$ ; sua *velocidade* é representada pelo vetor  $v$  que, como vimos na Seç. 3-4, deve ser tangente à trajetória da partícula. O vetor  $a$  representa a aceleração; a direção de  $a$ , como veremos explicitamente mais tarde, não tem relação particular com a trajetória da partícula, mas depende, essencialmente, da taxa de variação da velocidade  $v$  com o tempo, à medida que a partícula se move ao longo de sua trajetória.

Os vetores  $r$ ,  $v$  e  $a$  estão inter-relacionados (veja as Eqs. 3-4, 3-5 e 3-10) e podem ser expressos, usando-se os vetores unitários dos eixos, em termos de suas componentes, da seguinte maneira:

figura 4-1

Uma partícula move-se ao longo de uma trajetória curvilínea, no plano  $xOy$ . (a) Sua posição  $r$ , (b) velocidade  $v$  e (c) aceleração  $a$  são mostradas no instante  $t$ , bem como as componentes vetoriais desses vetores. Observe que  $x$ ,  $y$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  e  $a_x$  são positivas, mas  $a_y$  é negativa. Compare com a Fig. 3-3.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad (4-1)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}, \quad (4-2)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}. \quad (4-3)$$

Essas equações podem ser facilmente generalizadas para três dimensões, adicionando-se a elas os termos  $v_z\mathbf{k}$ ,  $a_z\mathbf{k}$ , respectivamente, onde  $\mathbf{k}$  é o vetor unitário do eixo  $Oz$ .

No Cap. 3 tratamos do caso particular no qual a partícula movia-se em uma única dimensão (ao longo do eixo  $Ox$ ), estando os vetores  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$  orientados ao longo deste eixo, seja no sentido positivo, seja no sentido negativo. Os componentes  $y$ ,  $v_y$  e  $a_y$  eram nulos e o movimento foi descrito em termos de equações que relacionavam as grandezas escalares  $x$ ,  $v_x$  e  $a_x$ . Quando a partícula movia-se ao longo do eixo  $Oy$ , os componentes  $x$ ,  $v_x$  e  $a_x$  eram nulos e o movimento era descrito por meio de equações que relacionavam as grandezas escalares  $y$ ,  $v_y$  e  $a_y$ . Neste capítulo, consideraremos o movimento no plano  $xOy$  e, assim, em geral, os componentes desses dois conjuntos não serão todos nulos.

Consideremos primeiro o caso particular de movimento em um plano com aceleração constante. Neste caso, enquanto a partícula se move, a aceleração  $\mathbf{a}$  permanece constante em módulo e em direção. Portanto, os componentes de  $\mathbf{a}$ , em qualquer sistema de referência, também não variarão, isto é,  $a_x = \text{constante}$  e  $a_y = \text{constante}$ . Temos, nesse caso, uma situação que pode ser descrita como uma superposição de dois movimentos componentes que ocorrem simultaneamente, com acelerações constantes, ao longo de duas direções perpendiculares. A partícula descreverá, em geral, uma trajetória curvilínea no plano. Isto será verdadeiro mesmo que um dos componentes da aceleração,  $a_x$ , por exemplo, seja nulo, pois, então, o componente correspondente da velocidade,  $v_x$ , por exemplo, poderá ter um valor constante e diferente de zero. Um exemplo desta última situação é o movimento de um projétil de artilharia, que segue uma trajetória curvilínea em um plano vertical e, desprezando-se os efeitos da resistência do ar, está sujeito a uma aceleração constante  $\mathbf{g}$ , dirigida para baixo, apenas ao longo do eixo  $Oy$ .

Podemos obter as equações gerais para o movimento em um plano, com aceleração constante, colocando-se simplesmente

$$a_x = \text{constante} \quad \text{e} \quad a_y = \text{constante}.$$

As equações para o movimento com aceleração constante, relacionadas na Tab. 3-1, aplicam-se, então, aos componentes  $x$  e  $y$  do vetor posição  $\mathbf{r}$ , aos componentes  $v_x$  e  $v_y$  do vetor velocidade  $\mathbf{v}$  e aos componentes  $a_x$  e  $a_y$  do vetor aceleração  $\mathbf{a}$  (veja a Tab. 4-1).

Os dois conjuntos de equações da Tab. 4-1 se relacionam pelo fato de que o tempo  $t$  é o mesmo em ambos, pois  $t$  representa o instante em que a partícula, movendo-se em uma trajetória curva no plano  $xOy$ , ocupa a posição determinada pelos componentes  $x$  e  $y$  do vetor posição.

## 4-2

### MOVIMENTO EM UM PLANO COM ACELERAÇÃO CONSTANTE

As equações do movimento da Tab. 4-1 podem ser expressas, também, sob forma vetorial. Por exemplo, substituindo-se as Eqs. 4-4a e 4-4a' na Eq. 4-2, teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} \\ &= (v_{x_0} + a_x t) \mathbf{i} + (v_{y_0} + a_y t) \mathbf{j} \\ &= (v_{x_0} \mathbf{i} + v_{y_0} \mathbf{j}) + (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}) t. \end{aligned}$$

**Tabela 4-1**

Movimento com aceleração constante no plano xOy

Equação N.º	Equações do Movimento ao Longo de Ox	Equação N.º	Equações do Movimento ao Longo de Oy
4-4a	$v_x = v_{x_0} + a_x t$	4-4a'	$v_y = v_{y_0} + a_y t$
4-4b	$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{x_0} + v_x) t$	4-4b'	$y = y_0 + \frac{1}{2}(v_{y_0} + v_y) t$
4-4c	$x = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	4-4c'	$y = y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2} a_y t^2$
4-4d	$v_x^2 = v_{x_0}^2 + 2a_x(x - x_0)$	4-4d'	$v_y^2 = v_{y_0}^2 + 2a_y(y - y_0)$

A primeira grandeza entre parênteses é o vetor velocidade inicial  $\mathbf{v}_0$  (veja a Eq. 4-2) e a segunda é o vetor aceleração (constante)  $\mathbf{a}$  (veja a Eq. 4-3). Assim, a relação vetorial

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t \quad (4-5a)$$

é equivalente às duas relações escalares das Eqs. 4-4a, a' da Tab. 4-1. Ela mostra, de uma maneira simples e compacta, que a velocidade  $\mathbf{v}$ , no instante  $t$ , é dada pela soma da velocidade inicial  $\mathbf{v}_0$  (que a partícula teria na ausência de aceleração) com a variação (vetorial) da velocidade,  $\mathbf{a}t$ , adquirida durante o tempo  $t$ , em virtude da aceleração constante  $\mathbf{a}$ . Do mesmo modo, as equações escalares 4-4c, c' são equivalentes a uma única equação vetorial

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2, \quad (4-5b)$$

que é também facilmente interpretada. As demonstrações desta e de outras relações são propostas no Probl. 3.

Um exemplo de movimento curvilíneo com aceleração constante é o movimento de um projétil, isto é, o movimento bidimensional de uma partícula lançada obliquamente no ar. O movimento ideal de uma bola de futebol, de uma bola de golfe ou de uma bala são exemplos de movimentos de projéteis.<sup>1</sup> Admitiremos que os efeitos da resistência do ar sobre seus movimentos possam ser desprezados.

O movimento de um projétil se realiza com aceleração constante  $\mathbf{g}$ , dirigida para baixo e, então, será descrito pelas equações da Tab. 4-1. O componente horizontal da aceleração é nulo. Se escolhermos um sistema de referência com o eixo Oy dirigido verticalmente para cima, podemos colocar  $a_y = -g$  e  $a_x = 0$  naquelas equações.

### 4-3

### MOVIMENTO DE UM PROJÉTEL

<sup>1</sup> Em *Diálogos Relativos a Duas Novas Ciências*, "Quarto Dia", de Galileu Galilei, encontramos uma fascinante discussão relacionada com as pesquisas de Galileu sobre o movimento de projéteis.

Escolhamos, ainda, como origem de nosso sistema de referência, o ponto de onde o projétil foi lançado (veja a Fig. 4-2), isto é, a origem será o ponto no qual a bola deixa a mão de quem a lançou ou onde terminou o combustível de um foguete, por exemplo. Na Tab. 4-1, esta escolha da origem acarreta que  $x_0 = y_0 = 0$ . A velocidade no instante  $t = 0$  (instante em que o projétil é lançado) é  $v_0$ , que faz um ângulo  $\theta_0$  com o sentido positivo do eixo  $Ox$ . Os componentes de  $v_0$  segundo  $Ox$  e  $Oy$  (veja a Fig. 4-2) são, então,

$$v_{x_0} = v_0 \cos \theta_0 \quad \text{e} \quad v_{y_0} = v_0 \sin \theta_0.$$

Como o componente horizontal da aceleração é nulo, o componente horizontal da velocidade será constante. Assim, na Eq. 4-4a fazemos  $a_x = 0$  e  $v_{x_0} = v_0 \cos \theta_0$ , obtendo

$$v_x = v_0 \cos \theta_0, \quad (4-6a)$$

isto é, o componente horizontal da velocidade conserva o seu valor inicial durante todo o movimento.

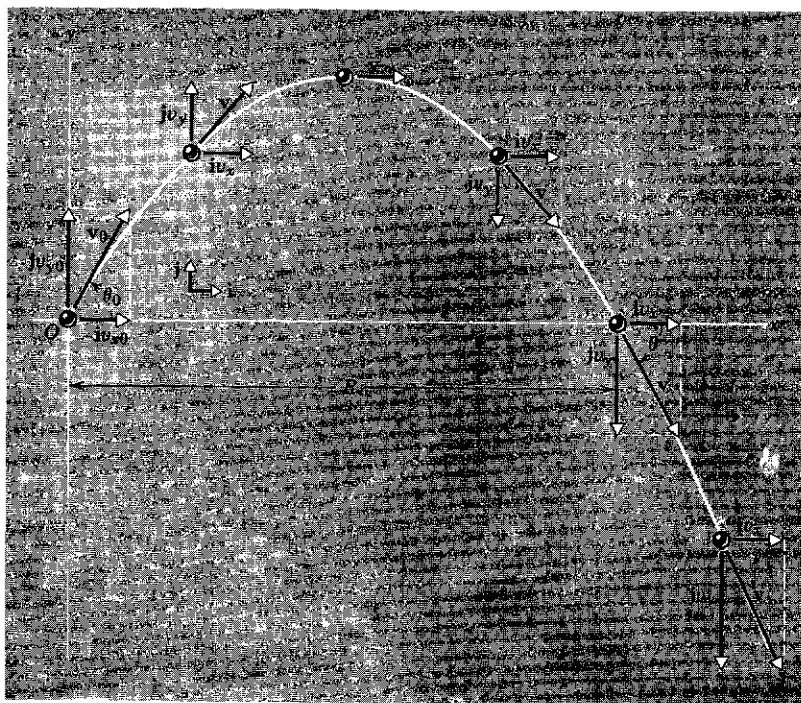


figura 4-2

Trajetória de um projétil, mostrando-se a velocidade inicial  $v_0$  e seus componentes vetoriais, bem como a velocidade  $v$  e seus componentes vetoriais, em cinco instantes sucessivos. Observe que  $v_x = v_{x_0}$  durante todo o movimento. A distância  $R$  é o alcance horizontal.

As variações no componente vertical da velocidade serão as mesmas que ocorrem em um movimento vertical com aceleração constante e dirigida para baixo. Na Eq. 4-4a' fazemos

$$a_y = -g \quad \text{e} \quad v_{y_0} = v_0 \sin \theta_0,$$

de modo que

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt. \quad (4-6a')$$

Assim, a expressão para o componente vertical da velocidade é idêntica à expressão para a velocidade do movimento de queda livre. Na realidade, se observarmos o movimento representado na Fig. 4-2 em um referencial que se mova para a direita com velocidade  $v_{x_0}$ , o movimento observado será idêntico ao de um objeto lançado verticalmente para cima, com velocidade inicial  $v_0 \sin \theta_0$ .

O módulo do vetor velocidade resultante é, em qualquer instante,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (4-7)$$

O ângulo  $\theta$  que o vetor velocidade faz com a horizontal, naquele instante, é dado por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v_y}{v_x}.$$

O vetor velocidade é, em cada ponto, tangente à trajetória da partícula, como está mostrado na Fig. 4-2.

O componente segundo  $Ox$  da posição da partícula, em qualquer instante, obtido da Eq. 4-4c com  $x_0 = 0$ ,  $a_x = 0$  e  $v_{x_0} = v_0 \cos \theta_0$ , é

$$x = (v_0 \cos \theta_0) t. \quad (4-6c)$$

O componente segundo  $Oy$ , obtido da Eq. 4-4c' com  $y_0 = 0$ ,  $a_y = -g$  e  $v_{y_0} = v_0 \sin \theta_0$ , é

$$y = (v_0 \sin \theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (4-6c')$$

As Eqs. 4-6c, c' nos fornecem  $x$  e  $y$  em função do parâmetro comum  $t$ , o tempo decorrido desde o lançamento. Combinando-as e eliminando  $t$  entre elas, obtemos

$$y = (\operatorname{tg} \theta_0) x - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} x^2, \quad (4-8)$$

que relaciona  $y$  a  $x$  e é a equação da trajetória do projétil. Como  $v_0$ ,  $\theta_0$  e  $g$  são constantes, esta equação é da forma

$$y = bx - cx^2,$$

que é a equação de uma parábola. Portanto, a trajetória de um projétil é parabólica.<sup>2</sup>

---

Um bombardeiro voa horizontalmente com velocidade constante de 500 km/h à altitude de 5 000 m, em direção a um ponto situado diretamente acima de seu alvo. Qual deve ser o valor do ângulo de visada,  $\phi$ , para que uma bomba, lançada do avião, atinja o alvo (Fig. 4-3)?

Escolhamos um sistema de referência, fixo em relação à Terra, com sua origem  $O$  no ponto onde a bomba é largada. No instante em que a bomba é abandonada, ela está se movimentando junto com o bombardeiro. Assim, a velocidade inicial do projétil,  $v_0$ , é horizontal e vale 500 km/h, ou 139 m/s. O ângulo de elevação,  $\theta_0$ , é nulo.

O tempo de queda é obtido da Eq. 4-6c'. Com  $\theta_0 = 0$  e  $y = -5\,000$  m, temos

$$t = \sqrt{-\frac{2y}{g}} = \sqrt{-\frac{2(-5\,000 \text{ m})}{9,8 \text{ m/s}^2}} = 31,9 \text{ s}.$$

Observe que o tempo de queda da bomba *não* depende da velocidade do avião, neste caso em que ela é lançada horizontalmente. (Veja, entretanto, o Probl. 11.)

A distância horizontal percorrida pela bomba, nesse tempo, é dada pela Eq. 4-6c,  $x = (v_0 \cos \theta_0) t$ , ou  $x = (139 \text{ m/s})(31,9 \text{ s}) = 4\,430 \text{ m}$ , de modo que o ângulo de visada (Fig. 4-3) deve ser

<sup>2</sup> Ver "Galileo's Discovery of the Parabolic Trajectory" por Stillman Drake e James MacLachlan. *Scientific American*, março, 1975.

## EXEMPLO 1



$$\phi = \text{arc tg } \frac{x}{|y|} = \text{arc tg } \frac{4\,430}{5\,000} \cong 42^\circ.$$

O movimento da bomba parecerá parabólico se for observado de um sistema de referência fixo em relação ao bombardeiro?

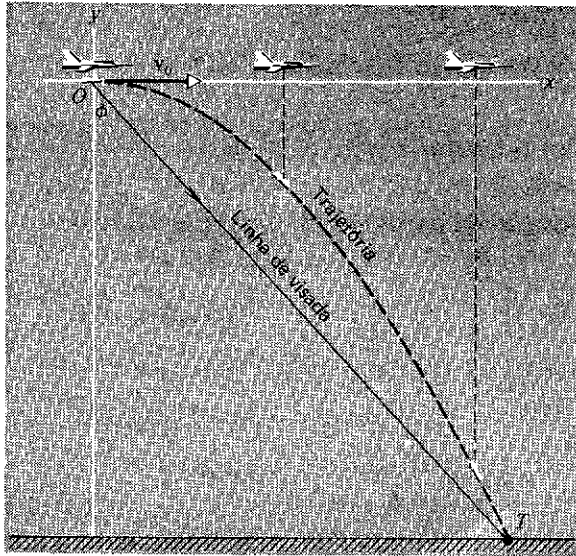


figura 4-3  
Exemplo 1. Bomba largada de um avião à velocidade horizontal  $v_0$ .

### EXEMPLO 2

Um jogador de futebol chuta uma bola com velocidade inicial de 20 m/s segundo um ângulo de  $37^\circ$  com a horizontal. (Um triângulo retângulo em que um dos ângulos é de  $37^\circ$  tem seus lados na razão 3:4:5 ou 6:8:10.) Supondo que a bola se move em um plano vertical:

(a) Determine o instante  $t_1$  em que a bola atinge o ponto mais alto de sua trajetória. Neste ponto, o componente vertical da velocidade,  $v_y$ , é nulo. A Eq. 4-6a' nos fornece para o tempo  $t$ :

$$t = \frac{v_0 \text{ sen } \theta_0 - v_y}{g}$$

Com

$$v_y = 0, \quad v_0 = 20 \text{ m/s}, \quad \theta_0 = 37^\circ, \quad g = 9,8 \text{ m/s}^2,$$

temos

$$t_1 = \frac{[20(\frac{6}{10}) - 0] \text{ m/s}}{9,8 \text{ m/s}^2} = 1,22 \text{ s}.$$

(b) Qual a altura atingida pela bola? A altura máxima é atingida no instante  $t = 1,23$  s. Usando-se a Eq. 4-6c',

$$y = (v_0 \text{ sen } \theta_0) t - \frac{1}{2} g t^2,$$

temos

$$y_{\text{máx.}} = (20 \text{ m/s}) (\frac{6}{10}) (1,22 \text{ s}) - \frac{1}{2} (9,8 \text{ m/s}^2) (1,22 \text{ s})^2 = 7,3 \text{ m}.$$

(c) Qual é o alcance horizontal da bola e quanto tempo ela permanece no ar? A distância horizontal, do ponto de partida ao ponto onde a bola retorna à altura original (nível do solo), é o alcance  $R$ . Fazendo-se  $y=0$  na Eq. 4-6c', encontramos o tempo  $t_2$  requerido para ser atingido este alcance. Obteremos

$$t_2 = \frac{2v_0 \text{ sen } \theta_0}{g} = \frac{2(20 \text{ m/s}) (\frac{6}{10})}{9,8 \text{ m/s}^2} = 2,45 \text{ s}.$$

Observe que  $t_2 = 2t_1$ , isto é, o tempo requerido para a bola subir (atingir sua altura máxima em relação ao solo) é igual ao tempo requerido para ela descer (chegar ao solo a partir da altura máxima).

O alcance  $R$  pode ser obtido, então, inserindo-se este valor de  $t_2$  em lugar de  $t$  na Eq. 4-6c. Obtemos, de  $x = (v_0 \cos \theta_0) t$ ,

$$R = (v_0 \cos \theta_0) t_2 = (20 \text{ m/s}) \left(\frac{8}{10}\right) (2,45 \text{ s}) = 39 \text{ m.}$$

(d) Qual é a velocidade da bola no instante em que ela atinge o solo? Da Eq. 4-6a obtemos

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = (20 \text{ m/s}) \left(\frac{8}{10}\right) = 16 \text{ m/s.}$$

A Eq. 4-6a', com  $t = t_2 = 2,45 \text{ s}$ , fornece

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt = (20 \text{ m/s}) \left(\frac{6}{10}\right) - (9,8 \text{ m/s}^2) (2,45 \text{ s}) = -12 \text{ m/s.}$$

Assim, da Eq. 4-7,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(16 \text{ m/s})^2 + (-12 \text{ m/s})^2} = 20 \text{ m/s,}$$

e

$$\text{tg } \theta = v_y/v_x = -\frac{12}{16},$$

de modo que temos  $\theta = -37^\circ$ , ou seja, um ângulo de  $37^\circ$  contado no sentido horário a partir do eixo  $Ox$ . Note-se que  $\theta = -\theta_0$ , como era de se esperar em virtude da simetria da situação (Fig. 4-2).

Em uma conhecida demonstração prática, uma arma é apontada para um alvo elevado que é abandonado em queda livre, por um mecanismo adequado, no instante em que a bala deixa o cano da arma. Independentemente do valor da velocidade inicial da bala, observa-se que ela sempre atinge o alvo em queda.

### EXEMPLO 3

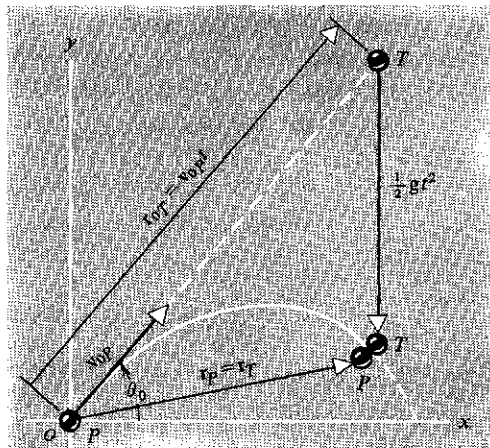


figura 4-4

Exemplo 3. No movimento de um projétil, seu deslocamento, a partir da origem, em qualquer instante  $t$ , pode ser imaginado como a soma de dois vetores:  $v_{0P}t$ , orientado segundo  $v_{0P}$  e  $gt^2/2$ , dirigido para baixo.

A maneira mais simples de entender isto é a seguinte. Se não existisse a aceleração da gravidade, o alvo não cairia e a bala mover-se-ia ao longo da linha de visada, indo diretamente de encontro ao alvo (Fig. 4-4). O efeito da gravidade faz com que ambos os corpos sejam igualmente acelerados para baixo, a partir das posições que cada um ocuparia se não houvesse aceleração. Portanto, após um tempo  $t$ , a bala terá caído de uma distância  $\frac{1}{2}gt^2$  a partir da posição que ocuparia ao longo da linha de visada e o alvo terá caído dessa mesma distância a partir de sua posição inicial. Quando a bala alcança a linha de queda do alvo, ambos se encontram à mesma distância abaixo da posição inicial do alvo, ocorrendo, então, a colisão. Se a bala se movimentar mais rapidamente do que mostrado na figura ( $v_0$  maior), seu alcance será maior e ela cruzará a linha de queda em um

ponto mais alto, mas, como ela chega a este ponto em um tempo menor, o alvo terá caído de uma distância correspondente menor, no mesmo tempo, e colidirá com ela. Uma argumentação semelhante é válida para velocidades de menor valor.

Em uma análise equivalente, podemos usar a Eq. 4-5b,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2$$

para determinarmos as posições do projétil e do alvo em um instante  $t$  qualquer. Para o projétil,  $P$ ,  $\mathbf{r}_0 = 0$  e  $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ , temos

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{v}_{0P} t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2.$$

Para o alvo,  $T$ ,  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{0T}$ ,  $\mathbf{v}_0 = 0$  e  $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ , o que nos conduz a

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_{0T} + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2.$$

Para que haja colisão, devemos ter  $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_T$ . A análise das equações mostra que isto sempre ocorrerá em um instante  $t$  dado por  $\mathbf{r}_{0T} = \mathbf{v}_{0P} t$ , isto é, após um tempo  $t (= |\mathbf{r}_{0T}|/|\mathbf{v}_{0P}|)$  necessário para o projétil se movimentar até a posição do alvo, ao longo da linha de visada, supondo que sua velocidade inicial permaneça invariável.

Na Seção 3-6 vimos que a aceleração tem sua origem em variações do vetor velocidade. No caso simples de queda livre, tínhamos variações apenas no módulo da velocidade, pois sua direção permanecia constante. No movimento de uma partícula em uma circunferência, com velocidade escalar constante, denominado movimento circular uniforme, o vetor velocidade varia continuamente em direção mas não varia em módulo. Procuremos, agora, determinar a aceleração no movimento circular uniforme.

A situação está indicada na Fig. 4-5a. Seja  $P$  a posição da partícula no instante  $t$  e  $P'$  a sua posição no instante  $t + \Delta t$ . A velocidade em  $P$  é representada pelo vetor  $\mathbf{v}$ , tangente à curva no ponto  $P$ . A velocidade em  $P'$  é  $\mathbf{v}'$ , um vetor tangente à curva em  $P'$ . Os vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$  são iguais em módulo, já que a velocidade escalar é constante, mas eles diferem em direção. O comprimento da trajetória percorrida durante o tempo  $\Delta t$  é o comprimento do arco  $PP'$ , igual a  $v\Delta t$ , onde  $v$  representa o módulo da velocidade da partícula.

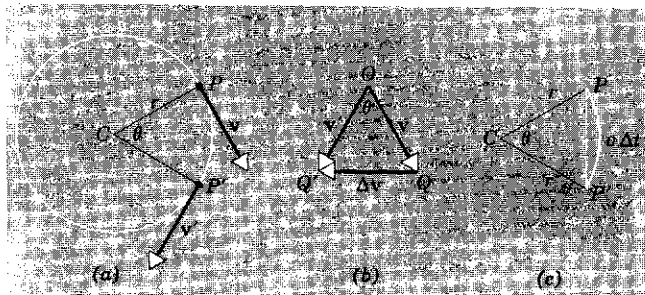


figura 4-5

Movimento circular uniforme. A partícula percorre uma circunferência com velocidade escalar constante. São assinaladas suas velocidades em dois pontos,  $P$  e  $P'$ . A variação de velocidade ao ir de  $P$  para  $P'$  é  $\Delta \mathbf{v}$ .

Tracemos, agora, os vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}'$  da maneira indicada na Fig. 4-5b, de modo que suas origens sejam coincidentes. Podemos proceder desta maneira desde que os vetores mantenham o mesmo módulo e a mesma direção da Fig. 4-5a. Este diagrama (Fig. 4-5b) nos mostra claramente a *variação da velocidade* quando a partícula se move de  $P$  para  $P'$ . Esta variação,  $\mathbf{v}' - \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}$ , é o vetor que deve ser somado a  $\mathbf{v}$  para se obter  $\mathbf{v}'$ . Observe que ele está dirigido para dentro, apontando aproximadamente para o centro do círculo.

O triângulo  $OQQ'$  formado por  $v$ ,  $v'$  e  $\Delta v$ , é semelhante ao triângulo  $CPP'$  (Fig. 4-5c) formado pela corda  $PP'$  e pelos raios  $CP$  e  $CP'$ . Isto é verdade, porque ambos são triângulos isósceles cujos ângulos dos vértices são iguais; o ângulo  $\theta$  entre  $v$  e  $v'$  é igual ao ângulo  $PCP'$  porque  $v$  é perpendicular a  $CP$  e  $v'$  é perpendicular a  $CP'$ . Podemos, portanto, escrever

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v\Delta t}{r}, \text{ aproximadamente,}$$

considerando-se a corda  $PP'$  igual ao comprimento do arco  $PP'$ . Esta relação será tanto mais exata quanto menor for  $\Delta t$ , pois, então, a corda tende para o arco e vice-versa. Observe-se, também, que  $\Delta v$  se aproxima cada vez mais de uma direção perpendicular a  $v$  e  $v'$  à medida que  $\Delta t$  diminui e, portanto, aproxima-se cada vez mais de uma direção na qual ele aponta exatamente para o centro do círculo. Segue-se, desta relação, que

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}, \text{ aproximadamente,}$$

e que, no limite, com  $\Delta t \rightarrow 0$ , esta expressão torna-se exata. Obtemos, portanto,

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} \quad (4-9)$$

como sendo o valor da aceleração. O vetor  $a$  está, em cada instante, dirigido ao longo do raio e apontando para o centro da circunferência.

A Fig. 4-6 nos mostra as orientações relativas dos vetores  $v$  e  $a$  em vários pontos da trajetória. O módulo de  $v$  é constante, mas sua direção varia continuamente. Esta variação origina uma aceleração  $a$ , também constante em módulo (mas não é nula), e que muda continuamente sua direção. O vetor velocidade  $v$  é sempre tangente à circunferência, apontando no sentido do movimento; a aceleração  $a$  tem sempre a direção radial, apontando para o centro da circunferência. Por isto,  $a$  é denominada *aceleração radial* ou *aceleração centrípeta*. *Centrípeta* significa "voltada para o centro".

Tanto no movimento de queda livre quanto no movimento de um projétil, o vetor  $a$  permanece constante em módulo e em direção e podemos usar as equações válidas para o caso de aceleração constante (veja a Tab. 4-1). Mas não podemos usar estas equações no movimento circular uniforme, porque  $a$  varia em direção e, portanto, não é constante.

As unidades de aceleração centrípeta são as mesmas unidades da aceleração que resulta de uma variação no módulo da velocidade. Dimensionalmente, temos

$$\frac{v^2}{r} = \left( \frac{\text{comprimento}}{\text{tempo}} \right)^2 / \text{comprimento} = \frac{\text{comprimento}}{\text{tempo}^2} \text{ ou } \frac{L}{T^2},$$

que são as dimensões de aceleração. As unidades, portanto, podem ser  $\text{m/s}^2$ ,  $\text{cm/s}^2$ , entre outras.

A aceleração que resulta de uma variação na direção da velocidade é uma aceleração tão real e verdadeira, sob todos os aspectos, quanto a que se origina em uma variação do módulo da velocidade.

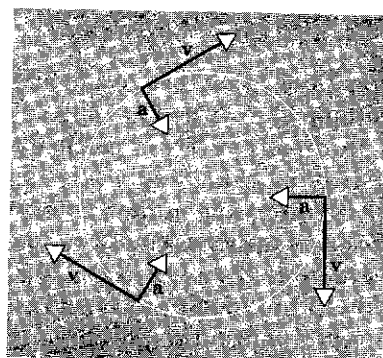


figura 4-6

No movimento circular uniforme a aceleração  $a$  está sempre dirigida para o centro do círculo e, portanto, é perpendicular a  $v$ .

Por definição, aceleração é a taxa de variação, no tempo, da velocidade e a velocidade, sendo um vetor, pode variar tanto em direção quanto em módulo. Se uma grandeza física é vetorial, seus aspectos direcionais não podem ser ignorados, pois seus efeitos serão, sem dúvida, tão importantes e reais quanto aqueles produzidos por variações no módulo.

É importante salientar, neste ponto, que não precisa haver, necessariamente, nenhum movimento na direção do vetor aceleração e que não existe relação fixa geral entre as direções de  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{v}$ . Na Fig. 4-7 mostramos exemplos nos quais o ângulo entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$  varia de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ . Somente em um caso,  $\theta = 0^\circ$ , o movimento se dá na direção e sentido de  $\mathbf{a}$ .

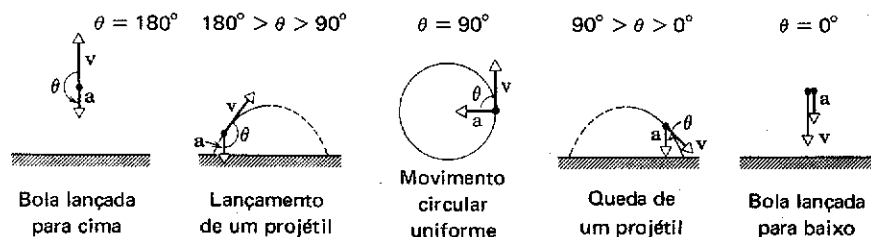


figura 4-7  
Mostra-se a relação entre  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$ , em vários movimentos.

A Lua gira em torno da Terra, completando uma revolução em 27,3 dias. Suponha que sua órbita seja circular e tenha um raio de 385 000 km. Qual é o valor da aceleração da Lua neste movimento?

Temos  $r = 385\,000\text{ km} = 3,85 \times 10^8$  metros. O tempo de uma revolução completa, denominado período, é  $T = 27,3$  dias  $= 2,36 \times 10^6$  s. A velocidade escalar da Lua (suposta constante) é, então,

$$v = 2\pi r/T = 1\,020\text{ m/s.}$$

A aceleração centrípeta é

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(1\,020\text{ m/s})^2}{3,85 \times 10^8\text{ m}} = 0,002\,73\text{ m/s}^2, \text{ ou seja, apenas } 2,78 \times 10^{-4} g.$$

#### EXEMPLO 4

Calcule o valor da velocidade de um satélite artificial da Terra, supondo que ele se encontre em uma órbita à altura  $h$  de 230 km acima da superfície da Terra, onde  $g = 9,5\text{ m/s}^2$ . O raio da Terra,  $R$ , é de 6 370 km.

Do mesmo modo que qualquer objeto abandonado próximo à superfície da Terra, o satélite tem uma aceleração  $g$  dirigida para o centro da mesma. É em virtude desta aceleração que ele se move em uma trajetória circular. Portanto, a aceleração centrípeta é  $g$  e, da Eq. 4-9,  $a = v^2/r$ , temos

$$g = v^2/(R + h),$$

ou

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(R + h)g} = \sqrt{(6\,370\text{ km} + 230\text{ km})(1\,000\text{ m/km})(9,5\text{ m/s}^2)} \\ &= 7,9 \times 10^3\text{ m/s} = 28\,400\text{ km/h.} \end{aligned}$$

Procuramos, agora, obter a Eq. 4-9 usando métodos vetoriais. A Fig. 4-8a mostra uma partícula em movimento circular uniforme

#### EXEMPLO 5

em torno da origem  $O$  de um sistema de referência. Para este movimento, as coordenadas polares  $r$  e  $\theta$  são mais úteis do que as coordenadas retangulares  $x$  e  $y$ , porque  $r$  permanece constante durante todo o movimento e  $\theta$  cresce linearmente com o tempo; o comportamento de  $x$  e  $y$  durante este movimento é mais complexo. Os dois conjuntos de coordenadas estão relacionados pelas equações

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \theta = \text{arc tg } y/x \quad (4-10a)$$

ou pelas relações recíprocas

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \text{ sen } \theta. \quad (4-10b)$$

Em sistemas de referência retangulares, usamos os vetores unitários  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  para descrever o movimento no plano  $xOy$ . Aqui, será mais conveniente introduzir dois novos vetores, unitários  $\mathbf{u}_r$  e  $\mathbf{u}_\theta$ . Estes vetores, como  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$ , têm comprimento unitário e são adimensionais, cada um apenas define uma direção e um sentido. O vetor unitário  $\mathbf{u}_r$ , em qualquer ponto, aponta na direção e sentido do crescimento de  $r$  naquele ponto; ele é orientado radialmente e no sentido de afastamento da origem. O vetor unitário  $\mathbf{u}_\theta$ , em qualquer ponto, aponta no sentido do crescimento de  $\theta$  naquele ponto; é sempre tangente a uma circunferência passando pelo ponto, no sentido anti-horário. Como mostra a Fig. 4-8a,  $\mathbf{u}_r$  e  $\mathbf{u}_\theta$  são perpendiculares entre si. Deve-se observar que os vetores unitários  $\mathbf{u}_r$  e  $\mathbf{u}_\theta$ , ao contrário dos vetores unitários  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$ , variam de ponto a ponto do plano; assim, os vetores unitários  $\mathbf{u}_r$  e  $\mathbf{u}_\theta$  não são vetores constantes.

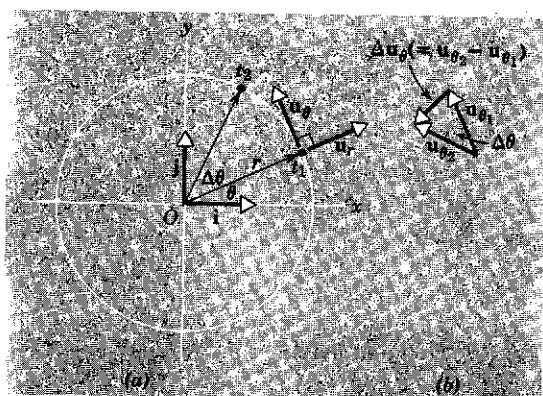


figura 4-8

(a) Uma partícula movendo-se no sentido anti-horário em um círculo de raio  $r$ . (b) Os vetores unitários  $\mathbf{u}_{\theta_1}$  e  $\mathbf{u}_{\theta_2}$  nos instantes  $t_1$  e  $t_2$  respectivamente, e a variação  $\Delta \mathbf{u}_\theta (= \mathbf{u}_{\theta_2} - \mathbf{u}_{\theta_1})$ .

Em termos de  $\mathbf{u}_r$  e  $\mathbf{u}_\theta$ , o movimento de uma partícula que se move no sentido anti-horário em uma circunferência, em torno da origem (Fig. 4-8a), com velocidade escalar uniforme  $v$ , pode ser descrito pela equação vetorial:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_\theta v. \quad (4-11)$$

Esta relação nos diz, corretamente, que a direção de  $\mathbf{v}$  (que é a mesma direção de  $\mathbf{u}_\theta$ ) é tangente à circunferência e que o módulo de  $\mathbf{v}$  tem um valor constante igual a  $v$  (porque o módulo de  $\mathbf{u}_\theta$  é unitário). Para encontrar a aceleração, combinamos as Eqs. 4-3 e 4-11, obtendo

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} v. \quad (4-12)$$

Observe que  $v$ , na Eq. 4-11, é constante, mas  $\mathbf{u}_\theta$  não o é, pois sua direção varia à medida que a partícula se move. Para calcularmos  $d\mathbf{u}_\theta/dt$ , consideremos a Fig. 4-8b, que mostra os vetores unitários  $\mathbf{u}_{\theta_1}$  e  $\mathbf{u}_{\theta_2}$ , correspondentes ao intervalo de tempo  $\Delta t (= t_2 - t_1)$ , para a partícula móvel. O vetor  $\Delta\mathbf{u}_\theta (= \mathbf{u}_{\theta_2} - \mathbf{u}_{\theta_1})$  aponta radialmente para dentro, voltado para a origem, no caso limite, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ . Em outras palavras,  $d\mathbf{u}_\theta$  tem direção e sentido do vetor  $-\mathbf{u}_r$ , em qualquer ponto. O ângulo entre  $\mathbf{u}_{\theta_2}$  e  $\mathbf{u}_{\theta_1}$ , na figura, é  $\Delta\theta$ , que é igual ao ângulo varrido por uma linha radial (desde a origem à partícula) durante o tempo  $\Delta t$ . O valor de  $\Delta\mathbf{u}_\theta$  é simplesmente  $\Delta\theta$ ; lembre-se que os vetores  $\mathbf{u}_{\theta_1}$  e  $\mathbf{u}_{\theta_2}$ , na Fig. 4-8b, têm módulos unitários. Assim,

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\mathbf{u}_r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = -\mathbf{u}_r \frac{d\theta}{dt}$$

e, da Eq. 4-12,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} v = -\mathbf{u}_r \frac{d\theta}{dt} v. \quad (4-13)$$

Ora,  $d\theta/dt$  representa a taxa (uniforme) de rotação angular da partícula e é dada por

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi \text{ radianos}}{\text{tempo de uma revolução}} = \frac{2\pi}{2\pi r/v} = v/r.$$

Substituindo na Eq. 4-13, obtemos, finalmente,

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r \frac{v^2}{r}, \quad (4-14)$$

que nos diz que a aceleração no movimento circular uniforme tem módulo  $v^2/r$  (veja a Eq. 4-9) e está dirigida radialmente para dentro da circunferência (observe o fator  $-\mathbf{u}_r$ ). A relação vetorial da Eq. 4-14 nos mostra, então, o módulo, a direção e o sentido da aceleração centrípeta  $\mathbf{a}$ . Observe que, como era de esperar,  $a$  tem módulo constante, mas varia continuamente de direção, porque  $\mathbf{u}_r$  varia continuamente de direção.

Consideremos, agora, o caso mais geral de movimento circular, no qual o módulo  $v$  da velocidade da partícula *não* é constante. Usaremos métodos vetoriais em coordenadas polares.

Como anteriormente, o vetor velocidade é dado pela Eq. 4-11, isto é,

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_\theta v$$

exceto que, neste caso, tanto  $\mathbf{u}_\theta$  quanto  $v$  variam com o tempo. Lembrando a fórmula para a derivada de um produto, obtém-se, para a aceleração,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}_\theta \frac{dv}{dt} + v \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt}. \quad (4-15)$$

Na Eq. 4-12 o primeiro termo desta equação não estava presente porque, como  $v$  foi suposto constante,  $dv/dt$  era nula. O último termo da Eq. 4-15 reduz-se, como vimos na seção anterior,  $a = \mathbf{u}_r(v^2/r)$ . Podemos, agora, escrever a Eq. 4-15 da seguinte maneira:

#### 4-5 ACELERAÇÃO TANGENCIAL NO MOVIMENTO CIRCULAR

$$\mathbf{a} = u_{\theta} a_T - u_r a_R \quad (4-16)$$

onde  $a_T = dv/dt$  e  $a_R = v^2/r$ . O primeiro termo,  $u_{\theta} a_T$ , é o componente vetorial de  $\mathbf{a}$ , sendo tangente à trajetória da partícula e se origina em uma variação no módulo da velocidade do movimento circular (veja a Fig. 4-9). Este termo e  $a_T$  são denominados *aceleração tangencial*. O segundo termo,  $-u_r a_R$  é o componente vetorial de  $\mathbf{a}$ , e está dirigido radialmente para o centro da circunferência, e provém da variação da direção do vetor velocidade do movimento circular (veja a Fig. 4-9). Este termo e  $a_R$  são denominados *aceleração centrípeta*.

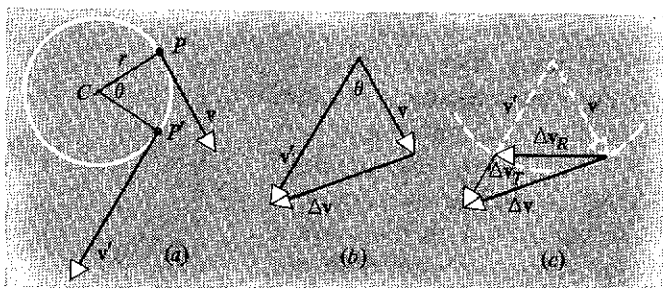


figura 4-9

(a) No movimento circular não-uniforme, o valor da velocidade é variável. (b) A variação da velocidade,  $\Delta v$ , ao passar de P para P', é constituída de duas partes. (c)  $\Delta v_R$ , ocasionada pela variação da direção de v, e  $\Delta v_T$ , ocasionada pela variação do módulo de v. No limite, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta v_R$  aponta para o centro C da circunferência e  $\Delta v_T$  é tangente à trajetória circular.

O valor da aceleração instantânea é

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2} \quad (4-17)$$



figura 4-10

Traço deixado por um elétron energético movendo-se em espiral numa câmara de bolhas de hidrogênio líquido de 10 polegadas. (Cortesia do Lawrence Radiation Laboratory.) Esta fotografia pertence a uma coleção preparada para proporcionar uma fácil observação estereoscópica, tendo sido publicada com dados explicativos sob o título *Introduction to the Detection of Nuclear Particles in a Bubble Chamber*, The Ealing Press, Cambridge 40, Massachusetts (1964). Quando observado estereoscopicamente, o elétron é visto em movimento ao longo de uma espiral e deslocando-se para o leitor. Assim, o seu vetor velocidade, em qualquer ponto, não está situado no plano da figura, mas inclinado em relação a ele; o movimento é, então, tridimensional, em vez de bidimensional, como temos suposto em outros exemplos neste capítulo.



Se o valor da velocidade permanecer constante, teremos  $a_T = dv/dt = 0$  e a Eq. 4-16 se reduzirá à Eq. 4-14. Quando o valor da velocidade não é constante,  $a_T$  não é nula e  $a_R$  varia de um ponto para outro. Se a taxa de variação do valor da velocidade não for constante, então  $a_T$  também variará de um ponto a outro.

Se o movimento não for circular, as expressões para  $a_T (= dv/dt)$  e para  $a_R (= v^2/r)$  poderão ainda ser aplicadas, desde que  $r$  seja considerado o valor do raio de curvatura da trajetória na posição instantânea da partícula. Então,  $a_T$  fornece o valor do componente da aceleração tangente à curva naquela posição e  $a_R$  nos dá o valor do componente normal à curva, na mesma posição. A Fig. 4-10 mostra o traço deixado em uma câmara de bolhas cheia de hidrogênio líquido, por um elétron energético que descreve uma espiral em direção ao centro da figura. O elétron perde energia enquanto atravessa o líquido da câmara, de modo que sua velocidade diminui continuamente. Assim, haverá, em cada ponto, uma *aceleração tangencial*  $a_T$ , dada por  $dv/dt$ . A *aceleração centrípeta*  $a_R$ , em qualquer ponto, é dada por  $v^2/r$ , onde  $r$  é o raio de curvatura da trajetória no ponto em questão; tanto  $v$  quanto  $r$  diminuem à medida que a partícula perde energia. A força que faz o elétron mover-se em espiral é exercida por um campo magnético, presente na câmara de bolhas, e aplicado perpendicularmente ao plano da Fig. 4-10 (veja o Cap. 33).

Em seções anteriores, tratamos da adição de velocidades em um dado referencial. Consideremos, agora, a relação entre a velocidade de um objeto, determinada por um observador  $S$  (= referencial  $S$ ), e a velocidade do mesmo objeto determinada por um outro observador  $S'$  (= referencial  $S'$ ) que está em movimento em relação ao primeiro.

Consideremos o observador  $S$  fixo na Terra, de modo que esta constituirá seu sistema de referência. O outro observador,  $S'$ , move-se em relação à Terra — por exemplo, um passageiro sentado num trem em movimento — de modo que seu sistema de referência será o trem. Ambos observam o movimento de um mesmo objeto, digamos um automóvel em uma estrada ou um homem caminhando dentro do trem. Cada observador registrará um deslocamento, uma velocidade e uma aceleração para esse objeto, medidos em relação ao seu sistema de referência. Que relação há entre estas medidas? Nesta seção consideraremos, apenas, o caso em que o segundo referencial se move, em relação ao primeiro, com velocidade constante  $u$ .

Na Fig. 4-11, o sistema de referência  $S$ , representado pelos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , pode ser imaginado fixo na Terra. A região sombreada indica um outro referencial,  $S'$ , representado pelos eixos  $O'x'$  e  $O'y'$ , que se move com velocidade constante,  $u$ , em relação ao sistema  $S$ , ao longo do eixo  $Ox$ ; pode-se imaginá-la como um desenho no assoalho de um vagão.

Inicialmente, uma partícula (digamos, uma bola no vagão) ocupa uma posição designada por  $A$  no sistema  $S$  e por  $A'$  no sistema  $S'$ . No instante  $t$  posterior, o vagão e seu referencial  $S'$  terão percorrido uma distância  $ut$  para a direita e a partícula terá se deslocado para  $B$ . O deslocamento da partícula, a partir de sua posição inicial, no referencial  $S$ , é representado pelo vetor  $r$ , de  $A$

#### 4-6 VELOCIDADE E ACELERAÇÃO RELATIVAS

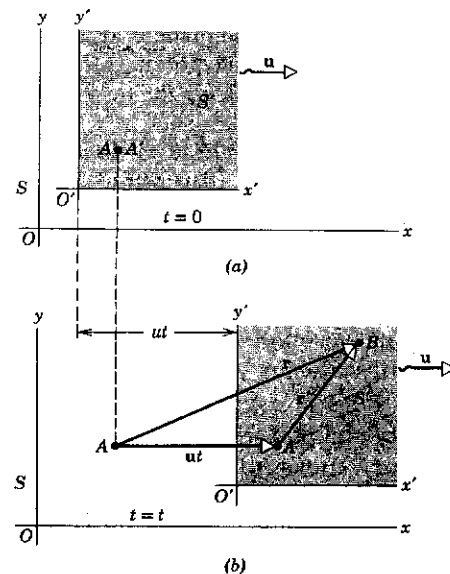


figura 4-11  
Dois sistemas de referência,  $S$  ( $= (x, y)$ ) e  $S'$  ( $= (x', y')$ );  $S'$  move-se para a direita, em relação a  $S$ , com velocidade escalar  $u$ .

para *B*. No sistema *S'*, este deslocamento é representado pelo vetor *r'*, de *A'* para *B*. Esses vetores são diferentes porque o ponto de referência *A'* do sistema em movimento deslocou-se de uma distância *ut* ao longo do eixo *Ox*, durante o movimento. Pela figura, vemos que *r* é a soma vetorial de *r'* e *ut*:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{ut}. \tag{4-18}$$

Derivando a Eq. 4-18, obtemos

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \mathbf{\bar{u}}.$$

Mas  $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$  é a velocidade instantânea da partícula em relação ao referencial *S* e  $d\mathbf{r}'/dt = \mathbf{v}'$  representa a velocidade instantânea da mesma partícula em relação ao referencial *S'*, de modo que

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}. \tag{4-19}$$

Portanto, a velocidade *v* da partícula em relação ao sistema *S* é dada pela soma vetorial da velocidade *v'* da partícula em relação ao sistema *S'* com a velocidade *u* do sistema *S'* em relação ao sistema *S*.

(a) A bússola de um avião indica que ele está se dirigindo para leste. Comunicações com o solo informam que há vento soprando para o norte. Mostre, em um diagrama, qual é a velocidade do avião em relação ao solo.

O objeto é o avião. A Terra é um referencial (*S*) e o ar é o outro referencial (*S'*) que se move em relação ao primeiro. Então,

*u* é a velocidade do ar em relação à Terra.

*v'* é a velocidade do avião em relação ao ar,

*v* é a velocidade do avião em relação à Terra.

Neste caso, *u* aponta para o norte e *v'* aponta para o leste. Então, a relação  $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$  determina a velocidade do avião em relação à Terra, como está mostrado na Fig. 4-12a.

O ângulo  $\alpha$  é o ângulo feito com a linha leste-oeste que determina a direção da rota do avião em relação ao solo e é dado por

$$\text{tg } \alpha = u/v'.$$

O valor da velocidade do avião em relação à Terra é dado por

$$v = \sqrt{(v')^2 + u^2}.$$

Por exemplo, se o indicador de velocidade mostra que o avião está se movendo, em relação ao ar, com uma velocidade de 200 km/h e se a velocidade do vento em relação ao solo é de 40,0 km/h, então

$$v = \sqrt{(200)^2 + (40,0)^2} \text{ km/h} = 204 \text{ km/h}$$

é a velocidade do avião em relação à Terra e

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{40,0}{200} = 11^\circ 20'$$

determina a rota do avião.

(b) Trace, agora, o diagrama vetorial que mostra a direção na qual o piloto deve conduzir o avião, em relação ao ar, para que o aparelho se desloque para leste em relação ao solo.

### EXEMPLO 6

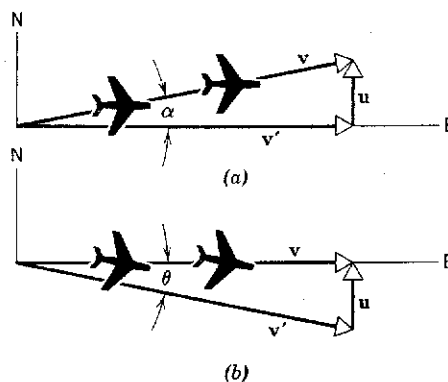


figura 4-12  
Exemplo 6

Ele deverá, naturalmente, conduzir o avião parcialmente contra o vento. O valor de sua velocidade, relativa à Terra, será, portanto, menor do que antes. O diagrama vetorial está mostrado na Fig. 4-12b. O estudante deve calcular  $\theta$  e  $v$ , usando os dados fornecidos anteriormente para  $u$  e  $v'$ .

Vimos que observadores diferentes determinam velocidades diferentes para uma partícula, quando esses observadores estão em movimento relativo. As diferenças entre estas velocidades são sempre iguais à velocidade relativa dos dois observadores que, aqui, é considerada *uma velocidade constante*. Segue-se que, se houver uma variação na velocidade da partícula, *esta variação será a mesma* para ambos os observadores. Então, cada um deles medirá a *mesma aceleração* para a partícula. A aceleração de uma partícula é a mesma em *todos* os referenciais que se movam, uns em relação aos outros, com velocidade constante; isto é,  $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ . Este resultado pode ser obtido, formalmente, se derivarmos a Eq. 4-19. Assim,  $d\mathbf{v}/dt = d\mathbf{v}'/dt + d\mathbf{u}/dt$ ; mas,  $d\mathbf{u}/dt = 0$  quando  $\mathbf{u}$  é constante, de modo que  $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$ .

## questões

1. No movimento de um projétil, desprezando-se a resistência do ar, será necessário, alguma vez, considerar o movimento como tridimensional em vez de bidimensional?
2. Em uma competição de salto à distância tem alguma importância quão alto é o seu salto? Quais os fatores que determinam o alcance do salto?
3. Por que o elétron de um feixe de um canhão eletrônico não cai, em virtude da gravidade, tanto quanto a molécula da água no jato de uma mangueira? Suponha o movimento inicialmente horizontal para ambos os casos.
4. Em que ponto um projétil alcança, durante sua trajetória, a sua velocidade mínima? E a máxima?
5. O tampo de uma mesa é articulado através de dobradiças localizadas em uma de suas extremidades de modo que você pode variar o ângulo de inclinação  $\theta$  entre o tampo e a horizontal. Como você escolheria  $\theta$  de modo que bolas que caíssem sobre o plano inclinado e repicassem elasticamente do mesmo tivessem alcance máximo?
6. Que vantagem há, se houver, em medir ângulos em radianos ao invés de graus?
7. Um aviador, saindo de um vôo em picada, segue um arco de um círculo. Diz-se que ele "experimentou uma aceleração de  $3g$ 's" ao sair do vôo. Explique o que isto significa.
8. Descreva qualitativamente a aceleração que atua sobre uma conta que, deslizando sem atrito, ao longo de um arame em forma de espiral, se move em direção do seu centro com velocidade de módulo constante.
9. Poderia a aceleração de um projétil ser representada em termos de um componente radial e outro tangencial em cada ponto da trajetória? Em caso afirmativo, há alguma vantagem em usar esta representação?
10. Para pequenos arcos, um trecho de parábola pode ser aproximada por um arco de círculo. Qual é o raio  $r$  do arco circular que aproxima a trajetória, no seu ponto mais alto, de um projétil cuja velocidade inicial tem módulo  $v_0$  e inclinação  $\theta$ ?
11. Um menino, sentado em um vagão de trem, que se move com velocidade constante, arremessa uma bola direto para cima, no ar. Onde ela cairá? Atrás dele, na frente ou em suas mãos? O que acontecerá se o vagão acelerar para frente ou fizer uma curva enquanto a bola estiver no ar?
12. Um homem, na plataforma de observação de um trem que se move com velocidade constante, deixa cair uma moeda ao inclinar-se. Descreva a trajetória da moeda como é vista (a) pelo homem no trem, (b) por uma pessoa de pé junto ao trilho e (c) por uma pessoa em um segundo trem, que se move na via paralela, em sentido contrário ao primeiro.

- Um ônibus, com um pára-brisa vertical, viaja sob uma tempestade com velocidade  $v_b$ . A chuva cai verticalmente com velocidade terminal  $v_c$ . Qual o ângulo entre as gotas de chuva e o pára-brisa no momento do choque?
- Em uma chuva de intensidade constante, as gotas caem verticalmente. Para ir de um lugar a outro, sob a chuva, de forma tal que se encontre o menor número de gotas, você se moveria com a maior velocidade possível, a menor velocidade possível ou com algum valor de velocidade intermediário?
- O que há de errado com a Fig. 4-13? O marinheiro está velejando a favor do vento.
- Um elevador está descendo a uma velocidade constante. Um passageiro tira do bolso uma moeda e deixa-a cair no piso. Que acelerações seriam observadas no movimento da moeda (a) pelo passageiro e (b) por uma pessoa em repouso em relação ao poço do elevador?

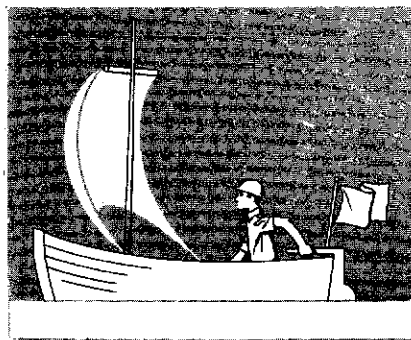


figura 4-13

## SEÇÃO 4-1

- Calcule os componentes escalares de um vetor a dado por:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

## SEÇÃO 4-2

- O vetor velocidade de uma partícula é dado por:  $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$ , onde  $t$  é o tempo e todas as unidades são do Sistema Internacional. Determine a expressão do vetor deslocamento da partícula, sabendo que para  $t = 0$  ela se encontra no ponto  $x = 0, y = 0$ .  
Resposta:  $\mathbf{r} = 8t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j}$ .
- Uma partícula se movimenta de modo que sua posição em função do tempo é dada por:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} - t\mathbf{k}$$

- Escreva expressões para a sua velocidade e aceleração em função do tempo.
- Qual é a trajetória da partícula?

- (a) Escreva sob forma vetorial as equações 4-4b, b'. (b) Escreva sob forma vetorial as equações 4-4c, c'. (c) Escreva sob forma vetorial as equações 4-4d, d'.

Resposta: (a)  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v})t$

(b)  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$

(c)  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$

## SEÇÃO 4-3

- Considere um projétil no ponto mais alto de sua trajetória. (a) Qual o valor de sua velocidade em termos de  $v_0$  e  $\theta_0$ ? (b) Qual é a sua aceleração? (c) Qual é a relação entre as direções de sua velocidade e de sua aceleração? (Ver a questão 10.)
- Uma bola rola para fora de uma mesa de 1,0 m de altura. A bola atinge o solo em um ponto 1,2 m horizontalmente distante da borda da mesa. Determine: (a) a velocidade da bola no instante em que saiu da mesa, (b) a velocidade da bola no instante em que chega ao solo.
- Um rifle cuja velocidade de disparo é de 550 m/s é usado para atirar em um alvo distante de 45 m. Para que altura acima do centro do alvo o rifle deverá ser apontado, de modo que a bala atinja o alvo?
- A Fig. 4-14 indica diversas trajetórias em função do ângulo de lançamento. (a) Calcule o alcance de um projétil que possui velocidade inicial  $v_0$  e ângulo de lançamento  $\theta_0$ . (b) Ache o alcance máximo. (c) Calcule a altura máxima atingida pelo projétil. (d) Determine o ângulo de lançamento para o qual o alcance e a altura máxima de um projétil são iguais.

Resposta: (a)  $R = (v_0^2/g) \sin 2\theta_0$ . (b)  $v_0^2/g$ . (c)  $y_{\text{máx.}} = (v_0 \sin \theta_0)^2/2g$ .  
(d)  $76^\circ$ .

- Uma arma, localizada a 40 m acima de uma planície horizontal, dispara horizontalmente um projétil com uma velocidade inicial de 300 m/s. (a) Quanto tempo o projétil permanece no ar? (b) A que distância horizontal ele atinge o solo? (c) Qual o módulo do componente vertical de sua velocidade quando ele atinge o solo?

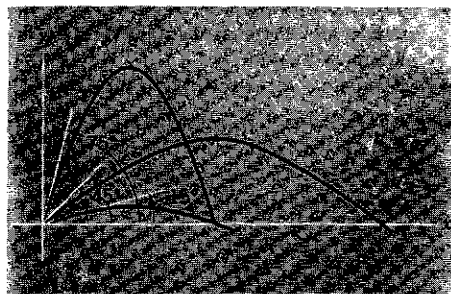


figura 4-14

## problemas

10. Uma bola é atirada do chão para o ar. Quando ela atinge uma altura de 9,0 m, a velocidade é dada por:  $v = 6i + 3j$  em m/s (eixo  $Ox$  horizontal, eixo  $Oy$  vertical). (a) Até que altura a bola subirá? (b) Qual será a distância horizontal total percorrida pela bola? (c) Qual é a velocidade da bola (módulo e direção) no instante anterior a que ela toca o chão?  
*Resposta:* (a) 9,45 m. (b) 16,7 m. (c) *Módulo:* 14,9 m/s; *direção:* forma um ângulo de  $66^\circ$  com o eixo  $Ox$ ; *sentido:* de cima para baixo.
11. Elétrons, núcleos, átomos e moléculas, como qualquer forma de matéria, caem por ação da gravidade. Considere, separadamente, um feixe de elétrons, um de núcleos, um de átomos e um de moléculas, percorrendo uma distância horizontal de 80 cm. Considere uma velocidade escalar média de  $3,0 \times 10^7$  m/s para um elétron, de  $2,2 \times 10^3$  m/s para um nêutron térmico, de  $5,8 \times 10^2$  m/s para um átomo de neônio e de  $4,6 \times 10^2$  m/s para uma molécula de oxigênio. Suponha que os feixes movem-se no vácuo com velocidades iniciais horizontais e calcule o quanto suas trajetórias se desviam de uma linha reta (desvio vertical no percurso de 80 cm) por ação da gravidade. Como se comparam estes resultados com os de um feixe de bolas de golfe (procure avaliar razoavelmente os dados). Que fator controla as diferenças nos desvios?
12. Um bombardeiro, mergulhando em um ângulo de  $60^\circ$  com a vertical, lança uma bomba de uma altitude de 700 m. A bomba atinge o solo 5,0 s após ser lançada. (a) Qual é a velocidade do bombardeiro? (b) Qual a distância que a bomba percorre horizontalmente durante seu trajeto? (c) Quais os componentes horizontal e vertical de sua velocidade exatamente antes de atingir o solo?  
*Resposta:* (a) 231 m/s. (b) 1 km. (c)  $v_x = 200$  m/s,  $v_y = 164,5$  m/s.
13. Uma bola de futebol é chutada com velocidade inicial  $v_0$  e com um ângulo de projeção de  $45^\circ$ . Qual deve ser o valor de  $v_0$  para que a bola atinja a linha de gol, situada a 80 m do local do chute?
14. Em um tubo de raios catódicos, um feixe de elétrons é projetado horizontalmente com velocidade de  $1,0 \times 10^8$  cm/s, na região entre um par de placas horizontais de 1,0 cm de comprimento. O campo elétrico existente entre as placas imprime aos elétrons uma aceleração constante de  $1,0 \times 10^{16}$  cm/s<sup>2</sup> e dirigida para baixo. Calcule: (a) o deslocamento vertical do feixe de elétrons, ao emergir das placas e (b) a velocidade (módulo, direção e sentido) do feixe neste mesmo instante.  
*Resposta:* (a) 5 mm,  
 (b)  $v_x = 10^6$  m/s,  $v_y = 10^6$  m/s, para baixo.
15. Um jogador de futebol chuta uma bola a 0,2 m de altura acima do solo, de modo que seu ângulo de lançamento seja de  $60^\circ$  e sua velocidade inicial de 25 m/s. A bola toma a direção da linha lateral esquerda do campo, onde uma cerca de 5,0 m de altura está localizada a 100 m do jogador. A bola transporá a cerca?
16. Um canhão dispara um projétil com velocidade inicial de 300 m/s. Calcule o alcance máximo atingido pelo projétil.  
*Resposta:* 9,17 km.
17. Um bola rola do alto de uma escada com uma velocidade horizontal de módulo igual a 2,0 m/s. Os degraus têm 20 cm de altura por 35 cm de largura. Que degrau a bola tocará primeiro?
18. Mostre que se a aceleração devida à gravidade sofre uma variação  $dg$ , o alcance de um projétil (ver Probl. 8), com velocidade inicial  $v_0$  e ângulo de lançamento  $\theta_0$ , sofrerá uma variação  $dR$  tal que  $dR/R = -dg/g$ . Caso a aceleração da gravidade sofra uma pequena variação  $\Delta g$  (digamos em virtude da variação da latitude), o alcance de um projétil também sofreria uma variação. Seja  $\Delta R$  a variação do alcance. Supondo  $\Delta R$  e  $\Delta g$  suficientemente pequenos, podemos escrever  $\Delta R/R = -\Delta g/g$ . Em 1936, Jesse Owens estabeleceu o recorde mundial de 8,09 m de salto em distância nos Jogos Olímpicos de Berlin ( $g = 9,8128$  m/s<sup>2</sup>). Se, em vez desta Olimpíada, ele tivesse competido na Olimpíada de Melbourne em 1956 (onde  $g = 9,7999$  m/s<sup>2</sup>), qual deveria ser seu novo recorde?  
*Resposta:* Seu recorde teria sido maior em cerca de 1 cm.
19. Um malabarista consegue manter cinco bolas em movimento, arremessando, para cima uma de cada vez, em seqüência, até uma altura de 2,5 m. (a) Determine o intervalo de tempo entre os arremessos sucessivos. (b) Dar as posições das outras bolas no instante em que uma delas chega a sua mão. Despreze o tempo gasto para transferir as bolas de uma das mãos para a outra.
20. Considere a Fig. 4-15. Um canhão é ajustado para lançar projéteis, com velocidade inicial  $v_0$ , diretamente para cima, na rampa de uma colina cujo ângulo de elevação vale  $\alpha$ . Determine o ângulo formado entre a direção da bala do canhão e a horizontal para que se obtenha o alcance máximo possível sobre o plano inclinado da colina.  
*Resposta:*  $(\pi/4) + (\alpha/2)$ .
21. Um artilheiro de um time de futebol pode impulsionar a bola com uma velocidade de 25 m/s. Ele deve chutar a bola numa posição situada a 40 m da baliza cuja trave hori-

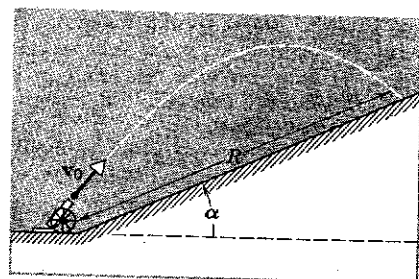


figura 4-15

zontal está situada a uma altura de 2,3 m acima do solo. Determine o intervalo de ângulos possíveis para que a bola atinja as redes da baliza.

22. Um operador de radar, na superfície do solo, observa a aproximação de um projétil. Num dado instante ele obtém as seguintes informações: o projétil se encontra na sua altitude máxima e está se movendo horizontalmente com velocidade  $v$ ; a distância em linha reta desde o ponto de observação até o ponto em que se encontra é igual a  $l$ ; a linha de observação do projétil está orientada formando um ângulo  $\theta$  acima da horizontal. (a) Encontre uma expressão para a distância  $D$  entre o observador e o ponto de impacto do projétil. (b) Qual a condição para que o projétil atinja o observador? (c) Estabeleça a condição para que o projétil ultrapasse o observador e a condição para que o projétil não ultrapasse o observador.

Resposta: (a)  $D = |v\sqrt{(2l/g)\sin\theta} - l\cos\theta|$ .

(b)  $l\cos\theta = |v\sqrt{(2l/g)\sin\theta}|$ .

(c) O projétil transporá o observador se  $D$  for positivo e não ultrapassará o observador se  $D$  for negativo.

23. Várias pedras são lançadas de um ponto situado a uma distância  $R$  da borda de um penhasco de altura  $h$ , de tal modo que atingem o solo a uma distância  $x$  da base do penhasco, conforme indica a Fig. 4-16. Se você desejasse para  $x$  o menor valor possível, como você ajustaria  $\theta_0$  e  $v_0$ , supondo que é possível fazer variar  $v_0$  desde zero até um certo valor máximo finito e que  $\theta_0$  pode variar continuamente?

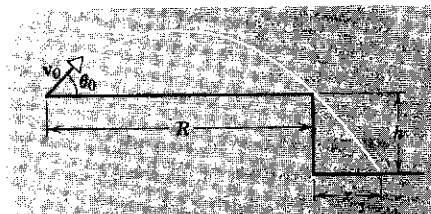


figura 4-16

#### SEÇÃO 4-4

24. As chamadas estrelas de nêutrons possuem densidades extremamente elevadas. Acredita-se que certas estrelas de nêutrons possuem um período da ordem de 1 s. Suponha que uma destas estrelas possua um raio de 30 km. Calcule a aceleração centrípeta de uma partícula no equador desta estrela.

Resposta:  $1,2 \times 10^6 \text{ m/s}^2$ .

25. Quando uma partícula carregada se move num campo magnético ela sofre um desvio numa direção perpendicular à direção do movimento inicial. O raio de curvatura da trajetória de um elétron num dado instante vale 0,07 m. Neste instante o elétron sofre no interior do campo magnético uma aceleração radial igual a  $2,0 \times 10^{14} \text{ m/s}^2$ . Calcule o módulo da velocidade do elétron neste instante.

26. No modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, o elétron gira em torno do próton numa órbita circular de raio  $r$ . A aceleração centrípeta do elétron no átomo de hidrogênio vale aproximadamente  $9,0 \times 10^{22} \text{ m/s}^2$ . Estime o valor de  $r$ , sabendo que o período vale  $1,5 \times 10^{-16} \text{ s}$ .

Resposta:  $r = 5,28 \times 10^{-11} \text{ m}$ .

27. Uma partícula está em repouso no topo de um cilindro de raio  $R$ . Determine o menor valor da velocidade horizontal da partícula para que ela abandone o cilindro sem deslizar sobre o mesmo.

28. (a) Obtenha uma expressão para o cálculo da aceleração centrípeta provocada pela rotação da Terra em função da latitude  $\theta$  do local. (b) Calcule a aceleração centrípeta nos pólos da Terra e ao longo do equador da Terra. (c) Ache a aceleração centrípeta nas seguintes latitudes:  $\theta = 30^\circ$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\theta = 60^\circ$ . (d) Por qual fator deveria ser multiplicada a velocidade angular de rotação da Terra para que a aceleração centrípeta se tornasse igual a  $g/2$  no equador da Terra?

Resposta: (a)  $\omega^2 R \cos\theta$ , onde  $\omega$  é a velocidade angular de rotação da Terra e  $R$  é o raio equatorial da Terra (supondo a Terra uma esfera). (b) Nos pólos: 0; no equador:  $0,034 \text{ m/s}^2$ . (c)  $0,029 \text{ m/s}^2$ ;  $0,024 \text{ m/s}^2$ ;  $0,017 \text{ m/s}^2$ .

29. Um menino faz girar uma pedra num círculo horizontal a 1,5 m acima do solo por meio de um barbante de 1,2 m de comprimento. O barbante arrebenta e a pedra é lançada horizontalmente, colidindo com o chão a 10 m de distância. Calcule a aceleração centrípeta da pedra durante o movimento circular.

30. Uma partícula  $P$  percorre o círculo de 2,0 m de raio indicado na Fig. 4-17. O período do movimento é de 30 s e a rotação possui sentido anti-horário. A partícula passa através da origem  $O$  no instante inicial  $t = 0$ . Determine: (a) o vetor posição para  $t = 8 \text{ s}$ , (b) o vetor deslocamento no intervalo entre  $t = 3$  e  $t = 5 \text{ s}$ . (c) o vetor velocidade média neste mesmo intervalo, (d) o vetor velocidade instantânea no início e no final deste intervalo, (e) o vetor aceleração média neste intervalo, (f) o vetor aceleração instantânea no início e no final deste intervalo.

Resposta: (a) 2,97 m;  $48^\circ$ , (b) 0,83 m;  $48,4^\circ$ , (c) 0,41 m/s;  $48,4^\circ$ , (d) 0,42 m/s;  $36^\circ$ ; 0,42 m/s;  $60^\circ$ , (e) 0,17 m/s<sup>2</sup>;  $320^\circ$ , (f) 0,09 m/s<sup>2</sup>;  $126^\circ$ ; 0,09 m/s<sup>2</sup>;  $150^\circ$ .

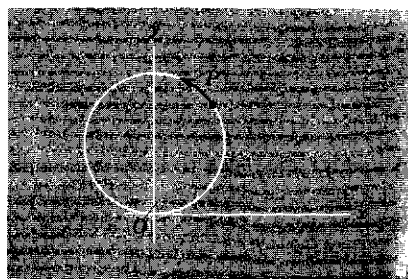


figura 4-17

31. (a) Obtenha uma expressão para o vetor posição  $r$  de uma partícula que descreve um movimento circular uniforme, usando coordenadas cartesianas ortogonais e os vetores unitários  $i$  e  $j$ . (b) A partir da expressão do vetor posição deduza expressões para a velocidade  $v$  e para a aceleração  $a$ . (c) Prove vetorialmente que a aceleração no movimento circular uniforme é dirigida para o centro da circunferência.

32. (a) Expresse os vetores unitários  $u_r$  e  $u_\theta$  na Fig. 4-8 em termos de  $i$ , de  $j$  e do ângulo  $\theta$ . (b) Obtenha uma expressão para o vetor posição  $r$  em função de  $u_r$  e  $u_\theta$  supondo um movimento circular uniforme. (c) A partir da expressão obtida no item anterior obtenha uma relação entre  $v$  e  $u_\theta$  e obtenha uma outra relação entre  $a$  e  $u_r$ .

Resposta: (a)  $u_r = \cos \theta i + \sin \theta j$ ;  $u_\theta = -\sin \theta i + \cos \theta j$ . (b)  $r = r u_r$ .  
(c)  $v = v u_\theta$ ;  $a = -(v^2/r) u_r$ .

33. Uma partícula descreve um movimento circular uniforme em torno de uma origem  $O$  com velocidade  $v$ . (a) Mostre que o tempo  $\Delta t$  necessário para que ela sofra um deslocamento angular  $\Delta\theta$  é dado por

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{v} \Delta\theta / 360^\circ$$

em que  $\Delta\theta$  é dado em graus e  $r$  é o raio do círculo. Considere a Fig. 4-18. (b) Calcule os componentes  $x$  e  $y$  nos pontos 1 e 2 e mostre que os componentes da aceleração média valem  $\bar{a}_x = 0$  e  $\bar{a}_y = -0,9 v^2/r$ , para intervalos simétricos em torno do eixo  $Oy$  para os quais  $\Delta\theta = 90^\circ$ . (c) Mostre que para  $\Delta\theta = 30^\circ$ , obtemos:  $\bar{a}_x = 0$  e  $\bar{a}_y = -0,99 v^2/r$ . (d) Diminuindo o ângulo  $\Delta\theta$  mostre que quando  $\Delta\theta$  tende a zero, o valor de  $\bar{a}_y$  tende a  $-v^2/r$ ; usando a simetria circular mostre que a aceleração instantânea tem módulo igual a  $v^2/r$  e aponta para o centro  $O$  em cada ponto do círculo.

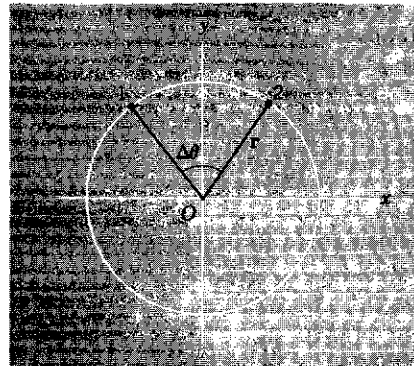


figura 4-18

SEÇÃO 4-5

34. Os componentes do vetor posição de uma partícula são dados por:

$$x = R \sin \omega t + \omega R t$$

$$y = R \cos \omega t + R$$

onde  $\omega$  e  $R$  são constantes. A extremidade do vetor posição acima descreve uma curva chamada *ciclóide*. A ciclóide é a trajetória descrita por um ponto situado na borda de uma roda que rola sem deslizar ao longo do eixo  $Ox$ . Determine o módulo das componentes da velocidade e da aceleração da partícula quando ela se encontra: (a) no valor máximo de  $y$ , (b) no valor mínimo de  $y$ .

Resposta: (a)  $v_x = 2\omega R$ ,  $v_y = 0$ ;  $a_x = 0$ ,  $a_y = -\omega^2 R$ . (b)  $v_x = v_y = 0$ ;  $a_x = 0$ ,  $a_y = +\omega^2 R$ .

SEÇÃO 4-6

35. As gotas de água da chuva caem verticalmente com velocidade de 8 m/s. Um automóvel percorre uma estrada retilínea com uma velocidade de 60 km/h. Determine o módulo, a direção e o sentido da velocidade das gotas de água em relação a um observador situado dentro deste automóvel.

36. Um barco leva um tempo  $t = 20$  s para ir de um ponto  $A$  a um ponto  $B$  situado sobre a mesma margem de um rio, se deslocando no sentido contrário ao da corrente. Quando ele volta do ponto  $B$  ao ponto  $A$ , o barco gasta um tempo igual a  $t/2$ . A velocidade do barco em relação à água é constante e igual a 8 m/s. Calcule a distância  $AB$ .

Resposta: 106,7 m.

37. Um helicóptero está sobrevoando, em linha reta, uma planície com uma velocidade constante de 6 m/s e a uma altitude constante de 8 m. Um fardo é atirado para fora horizontalmente com uma velocidade inicial de 10 m/s em relação ao helicóptero e em direção oposta ao seu movimento. (a) Ache a velocidade inicial do fardo em relação ao solo. (b) Calcule a distância horizontal entre o helicóptero e o fardo no instante em que este cai ao solo. (c) Determine o ângulo que o vetor velocidade do fardo faz com o solo no instante imediatamente anterior ao impacto.

38. Quando dois automóveis se movem uniformemente em sentidos contrários sobre a mesma estrada retilínea, eles conseguem se aproximar de 9 m a cada décimo de segundo. Quando eles se deslocam no mesmo sentido com as mesmas velocidades originais, conseguem, a cada segundo, se aproximar de 10 m. Calcule as velocidades originais destes automóveis.

Resposta: 50 m/s, 40 m/s.

39. Um homem consegue remar um barco, em águas paradas, com uma velocidade de 4,5 km/h. (a) Suponha que ele esteja atravessando um rio em que a velocidade da correnteza vale 2,0 km/h; determine a direção segundo a qual ele deve orientar o barco para que ele atinja um ponto diretamente oposto ao ponto de onde ele partiu numa das margens do rio. (b) Se a largura do rio for igual a 3,0 km, quanto tempo o barco levará para atravessar o rio nas condições do item anterior? (c) Quanto tempo ele gastaria se o homem remasse 2,0 km rio abaixo e, em seguida, ele retornasse ao ponto de partida? (d) Quanto tempo ele gastaria para fazer um percurso inverso ao do item anterior, isto é, primeiro remar 2,0 km rio acima e, em seguida, retornar ao ponto de partida? (e) Em que direção o homem deveria orientar o barco se ele desejasse atravessar o rio no menor tempo possível?
40. O piloto de um avião mede a velocidade do vento em relação ao avião. Ele verifica que o módulo desta velocidade vale 25 km/h e que o ângulo formado entre a direção da velocidade do vento em relação ao avião e a direção do avião vale  $60^\circ$ . Um observador situado no solo informa ao piloto, através do rádio, que a velocidade do vento em relação ao solo possui módulo igual a 45 km/h. (a) Ache o módulo da velocidade do avião em relação ao solo. (b) Determine o ângulo formado entre a velocidade do vento e a velocidade do avião, medido pelo observador situado no solo.  
Resposta: (a) 52 km/h. (b)  $28,7^\circ$ .
41. Um piloto deseja voar de Oeste para Leste, de um ponto  $P$  a um ponto  $Q$  e, em seguida, seguir de Leste para Oeste, retornando ao ponto  $P$ . A velocidade do avião, no ar, é igual a  $v'$  e a velocidade do ar em relação ao solo é igual a  $u$ . A distância entre  $P$  e  $Q$  vale  $D$  e a velocidade do avião no ar  $v'$  é constante. (a) Se  $u = 0$  (ar parado), mostre que o tempo para a viagem de ida e volta vale  $t_0 = 2D/v'$ . (b) Suponha que a velocidade do vento esteja dirigida para Leste (ou para Oeste); neste caso, mostre que o tempo de ida e volta será:

$$t_L = \frac{t_0}{1 - u^2/(v')^2}$$

(c) No item anterior devemos supor  $u < v'$ . Por quê?

42. Uma partícula  $A$  se desloca em relação a outra partícula  $B$  com uma velocidade relativa dada por:  $v_{AB} = 2i - j$ . A partícula  $B$  se desloca em relação a uma outra partícula  $C$  com uma velocidade relativa dada por:  $v_{BC} = i - 2j$ . Determine a velocidade da partícula  $A$  em relação à partícula  $C$ .  
Resposta:  $v_{AC} = 3i - 3j$ .
43. Um homem quer atravessar um rio de 700 m de largura. O barco, no qual ele rema, possui velocidade em relação à água igual a 4 km/h. A velocidade da correnteza é de 2 km/h. Quando o homem caminha na terra firme sua velocidade é de 4,8 km/h. Ao atravessar o rio a remo ele atinge um ponto a jusante do local inicial; a seguir ele retorna a pé até o ponto oposto ao ponto onde ele se encontrava na outra margem do rio. (a) Determine a trajetória combinada (entre atravessar o rio e andar) para que o tempo de percurso seja mínimo (para atingir o ponto considerado). (b) Calcule o valor deste tempo mínimo.



# 5

## *dinâmica*

### *da partícula-1*

Nos Caps. 3 e 4 estudamos o movimento de uma partícula, principalmente os movimentos retilíneo e plano, sem indagar a "causa" do mesmo; simplesmente o descrevemos, utilizando os vetores  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$ . Nossa discussão, portanto, foi em grande parte geométrica. No presente capítulo e no seguinte vamos discutir as causas do movimento, parte da mecânica denominada *dinâmica*. Como antes, os corpos serão tratados como partículas isoladas; posteriormente, estudaremos grupos de partículas e corpos rígidos.

O movimento de uma partícula é determinado pela natureza e pela disposição de outros corpos, que constituem sua *vizinhança*. A Tab. 5-1 representa algumas "partículas" e possíveis vizinhanças para elas.

Vamos limitar-nos ao caso especial, mas muito importante, de objetos grandes que se movam com velocidades muito menores que a da luz, indicada por  $c$ ; esse é o domínio da *mecânica clássica*. Em particular, não abordaremos aqui, questões tais como o movimento de um elétron em um átomo de urânio, ou a colisão de dois prótons cujas velocidades são, digamos,  $0,90c$ . A primeira dessas questões nos envolveria com a teoria quântica e a segunda com a teoria da relatividade. Essas teorias, das quais a mecânica clássica é um caso especial (V. Seç. 6.4), serão deixadas para mais tarde.

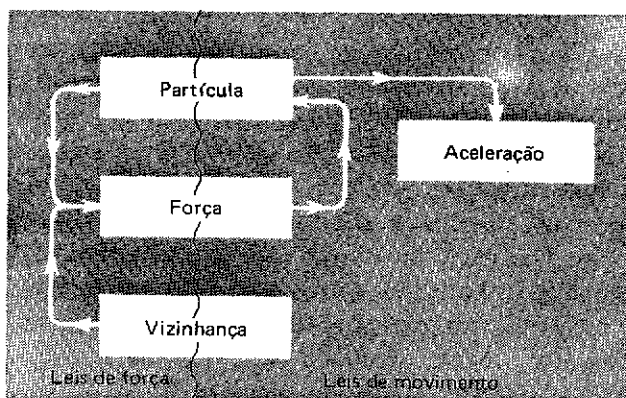
O problema central da mecânica clássica de uma partícula é o seguinte: (1) É dada uma partícula, da qual conhecemos as características (massa, carga elétrica, momento de dipolo magnético etc.). (2) Colocamos essa partícula, com velocidade inicial conhecida, em

5-1

*MECÂNICA CLÁSSICA*

uma vizinhança que podemos descrever completamente. (3) Problema: qual o movimento subsequente da partícula?

Este problema foi resolvido, pelo menos para uma grande variedade de vizinhanças, por Isaac Newton (1642-1727), quando propôs as leis do movimento e formulou a lei de gravitação universal. O método para resolver esse problema, nos termos de nosso atual conhecimento da mecânica clássica,<sup>1</sup> é o seguinte: (1) Introduzimos o conceito de *força*  $F$ , que definimos por meio da aceleração  $a$  adquirida por um determinado corpo-padrão. (2) Estabelecemos um processo para atribuir uma *massa*  $m$  a um corpo, de modo que possamos entender o fato de que diferentes partículas de mesma espécie adquirem acelerações diferentes na mesma vizinhança. (3) Finalmente, tentamos calcular as forças que atuam nas partículas, a partir das propriedades delas e de sua vizinhança, isto é, procuramos descobrir as *leis de força*. A força, que é essencialmente uma técnica de relacionar a vizinhança com o movimento de uma partícula, aparece tanto nas leis do movimento (que nos informam que aceleração terá um corpo sob a ação de determinada força) como nas leis de força (que nos permitem calcular a força que atuará sobre um dado corpo, em determinada vizinhança). As leis do movimento e as leis de força constituem, em conjunto, as leis da mecânica, como é sugerido pelo esquema abaixo.


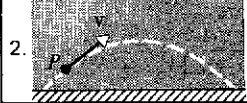
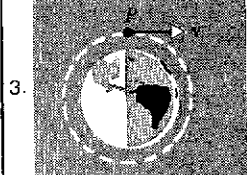
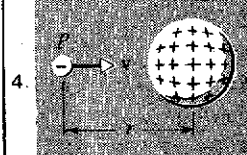
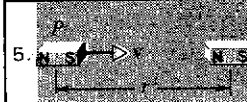


O método utilizado em mecânica não pode ser comprovado por partes. Devemos encará-la como uma unidade e julgaremos seu êxito se pudermos responder afirmativamente a duas perguntas: (1) O método dá resultados em acordo com a experiência? (2) As leis de força têm formas simples? A glória suprema da mecânica clássica newtoniana consiste em podermos responder afirmativamente a ambas as perguntas.

Nesta seção utilizamos os termos força e massa com muita imprecisão, identificando força com a influência da vizinhança, e massa com a resistência que um corpo oferece ao ser acelerado por uma força, propriedade freqüentemente denominada inércia. Em seções posteriores refinaremos essas idéias primitivas sobre força e massa.

<sup>1</sup> Ver "Presentation of Newtonian Mechanics", por Norman Austern, *American Journal of Physics*, setembro de 1961; "On the Classical Laws of Motion", por Leonard Eisenbud, *American Journal of Physics*, março de 1958; e "The Laws of Classical Motion: What's  $F$ ? What's  $m$ ? What's  $a$ ?" por Robert Weinstock, *American Journal of Physics*, outubro de 1961, para exposições das leis da mecânica clássica como as interpretamos, quase 300 anos depois de Newton.

Table 5-1

Sistema	A Partícula	A Vizinhança
1. 	Um bloco	A mola; a superfície áspera.
2. 	Uma bola de golfe.	A Terra
3. 	Um satélite	A Terra
4. 	Um elétron	Uma esfera uniformemente carregada.
5. 	Uma barra imantada	Uma outra barra imantada

Durante séculos, o problema do movimento e de suas causas foi um tema central da “filosofia natural”, o nome antigo da física. No entanto, somente na época de Galileu e Newton foi que se realizou progresso extraordinário no conhecimento do assunto. Isaac Newton, nascido na Inglaterra no ano em que morreu Galileu, é o arquiteto principal da mecânica clássica.<sup>2</sup> Ele desenvolveu plenamente as idéias de Galileu e de outros que o precederam. As três leis do movimento, que hoje têm o seu nome, foram apresentadas pela primeira vez (1866), na sua obra *Principia Mathematica Philosophiæ Naturalis*, usualmente chamada de *Principia*.

Antes da época de Galileu, a maioria dos filósofos pensava que alguma influência ou “força” fosse necessária para manter um corpo em movimento; supunham que um corpo em repouso estivesse em seu “estado natural”. Para um corpo mover-se em linha reta com velocidade constante, por exemplo, acreditavam que algum agente externo teria de empurrá-lo continuamente, de outro modo ele “naturalmente” pararia.

Se quiséssemos comprovar experimentalmente essas idéias, teríamos primeiro de encontrar um modo de livrar um corpo de todas as influências de sua vizinhança ou de todas as forças. Isso é difícil de fazer, mas em certos casos podemos reduzir muito as forças. Estudando o movimento à medida que as forças se tornam cada vez menores, teremos alguma idéia de como seria ele se as forças externas fossem realmente nulas.

Coloquemos nosso corpo de prova, digamos um bloco, sobre um plano horizontal rígido. Fazendo o bloco deslizar sobre esse plano, notaremos que ele gradualmente diminui de velocidade e

## 5-2

## PRIMEIRA LEI DE NEWTON

<sup>2</sup> Newton inventou também o cálculo (“fluxional”), concebeu a idéia de gravitação universal e formulou a respectiva lei, além de descobrir a composição da luz branca. Foi hábil experimentador e um matemático de primeira ordem, o que atualmente poderia denominar-se físico teórico.

pára. Esta observação, na verdade, foi utilizada para apoiar a idéia de que o movimento cessava quando era removida a força externa, neste caso o empurrão aplicado inicialmente ao bloco pela mão. Podemos argumentar contra esta concepção, raciocinando do modo seguinte: Repetimos nossa experiência, usando um bloco mais liso e um plano mais polido, além de um lubrificante. Notaremos que a velocidade decresce mais lentamente do que antes. Utilizemos blocos e superfícies ainda mais polidos e melhores lubrificantes, verificamos que a velocidade do bloco decresce a uma taxa cada vez menor e de cada vez percorre maior distância, antes de parar.<sup>3</sup> Podemos, agora, extrapolar e dizer que, se pudéssemos eliminar todo o atrito, o corpo continuaria indefinidamente em movimento retilíneo com velocidade constante. Alguma força externa necessária para *modificar* a velocidade de um corpo, mas nenhuma força externa seria exigida para *manter* tal velocidade. Nossa mão, por exemplo, exerce uma força sobre o bloco quando o põe em movimento. O plano áspero exerce uma força sobre o corpo ao diminuir sua velocidade. Ambas as forças produzem uma variação na velocidade, isto é, produzem aceleração.

Esse princípio foi adotado por Newton como a primeira de suas três leis do movimento. Newton enunciou sua primeira lei nas seguintes palavras: *“Qualquer corpo permanece em seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja obrigado a modificar tal estado por forças aplicadas a ele”*.

A primeira lei de Newton é de fato uma afirmação sobre referenciais, pois, em geral, a aceleração de um corpo depende do sistema de referência em relação ao qual ela é medida. A primeira lei nos diz que, se não houver objetos próximos (e com isso entendemos que não haja forças, pois qualquer força deve estar associada a um objeto da vizinhança), então é possível encontrar uma família de referenciais em que a partícula não possui aceleração. O fato de os corpos permanecerem em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, na ausência de forças aplicadas, é freqüentemente descrito atribuindo à matéria uma propriedade denominada inércia. A 1.<sup>a</sup> lei de Newton é freqüentemente chamada lei de inércia e os referenciais aos quais ela se aplica, são, por isso, chamados referenciais inerciais. Tais referenciais ou são fixos em relação às estrelas distantes, ou se movem com velocidade constante em relação a elas.

Neste livro, em quase todos os casos aplicaremos as leis da mecânica clássica admitindo o ponto de vista de um observador em um referencial inercial. É possível resolver problemas de mecânica utilizando um referencial não-inercial, tal como um sistema de coordenadas que gira em relação às estrelas fixas, mas para fazê-lo temos de introduzir forças (chamadas muitas vezes de *forças fictícias*) que não podem ser associadas a objetos da vizinhança. Esse assunto será discutido nos Caps. 6, 11 e 16. Um referencial ligado à Terra pode ser considerado como inercial na maioria dos casos práticos. No Cap. 16 veremos até que ponto essa aproximação é boa.

Note que, na primeira lei, não existe diferença entre um corpo em repouso e outro que se move com velocidade constante, ambas as situações são “naturais” na ausência de forças. Tal fato torna-se

<sup>3</sup> O estudante pode ter realizado no laboratório alguma experiência com o “disco de gelo seco”. É um dispositivo que pode mover-se sobre uma superfície horizontal lisa, flutuando em uma camada de CO<sub>2</sub> gasoso. O atrito entre o disco e a superfície é de fato muito pequeno, sendo difícil registrar qualquer diminuição de velocidade em trajetórias de tamanhos práticos.

claro quando um corpo, em repouso em dado referencial inercial, é visto de um segundo referencial inercial, isto é, de um referencial que se move com velocidade constante em relação ao primeiro. Um observador no primeiro referencial supõe que o corpo está em repouso, um observador no segundo referencial julga o mesmo corpo em movimento com velocidade constante. Ambos notam que o corpo não possui aceleração, isto é, não modifica sua velocidade, e ambos concluem que, de acordo com a primeira lei, não há forças atuando no corpo.

Note, também, que se deduz não haver diferença, na primeira lei, entre a ausência de quaisquer forças e a presença de forças cuja resultante seja nula. Por exemplo, se empurrarmos um livro com nossa mão, exercendo uma força exatamente igual à força de atrito, o livro irá mover-se com velocidade constante. Daí um outro modo de enunciar a primeira lei: *Se nenhuma força resultante atua sobre um corpo, sua aceleração  $a$  é nula.*

Se existe interação entre o corpo e objetos da vizinhança, o efeito pode ser o de alterar o estado "natural" do movimento do corpo. Para investigar isso, devemos, agora, examinar com cuidado o conceito de força.

Refinemos nosso conceito de força, definindo-a operacionalmente. Na linguagem cotidiana, associamos força com empurrar ou puxar, talvez com nossos músculos. Em Física, entretanto, necessitamos de uma definição mais precisa. Define-se a força em termos da aceleração que um dado corpo-padrão adquire, quando colocado em uma vizinhança adequada.

Como corpo-padrão é conveniente usar (ou antes, imaginar que usamos!) o *quilograma-padrão* (ver Fig. 1-2). Este corpo foi selecionado como nosso padrão de *massa*, sendo-lhe atribuída, por definição, uma massa  $m_0$  de exatamente 1 kg. Mais tarde, descreveremos como atribuir massas a outros corpos.

Como vizinhança, escolhamos uma mesa horizontal de atrito desprezível, sobre a qual colocamos o corpo-padrão, ligando-lhe uma mola. O outro extremo da mola seguramos em nossa mão, como na Fig. 5-1a. Puxemos, agora, a mola horizontalmente para a direita, de forma que, por tentativas, consigamos dar ao corpo-padrão uma aceleração uniforme de  $1,00 \text{ m/s}^2$ . Declaramos, então, *como definição*, que a mola (ou seja, o corpo importante na vizinhança) está exercendo sobre o corpo-padrão uma força cujo valor denominaremos "1,00 newton", ou em notação do SI: 1,00 N. Notemos que, exercendo esta força, a mola mantém-se distendida de um comprimento  $\Delta l$  além de seu comprimento normal, como indica a Fig. 5-1b.

### 5-3 FORÇA

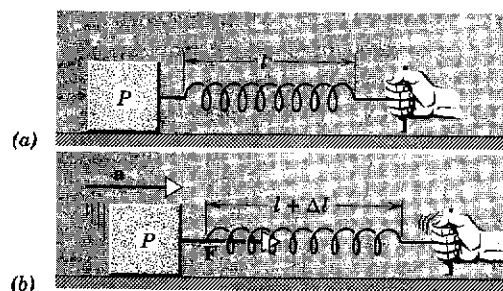


figura 5-1

(a) "Partícula"  $P$  (o quilograma-padrão) em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. (b) Acelera-se o corpo puxando-se a mola para a direita.

Podemos repetir a experiência, ou distendendo mais a mola ou usando uma mola mais dura, de modo que meçamos uma aceleração de  $2,00 \text{ m/s}^2$  para o corpo-padrão. Declaramos, então, que a mola exerce uma força de  $2,00 \text{ N}$  sobre o corpo-padrão. Em geral, se observarmos que o corpo-padrão escolhido possui uma aceleração  $a$  em uma dada vizinhança, dizemos, então, que esta exerce uma força  $F$  sobre o corpo-padrão, sendo  $F$  (em newtons) numericamente igual a  $a$  (em  $\text{m/s}^2$ ).

Verifiquemos se a força, como a definimos, é uma grandeza *vetorial*. Na Fig. 5-2b atribuímos um módulo à força  $F$ ; é simples atribuir-lhe, também, uma direção e um sentido, a saber, a direção e o sentido da aceleração que a força produz. No entanto, para que uma grandeza seja vetorial não basta que ela possua módulo, direção e sentido; ela deve, ainda, obedecer às leis da adição vetorial, descritas no Cap. 2. Somente a experiência poderá informar-nos se as forças, tal como as definimos, obedecem de fato a essas leis.

Exerçamos uma força de  $4,00 \text{ N}$  na direção do eixo  $Ox$  e uma outra de  $3,00 \text{ N}$  na direção de  $Oy$ , aplicando-as *simultaneamente* ao corpo-padrão, como antes, sobre uma mesa horizontal lisa (sem atrito). Qual será a aceleração do corpo-padrão? A experiência nos diria que seu valor é de  $5,00 \text{ N}$ , dirigida ao longo de uma reta que forma um ângulo de  $37^\circ$  com o eixo  $Ox$ . Em outras palavras, diríamos que sobre o corpo-padrão exercemos uma força de  $5,00 \text{ N}$ , na referida direção. Este mesmo resultado pode ser obtido adicionando vetorialmente, de acordo com a regra do paralelogramo, as forças de  $4,00 \text{ N}$  e de  $3,00 \text{ N}$ . Experiências desse tipo evidenciam conclusivamente que as forças são vetores: têm módulo, direção e sentido, e somam-se de acordo com a regra do paralelogramo.

O resultado de experiências deste tipo geral, é frequentemente enunciado assim: *Quando várias forças atuam sobre um corpo, cada uma produz independentemente sua própria aceleração. A aceleração resultante é a soma vetorial das várias acelerações independentes.*

Na Sec. 5-3 consideramos, apenas, as acelerações de um objeto determinado, o quilograma-padrão. Conseguimos, assim, definir qualitativamente as forças. Que efeito estas forças teriam em outros objetos? Como primeiro escolhemos, arbitrariamente, o corpo-padrão, sabemos que para qualquer objeto dado a aceleração será diretamente proporcional à força aplicada. A questão importante que restava era, portanto: que efeito terá a *mesma* força sobre *diferentes* objetos? A experiência diária dá-nos uma resposta qualitativa: a mesma força produzirá diferentes acelerações sobre diferentes corpos. Uma bola de futebol será mais acelerada, por uma dada força, do que um automóvel. A fim de obter uma resposta quantitativa para essa pergunta, necessitamos um método de medir massas, a propriedade de um corpo que determina sua resistência a uma variação de seu movimento.

Liguemos uma mola a nosso corpo-padrão (o quilograma-padrão, ao qual atribuímos, arbitrariamente, a massa  $m_0 = 1,00 \text{ kg}$ , exatamente) e provoquemos nele uma aceleração  $a_0$ , digamos, de  $2,00 \text{ m/s}^2$ , usando o método da Fig. 5-1b. Meçamos cuidadosamente o aumento  $\Delta l$  do comprimento da mola, associado à força que a mola exerce sobre o bloco.

#### 5-4

#### MASSA; SEGUNDA LEI DE NEWTON

Substituamos o quilograma-padrão por um corpo arbitrário, cuja massa denominamos  $m_1$ . Apliquemos a *mesma força* (a que acelerou o quilograma-padrão de  $2,0 \text{ m/s}^2$ ) ao corpo arbitrário (esticando a mola até o mesmo comprimento) e meçamos a aceleração  $a_1$ , suponhamos  $0,50 \text{ m/s}^2$ .

Definimos a razão das massas dos dois corpos como o inverso da razão das acelerações neles provocadas pela mesma força, ou seja,

$$m_1/m_0 = a_0/a_1 \text{ (agindo a mesma força } F\text{)}.$$

Neste exemplo temos, numericamente,

$$m_1 = m_0(a_0/a_1) = 1,00 \text{ kg } [(2,00 \text{ m/s}^2)/(0,50 \text{ m/s}^2)] = 4,00 \text{ kg}.$$

O segundo corpo, cuja aceleração é, apenas, um quarto da aceleração do primeiro, quando a mesma força atua nele, tem, por definição, massa quatro vezes maior que o primeiro corpo. Portanto, a massa pode considerar-se uma medida quantitativa da inércia.

Se repetirmos a experiência precedente com uma outra força comum, verificamos que a razão das novas acelerações,  $a_0'/a_1'$ , é a mesma que na experiência anterior, ou seja,

$$m_1/m_0 = a_0/a_1 = a_0'/a_1'.$$

A razão das massas dos dois corpos é, portanto, independente da força comum usada.

Além disso, a experiência mostra que podemos coerentemente atribuir massa a qualquer corpo, usando esse procedimento. Por exemplo, comparemos um segundo corpo arbitrário com o corpo-padrão, e determinemos sua massa, digamos  $m_2$ . Podemos, agora, comparar diretamente os dois corpos arbitrários,  $m_2$  e  $m_1$ , obtendo acelerações  $a_2''$  e  $a_1''$ , quando aplicamos a mesma força. A razão das massas, definida como antes,

$$m_2/m_1 = a_1''/a_2'' \text{ (agindo a mesma força)}$$

tem o mesmo valor que obteríamos utilizando as massas  $m_2$  e  $m_1$ , antes determinadas por comparação direta com o padrão.

Podemos mostrar, em outra experiência desse tipo, que se objetos de massas  $m_1$  e  $m_2$  forem ligados, eles se comportam mecanicamente como um único objeto de massa  $m_1 + m_2$ . Em outras palavras, as massas se adicionam como outras grandezas escalares.

Podemos, agora, resumir todas as experiências e definições descritas acima em uma equação, a equação fundamental da Mecânica Clássica:

$$F = ma. \quad (5-1)$$

Nessa equação,  $F$  é a soma (vetorial) de *todas* as forças que atuam *sobre* o corpo,  $m$  é a massa do corpo e  $a$  é sua aceleração (vetorial). A Eq. 5-1 pode ser considerada como um enunciado da segunda lei de Newton. Se a escrevermos sob a forma  $a = F/m$ , vemos facilmente que a aceleração do corpo é diretamente proporcional à força resultante que atua nele, sua direção e seu sentido são os mesmos que os da força e que, para uma dada força, ela é inversamente proporcional à massa do corpo.

Note que a primeira lei de movimento está contida na segunda, como caso particular, pois sendo  $\mathbf{F} = 0$ , resulta  $\mathbf{a} = 0$ . Em outras palavras, se a força resultante sobre um corpo for nula, a aceleração do corpo será nula também. Portanto, na ausência de forças aplicadas, um corpo mover-se-á com velocidade (vetorial) constante ou estará em repouso, exatamente o que prevê a primeira lei de movimento. Portanto, somente duas das três leis de Newton são independentes, a segunda e a terceira (Seç. 5-5). A parte da dinâmica da partícula que trata, apenas, de sistemas para os quais a força resultante  $\mathbf{F}$  é nula, chama-se *estática*.

A Eq. 5-1 é vetorial, podemos substituí-la por três equações escalares:

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y \quad \text{e} \quad F_z = ma_z, \quad (5-2)$$

que relacionam os componentes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  da força resultante ( $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ ) com os componentes  $a_x$ ,  $a_y$  e  $a_z$  da aceleração, para a massa  $m$ . Saliente-se que  $F_x$  é a soma dos componentes  $x$  de todas as forças que agem sobre  $m$  e analogamente para  $F_y$  e  $F_z$ .

As forças que atuam em um corpo originam-se em outros corpos que constituem sua vizinhança. Uma força é, apenas, um aspecto de uma interação mútua entre dois corpos. Verifica-se experimentalmente que, quando um corpo exerce uma força sobre outro, o segundo corpo sempre exerce uma força no primeiro. Além disso, verifica-se que essas forças têm mesmo módulo e mesma direção, mas sentidos opostos. É impossível existir uma única força isolada.

Se uma das duas forças envolvidas na interação entre dois corpos for denominada "ação", a outra será chamada "reação". Qualquer delas pode ser considerada "ação" e a outra "reação". Não há relação de causa e efeito; verifica-se, apenas, uma interação simultânea mútua.

Esta propriedade das forças foi enunciada originalmente por Newton em sua terceira lei de movimento: "*A cada ação sempre se opõe uma reação igual, ou seja, as ações mútuas de dois corpos, um sobre o outro, são sempre iguais e dirigidas para partes contrárias.*"

Em outras palavras, se o corpo  $A$  exerce uma força sobre o corpo  $B$ , este exercerá sobre  $A$  uma força igual, mas de sentido oposto; ação e reação têm a direção da reta que passa pelos dois corpos. Note que as forças de ação e de reação, que sempre ocorrem em pares, atuam sobre corpos diferentes. Se agissem no mesmo corpo, nunca teríamos movimento acelerado, pois a força resultante sobre qualquer corpo seria sempre nula.

Imagine um garoto abrindo uma porta com um chute. A força exercida sobre a porta,  $P$ , pelo menino,  $B$ , acelera a porta (que se abre); ao mesmo tempo, a porta,  $P$ , exerce uma força igual e oposta em  $B$ , que desacelera o garoto (seu pé diminui de velocidade para a frente). O menino se convencerá dolorosamente da força de "reação" à sua "ação", sobretudo se estiver descalço.

Os exemplos seguintes ilustram a aplicação da terceira lei de Newton e esclarecem o seu significado.

## 5-5 A TERCEIRA LEI DE NEWTON

### EXEMPLO 1

Consideremos um homem que puxa horizontalmente, por meio de uma corda, um bloco colocado sobre uma mesa horizontal, como na Fig. 5-2. O homem



exerce na corda uma força  $F_{HC}$ , a corda exerce no homem uma força de reação  $F_{CH}$ . De acordo com a terceira lei de Newton,  $F_{HC} = -F_{CH}$ . Além disso, a corda exerce no bloco uma força  $F_{CB}$  e o bloco exerce na corda a força de reação  $F_{BC}$ , ainda de acordo com a terceira lei,  $F_{CB} = -F_{BC}$ .

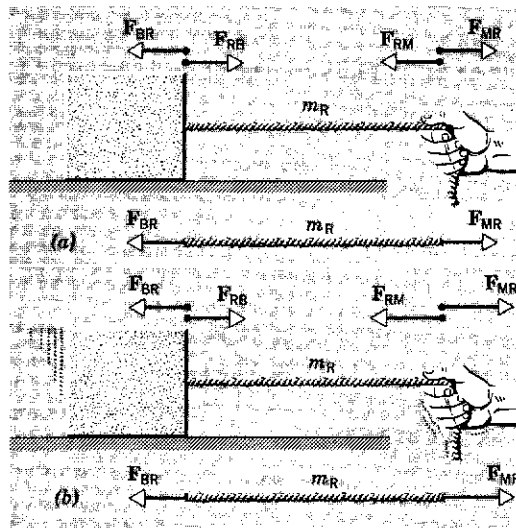


figura 5-2

Exemplo 1. Um homem puxa uma corda ligada a um bloco. (a) As forças exercidas sobre a corda pelo bloco e pelo homem são iguais e opostas. Portanto, a força horizontal resultante sobre a corda é nula, como indica o diagrama de corpo livre. A corda não é acelerada. (b) A força exercida sobre a corda pelo homem excede a que é exercida pelo bloco. A força horizontal resultante tem módulo  $F_{HC} - F_{BC}$  e está orientada para a direita, logo a corda é acelerada para a direita. Sobre o bloco age também uma força de atrito não indicada na figura.

Suponhamos que seja  $m_c$  a massa da corda. A fim de o bloco e a corda começarem a mover-se partindo do repouso, deve haver uma aceleração,  $a$ . As únicas forças que atuam na corda são  $F_{HC}$  e  $F_{BC}$ , de forma que a força resultante nela será  $F_{HC} + F_{BC}$  que deverá ser diferente de zero para acelerar a corda. Com efeito, temos pela 2.ª lei:

$$F_{HC} + F_{BC} = m_c a.$$

Como as forças e a aceleração têm mesma direção, podemos abandonar a notação vetorial e escrever a relação entre os módulos dos vetores, isto é:

$$F_{HC} - F_{BC} = m_c a.$$

Vemos, portanto, que em geral  $F_{HC}$  não tem o mesmo módulo que  $F_{BC}$  (Fig. 5-2b). Estas duas forças agem no mesmo corpo e não constituem um par ação-reação.

De acordo com a terceira lei de Newton, o módulo de  $F_{HC}$  é sempre igual ao de  $F_{BC}$ , e o módulo de  $F_{CB}$  é sempre igual ao de  $F_{BC}$ . No entanto, apenas se for nula a aceleração  $a$  do sistema, o par de forças  $F_{HC}$  e  $F_{CH}$  será igual em módulo ao par  $F_{CB}$  e  $F_{BC}$  (Fig. 5-2a). Somente nesse caso especial poderíamos imaginar que a corda apenas transmite ao bloco, inalterada, a força exercida pelo homem. Este mesmo resultado é válido, em princípio, se  $m_r = 0$ . Na prática, não existe uma corda sem massa. Todavia, freqüentemente podemos desprezar a massa da corda, caso em que se supõe que ela transmita a força sem alteração. A força exercida em qualquer ponto da corda denomina-se tração (ou tensão) nesse ponto. Podemos medir a tensão em qualquer ponto da corda cortando-a e introduzindo um dinamômetro, a tensão será a leitura do dinamômetro. A tração é a mesma em todos os pontos da corda somente se ela não estiver acelerada ou supondo que não tenha massa.

## EXEMPLO 2

Consideremos uma mola presa ao teto e no outro extremo dela suspenso um bloco em repouso (Fig. 5-3a). Como nenhum corpo está acelerado, todas as forças, sobre qualquer corpo, terão soma vetorial nula. Por exemplo, as forças aplicadas ao bloco suspenso são  $T$ , a tensão na mola distendida aplicada verticalmente para cima na massa, e  $W$ , a atração da Terra agindo no corpo verticalmente para baixo, chamada peso do corpo. Essas forças estão desenhadas na Fig. 5-3b, onde mostramos, para maior clareza, apenas o bloco. Não há outras forças sobre ele.

Na segunda lei de Newton,  $F$  representa a soma de todas as forças que atuam em um corpo, de modo que para o bloco

$$F = T + W.$$

Estando o bloco em repouso, sua aceleração será nula,  $a = 0$ ; portanto, partindo da relação  $F = ma$  obtemos  $T + W = 0$ , ou seja,

$$T = -W.$$

As forças atuam na mesma direção de forma que seus módulos são iguais.

Conseqüentemente, a tração da corda é uma medida exata do peso do bloco. Usaremos mais tarde esse resultado, ao apresentar um procedimento estático para medir forças.

É instrutivo examinar as forças exercidas na mola, mostradas na Fig. 5-3c.  $T'$  é a força exercida sobre a mola pelo bloco, sendo a força de reação à força  $T$ .  $T'$ , portanto, tem o mesmo módulo que  $T$ , igual a  $W$ .  $P$  é a força exercida sobre a mola pelo teto, sendo dirigida para cima, e  $W$  é o peso da mola, isto é, a força de atração da Terra sobre ela. Como a mola está em repouso e todas as forças agem na mesma direção,

$$P + T' + w = 0,$$

$$P = W + w.$$

O teto, portanto, exerce sobre a mola uma força cujo módulo é a soma dos pesos do bloco e da mola.

Pela terceira lei de movimento, a força exercida sobre o teto pela mola,  $P'$ , deve ter módulo igual ao de  $P$ , que é a força de reação à força de ação  $P'$ . O módulo de  $P'$  será portanto,  $W + w$ .

Em geral, a mola exerce diferentes forças nos corpos presos aos seus dois extremos, pois  $P' \neq T$ . No caso especial em que o peso da mola é desprezível,  $w = 0$  e  $P' = W = T$ . Portanto, podemos supor que uma mola (ou corda) sem massa transmita, sem alteração, uma força de um extremo ao outro.

É instrutivo classificar todas as forças deste problema de acordo com pares ação reação. A reação a  $W$ , força exercida pela Terra sobre o bloco, deve ser uma força exercida pelo bloco sobre a Terra. De modo análogo, a reação a  $w$  é uma força exercida sobre a Terra pela mola. Devido à enorme massa da Terra, não é surpreendente que estas forças não transmitam à Terra uma aceleração perceptível. Como em nossos desenhos não foi indicada a Terra, tais forças não foram representadas. As forças  $T$  e  $T'$  são pares ação-reação, tal como  $P$  e  $P'$ . Note que, embora  $T = -W$  nesse problema, essas forças não formam pares ação-reação, pois elas atuam no mesmo corpo.

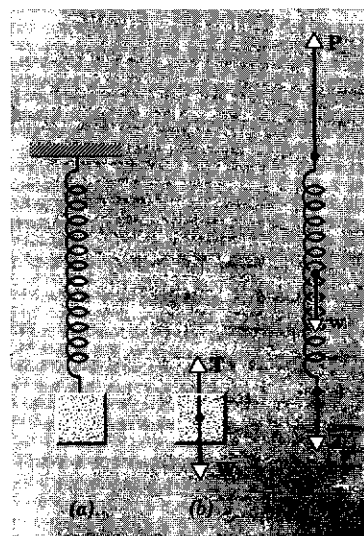


figura 5-3

Exemplo 2. (a) Bloco suspenso por uma mola. (b) Diagrama de corpo-livre mostrando todas as forças exercidas sobre o bloco. (c) Diagrama semelhante para as forças verticais que atuam sobre a mola.

A unidade de força é definida como a força que provoca a unidade de aceleração, quando aplicada à unidade de massa. A unidade do SI de massa é o quilograma, símbolo  $kg$  (Fig. 5-1). Nesse sistema, portanto, a unidade de força é a força que acelera de  $1 \text{ m/s}^2$  a massa de um quilograma; essa unidade, como vimos, chama-se *newton* (símbolo:  $N$ ).

No sistema CGS (centímetro, grama, segundo), a unidade de massa é o grama (símbolo:  $g$ ), definida como um milésimo de quilograma, e a unidade de força é o dina (símbolo:  $dyn$ ), igual a  $10^{-5} \text{ N}$ .

Tanto no Sistema Internacional como no CGS a massa, o comprimento e o tempo foram escolhidos como grandezas fundamentais. Adotaram-se padrões para elas e as respectivas unidades foram definidas a partir desses padrões. A força aparece como grandeza derivada, determinando-se a partir da relação  $F = ma$ .

Há, todavia, como foi assinalado, um outro sistema de unidades, usado em engenharia, em que as grandezas escolhidas como funda-

## 5-6

### SISTEMAS DE UNIDADES MECÂNICAS

mentais são a *força*, o comprimento e o tempo; a massa passa, então, a ser grandeza derivada, a partir da relação  $m = F/a$ . A unidade de força nesse sistema é o *quilograma-força* (símbolo: kgf), definido originalmente como a força atrativa exercida pela Terra sobre o quilograma-padrão, em um local situado ao nível do mar e à latitude de  $45^\circ$  N. Para definir operacionalmente essa força, suspende-se o padrão de massa de uma mola, naquele local. Se o corpo estiver em repouso, a atração terrestre sobre ele, isto é, seu peso  $W$ , é equilibrada pela tensão da mola  $T$ , portanto,  $T = W = 1$  kgf. Pode-se, então, usar essa mola (ou qualquer outra assim calibrada) para exercer uma força de 1 kgf sobre qualquer outro corpo: basta ligar a mola a esse corpo e esticá-la até que seu comprimento seja o mesmo que é produzido pela força de 1 kgf.

Nesse sistema a unidade de massa, denominada *unidade técnica de massa* (símbolo: u.t.m.) é definida como a massa de um corpo cuja aceleração seja de  $1 \text{ m/s}^2$ , quando aplicada nele uma força de 1 kgf. Ora, a aceleração da gravidade, ao nível do mar e na latitude de  $45^\circ$  N, é de  $9,80665 \text{ m/s}^2$  (conhecida como "valor normal da gravidade"). Portanto, essa seria a aceleração adquirida pela massa de 1 quilograma, sob a ação de seu próprio peso (1 kgf). Logo, para que, naquele local, e sob a ação de 1 kgf, a aceleração de um corpo seja de  $1 \text{ m/s}^2$ , é necessário que a massa dele seja 9,80665 vezes maior, isto é:

$$1 \text{ u.t.m.} = 9,80665 \text{ kg} \simeq 9,8 \text{ kg.}$$

Assim sendo, quando se diz que um corpo tem 5 kg, estamos nos referindo à sua *massa* (em unidades do SI); seu peso, no mesmo sistema e no referido local, seria  $5 \text{ kg} \times 9,80665 \text{ m/s}^2 \simeq 49 \text{ N}$ . Alternativamente, poderíamos dizer que o *peso* daquele corpo, em unidades técnicas de força, é de 5 kgf e sua massa, expressa em u.t.m., será  $5 \text{ kgf}/9,80665 \text{ m/s}^2 \simeq 0,51 \text{ u.t.m.}$  É fácil verificar também que  $1 \text{ kgf} \simeq 9,8 \text{ N}$ .

Note, portanto, que, sendo  $g \simeq 9,8 \text{ m/s}^2$ , o *valor numérico* da massa de um corpo, em unidades do SI, é praticamente igual ao valor numérico do peso desse corpo em unidades técnicas de força.

No sistema técnico inglês, como no sistema técnico métrico, acima descrito, as grandezas fundamentais são a força, o comprimento e o tempo, sendo a massa grandeza derivada. O padrão e unidade de força neste sistema é a *libra*. Em realidade, a libra de força foi originalmente definida como a ação da Terra sobre um certo corpo padrão num certo lugar da Terra. Podemos obter esta força, de forma prática, pendurando o corpo padrão em uma mola no ponto particular onde a atração da Terra sobre o corpo foi definida como uma libra de força. Se o corpo está em repouso, a ação da Terra sobre o corpo, seu peso  $W$ , é equilibrado pela tração da mola. Portanto,  $T = W = 1 \text{ lb}$  nesta situação. Podemos, agora, usar esta mola (ou qualquer outra assim calibrada) para exercer a força de uma libra sobre qualquer outro corpo. Para fazer isto, simplesmente ligamos a mola a outro corpo e a distendemos do mesmo valor que a libra de força distendeu. O corpo padrão pode ser comparado ao quilograma e determina-se a massa de  $0,45359237 \text{ kg}$ . A aceleração, devido à gravidade no local escolhido sobre a Terra, é determinada como  $32,1740 \text{ ft/s}^2$ . A libra de força pode, portanto, ser definida de  $F = ma$ , como a força que acelera a massa de  $0,45359237 \text{ kg}$  a uma taxa de  $32,1740 \text{ ft/s}^2$ .

Este procedimento possibilita comparar a libra-força com o Newton. Sabendo que  $32,1740 \text{ ft/s}^2$  equivalem a  $9,8066 \text{ m/s}^2$ , determinamos que

$$\begin{aligned} 1 \text{ lb} &= (0,45359237 \text{ kg}) (32,1740 \text{ ft/s}^2) \\ &= (0,45359237 \text{ kg}) (9,8066 \text{ m/s}^2) \\ &\cong 4,45 \text{ N.} \end{aligned}$$

A unidade de massa no sistema técnico inglês pode, portanto, ser deduzida. É definida como a massa de um corpo cuja aceleração é  $1 \text{ ft/s}^2$ , quando a força sobre ele é  $1 \text{ lb}$ ; esta massa é chamada "slug". Assim, neste sistema,

$$F[\text{lb}] = m[\text{slugs}] \times a[\text{ft/s}^2]$$

Legalmente, a libra é uma unidade de massa mas, na prática de engenharia, a libra é tratada como unidade de força ou peso. Isto tem dado origem a termos libra-massa e libra-força. A libra-massa é um corpo de massa  $0,45359237 \text{ kg}$  e nenhum bloco de metal padrão é preservado como a libra-massa. Assim como a jarda, a libra-massa é definida em termos do padrão SI. A libra-força é a força que ocasiona na libra-massa uma aceleração igual a aceleração da gravidade padrão,  $32,1740 \text{ ft/s}^2$ . Algumas unidades mecânicas desse sistema estão indicadas na Tab. 5-2, relacionando-se com as unidades métricas.

Neste livro, as forças serão indicadas em Newtons, excepcionalmente em *kgf*, e as massas em quilograma ou em gramas.

**Tabela 5-2**

Unidades em ( $F = ma$ )

Sistema	Força	Massa	Aceleração
SI	newton (N)	quilograma (kg)	$\text{m/s}^2$
CGS	dina (dyn)	grama (g)	$\text{cm/s}^2$
técnico métrico	quilograma-força (kgf)	u.t.m.	$\text{m/s}^2$
técnico inglês	libra (lb)	"slug"	$\text{ft/s}^2$

As *dimensões* de força são as mesmas que as de massa vezes aceleração. Num sistema onde massa, comprimento e tempo são grandezas fundamentais, as dimensões de força são, portanto, massa  $\times$  comprimento/tempo<sup>2</sup>, ou  $MLT^{-2}$ . Adotaremos, arbitrariamente, massa, comprimento e tempo como nossas quantidades mecânicas fundamentais.

As três leis de movimento que descrevemos constituem, apenas, uma parte do método da mecânica, esboçado na Sec. 5-1. Resta investigar as *leis de força*, que são os procedimentos pelos quais calculamos a força que atua em dado corpo, em termos das propriedades do corpo e de sua vizinhança. A segunda lei de Newton,

## 5-7 AS LEIS DE FORÇA

$$F = ma \quad (5-3)$$

não é essencialmente uma lei natural mas, uma definição de força. Devemos identificar várias funções do tipo

$F =$  função das propriedades da partícula e da vizinhança, (5-4)

de forma que possamos, com efeito, eliminar  $F$  entre as Eqs. 5-3 e 5-4, obtendo, assim, uma equação que nos permitirá calcular a aceleração de uma partícula em termos das propriedades dela e de sua vizinhança. Vemos, aqui, claramente que força é um conceito que relaciona a aceleração da partícula, de um lado, com as propriedades da partícula e de sua vizinhança, de outro. Indicamos antes, que um dos critérios para reconhecer o êxito do método da Mecânica consistiria em descobrir que realmente existem leis *simples* do tipo da Eq. 5-4. Isto realmente acontece, este fato constituindo a razão essencial pela qual "acreditamos" nas leis da Mecânica Clássica. Se as leis da Mecânica fossem demasiadamente complicadas, teríamos a impressão de não haveremos progredido muito na compreensão do funcionamento da Natureza.

O número de vizinhanças possíveis para uma partícula acelerada é tão grande que uma discussão pormenorizada de todas as leis de força não é exequível neste capítulo. Entretanto, indicaremos na Tab. 5-3, as leis de força que se aplicam às cinco situações partícula-mais-vizinhança da Tab. 5-1. Ao longo do texto, nos lugares apropriados, discutiremos em detalhe estas leis de força e outras; várias das leis da Tab. 5-3 são aproximações ou caso especiais.

### Tabela 5-3

Leis de força para os sistemas da Tab. 5-1

Sistema	Lei de força
1. Um bloco puxado por uma mola estendida, sobre uma superfície horizontal áspera.	(a) Lei de força: $F = -kx$ , sendo $x$ a distensão da mola e $k$ uma constante característica dela; $F$ está orientada para a direita. Ver Cap. 15. (b) Força de atrito: $F = \mu mg$ , sendo $\mu$ o coeficiente de atrito e $mg$ o peso do bloco; $F$ está orientada para a esquerda, ver Cap. 6.
2. Uma bola de golfe em vôo.	$F = mg$ , $F$ está dirigida para baixo (ver Seq. 5-8).
3. Um satélite artificial.	$F = GmM/r^2$ , sendo $G$ a constante gravitacional, $M$ a massa da Terra e $r$ o raio da órbita. $F$ está dirigida para o centro da Terra; ver Cap. 16. Esta é a lei de Newton para a gravitação universal.
4. Um elétron próximo de uma esfera carregada.	$F = (1/4\pi\epsilon_0)eQ/r^2$ , sendo $\epsilon_0$ uma constante, $e$ a carga do elétron, $Q$ a carga da esfera e $r$ a distância do elétron ao centro da esfera; $F$ está orientada para a direita, ver Cap. 26. Esta é a lei de Coulomb para a eletrostática.
5. Duas barras imantadas.	$F = (3\mu_0/2\pi)\mu^2/r^4$ , sendo $\mu_0$ uma constante, $\mu$ o momento de dipolo magnético de cada imã, e $r$ a distância do centro de um imã ao do outro; supomos que $r \gg l$ , sendo $l$ o comprimento de cada imã; $F$ está orientada para a direita.

O peso de um corpo é a força gravitacional exercida sobre ele pela Terra. O peso, sendo uma força, é uma grandeza vetorial. O sentido deste vetor é o da força gravitacional, isto é, o sentido do

### 5-8

### PESO E MASSA

centro da Terra. O módulo do peso mede-se em unidades de força, tais como o Newton ou o quilograma-força.

Quando um corpo de massa  $m$  cai livremente, sua aceleração é a da gravidade,  $g$ , e a força que atua nele é seu peso,  $\mathbf{W}$ . A segunda lei de Newton,  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , quando aplicada a um corpo em queda livre, exprime-se como  $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$ . Tanto  $\mathbf{W}$  como  $\mathbf{g}$  são vetores orientados para o centro da Terra. Podemos escrever, portanto,

$$W = mg, \quad (5-5)$$

sendo  $W$  e  $g$  os módulos dos vetores peso e aceleração. Para evitar que um corpo caia, devemos exercer nele uma força dirigida para cima, igual em módulo a  $W$ , de forma que a força resultante seja nula. Na Fig. 5-3a a tensão da mola fornece essa força.

Afirmamos, antes, que experimentalmente se verifica ser o valor de  $g$  o mesmo para todos os objetos *no mesmo lugar*. Segue-se disso, que a razão dos pesos de dois objetos deve ser igual à razão de suas massas. Portanto, uma balança química, que é essencialmente um instrumento para comparar duas forças dirigidas para baixo, pode usar-se na prática para comparar massas. Se uma amostra de sal, em um dos pratos da balança, está agindo para baixo naquele prato com uma força igual à que é exercida por um grama-padrão, colocado no outro prato, sabemos<sup>4</sup> que a massa do sal é igual a um grama. Usualmente dizemos que o sal "pesa" um grama, embora o grama seja unidade de massa e não de peso; no entanto, é sempre importante distinguir cuidadosamente entre peso e massa.

Vimos que o peso de um corpo — a força dirigida para baixo, exercida sobre esse corpo pela Terra — é uma grandeza vetorial. A massa de um corpo é uma grandeza escalar. A relação quantitativa entre peso e massa é dada por  $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$ . Como  $g$  varia de um ponto a outro da superfície da Terra,  $\mathbf{W}$ , o peso de um corpo de massa  $m$ , é diferente em diferentes lugares. Assim, o peso de uma massa de um quilograma em um lugar onde  $g$  seja  $9,80 \text{ m/s}^2$  é  $9,80 \text{ N}$ ; em outro lugar, onde  $g$  seja  $9,78 \text{ m/s}^2$ , o mesmo quilograma pesa  $9,78 \text{ N}$ . Se esses pesos fossem determinados medindo em uma mola a distensão necessária para equilibrá-los, a diferença em peso da mesma massa de um quilograma, em dois diferentes lugares, seria evidenciada pela pequena diferença entre as distensões da mola nos dois lugares. Portanto, ao contrário da massa de um corpo, que é uma propriedade intrínseca do corpo, o peso deste depende de sua localização em relação ao centro da Terra. As balanças de mola, equilibrando os mesmos corpos, fornecem indicações diferentes em diferentes pontos da Terra.

Generalizaremos o conceito de peso no Cap. 16, ao discutirmos a gravitação universal. Veremos aí que o peso de um corpo é nulo nas regiões do espaço em que os efeitos gravitacionais também o sejam, embora os efeitos inerciais, e, portanto, a massa de um corpo, permaneçam inalterados em relação aos que existem na Terra. Em uma nave espacial, livre da influência da gravidade, é fácil levantar um grande bloco de chumbo ( $\mathbf{W} = 0$ ), porém o astronauta machucaria o pé se chutasse o bloco ( $m \neq 0$ ).

<sup>4</sup> Devem ser feitas correções para o empuxo, devido aos diferentes volumes de ar deslocados pelo sal e pelo padrão. Elas serão discutidas no Cap. 17.

Para acelerar um corpo em uma região do espaço onde não haja efeitos gravitacionais, necessita-se da mesma força que seria exigida para acelerá-lo na Terra, ao longo de uma superfície horizontal sem atrito, pois sua massa é a mesma em ambos os lugares. No entanto, exige-se maior força para equilibrar o corpo contra a atração da Terra, na superfície desta, do que para suspendê-lo no espaço, pois seu peso é diferente em cada caso.

Freqüentemente, em lugar de ser dada a massa de um corpo sobre o qual atuam forças, é fornecido o seu peso. A aceleração,  $a$ , produzida pela força,  $F$ , que atua sobre um corpo cujo peso tem módulo  $W$ , pode obter-se combinando as Eqs. 5-3 e 5-5. De  $F = ma$  e  $W = mg$  concluímos:

$$m = W/g, \text{ portanto, } F = (W/g)a. \quad (5-6)$$

A grandeza  $W/g$  desempenha o papel de  $m$  na equação  $F = ma$  e, com efeito, é a massa de um corpo cujo peso vale  $W$ . Por exemplo, um homem cujo peso seja 735 N em um lugar onde  $g = 9,80 \text{ m/s}^2$  tem a massa  $m = W/g = 735 \text{ N}/9,80 \text{ m/s}^2 = 75 \text{ kg}$ . Note que seu peso em outro lugar onde  $g = 9,82 \text{ m/s}^2$ , seria  $W = mg = 75 \text{ kg} \times 9,82 \text{ m/s}^2 \cong 737 \text{ N}$ .

Na Seq. 5-3, definimos força medindo a aceleração provocada em um corpo-padrão, ao puxá-lo mediante uma mola distendida. Esse procedimento chama-se método dinâmico para medir força. Ainda que conveniente para fins de definição, ele não é, todavia, um procedimento muito prático para medir forças. Outro método de medir forças está baseado na medida da variação de forma ou tamanho de um corpo (por exemplo, uma mola), sobre o qual está aplicada a força, mantendo-se o corpo não acelerado. Nisto consiste o método estático de medida das forças.

O método estático utiliza a idéia de que, quando um corpo sob a ação de várias forças tem aceleração nula, a soma vetorial de todas as forças que atuam no corpo também é nula. É isto, justamente, o que prevê a primeira lei de movimento. Uma força única atuando sobre o corpo produziria uma aceleração que poderia anular-se, aplicando-se ao corpo outra força igual em módulo e de sentido oposto. Na prática, procuramos manter o corpo em repouso. Se escolhermos, então, uma força unitária, estaremos em condições de medir forças. A atração terrestre sobre um corpo padrão, em um lugar determinado, pode ser tomada como unidade de força, por exemplo.

O instrumento de uso mais comum para medir forças por este método é a balança de mola ou dinamômetro. Consiste de uma mola em espiral, tendo em um dos extremos um ponteiro que se desloca sobre uma escala. Exercendo-se uma força sobre a mola, varia-se o seu comprimento. Suspendendo da mola um corpo de 1,00 N, a mola distende-se até que a força exercida pela mola sobre o corpo seja igual em módulo, mas de sentido oposto ao peso do corpo. Pode-se, então, assinalar na escala a posição do ponteiro e designá-la por "força de 1 N". De modo semelhante, podem suspender-se da mola corpos cujos pesos sejam 2,00 N, 3,00 N etc., marcando-se as respectivas posições do ponteiro sobre a escala, calibrando-se dessa maneira a mola. Supomos que a força exercida sobre a mola seja sempre a mesma, quando o ponteiro parar na

## 5-9

### PROCEDIMENTO ESTÁTICO PARA MEDIR FORÇAS

mesma posição. A balança calibrada pode, então, ser usada para medir qualquer força desconhecida, e não, apenas, a atração terrestre sobre algum corpo.

A terceira lei é tacitamente usada nesse procedimento estático, pois admitimos que a força exercida pela mola sobre o corpo tenha o mesmo módulo que a força exercida pelo corpo sobre a mola. Esta última força é a que desejamos medir. A primeira lei é usada também, porque supomos  $F$  nula quando  $a$  é nula. Ainda merece ser notado aqui que, se a aceleração do corpo não fosse nula, o corpo de peso  $W$  não distenderia a mola do mesmo comprimento que no caso em que  $a = 0$ . Com efeito, se a mola e o corpo suspenso, de peso  $W$ , caíssem livremente sob o efeito da gravidade ( $a = g$ ), a mola não seria distendida e a tensão nela seria nula.

Será útil expor alguns procedimentos para resolver problemas de Mecânica Clássica e ilustrá-los com vários exemplos. A segunda lei de Newton estabelece que a soma vetorial de todas as forças que atuam em um corpo é igual ao produto de sua massa pela sua aceleração. O primeiro passo na resolução de problemas é, portanto: (1) Identificar o corpo a cujo movimento o problema se refere. Ainda que isso pareça óbvio, a falta de clareza quanto ao que deve ser considerado "o corpo" é uma importante fonte de engano. (2) Tendo selecionado "o corpo", dirigimos a seguir nossa atenção aos objetos da "vizinhança", pois são esses objetos (planos inclinados, molas, cordas, a Terra etc.) que exercem forças sobre o corpo. Devemos esclarecer a natureza dessas forças. (3) O passo seguinte consiste em selecionar um referencial (inercial) conveniente. Devemos localizar a origem e orientar os eixos de coordenadas de forma a simplificar, tanto quanto possível, a tarefa seguinte. (4) Fazemos, a seguir, um diagrama separado do corpo sozinho, mostrando o referencial e *todas* as forças que atuam *sobre* o corpo. A isto se chama diagrama de *corpo-livre*. (5) Finalmente, aplicamos a segunda lei de Newton, na forma da Eq. 5-2, a cada componente da força e da aceleração.

Os exemplos seguintes ilustram o método de análise usado na aplicação das leis de movimento de Newton. Cada corpo é tratado como se fosse uma partícula de massa definida, de forma que as forças que atuam sobre ele podem ser tratadas como agindo em um ponto. Cordas e polias são consideradas de massa desprezível. Embora algumas das situações escolhidas para análise possam parecer simples e artificiais, são, entretanto, o protótipo de muitas situações reais e interessantes; todavia, ainda mais importante, o método de análise — que é a coisa fundamental a entender — é aplicável a todas as situações modernas e complicadas da Mecânica Clássica, inclusive enviar uma nave espacial a Marte.

A Fig. 5-4a mostra um peso,  $W$ , suspenso por cordas. Consideremos o nó na junção das três cordas como "o corpo". O corpo permanece em repouso sob o efeito das três forças indicadas na Fig. 5-4b. Suponhamos dado o módulo de uma dessas forças; como podemos determinar os módulos das outras?

$F_A$ ,  $F_B$  e  $F_C$  são todas as forças que atuam sobre o corpo. Como este não está acelerado (realmente está em repouso),  $F_A + F_B + F_C = 0$ . Escolhamos os eixos  $Ox$  e  $Oy$  como está indicado; podemos escrever esta equação vetorial como três equações escalares:

## 5-10 ALGUMAS APLICAÇÕES DAS LEIS DE MOVIMENTO DE NEWTON

### EXEMPLO 3



$$\begin{aligned} F_{Ax} + F_{Bx} &= 0, \\ F_{Ay} + F_{By} + F_{Cy} &= 0; \end{aligned}$$

usando a Eq. 5-2, a terceira equação escalar, para o eixo  $Oz$ , é simplesmente

$$F_{Az} = F_{Bz} = F_{Cz} = 0,$$

ou seja, os vetores encontram-se todos no plano  $xOy$ , de forma que eles não têm componente  $z$ .

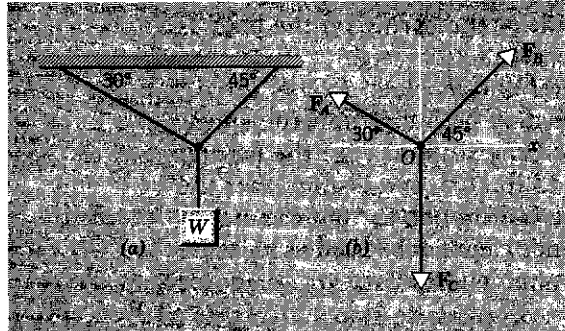


figura 5-4

Exemplo 3. (a) Uma massa suspensa por fios. (b) Diagrama de corpo livre, mostrando todas as forças atuantes no nó. Supõe-se que os fios não têm peso.

Pela figura, vemos que

$$\begin{aligned} F_{Ax} &= -F_A \cos 30^\circ = -0,866 F_A, \\ F_{Ay} &= F_A \sin 30^\circ = 0,500 F_A, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F_{Bx} &= F_B \cos 45^\circ = 0,707 F_B, \\ F_{By} &= F_B \sin 45^\circ = 0,707 F_B. \end{aligned}$$

Além disso,

$$F_{Cy} = -F_C = -W,$$

pois a corda  $C$  serve apenas para transmitir a força atuante em um de seus extremos ao nó do outro extremo. Substituindo estes resultados nas equações originais, obtemos

$$\begin{aligned} -0,866 F_A + 0,707 F_B &= 0, \\ 0,500 F_A + 0,707 F_B - W &= 0. \end{aligned}$$

Se conhecermos o módulo de qualquer dessas três forças, poderemos resolver essas equações para as outras duas. Por exemplo, se  $W = 100$  N, obtém-se  $F_A = 73,3$  N e  $F_B = 89,6$  N.

Queremos analisar o movimento de um bloco sobre um declive liso.

## EXEMPLO 4

(a) *Caso estático.* A Fig. 5-5a mostra um bloco de massa  $m$  mantido em repouso, sobre um plano liso, inclinado de um ângulo  $\theta$  em relação à horizontal, por meio de uma corda ligada a uma parede vertical. As forças que atuam sobre o bloco são indicadas na Fig. 5-5b.  $\mathbf{F}_1$  é a força exercida sobre o bloco pela corda;  $mg$  é a força exercida sobre o bloco pela Terra, isto é, seu peso, e  $\mathbf{F}_2$  é a força exercida sobre o bloco pela superfície inclinada.  $\mathbf{F}_2$  chama-se força normal, por ser perpendicular à superfície de contato, desde que não existe força de atrito entre as superfícies.<sup>5</sup> Se houvesse uma força de atrito,  $\mathbf{F}_2$  teria uma componente paralela ao plano. Como desejamos analisar o movimento do bloco, isolamos **TODAS as forças que atuam SOBRE o bloco.** O estudante notará que o bloco

<sup>5</sup> A força normal é um exemplo de força de vínculo, que limita a liberdade de movimento que um corpo teria na ausência dela. É uma força elástica, proveniente de pequenas deformações dos corpos em contato, que nunca são perfeitamente rígidos, como se presume tacitamente.

exercerá forças sobre os outros corpos de sua vizinhança (a corda, a Terra, a superfície do declive), de acordo com o princípio de ação e reação; estas forças, no entanto, não são necessárias para determinar o movimento do bloco, pois elas atuam em outros corpos.

Admitimos que  $m$  e  $\theta$  sejam dados. Como encontrar  $F_1$  e  $F_2$ ? Como o bloco não está acelerado, obtemos

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + mg = 0.$$

É conveniente escolher o eixo  $Ox$  de nosso referencial paralelamente ao declive e o eixo  $Oy$  normal a esse plano (Fig. 5-5b). Com essa escolha de coordenadas, somente precisamos decompor uma força,  $mg$  ao longo dos eixos  $Ox$  e  $Oy$ . As duas equações escalares obtidas desse modo são

$$F_1 - mg \operatorname{sen} \theta = 0 \quad \text{e} \quad F_2 - mg \operatorname{cos} \theta = 0,$$

das quais podem determinar-se  $F_1$  e  $F_2$ , sendo fornecidos  $m$  e  $\theta$ .

(b) *Caso dinâmico.* Suponhamos, agora, que a corda seja cortada. Então a força  $F_1$  exercida pela corda sobre o bloco, deixará de existir; a força resultante sobre o bloco não mais será nula e ele será acelerado. Qual sua aceleração?

A partir da Eq. 5-2, temos  $F_x = ma_x$  e  $F_y = ma_y$ , usando essas relações obtêm-se

$$F_2 - mg \operatorname{cos} \theta = ma_y = 0,$$

e

$$-mg \operatorname{sen} \theta = ma_x$$

donde

$$a_y = 0, \quad a_x = -g \operatorname{sen} \theta.$$

A aceleração é dirigida para baixo do declive, tendo módulo  $g \operatorname{sen} \theta$ .

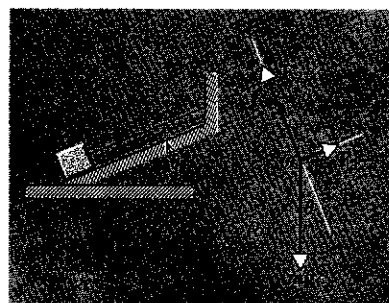


figura 5-5

Exemplo 4. (a) Um bloco é mantido sobre um plano inclinado liso por um fio. (b) Diagrama de corpo livre, indicando todas as forças exercidas sobre o bloco.

Consideremos um bloco de massa  $m$ , puxado ao longo de uma superfície horizontal por uma força horizontal  $P$ , de acordo com a Fig. 5-6.  $F_N$  é a força normal exercida sobre o bloco pela superfície lisa e  $W$  o peso do bloco.

(a) Sendo de 2,0 kg a massa do bloco, qual a força normal?

Pela segunda lei de movimento, com  $a_y = 0$ , obtêm-se

$$F_y = ma_y \quad \text{ou} \quad F_N - W = 0.$$

Portanto,  $F_N = W = mg = 2,0 \text{ kg} \times 9,8 \text{ m/s}^2 = 20 \text{ N}$ .

(b) Que força  $P$  é necessária para transmitir ao bloco uma velocidade horizontal de 4,0 m/s em 2,0 s, a partir do repouso?

A aceleração  $a_x$  segue-se de

$$a_x = \frac{v_x - v_{x0}}{t} = \frac{4,0 \text{ m/s} - 0}{2,0 \text{ s}} = 2,0 \text{ m/s}^2.$$

De acordo com a 2.ª lei,  $F_x = ma_x$  ou  $P = ma_x$ , a força  $P$  vale, portanto,

$$P = ma_x = 2,0 \text{ kg} \times (2,0 \text{ m/s}^2) = 4,0 \text{ N}.$$

### EXEMPLO 5

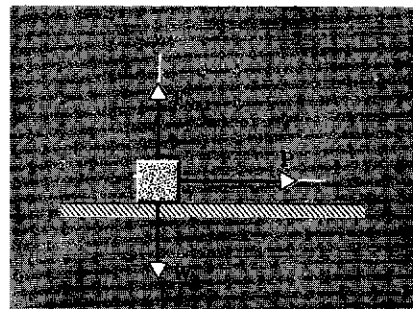


figura 5-6

Exemplo 5. Um bloco está sendo puxado ao longo de uma mesa lisa. São indicadas as forças que atuam no bloco.

A Fig. 5-7a mostra um bloco de massa  $m_1$  sobre uma superfície horizontal lisa, puxado por outro bloco, de massa  $m_2$ , através de uma corda que passa sobre uma polia. Supomos que a polia não tem massa nem atrito, servindo apenas para mudar a direção da tensão da corda naquele ponto. Determinar a aceleração do sistema e a tensão na corda.

Escolhamos o bloco de massa  $m_1$  como o corpo cujo movimento investigamos. As forças sobre este bloco, considerado como partícula, são indicadas na

### EXEMPLO 6

Fig. 5-7b.  $T$ , a tensão da corda, puxa o bloco para a direita;  $m_1g$  é a força para baixo exercida pela Terra sobre o bloco e  $F_N$  é a força vertical exercida sobre o bloco pela mesa lisa. O bloco será acelerado apenas ao longo de  $Ox$ , de modo que  $a_{1y} = 0$ . Podemos, então, escrever:

$$F_N - m_1g = 0 = m_1a_{1y},$$

e

$$T = m_1a_{1x}. \quad (5-7)$$

Dessas equações concluímos que  $F_N = m_1g$ ; como não conhecemos  $T$ , não poderemos determinar  $a_{1x}$ .

Para determinar  $T$ , devemos considerar o movimento do bloco  $m_2$ . As forças que atuam sobre ele mostram-se na Fig. 5-7c. Como a corda e o bloco estão acelerados, não podemos concluir que  $T = m_2g$ ; com efeito, se  $T = m_2g$ , a força resultante sobre  $m_2$  seria nula, condição válida somente se o sistema não estiver acelerado.

A equação de movimento para o bloco suspenso será:

$$m_2g - T = m_2a_{2y}. \quad (5-8)$$

A direção da tensão da corda muda na polia e, sendo a corda de comprimento fixo, é claro que

$$a_{2y} = a_{1x},$$

de modo que podemos representar a aceleração do sistema apenas por  $a$ . Obtemos, então, a partir das Eqs. 5-7 e 5-8:

$$m_2g - T = m_2a, \quad (5-9)$$

e

$$T = m_1a,$$

donde concluímos

$$m_2g = (m_1 + m_2)a, \quad (5-10)$$

ou

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2}g,$$

e

$$T = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}g, \quad (5-11)$$

que nos fornecem a aceleração  $a$  do sistema e a tensão  $T$ , na corda.

Note que a tensão na corda é sempre inferior a  $m_2g$ ; isto é claro pela Eq. 5-11, que podemos escrever como

$$T = m_2g \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Note também que  $a$  é sempre inferior a  $g$ , a aceleração da gravidade. Somente quando  $m_1 = 0$ , o que significa que não existe bloco sobre a mesa, obteremos  $a = g$  (pela Eq. 5-10). Neste caso  $T = 0$  (pela Eq. 5-9).

Podemos interpretar a Eq. 5-10 de modo simples. A força resultante não nula que atua no sistema de massa  $m_1 + m_2$  é representada por  $m_2g$ . Portanto, de  $F = ma$ , obtemos a Eq. 5-10 diretamente.

Tomando um exemplo numérico, suponhamos  $m_1 = 2,0$  kg e  $m_2 = 1,0$  kg. Então

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2}g =$$

$$\frac{1}{3}g = 3,3 \text{ m/s}^2,$$

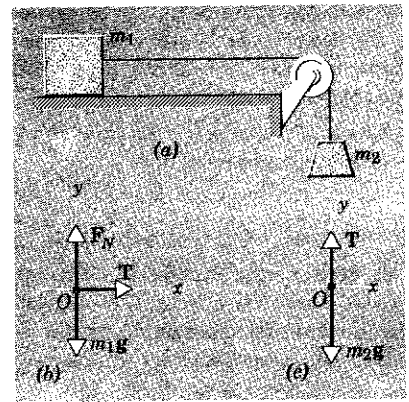


figura 5-7

Exemplo 6. (a) Duas massas estão ligadas por um fio;  $m_1$  se apóia num plano liso,  $m_2$  pende livremente. (b) Diagrama do corpo-livre mostrando todas as forças que atuam sobre  $m_1$ . (c) Diagrama semelhante para  $m_2$ .

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{2}{3} \times 9,8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 6,5 \text{ N.}$$

Consideremos duas massas diferentes, ligadas por uma corda que passa sobre uma polia sem atrito e de massa desprezível, conforme a Fig. 5-8a. Suponha  $m_2$  maior que  $m_1$ . Determinar a tensão na corda e a aceleração das massas.

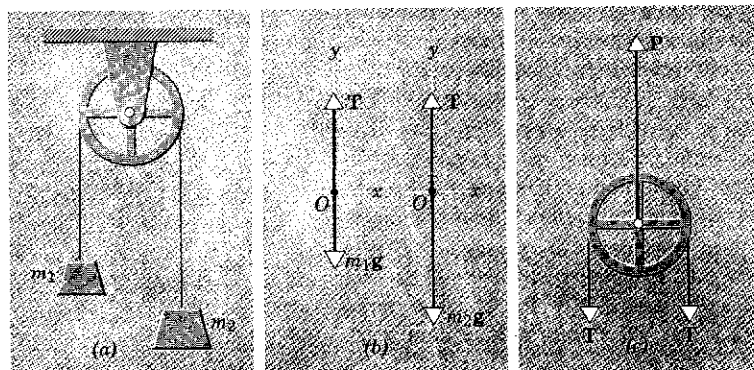


figura 5-8

Exemplo 7. (a) Duas massas desiguais suspensas de uma roldana por um fio (Máquina de Atwood). (b) Diagramas de corpo livre para  $m_1$  e  $m_2$ . (c) Diagrama de corpo livre para a roldana, suposta sem massa.

Consideremos como *positiva* uma aceleração *para cima*. Se a aceleração de  $m_1$  for  $a$ , a de  $m_2$  deverá ser  $-a$ . As forças que atuam sobre  $m_1$  e  $m_2$  são indicadas na Fig. 5-8b, em que  $T$  representa a tensão da corda.

A equação de movimento de  $m_1$  é

$$T - m_1 g = m_1 a,$$

para  $m_2$  tem-se que

$$T - m_2 g = -m_2 a.$$

Combinando essas equações, obtêm-se:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \quad (5-12)$$

e

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Por exemplo, se  $m_2 = 30 \text{ kg}$  e  $m_1 = 15 \text{ kg}$ ,

$$a = (15/45) \text{ m/s}^2 = g/3,$$

$$T = \frac{900}{45} \cdot 9,8 \text{ kg} \times \text{m/s}^2 = 196 \text{ N} = 20 \text{ kgf.}$$

Note que o módulo de  $T$  é sempre intermediário ao peso de  $m_1$  (15 kgf em nosso exemplo) e de  $m_2$  (30 kgf neste caso). Isso era de esperar, pois  $T$  deve exceder  $m_1 g$  para que  $m_1$  adquira aceleração para cima, e  $m_2 g$  deve exceder  $T$  para que  $m_2$  tenha aceleração para baixo. No caso especial em que  $m_1 = m_2$ , obtêm-se  $a = 0$  e  $T = m_1 g = m_2 g$ , que é o resultado estático previsível.

A Fig. 5-8c mostra as forças que atuam sobre uma polia sem massa. Se a tratarmos como partícula, poderemos supor que todas as forças passem pelo seu centro.  $P$  é a força dirigida para cima, exercida pelo suporte sobre a polia e  $T$  é a força dirigida para baixo, exercida sobre a polia por cada segmento da corda. Como a polia não possui movimento de translação,

$$P = T + T = 2T.$$

Se a polia tivesse massa  $m$ , deveria ser incluída uma força  $mg$ , dirigida para baixo, aplicada ao suporte. Além disso, como veremos mais tarde, o movimento de rotação da polia resulta em uma diferente tensão em cada segmento da corda. O atrito nos mancais também afeta o movimento de rotação da polia e a tensão na corda.

Consideremos um elevador que se move verticalmente com aceleração  $a$ . Queremos determinar a força exercida por um passageiro no assoalho do elevador.

A aceleração para cima será considerada *positiva*, e *negativa* quando dirigida para baixo. Portanto, aceleração positiva neste caso significa que o elevador ou está se movendo para cima com velocidade crescente ou para baixo com velocidade decrescente. Aceleração negativa significa que o elevador se move para cima com velocidade decrescente ou para baixo com velocidade crescente.

De acordo com a terceira lei de Newton, a força exercida pelo passageiro sobre o assoalho será sempre igual, em módulo, à força exercida pelo assoalho sobre o passageiro, mas terá sentido oposto. Podemos, então, calcular ou a força de ação ou a de reação. Quando se consideram as forças que atuam no passageiro, obtemos a reação; quando são usadas as forças que agem no assoalho, teremos a ação.

A situação é mostrada na Fig. 5-9: o peso verdadeiro do passageiro é  $W$  e a força exercida sobre ele pelo assoalho, chamada  $P$ , é seu peso *aparente* no elevador acelerado. A resultante das forças que agem nele é  $W + P$ . As forças serão consideradas positivas quando dirigidas para cima. De conformidade com a segunda lei, temos

$$F = ma,$$

ou

$$P - W = ma, \tag{5-13}$$

sendo  $m$  a massa do passageiro e  $a$  a aceleração dele (e do elevador).

Suponha, por exemplo, que o passageiro tenha 75 kg e que a aceleração seja de  $0,60 \text{ m/s}^2$ , dirigida para cima.

Pela Eq. 5-13, teremos:

$$P - (75 \times 9,8) \text{ N} = (75 \times 0,6) \text{ N},$$

ou seja,

$$P = 780 \text{ N}.$$

Se medíssemos diretamente esta força, por exemplo, fazendo o passageiro subir em uma balança de mola fixada no assoalho do elevador (ou suspensa no teto deste), esta registraria 780 N, no caso do passageiro pesar 75 kgf. O passageiro sente que ele pressiona o assoalho para baixo com maior força (e o assoalho o pressiona para cima com maior força) do que quando ele e o elevador estão em repouso. Todos experimentamos esta sensação, quando um elevador começa a mover-se para cima, partindo do repouso.

Se a aceleração fosse dirigida para baixo, conservando o mesmo valor,  $0,6 \text{ m/s}^2$ , então  $a = 0,60 \text{ m/s}^2$  e  $P = 690 \text{ N}$  para o passageiro. Este, que pesa 735 N, sente que comprime o assoalho com menor força do que se ele e o elevador estivessem em repouso.

Se o cabo do elevador se rompesse e o elevador caísse em queda livre com aceleração  $a = -g$ , então  $P$  valeria  $W + \frac{W}{g}(-g) = 0$ . Então, o passageiro e o assoalho não exerceriam nenhuma força um sobre o outro, o peso aparente do passageiro, indicado pela balança de mola, seria nulo.

## EXEMPLO 8

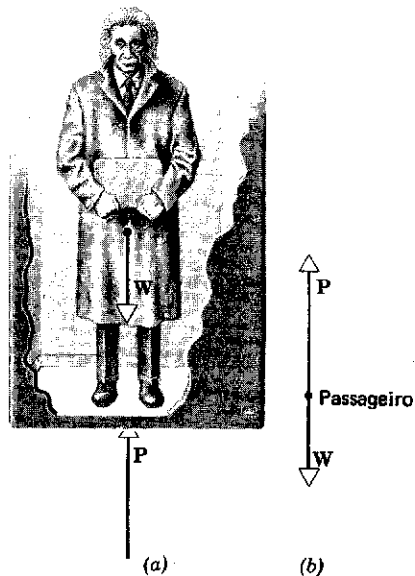


figura 5-9

Exemplo 8. (a) Um passageiro em pé no piso de um elevador. (b) Diagrama de corpo-livre para o passageiro.

1. Qual é sua massa em unidades técnicas? Qual é seu peso em Newtons?
2. Por que você cai para a frente, quando um trem em movimento é desacelerado em uma estação, e cai para trás, quando o trem é acelerado para partir? Que aconteceria se o trem percorresse uma curva com velocidade constante?

**questões**

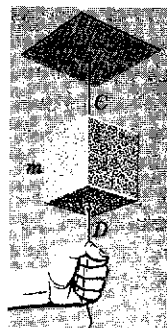


figura 5-10  
Questão 3

3. Um bloco de massa  $m$  está suspenso do teto por uma corda  $C$ , e outra corda  $D$  é ligada à parte inferior do bloco (Fig. 5-10). Explique a seguinte observação: se for dado um puxão violento em  $D$ , esta corda se romperá, mas se a puxarmos lentamente, será a corda  $C$  que se arrebentará.
4. Um cavalo é instigado a puxar uma carroça. Recusa-se a fazê-lo, invocando a terceira Lei de Newton em sua defesa: "A força de tração do cavalo sobre a carroça é igual, porém oposta, à da carroça sobre o cavalo. Se nunca posso exercer sobre a carroça uma força maior do que a que ela exerce sobre mim, de que modo posso fazer com que a carroça comece a se movimentar" indaga o cavalo. Como você responderia?
5. Discuta se são exemplos de ação-reação as seguintes forças dispostas em pares: (a) a Terra atrai o tijolo; o tijolo atrai a Terra; (b) um turbo hélice puxa o ar em sua direção; o ar impulsiona o avião para frente; (c) um cavalo puxa para frente uma carroça, acelerando-a; a carroça puxa o cavalo para trás, (d) um cavalo puxa para frente uma carroça sem movê-la; a carroça puxa para trás o cavalo; (e) um cavalo puxa para frente uma carroça, sem movê-la; a Terra exerce uma força igual e oposta sobre a carroça.
6. Critique a afirmação, freqüentemente usada, de que a massa de um corpo exprime a medida da "quantidade de matéria" existente nele.
7. Usando força, comprimento e tempo como grandezas fundamentais, quais serão as dimensões da massa?
8. A definição dada de massa restringe-se a objetos inicialmente em repouso?
9. Critique as seguintes considerações sobre massa e peso, que foram tiradas de exames escritos. (a) Massa e peso são as mesmas grandezas físicas expressas em unidades diferentes; (b) massa é propriedade de um único objeto, enquanto que o peso é devido à interação de dois objetos; (c) o peso de um objeto é proporcional à sua massa; (d) a massa de um corpo varia com as mudanças de seu peso local.
10. Uma força horizontal atua sobre uma massa em condições de se mover livremente. Haverá aceleração, se a força é menor que o peso dessa massa?
11. A aceleração de um corpo, caindo livremente, depende de seu peso?
12. Um pássaro pousa sobre um fio de telégrafo. Este fato altera a tração no fio? Se sim, seu valor é menor, igual ou maior que o peso do pássaro?
13. Na Fig. 5-11, mostramos quatro forças que são quase iguais em módulo. Quais as três forças que combinadas, atuando juntas num mesmo corpo, manteriam esse corpo em equilíbrio translacional?
14. Por que os pingos de chuva caem com velocidade constante no estágio final de sua queda?
15. Em um "cabo de guerra", três homens puxam uma corda para a esquerda, no extremo  $A$ , e outros três para a direita, no extremo  $B$ , com forças de mesmo módulo. Um peso de 50 N é suspenso verticalmente do meio da corda. (a) Os homens conseguirão manter na horizontal a corda  $AB$ ? (b) Em caso negativo, explique por quê. Em caso afirmativo determine o módulo das forças necessárias, em  $A$  e em  $B$ , para conseguir isto.
16. Seguem-se duas assertivas verdadeiras. Explique-as. Dois times, competindo em um cabo de guerra, devem sempre puxar a corda, cada qual para o seu lado, com a mesma intensidade. O time que empurrar mais fortemente contra o solo, ganhará.
17. Uma corda de massa desprezível passa sobre uma roldana sem atrito. Um macaco está suspenso em uma das extremidades da corda, e um espelho, de mesmo peso, é colocado no mesmo nível que o macaco, na outra extremidade. O macaco conseguirá afastar-se de sua imagem no espelho (a) subindo pela corda? (b) descendo por ela? (c) soltando a corda?
18. Dois objetos da mesma massa repousam nos pratos de uma balança. A balança se mantém equilibrada dentro de um elevador, quando este é acelerado para cima ou para baixo?
19. De pé, sobre a plataforma de uma grande balança de molas, você anota seu peso. Dá, então, um passo e verifica que a balança registra um peso menor ao levantar o pé e um peso maior ao baixá-lo. Explique.
20. Um peso está suspenso por um cordel do teto de um elevador. Entre as condições seguintes, escolha aquela em que a tensão no cordel será a maior. Repita a escolha para o caso em que a tensão é a menor. (a) o elevador em repouso.

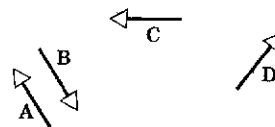


figura 5-11  
Questão 13

(b) o elevador subindo com velocidade uniforme. (c) o elevador descendo com velocidade decrescente. (d) o elevador descendo com velocidade crescente.

21. Uma mulher fica de pé sobre uma balança de molas em um elevador. Em quais casos abaixo, a balança registrará a menor leitura e a maior leitura? (a) o elevador estacionário; (b) o cabo de elevador se rompe, queda livre; (c) o elevador acelerando para cima; (d) o elevador acelerando para baixo; (e) o elevador se movendo à velocidade constante.
22. Sob que circunstâncias seu peso seria nulo? Sua resposta depende de um referencial?

SEÇÃO 5-4

1. Dois blocos, de massas  $m_1$  e  $m_2$ , são interligados por uma mola de peso desprezível. Os corpos estão apoiados sobre uma mesa plana sem atrito. Após terem sido afastados e soltos, o bloco 1 adquire uma aceleração instantânea igual a  $a_1$ . No mesmo instante a aceleração do bloco 2 vale  $a_2 = 3a_1$ . (a) Obtenha a razão  $m_1/m_2$ . (b) Se  $m_1 = 2$  kg e se  $a_2 = 12$  m/s<sup>2</sup> qual seria a força exercida pela mola sobre os blocos?

SEÇÃO 5-5

2. Considere o Exemplo 2 deste Capítulo. A massa da mola vale 100 g e a massa do bloco vale 2,00 kg. Calcule o módulo da força exercida pelo teto sobre a mola.  
*Resposta:* 20,6 N.
3. Dois pesos de 45 N são conectados a um dinamômetro, como mostra a Fig. 5-12(a). (a) Qual é a leitura do dinamômetro? (b) Um único peso de 45 N é ligado a um dinamômetro que, por sua vez, é fixado à parede, como mostra a Fig. 5-12(b). Qual seria neste caso a leitura do dinamômetro?
4. Dois blocos estão em contato sobre uma mesa plana sem atrito. Uma força horizontal é aplicada a um dos blocos conforme indicado na Fig. 5-13. (a) Se  $m_1 = 3,0$  kg,  $m_2 = 2,0$  kg,  $F = 6$  N, ache a força de contato entre os dois blocos. (b) Suponha que a mesma força  $F$  seja aplicada a  $m_2$ , ao invés de  $m_1$ ; obtenha o módulo da força de contato entre os dois blocos neste caso.  
*Resposta:* (a) 2,4 N. (b) 3,6 N.

SEÇÃO 5-8

5. Um viajante espacial possui massa de 70 kg. Calcule seu peso, quando estiver em repouso sobre uma balança: (a) na Terra, (b) na Lua (onde  $g = 1,67$  m/s<sup>2</sup>), (c) em Júpiter (onde  $g = 25,90$  m/s<sup>2</sup>). (d) Qual é a sua massa em cada um destes locais?

SEÇÃO 5-10

6. Um carro possui velocidade constante de 60 km/h e sua massa vale 1,2 toneladas (1 tonelada = 10<sup>3</sup> kg). Num dado instante o motorista usa os freios e o carro pára após percorrer 50 m. Calcule: (a) o módulo da força de frenagem, (b) o tempo necessário para o carro parar.  
*Resposta:* (a) 2,78 kN, (b) 6 s.
7. Duas forças,  $F_1$  e  $F_2$ , atuam sobre um corpo de massa  $m$ , como indica a Fig. 5-14. Considere  $m = 8,0$  kg,  $F_1 = 4,0$  N,  $F_2 = 6,0$  N. Determine o vetor aceleração do corpo.
8. Um elétron é projetado com uma velocidade horizontal de  $8,2 \times 10^6$  m/s no interior de um campo elétrico que exerce sobre ele uma força vertical constante de  $4,0 \times 10^{-16}$  N. A massa do elétron vale  $9,1 \times 10^{-31}$  kg. Determine a deflexão vertical do elétron durante o intervalo de tempo em que ele avança 2,5 cm horizontalmente.  
*Resposta:* 2,0 mm.
9. A massa de um corpo é igual a 20 kg. Sobre este corpo atua a força da gravidade e uma força horizontal igual a 90 N. Calcule: (a) sua aceleração, (b) sua velocidade em função do tempo supondo que ele parta do repouso.
10. Um bloco de massa  $m_1$  está ligado a um bloco de massa  $m_2$  por meio de uma corda de massa desprezível. Os dois blocos estão apoiados sobre um plano inclinado que forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal. Suponha que não haja atrito entre os blocos e o plano. Determine: (a) a aceleração de cada bloco, (b) a tensão na corda.

# problemas

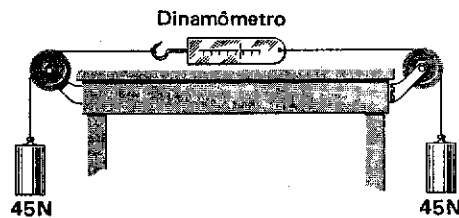


figura 5-12(a)

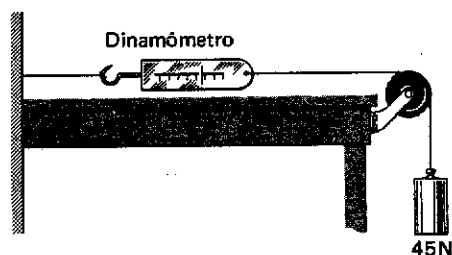


figura 5-12(b)

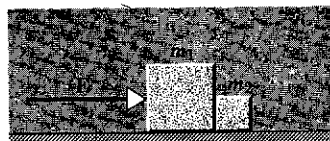


figura 5-13

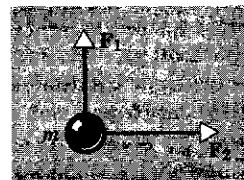


figura 5-14

Resposta: (a) Ambos os blocos escorregam com a mesma aceleração dada por  $g \sin \theta$ ,  
(b) 0.

11. Um homem de massa igual a 70 kg salta do parapeito de uma janela, a apenas 0,65 m acima do solo, para um pátio de concreto. Ele não dobra os joelhos ao tocar o solo e seu movimento é interrompido numa distância de 2,0 cm. (a) Calcule a aceleração média do homem desde o momento em que seus pés tocam o solo até o momento em que seu corpo entra em repouso. (b) Determine a força média do impacto sobre sua estrutura óssea.
12. Num jogo de cabo-de-guerra três homens puxam uma das extremidades do cabo e três homens puxam a extremidade oposta. Um corpo de massa igual a 30 kg está pendurado no meio da corda. Os homens conseguirão, puxando bastante, fazer com que o cabo fique exatamente retilíneo? Explique a resposta.

Resposta: Não. Existirá sempre uma componente vertical da tensão da corda para equilibrar o peso do corpo de 30 kg.

13. Determine a força de atrito do ar sobre um corpo de massa igual a 0,50 kg que cai com uma aceleração igual a  $9,3 \text{ m/s}^2$ .
14. Uma esfera carregada possui massa igual a  $5,0 \times 10^{-3} \text{ kg}$ . A esfera é suspensa por um fio isolante inextensível; sobre a esfera atua uma força elétrica horizontal de modo que, no equilíbrio, o barbante forma um ângulo de  $30^\circ$  com a vertical. Calcule: (a) o módulo da força elétrica, (b) a tensão no fio.

Resposta: (a) 0,03 N, (b) 0,06 N.

15. Um bloco de massa  $M$  é puxado ao longo de uma superfície horizontal lisa por uma corda de massa  $m$ , conforme indicado na Fig. 5-15. Uma força horizontal  $P$  é aplicada a uma das extremidades da corda. (a) Mostre que a corda deve vergar, ainda que de modo quase imperceptível. Em seguida, desprezando a deflexão da corda, determine: (b) a aceleração da corda e do bloco, (c) a força que a corda exerce sobre o bloco  $M$ .



figura 5-15

16. Três blocos estão conectados, como mostra a Fig. 5-16, sobre uma mesa horizontal sem atrito e são puxados para a direita com uma força  $T_3 = 100 \text{ N}$ . Suponha  $m_1 = 10 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 15 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 25 \text{ kg}$ . (a) Obtenha uma expressão para a aceleração do sistema. (b) Generalize o resultado do item anterior para a aceleração de  $N$  blocos ligados por cordas de massas desprezíveis, supondo que a massa total dos  $N$  blocos seja igual a  $M$ , isto é, supondo  $M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$ . (c) Calcule os módulos das tensões  $T_1$  e  $T_2$ .

Resposta: (a)  $a = T_3 / (m_1 + m_2 + m_3)$ . (b)  $a = T_3 / M$ . (c)  $T_1 = m_1 a = 20 \text{ N}$ ;  $T_2 = (m_1 + m_2) a = 50 \text{ N}$ .

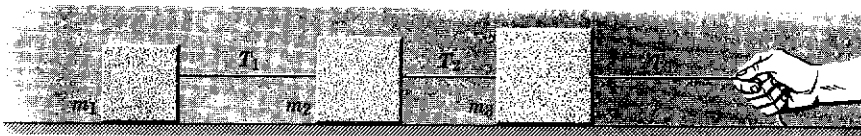


figura 5-16

17. Um foguete juntamente com sua carga possui massa igual a  $7,0 \times 10^4 \text{ kg}$ . Calcule o módulo da força de propulsão do foguete quando (a) ele está "pairando" acima da plataforma de lançamento, logo após a ignição, e (b) o foguete está acelerando para cima a  $25 \text{ m/s}^2$ .
18. Um objeto possui massa igual a 80 kg. Uma corda possui tensão de ruptura igual a 500 N. Explique como seria possível baixar este objeto de um telhado usando esta corda.

Resposta: Para que a corda não se rompa o objeto deve ser baixado com uma aceleração maior do que  $3,56 \text{ m/s}^2$ . Para uma aceleração igual a  $3,56 \text{ m/s}^2$  a corda não se rompe mas está no limite de ruptura; se a aceleração for menor do que  $3,56 \text{ m/s}^2$  a corda se rompe. Em particular, o objeto não pode ficar suspenso nesta corda parado nem muito menos ser puxado para cima (qualquer que seja a aceleração).

19. Um bloco, partindo do repouso no topo de um plano inclinado sem atrito, cujo comprimento é de 16 m, chega à base do plano 5,0 s depois. Um segundo bloco é projetado da base para cima do plano no instante em que o primeiro bloco começa a sua trajetória, de tal modo que ele retorna à base do plano simultaneamente com o primeiro bloco. (a) Ache a aceleração de cada bloco no plano inclinado. (b) Calcule a velocidade inicial do segundo bloco. (c) Que distância ao longo do plano percorre o segundo bloco? (d) Determine o ângulo que o plano forma com a horizontal.

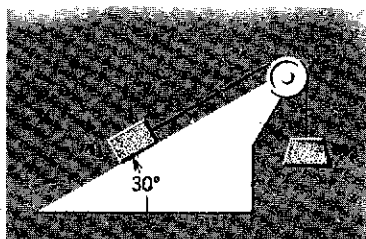


figura 5-17

20. Um bloco de massa  $m_1 = 50 \text{ kg}$  está apoiado sobre um plano inclinado liso que forma um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal, conforme indicado na Fig. 5-17. Este corpo é ligado a outro de massa  $m_2$ , através de um fio inextensível e de massa desprezível que



passa por uma roldana sem atrito. Considere  $m_2 = 30$  kg. (a) Calcule a aceleração de cada corpo. (b) Ache o módulo da tensão da corda.

Resposta: (a)  $0,6 \text{ m/s}^2$ . (b)  $275 \text{ N}$ .

21. Um bloco é projetado para cima, sobre um plano inclinado sem atrito, com uma velocidade  $v_0$ . O ângulo de inclinação em relação à horizontal é igual a  $\theta$ . (a) Que distância ao longo do plano ele percorre? (b) Quanto ele gasta para percorrer esta distância? (c) Calcule sua velocidade no momento em que ele retorna à base do plano. Obtenha primeiro as respostas literais e depois ache as respostas numéricas considerando os seguintes valores:  $\theta = 30^\circ$  e  $v_0 = 3 \text{ m/s}$ .

22. Um elevador possui massa igual a 4 toneladas. (a) Ele é puxado de baixo para cima por meio de um cabo com uma aceleração de  $1,5 \text{ m/s}^2$ . (b) Determine a tensão no cabo quando o elevador está descendo com uma aceleração de  $1,8 \text{ m/s}^2$ .

Resposta: (a)  $45,2 \text{ kN}$ . (b)  $32,0 \text{ kN}$ .

23. Um lustre está pendurado verticalmente por um fio, no interior de um elevador que desce com desaceleração de  $1,8 \text{ m/s}^2$  antes de parar. (a) Supondo que a tensão no fio seja igual a  $90 \text{ N}$ , calcule a massa do lustre. (b) Determine a tensão no fio quando o elevador sobe com uma aceleração de  $2,4 \text{ m/s}^2$ .

24. Um pára-quedista possui massa igual a  $70 \text{ kg}$  e quando salta do avião com um pára-quedas ele sofre uma aceleração para baixo igual a  $2,0 \text{ m/s}^2$ . A massa do pára-quedas vale  $5,0 \text{ kg}$ . (a) Determine o valor da força exercida pelo ar de baixo para cima sobre o pára-quedas. (b) Ache o módulo da força exercida pelo homem sobre o pára-quedas.

Resposta: (a)  $585,7 \text{ N}$ . (b)  $546,7 \text{ m/s}^2$ .

25. Seja  $M$  a massa total de um balão de pesquisas. O balão está descendo verticalmente com uma aceleração  $a$  orientada de cima para baixo. Determine a massa de lastro necessária para ser lançada do balão a fim de que o balão passe a sofrer a mesma aceleração  $a$ , porém orientada de baixo para cima.

26. Observe a Fig. 5-18. Um elevador compõe-se da cabina  $A$ , do contrapeso  $B$ , do mecanismo de propulsão  $C$  e do cabo e roldanas. A massa da cabina vale  $1\,300 \text{ kg}$  e a do contrapeso vale  $1\,200 \text{ kg}$ . Despreze o atrito e a massa do cabo e das roldanas. O elevador está acelerado para cima a  $2,5 \text{ m/s}^2$  e o contrapeso possui aceleração igual mas de sentido contrário. Determine: (a) o módulo da tensão  $T_1$ , (b) o módulo de  $T_2$ , (c) a força que o mecanismo de propulsão exerce sobre o cabo.

Resposta: (a)  $1,60 \times 10^4 \text{ N}$ ,  
(b)  $0,88 \times 10^4 \text{ N}$ ,  
(c)  $0,72 \times 10^4 \text{ N}$ , no sentido do contrapeso.

27. Um homem possui massa igual a  $80 \text{ kg}$ . Ele desce de uma altura de  $10 \text{ m}$  até tocar o solo, segurando-se numa corda que passa por uma roldana sem atrito e que possui na outra extremidade um saco de areia de  $60 \text{ kg}$ . Determine: (a) a velocidade com que o homem toca o solo, (b) o tempo gasto neste percurso. (c) Ele poderia fazer alguma coisa para tentar reduzir a velocidade com que ele atinge o solo?

28. O eixo da roldana indicada na Fig. 5-19 é impulsionado por uma força  $F$  de baixo para cima. Despreze o atrito do mancal e a massa do fio e da roldana. O corpo  $m_1$  possui massa igual a  $2 \text{ kg}$  e o outro corpo amarrado na outra extremidade da roldana possui massa  $m_2 = 4 \text{ kg}$ . O corpo de massa  $m_2$  está inicialmente apoiado na horizontal. Faça um diagrama das forças sobre a roldana e sobre cada um dos blocos. Com base neste diagrama e nas leis de Newton, determine: (a) o maior valor que a força  $F$  pode ter de modo que  $m_2$  permaneça em repouso sobre a superfície, (b) a tensão no fio supondo  $F = 100 \text{ N}$ , (c) a aceleração de  $m_1$  no caso (b).

Resposta: (a)  $78,5 \text{ N}$ , (b)  $50 \text{ N}$ , (c)  $15,2 \text{ m/s}^2$ , para cima.

29. Considere a mesma roldana da Fig. 5-19. No lugar de  $m_1$  suponha que exista um macaco e no lugar de  $m_2$  suponha um bloco de massa igual a  $19 \text{ kg}$ . A massa do macaco é igual a  $12 \text{ kg}$ . (a) Explique quantitativamente como o macaco pode subir pela corda de modo a levantar do solo a massa  $m_2$ . Faça as mesmas considerações do problema anterior, desprezando as mesmas grandezas desprezadas nesse problema. Suponha agora que o macaco pára de subir, apenas agarrando-se à corda, após ter erguido a massa; determine neste caso: (b) a aceleração do macaco, (c) a tensão na corda, (d) o valor da força  $F$ . Observação: Neste problema, diversamente do problema anterior, você deve supor que a roldana esteja fixa no teto por um fio cuja direção é igual à direção da força  $F$  indicada na Fig. 5-19.

30. Um fio de prumo, pendurado no teto de um vagão ferroviário atua como um *acelerômetro*. (a) Deduza a expressão da aceleração do trem em função do ângulo  $\theta$  formado pela direção do fio de prumo com a vertical. (b) Calcule  $a$  para  $\theta = 30^\circ$  e para  $\theta = 45^\circ$ . (c) Para  $a = 2,0 \text{ m/s}^2$ , qual seria o valor de  $\theta$ ?

Resposta: (a)  $a = g \tan \theta$ , (b)  $5,7 \text{ m/s}^2$ ;  $9,8 \text{ m/s}^2$ ; (c)  $11,5^\circ$

31. Uma corrente flexível e uniforme possui comprimento  $L$ . Sua densidade linear (ou seja, seu peso por unidade comprimento) vale  $\lambda$ . A corrente passa sobre uma roldana sem atrito e de massa desprezível. Ela é liberada da posição de repouso, pendendo para um

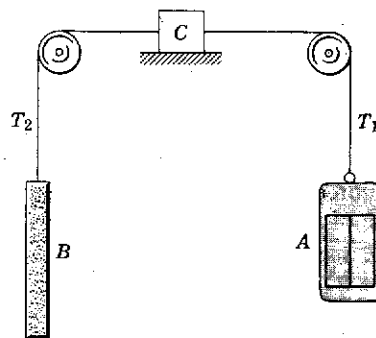


figura 5-18

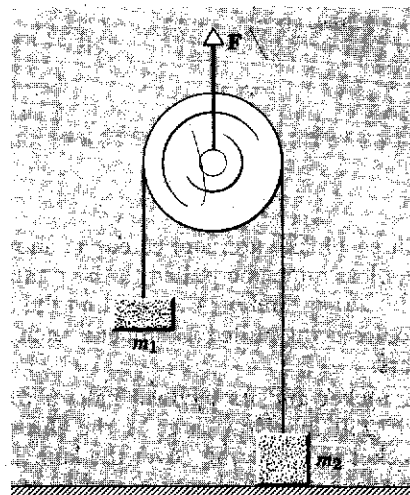


figura 5-19

lado com um comprimento  $x$  e para o outro com comprimento  $L - x$ . Determine a aceleração  $a$  em função de  $x$ .

32. Duas partículas de mesma massa  $m$  estão ligadas por um fio leve de comprimento  $2l$ , conforme indicado na Fig. 5-20. Aplica-se uma força contínua  $F$  no ponto médio da corda ( $x = 0$ ), perpendicularmente à posição inicial da corda. Determine a aceleração de  $m$  numa direção perpendicular à força aplicada, em função da distância  $x$  de uma das partículas à linha de ação da força aplicada.

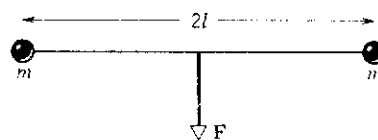


figura 5-20

Resposta: 
$$a_x = \frac{F}{2m} \cdot \frac{x}{(l^2 - x^2)^{1/2}}$$

33. A Fig. 5-21 indica uma corrente composta por 5 elos, cada um dos quais possui massa igual a 0,08 kg. A corrente é levantada verticalmente com uma aceleração de  $2,5 \text{ m/s}^2$ . Determine: (a) as forças que atuam sobre os elos adjacentes, (b) a força  $F$  exercida sobre o elo superior pelo agente que levanta a corrente, (c) a força resultante que atua em cada elo.
34. A resistência do ar ao movimento dos corpos depende de muitos fatores, tais como: tamanho e forma do corpo, densidade e temperatura do ar, velocidade do corpo, etc. Uma hipótese aceitável, pelo menos para cálculos de ordem de grandeza, afirma que a força resistiva  $f_R$  é proporcional ao módulo da velocidade do corpo. Como a força resistiva é contrária ao movimento, podemos escrever:  $f_R = -kv$ , onde  $k$  é uma constante de proporcionalidade. Denomina-se *velocidade terminal* de um corpo no seio de um fluido a velocidade atingida pelo corpo quando a aceleração do movimento torna-se nula, isto é, o corpo passa a se mover com velocidade constante no seio do fluido. (a) Aplique a Segunda Lei de Newton para um corpo que cai verticalmente no ar. (b) Obtenha a equação diferencial do movimento. (c) Calcule a velocidade terminal. (d) Obtenha a expressão da velocidade em função do tempo. (e) Obtenha a expressão do espaço percorrido em função do tempo.

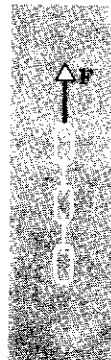


figura 5-21

Resposta: (a)  $mg - kv = ma$ . (b)  $mg - kv = m(dv/dt)$  ou então:

$$mg - k \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

- (c)  $v_t = mg/k$ . (d) O módulo da velocidade em função de  $t$  é dado por:  $v = v_t(1 - e^{-kt/m})$ . (e) O espaço percorrido em função do tempo vale:  $x = v_t t + v_t(m/k) \exp(-kt/m)$ .

35. A Fig. 5-22 indica uma cunha em forma de triângulo retângulo, de massa  $M$  e ângulo  $\theta$ . A cunha repousa sobre uma mesa horizontal e sobre a cunha existe um bloco de massa  $m$ . (a) Ache a aceleração horizontal  $a$  da cunha em relação à mesa para que o bloco de massa  $m$  fique estacionário em relação à cunha, desprezando a força de atrito entre a cunha e o bloco. (b) Determine a força horizontal  $F$  para que se obtenha este resultado, desprezando-se o atrito com a mesa. (c) Suponha agora que nenhuma força seja aplicada a  $M$  e que nenhuma das superfícies em contato possua atrito; descreva o movimento resultante.

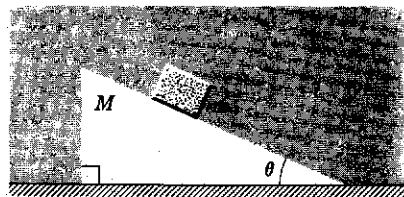


figura 5-22

36. Um bloco de massa  $m$  pode deslizar sem atrito sobre um plano inclinado que forma um ângulo  $\theta$  com o piso de um elevador. Determine a aceleração do bloco em relação ao plano inclinado nos seguintes casos: (a) o elevador desce com velocidade constante  $v$ , (b) o elevador sobe com velocidade constante  $v$ , (c) o elevador desce com aceleração  $a$ , (d) o elevador desce com uma desaceleração  $a$ , (e) o elevador sobe com uma aceleração  $a$ , (f) o cabo do elevador se rompe. (g) Suponha que o corpo de massa  $m$  permaneça apoiado sobre uma balança de mola de massa desprezível que também está apoiada sobre o plano inclinado; calcule o peso do corpo de massa  $m$  indicado pela balança nas condições do item (e).

Resposta: (a)  $g \sin \theta$ , (b)  $g \sin \theta$ , (c)  $(g - a) \sin \theta$ , (d)  $(g + a) \sin \theta$ , (e)  $(g + a) \sin \theta$ , (f) zero. (g) O módulo do peso vale:  $m(g + a) \cos \theta$ .

# 6

## *dinâmica*

### *da partícula-II*

No Cap. 5, consideramos a dinâmica da partícula para corpos sujeitos a forças constantes, tanto em módulo como em sentido. Lidamos, aí, com forças exercidas pela Terra ou por cordas distendidas, isto é, forças gravitacionais ou elásticas. No presente capítulo, estudaremos outro tipo de força, a que resulta do atrito.

Discutiremos, também, a dinâmica do movimento circular uniforme, em que a força, embora de módulo constante, tem direção variável no tempo. No Cap. 10, estudaremos problemas em que a força, embora tenha sentido constante, varia em módulo com o tempo, por exemplo, quando um corpo exerce sobre outro uma força transiente, durante uma colisão. Finalmente, no Cap. 15, consideraremos problemas em que tanto o *módulo* como o *sentido* da força variam com o tempo; tal é a força exercida por uma mola sobre um corpo oscilante nela pendurado.

Se lançarmos um bloco de massa  $m$  com velocidade inicial  $v_0$  sobre uma mesa horizontal, ele acabará parando. Isto significa que, enquanto o bloco se move, ele possui uma aceleração média,  $\bar{a}$ , de sentido oposto ao de seu movimento. Se (em um referencial inercial) vemos que um corpo está sendo acelerado, sempre associamos ao movimento uma força, definida pela segunda lei de Newton. Neste caso, declaramos que a mesa exerce uma *força de atrito*, cujo valor médio é  $m\bar{a}$ , sobre o bloco que desliza.

6-1

#### INTRODUÇÃO

6-2

#### FORÇAS DE ATRITO<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Ver "The Friction of Solids", por E. H. Freitag, em *Contemporary Physics*, vol. 2, 1961, pág. 198, para uma boa referência geral, ver também o artigo "Friction" na Enciclopédia Britânica.

Realmente, sempre que a superfície de um corpo escorrega sobre a de outro, cada corpo exerce sobre o outro uma força paralela às superfícies. A força de atrito sobre cada corpo tem sentido oposto ao seu movimento em relação ao outro corpo. As forças de atrito, automaticamente, se opõem ao movimento, nunca o favorecem. Mesmo quando não há movimento relativo, podem existir forças de atrito entre as superfícies.

Embora tenhamos ignorado seus efeitos até agora, o atrito é muito importante em nossa vida diária. Se agir sozinho, o atrito pára qualquer eixo em rotação. Em um automóvel, cerca de 20% da potência do motor são utilizados para contrabalançar as forças de atrito. O atrito provoca desgaste e deformação de partes móveis e muitos homens-hora técnicos são consumidos para reduzi-lo. Por outro lado, sem o atrito não conseguiríamos caminhar como o fazemos; não poderíamos segurar um lápis na mão e se o pudéssemos ele não escreveria; não seria possível o transporte sobre rodas.

Desejamos saber como exprimir as forças de atrito em termos das propriedades do corpo e de sua vizinhança, isto é, queremos conhecer a lei de força para forças de atrito. No que segue, consideramos o escorregamento (e não o rolamento) de uma superfície seca (não lubrificada) sobre outra. Como veremos mais tarde, o atrito, estudado ao nível microscópico, é um fenômeno muito complicado<sup>2</sup> e as leis de força para atrito de escorregamento seco são de caráter empírico e suas previsões aproximadas. Elas não têm a elegante simplicidade e precisão da lei de força gravitacional (Cap. 16) ou da lei de força eletrostática (Cap. 26). No entanto, considerando a enorme diversidade de superfícies existentes, é notável que muitos aspectos do comportamento do atrito possam ser entendidos qualitativamente, com base em alguns mecanismos simples.

Consideremos um bloco em repouso sobre uma mesa horizontal, como na Fig. 6-1. Liguemos a ele uma mola para medir a força necessária para o colocar em movimento. Verificamos que o bloco não se moverá, mesmo se aplicarmos uma pequena força. Dizemos que a força aplicada é equilibrada por uma força de atrito oposta, exercida sobre o bloco pela mesa, atuando ao longo da superfície de contato. Aumentando a força aplicada, encontraremos uma força definida, para a qual o bloco apenas começa a se mover. Uma vez iniciado o movimento, esta mesma força acelera o bloco. Reduzindo a força, desde que o movimento tenha começado, verificamos ser possível manter o bloco em movimento uniforme (sem aceleração); esta força pode ser pequena, mas nunca é nula.

As forças de atrito que atuam entre superfícies em repouso relativo são chamadas forças de atrito estático. A força máxima de atrito estático será igual à força mínima necessária para começar o movimento. Iniciado este, as forças de atrito que atuam entre as superfícies usualmente decrescem, de modo que uma força menor bastará para manter o movimento uniforme. As forças que atuam entre superfícies em movimento relativo denominam-se de atrito cinético.

A força máxima de atrito estático entre um par qualquer de superfícies secas, não lubrificadas, obedece a duas leis empíricas: (1) é aproximadamente independente da área de contato, dentro de amplos limites, e (2) é proporcional à força normal. Esta força

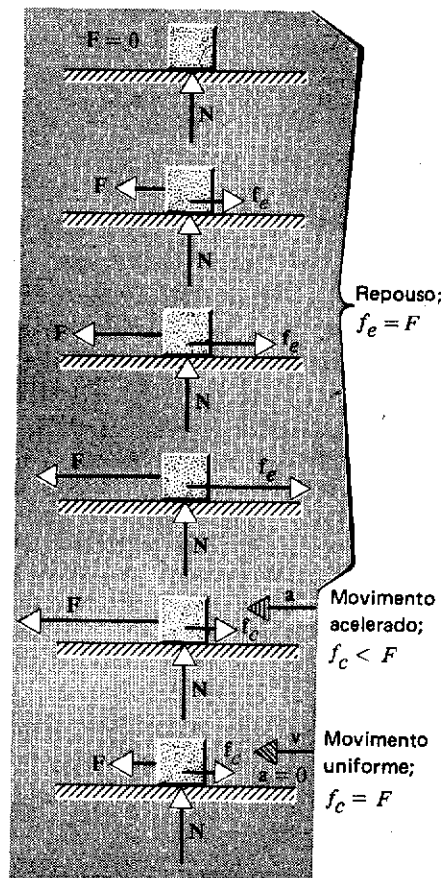


figura 6-1

Um bloco se movimenta quando a força aplicada,  $F$ , supera as forças de atrito. Nos primeiros quatro desenhos, a força aplicada aumenta gradualmente desde zero ao valor  $\mu_e N$ . Não ocorre movimento até esse ponto, porque as forças de atrito, em todos os casos, equilibram exatamente a força aplicada. No instante em que  $F$  torna-se maior que  $\mu_e N$ , o bloco começa a mover-se, como indica o quinto desenho. Em geral,  $\mu_c N < \mu_e N$ , originando uma força resultante dirigida para a esquerda, a qual acelera o bloco. No último desenho,  $F$  foi reduzida e iguala  $\mu_c N$ . A força resultante é nula e o bloco se move com velocidade constante.

<sup>2</sup> Ver, por exemplo, "Stick and Slip", por Ernest Rabinowicz, em *Scientific American*, maio de 1956.

normal é a que cada corpo exerce sobre o outro, perpendicularmente à sua interface comum. Ela provém da deformação elástica dos corpos em contato (os corpos, de fato, nunca são inteiramente rígidos). Para um bloco em repouso sobre uma mesa horizontal, ou escorregando sobre ela, a força normal tem módulo igual ao peso do bloco. Como o bloco não tem aceleração vertical, a mesa deve exercer sobre ele uma força dirigida para cima, de mesmo módulo que a atração para baixo exercida pela Terra sobre o bloco, isto é, igual ao peso do bloco.

O quociente do módulo da força de atrito estático máxima pelo módulo da força normal chama-se *coeficiente de atrito estático* para as duas superfícies. Representando por  $f_e$  o módulo da força de atrito estático, podemos escrever:

$$f_e \leq \mu_e N, \quad (6-1)$$

sendo  $\mu_e$  o coeficiente de atrito estático e  $N$  o módulo da força normal. O sinal de igualdade só é válido quando  $f_e$  assume seu valor máximo.

A força de atrito cinético,  $f_c$ , entre superfícies secas não lubrificadas obedece às mesmas duas leis do atrito estático: (1) é aproximadamente independente da área de contato, dentro de amplos limites, e (2) é proporcional à força normal. A força de atrito cinético também é razoavelmente independente da velocidade com a qual cada superfície se move em relação à outra.

Essas duas leis de atrito foram descobertas experimentalmente por Leonardo da Vinci (1452-1519). Era notável o enunciado das duas leis proposto por Leonardo, pelo fato de preceder, em cerca de dois séculos, o completo desenvolvimento do conceito de força, elaborado por Newton. A formulação de Leonardo era a seguinte: (1) "O atrito provocado pelo mesmo peso terá a mesma resistência no início do movimento, embora as áreas ou comprimentos de contato sejam diferentes" e (2) "O atrito provoca o dobro do esforço se o peso for dobrado". O cientista francês Charles A. Coulomb (1736-1806) realizou muitas experiências sobre atrito e assinalou a diferença entre atrito estático e dinâmico.

O quociente do módulo da força de atrito cinético pelo módulo da força normal denomina-se *coeficiente de atrito cinético*. Representando por  $f_c$  o módulo da força de atrito cinético,

$$f_c = \mu_c N \quad (6-2)$$

sendo  $\mu_c$  o coeficiente de atrito cinético.

Tanto  $\mu_e$  como  $\mu_c$  são constantes adimensionais, cada uma sendo a razão dos módulos de duas forças. Geralmente, para um dado par de superfícies,  $\mu_e > \mu_c$ . Os valores reais de  $\mu_e$  e de  $\mu_c$  dependem da natureza das duas superfícies em contato, podendo ambos exceder 1, embora comumente sejam inferiores a esse valor. Note que as Eqs. 6-1 e 6-2 são relações *apenas* entre os *módulos* da força normal e da força de atrito, cujas direções são sempre perpendiculares entre si.

Ao nível atômico, mesmo a superfície mais cuidadosamente polida está longe de ser plana. Por exemplo, a Fig. 6-2 mostra o perfil real, grandemente aumentado, de uma superfície de aço que poderia considerar-se altamente polida. Pode-se acreditar sem dificuldade que, quando dois corpos são colocados em contato, a área microscópica efetiva de contato é muito menor que a área macroscópica aparente de contato; em um caso particular, essas áreas podem facilmente estar na razão de 1 para  $10^4$ .



figura 6-2  
Fotografia grandemente aumentada da seção de uma superfície de aço finamente polida. A seção foi feita em ângulo, de forma que as distâncias verticais são exageradas por um fator 10 em relação às distâncias horizontais. As irregularidades da superfície têm altura de vários milhares de diâmetros atômicos. Segundo *Friction and Lubrication of Solids*, por F. P. Bowden e D. Tabor, Clarendon Press, 1950.

A área (microscópica) real de contato é proporcional à força normal, pois os pontos de contato deformam-se plasticamente sob os grandes esforços que se desenvolvem nesses pontos. Muitos pontos de contato ficam "soldados a frio". Este fenômeno, *adesão superficial*, ocorre porque nos pontos de contato as moléculas em lados opostos da superfície estão tão próximas que exercem fortes forças intermoleculares umas sobre as outras.

Quando um corpo (metálico, por exemplo) é puxado sobre um outro, a resistência de atrito está associada com a ruptura de milhares de soldas diminutas, que se reformam continuamente quando ocorrem novos contatos (ver Fig. 6-3). Experiências com traçadores radioativos mostraram que, no processo de ruptura, pequenos fragmentos de uma superfície metálica podem ser cortados e aderem à outra superfície. Se a velocidade relativa das duas superfícies for suficientemente grande, pode haver fusão local em certas áreas de contato, mesmo se a superfície, como um todo, parecer apenas levemente morna.

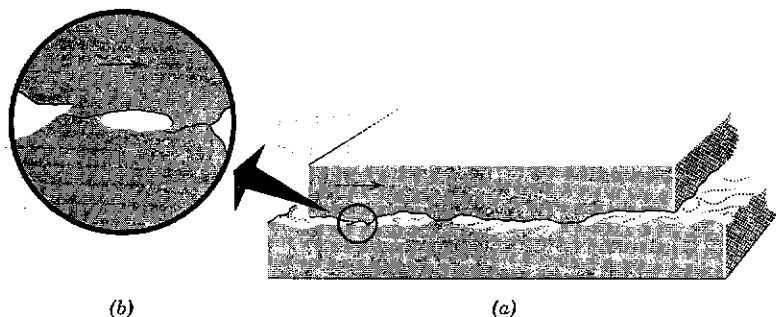


figura 6-3

Atrito de escorregamento. (a) O corpo superior escorrega para a direita sobre o inferior neste diagrama ampliado. (b) Um esquema ainda mais aumentado, mostrando duas regiões onde ocorreu adesão superficial. É necessária uma força para romper essas soldas e manter o movimento.

O coeficiente de atrito depende de muitas variáveis, tais como a natureza dos materiais, o acabamento da superfície, películas superficiais, temperatura e extensão da contaminação. Por exemplo, se duas superfícies metálicas, cuidadosamente limpas, forem colocadas em uma câmara altamente evacuada, de modo que não se formem películas superficiais de óxido, o coeficiente de atrito eleva-se a enormes valores e as superfícies realmente tornam-se firmemente "soldadas". A admissão de uma pequena quantidade de ar na câmara, de forma que películas de óxido possam formar-se nas superfícies opostas, reduz o coeficiente de atrito a seu valor normal.

Devido a essas complicações, não é surpreendente que não exista uma teoria exata para o atrito seco e que as leis do atrito sejam empíricas. A teoria da adesão superficial para o atrito, entretanto, permite entender facilmente as duas leis de atrito acima mencionadas. (1) A área microscópica de contato, que determina a força de atrito  $f_c$ , é proporcional à força normal  $N$  e, portanto,  $f_c$  é proporcional a  $N$ , como indica a Eq. 6-2. (2) O fato de que a força de atrito é independente da área aparente de contato significa, por exemplo, que a força necessária para arrastar um "tijolo" metálico sobre uma mesa metálica é a mesma, não importando que face do tijolo esteja em contato com a mesa. Podemos entender isso somente se a área microscópica de contato for a mesma para todas as posições do tijolo, e é este, de fato, o caso. Estando a maior face para baixo, há um número relativamente grande de áreas de contato, relativamente pequenas, suportando a carga; a menor face estando para baixo, os contatos são em menor número (pois a área aparente de contato é menor), porém a área de um dado contato é maior exatamente pelo mesmo fator, pois é maior a pressão exercida pelo tijolo sobre este número menor de contatos que suportam a mesma carga.

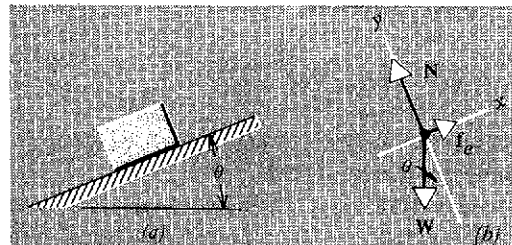
A força de atrito que se opõe a um corpo que *rola* sobre outro é muito menor que no movimento de deslizamento, aí residindo a vantagem da roda sobre o trenó. Este menor atrito é devido, em grande parte, ao fato de que, no rolamento, as soldas microscópicas nos contatos são "descascadas" e não "cortadas", como no atrito de escorregamento. Isto pode reduzir a força de atrito de um fator considerável.

A resistência de atrito, no caso de atrito de deslizamento a seco, pode ser consideravelmente reduzida pela lubrificação. Um mural em uma tumba egípcia, datando de cerca de 1900 a.C., mostra uma grande estátua de pedra sendo puxada em um trenó, enquanto um homem, à frente dele, coloca lubrificante em seu caminho. Uma técnica ainda mais eficaz é introduzir uma camada gasosa entre as superfícies que deslizam; o "disco de gelo seco", mencionado na nota de rodapé da Sec. 5-2,

e rolamentos que usam gases são dois exemplos. O atrito pode ser ainda mais reduzido suspendendo um objeto girante em uma câmara evacuada, por meio de forças magnéticas. J. W. Beams, por exemplo, fez girar um rotor de 15 kg, desse tipo, a 1 000 rev/s; quando o motor foi desligado, o rotor diminuiu de velocidade à taxa de apenas 1 rev/s em um dia.<sup>3</sup>

Seguem-se exemplos de aplicação da lei empírica para a força de atrito. Supõem-se constantes os coeficientes de atrito fornecidos. Efetivamente,  $\mu_e$  pode ser considerado como um valor médio tão bom que não difere grandemente do valor a qualquer velocidade particular no intervalo.

Um bloco está em repouso sobre um plano inclinado que forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal, conforme a Fig. 6-4a. Aumentando o ângulo de inclinação, verifica-se que para o valor  $\theta_e$  o bloco começa a escorregar. Qual o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano?



### EXEMPLO 1

figura 6-4  
Exemplo 1. (a) Um bloco em repouso sobre um plano inclinado áspero. (b) Diagrama de corpo livre para o bloco.

As forças que atuam no bloco, considerado como partícula, estão indicadas na Fig. 6-4b.  $W$  é o peso do bloco,  $N$  a força normal exercida sobre ele pelo plano, e  $f_e$  a força paralela à superfície exercida por esta sobre o bloco. Note que a força resultante exercida pela superfície inclinada sobre o bloco,  $N + f_e$ , não é mais perpendicular à superfície de contato, como acontecia para superfícies lisas ( $f_e = 0$ ). O bloco está em repouso, portanto,

$$N + f_e + W = 0.$$

Decompondo as forças segundo os eixos  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente paralelo e perpendicular ao plano, obtém-se

$$\begin{aligned} N - W \cos \theta &= 0, \\ f_e - W \sin \theta &= 0. \end{aligned} \tag{6-3}$$

Entretanto,  $f_e \leq \mu_e N$ . Aumentando lentamente o ângulo de inclinação, até que o escorregamento apenas comece, então, para o ângulo  $\theta = \theta_e$  poderemos usar  $f_e = \mu_e N$ . Substituindo na Eq. 6-3, obtém-se

$$\begin{aligned} N &= W \cos \theta_e \\ \mu_e N &= W \sin \theta_e, \end{aligned}$$

portanto,

$$\mu_e = \operatorname{tg} \theta_e.$$

Logo, um método experimental simples para determinar o coeficiente de atrito estático entre duas superfícies consiste em medir o ângulo de inclinação para o qual o escorregamento apenas se inicia.

Suponha que o bloco começou a descer o plano, iniciado o movimento mediante uma pequena pancada. O estudante pode mostrar, usando argumentos semelhantes aos do caso anterior, que o ângulo de inclinação  $\theta_c$  necessário para manter o bloco em velocidade constante é

<sup>3</sup> Veja "Ultrahigh-Speed Rotation", Jesse W. Beams, em *Scientific American*, abril de 1961.

$$\mu_c = \text{tg } \theta_c,$$

sendo  $\theta_c < \theta_e$ . Com a ajuda de uma régua o estudante pode, agora, determinar  $\mu_e$  e  $\mu_c$ , por exemplo, para uma moeda escorregando ao longo de um livro inclinado.

Consideremos um automóvel que se move ao longo de uma estrada reta horizontal, com velocidade  $v_0$ . Se o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a estrada for  $\mu_e$ , qual a mínima distância em que o automóvel pode parar?

As forças que atuam sobre o automóvel, considerado como partícula, estão indicadas na Fig. 6-5. Supõe-se que o carro se move no sentido positivo de  $Ox$ . Admitindo que a força  $f_e$  seja constante, o movimento será uniformemente desacelerado.

A partir da relação (ver Eq. 3-16)

$$v^2 = v_0^2 + 2ax,$$

com velocidade final  $v = 0$ , obtém-se

$$x = -v_0^2/2a,$$

em que o sinal negativo significa que  $a$  está orientada no sentido negativo do eixo  $Ox$ .

Para determinar  $a$  apliquemos a segunda lei de Newton ao componente  $x$  do movimento:

$$-f_e = ma = (W/g)a \quad \text{ou} \quad a = -g(f_e/W).$$

Os componentes  $y$  fornecem

$$N - W = 0 \quad \text{ou} \quad N = W,$$

portanto,

$$\mu_e = f_e/N = f_e/W$$

e

$$a = -\mu_e g.$$

Portanto, a distância procurada será

$$x = -v_0^2/2a = v_0^2/2g\mu_e. \tag{6.4}$$

Quanto maior a velocidade inicial, tanto maior a distância necessária para parar, que varia com o quadrado da velocidade inicial. Por outro lado, quanto maior o coeficiente de atrito estático, menor a distância requerida para parar.

Usamos neste problema o coeficiente de atrito estático, e não o de atrito de escorregamento, porque supusemos não haver deslizamento entre os pneus e a estrada. Desprezamos o atrito de rolamento e admitimos que agisse a força máxima de atrito estático ( $f_e = \mu_e N$ ), pois o problema pedia a distância mínima para deter o carro. Se a força de atrito estático for menor, naturalmente aumentará a distância para parar. A técnica certa de frear consiste em manter o carro na iminência de deslizar, o que pode ocorrer se os freios forem aplicados totalmente. Neste caso,  $\mu_c$  substitui  $\mu_e$  e a distância necessária para deter o carro será aumentada, como indica a Eq. 6-4.

Como exemplo preciso, se  $v_0 = 100 \text{ km/h} = 28 \text{ m/s}$  e  $\mu_e = 0.60$  (valor típico), obtém-se

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu_e g} = \frac{(28 \text{ m/s})^2}{2(0,60)(9,8 \text{ m/s}^2)} = 66 \text{ m}.$$

Note que a massa do carro não aparece na Eq. 6-4. Como você pode explicar a prática de "carregar" um carro a fim de aumentar a segurança ao dirigir em estradas geladas? (Observação: Ver Probl. 6-2.)

O estudante está, agora, em condições de investigar como, em princípio, as forças de atrito modificariam os resultados dos exemplos da Seção 5.10.

## EXEMPLO 2

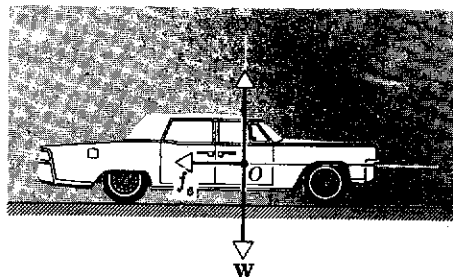


figura 6-5  
Exemplo 2. Forças sobre um automóvel em desaceleração.



Na Seç. 4-4 referimos que, se um corpo se move com velocidade (escalar) uniforme,  $v$ , em um círculo de raio  $r$ , age sobre ele uma aceleração,  $a$ , de módulo  $v^2/r$ . A aceleração  $a$  tem sempre a direção radial e está orientada da periferia para o centro de rotação. Portanto,  $a$  é um vetor variável, mesmo que seu módulo permaneça constante, pois sua direção varia continuamente durante o movimento.

Lembremos que não há necessariamente movimento na direção da aceleração. Em geral não existe relação determinada entre os sentidos da aceleração,  $a$ , e da velocidade,  $v$ , de uma partícula, como a Fig. 4-7 mostra. Para uma partícula em movimento circular uniforme, a aceleração,  $a$ , e a velocidade,  $v$ , são sempre perpendiculares uma à outra.

Todo corpo acelerado deve estar sob a ação de uma força  $F$ , definida pela segunda lei de Newton, ( $F = ma$ ). Portanto (supondo que estamos em um referencial inercial), se vemos um corpo movendo-se em movimento circular uniforme, podemos estar certos de que *deve* agir sobre ele uma força  $F$ , de módulo

$$F = ma = mv^2/r;$$

o corpo *não* está em equilíbrio. O sentido de  $F$ , em qualquer instante, deve ser o de  $a$  naquele instante, isto é, para o centro. Devemos poder sempre explicar essa força identificando um objeto determinado, na vizinhança que esteja exercendo a força sobre o corpo acelerado que descreve o círculo.

Se o corpo em movimento circular uniforme for um disco no extremo de um fio, movendo-se sobre uma superfície horizontal lisa, como na Fig. 6-6, a força  $F$  sobre o disco é fornecida pela tensão  $T$  do fio. Esta força é a resultante que atua no disco, acelerando-o pela variação contínua da direção (e sentido) de sua velocidade, de modo que o disco se move em um círculo.  $T$  está dirigida sempre para o alfinete central e seu módulo é  $mv^2/R$ . Se o fio fosse cortado no ponto em que é amarrado ao disco, nenhuma força agiria neste, o disco se moveria, então, com velocidade constante em linha reta, ao longo da tangente ao círculo no ponto em que o fio foi cortado. Portanto, para manter o disco em movimento circular, deve existir uma força sobre ele dirigida *para o centro*.

As forças responsáveis pelo movimento circular uniforme denominam-se *forças centrípetas*, porque estão dirigidas "para o centro" do movimento circular. Rotular uma força de "centrípeta", entretanto, significa meramente que ela está sempre dirigida radialmente para o centro, o nome nada nos informa sobre a natureza da força ou do corpo que a exerce. Assim, para o disco girante da Fig. 6-6, a força centrípeta é elástica, sendo fornecida pelo fio; no caso da Lua, revolvendo em torno da Terra (em uma órbita aproximadamente circular), a força centrípeta é a atração gravitacional da Terra sobre a Lua; para um elétron que circula em torno de um núcleo atômico, a força centrípeta é a força eletrostática entre o elétron e o núcleo. A força centrípeta *não* é uma nova espécie de força, mas simplesmente um modo de descrever o comportamento temporal de forças atribuíveis a corpos específicos da vizinhança. Portanto, uma força pode ser centrípeta e elástica, centrípeta e gravitacional, centrípeta e eletrostática, entre outras possibilidades.

Consideremos alguns exemplos de forças centrípetas.

## 6-3

## DINÂMICA DO MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME

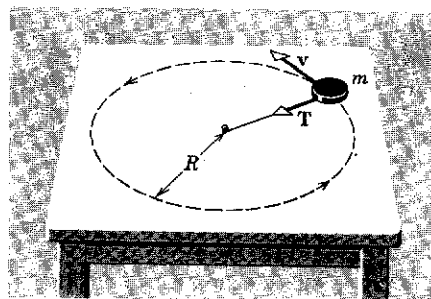


figura 6-6

Um disco,  $m$ , move-se com velocidade constante sobre uma trajetória circular, em uma superfície horizontal lisa. A única força horizontal que atua em  $m$  é a força centrípeta,  $T$ , exercida pelo fio sobre o corpo.

**Pêndulo Cônico.** A Fig. 6-7a representa um pequeno corpo de massa  $m$ , girando em um círculo horizontal com velocidade constante  $v$ , preso à extremidade de um fio de comprimento  $L$ . À proporção que o corpo gira, o fio descreve a superfície de um cone; este dispositivo é denominado *pêndulo cônico*. Determinar o tempo necessário a uma revolução completa do corpo.

Sendo  $\theta$  o ângulo do fio com a vertical, o raio da trajetória circular será  $R = L \sin \theta$ . As forças que agem no corpo são  $W$ , seu peso, e  $T$ , a tensão do fio, como ilustrado na Fig. 6-7b. É claro que  $W + T \neq 0$ , portanto, a força resultante que age no corpo não é nula, como deveríamos esperar, pois se o corpo se mantém em uma trajetória circular com velocidade constante, deve haver uma força atuando nele.

Em qualquer instante, podemos decompor  $T$  em componentes radial e tangencial:

$$T_r = T \sin \theta \quad \text{e} \quad T_z = T \cos \theta.$$

Como o corpo não possui aceleração vertical,

$$T_z - W = 0.$$

Porém,

$$T_z = T \cos \theta \quad \text{e} \quad W = mg,$$

logo,

$$T \cos \theta = mg.$$

A aceleração radial é  $v^2/R$  e é fornecida por  $T_r$ , a componente radial de  $T$ , que é a força centrípeta que age sobre  $m$ . Portanto,

$$T_r = T \sin \theta = mv^2/R.$$

Dividindo esta equação pela precedente, obtemos

$$\operatorname{tg} \theta = v^2/Rg \quad \text{ou} \quad v^2 = Rg \operatorname{tg} \theta,$$

que dá a velocidade escalar constante do corpo. Representando por  $\tau$  o tempo necessário para uma revolução completa do corpo, teremos

$$v = \frac{2\pi R}{\tau} = \sqrt{Rg \operatorname{tg} \theta}$$

ou

$$\tau = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg \operatorname{tg} \theta}} = 2\pi \sqrt{R/(g \operatorname{tg} \theta)}.$$

Como  $R = L \sin \theta$ , resulta

$$\tau = 2\pi \sqrt{L \cos \theta / g}.$$

Esta equação relaciona  $\tau$ ,  $L$  e  $\theta$ . Note que  $\tau$ , chamado *período* do movimento, não depende de  $m$ .

Se  $L = 1,0$  m e  $\theta = 30^\circ$ , o período do movimento será

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{1,0 \text{ m} \times 0,866}{9,8 \text{ m/s}^2}} = 1,8 \text{ s}.$$

### EXEMPLO 3

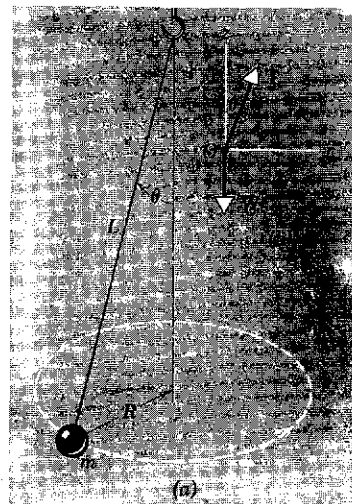


figura 6-7

Exemplo 3. (a) Uma massa  $m$ , suspensa de um fio de comprimento  $L$ , oscila descrevendo um círculo. O fio descreve um cone circular reto de semi-ângulo  $\theta$ . (b) Diagrama de corpo livre para  $m$ .

### EXEMPLO 4

**Rotor.** Em muitos parques de diversões<sup>4</sup>, encontra-se um dispositivo chamado *rotor*. É um aposento cilíndrico oco que pode girar em torno do eixo vertical central do cilindro. Uma pessoa entra no rotor, fecha a porta e encosta-se à parede. O rotor gradualmente aumenta sua velocidade de rotação a partir do

<sup>4</sup> Ver "Physics and the Amusement Park" por John L. Rooder em *The Physics Teacher*, setembro, 1975.

repouso até que, para um valor determinado da velocidade, o assoalho abre-se abaixo da pessoa, revelando um poço profundo. O passageiro não cai, permanecendo “pregado” à parede do rotor. Determinar o coeficiente de atrito necessário para evitar a queda.

As forças que atuam no passageiro são indicadas na Fig. 6-8.  $W$  é o peso do passageiro,  $f_e$  a força de atrito estático entre o passageiro e a parede do rotor, e  $F$  a força centrípeta exercida pela parede sobre a pessoa, necessária para mantê-lo em movimento circular. Seja  $R$  o raio do rotor e  $v$  a velocidade final do passageiro. Como este não se move verticalmente, mas possui a qualquer instante uma aceleração radial  $v^2/R$ , temos

$$f_e - W = 0$$

e

$$F (=ma) = (W/g) (v^2/R).$$

Sendo  $\mu_e$  o coeficiente de atrito estático entre o passageiro e a parede, necessário para evitar deslizamento, então  $f_e = \mu_e F$  e

$$f_e = W = \mu_e F,$$

ou

$$\mu_e = \frac{W}{F} = \frac{gR}{v^2}.$$

Esta equação dá o valor mínimo do coeficiente de atrito capaz de impedir o escorregamento em um rotor de raio  $R$ , quando uma partícula em sua parede tem velocidade  $v$ . Note que o resultado não depende do peso do passageiro.

Na prática, o coeficiente de atrito entre o material têxtil da roupa e a parede de um rotor típico (lona) é cerca de 0,40. O raio de um rotor é de aproximadamente 2 m, de modo que o valor de  $v$  deve ser da ordem de 7 m/s (25 km/h) ou mais.

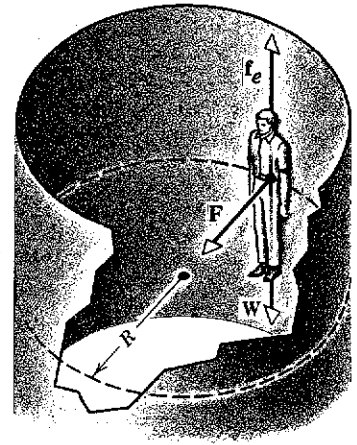


figura 6-8

Forças sobre uma pessoa em um “rotor” de raio  $R$ .

Consideremos o bloco da Fig. 6-9a, que representa um automóvel ou um vagão movendo-se à velocidade constante,  $v$ , em uma curva de uma estrada horizontal de raio de curvatura  $R$ . Além do peso,  $W$ , e da força normal,  $N$ , ambas verticais, atua no carro uma força centrípeta horizontal,  $F$ . No caso do automóvel esta força é fornecida pelo atrito lateral exercido pela estrada sobre os pneus, no caso de um vagão ferroviário ela é fornecida pelos trilhos, que exercem uma força

### EXEMPLO 5

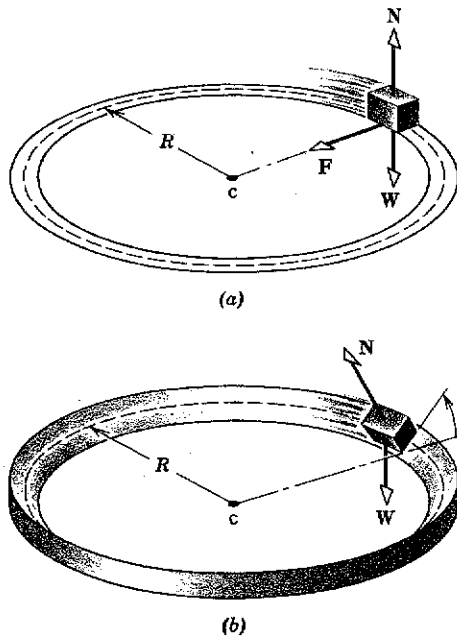


figura 6-9

Exemplos.

(a) Estrada horizontal. (b) Estrada com inclinação lateral.

lateral nas bordas internas das rodas do vagão. Não se pode confiar completamente que qualquer dessas forças laterais seja sempre bastante grande, e ambas provocam desgaste desnecessário. Portanto, o leito da estrada é *inclinado lateralmente* nas curvas, como ilustra a Fig. 6-9b. Nesse caso, a força normal,  $N$ , tem não somente um componente vertical, mas também um componente horizontal que fornece a força centrípeta necessária ao movimento circular uniforme; portanto, não é mais necessária qualquer força lateral, mediante uma inclinação adequada do leito da estrada.

O ângulo de inclinação,  $\theta$ , apropriado pode ser obtido como se mostra a seguir. Como não há aceleração vertical,

$$N \cos \theta = W.$$

A força centrípeta é  $N \sin \theta$ , de modo que  $N \sin \theta = mv^2/R$ . Dividindo esta equação pela anterior e fazendo  $W = mg$ , obtém-se

$$\operatorname{tg} \theta = v^2/Rg.$$

Note que o ângulo correto de inclinação depende da velocidade do carro e da curvatura da estrada. Para uma dada curvatura, a estrada é inclinada de um ângulo correspondente, a uma velocidade média esperada. Frequentemente, as curvas são sinalizadas com o valor da velocidade para a qual a inclinação foi prevista.

O estudante deve verificar a equação acima para os casos limites  $v = 0$  e  $R \rightarrow \infty$ ,  $v$  grande e  $R$  pequeno. Note, também, a grande semelhança entre a Fig. 6-7 do Ex. 3 e a Fig. 6-9b deste exemplo.

Todas as forças na Natureza podem classificar-se em quatro categorias, conforme sua intensidade relativa: (1) forças gravitacionais, relativamente muito fracas, (2) forças eletromagnéticas, de intensidade intermediária, (3) forças nucleares, que unem nêutrons e prótons no núcleo, sendo as mais fortes de todas, e (4) a força de interação fraca, que surge no decaimento  $\beta$  dos núcleos e nas interações de muitas partículas elementares (ver Ap. F).

Essas forças são "reais", no sentido de que podemos associá-las com determinados objetos da vizinhança. Forças, tais como a tração em uma corda, o atrito, a força que exercemos sobre uma parede ao pressioná-la, ou a força exercida por uma mola comprimida, são todas manifestações macroscópicas das atrações e repulsões eletromagnéticas entre átomos.

## 6-4 CLASSIFICAÇÃO DAS FORÇAS; FORÇAS INERCIAIS

Até agora, em nosso estudo da Mecânica Clássica, supusemos que nossas observações e medições fossem realizadas em um referencial inercial. Lembremos que assim se denomina um sistema de referência que esteja em repouso, ou que se move em linha reta com velocidade constante, em relação às estrelas fixas; é o conjunto de referenciais definidos pela primeira lei de Newton, ou seja, o conjunto de referenciais em que o corpo não será acelerado ( $a = 0$ ) se não pudermos identificar, na vizinhança, corpos que originem forças ( $F = 0$ ). Somos sempre nós que escolhemos o referencial, de forma que se selecionarmos apenas referenciais inerciais, não restringiremos, de nenhum modo, nossa capacidade para aplicar a Mecânica Clássica aos fenômenos naturais.

Podemos, todavia, se julgarmos conveniente, aplicar a Mecânica Clássica sob o ponto de vista de um observador situado em um *referencial não inercial*. Tal referencial poderia estar girando (e, portanto, acelerado) em relação às estrelas fixas. Algumas vezes, escolhemos referenciais acelerados, por exemplo, ao estudar a separação de líquidos de densidades diferentes em uma centrífuga em rotação, a circulação global dos ventos sobre a Terra girante, ou as experiências de um astronauta em um satélite em órbita.

Podemos utilizar a Mecânica Clássica em referenciais não-inerciais, se introduzirmos forças denominadas *forças fictícias* (ou *forças inerciais*). Elas são assim chamadas porque, ao contrário das forças até agora consideradas, não podemos associá-las a corpos determinados da vizinhança da partícula sobre a qual elas atuam; não podemos classificá-las em nenhuma das categorias indicadas no primeiro parágrafo desta Seção. Finalmente, se observarmos a partícula de um referencial inercial, as forças fictícias desaparecem. Elas são, portanto, apenas, uma técnica que nos permite aplicar a Mecânica Clássica da maneira habitual, se insistirmos em descrever os eventos de um referencial não-inercial.

Consideremos um carrossel, em qual colocamos uma bola de gude encostada a uma saliência da borda. Um observador no carrossel encontra-se em um referencial não-inercial. Observando a bola de gude, ele verificará que, em relação a si próprio, ela não se move, se afastá-la um pouco de sua posição, em direção ao centro de rotação, ele observa que ela volta ao lugar primitivo, como se estivesse agindo na bola uma força radial dirigida para fora. O observador declararia que a bola está em equilíbrio sob a ação desta força dirigida para a periferia (uma força fictícia, chamada, neste caso, *força centrífuga*) e da força exercida pela saliência, dirigida para o centro.

Um observador no solo (referencial inercial) descreveria diferentemente o movimento da bola. Ele declararia que ela descreve um movimento circular uniforme, acelerado radialmente para dentro, sendo  $a = v^2/R$ . A força  $F$  dirigida para o centro e exercida pela borda sobre a bola explica tal aceleração, de acordo com a segunda lei de Newton, ou seja,  $F = ma = mv^2/R$ . A bola, definitivamente, não está em equilíbrio, do ponto de vista deste observador ou de um observador situado em qualquer referencial inercial. Somente se a borda não exercesse uma força para dentro, a bola se moveria com velocidade uniforme em linhas retas e estaria em equilíbrio. Este observador não encontraria qualquer força dirigida radialmente para fora (a força fictícia) e, de fato, não há lugar para tal força em sua análise do movimento.

Este exemplo simples torna claro que a força fictícia dirigida radialmente para fora (ou força centrífuga), identificada pelo observador situado no carrossel em rotação, tem o valor  $mv^2/R$ . Portanto, o valor da força fictícia depende da velocidade da partícula vista de outro referencial, o solo; a velocidade da partícula, vista de seu próprio referencial (em rotação) é nula.

Este exemplo ilustra porque forças inerciais não são Newtonianas, no sentido de que a terceira lei do movimento não se aplica a elas. Isto é, não existe força de reação à força inercial (ação). No referencial em rotação, mesmo se a borda não estivesse presente, teríamos uma força inercial (centrífuga) atuando sobre a bola de gude, sem qualquer força de reação da bola de gude sobre outro corpo. Quando a borda está presente, temos duas forças atuando sobre o mesmo corpo, a força centrípeta devido à borda e a força inercial (centrífuga), cada uma atuando sobre a bola de gude. A bola de gude é observada como estando em equilíbrio sob a influência das duas forças atuando sobre ela mas, como vimos, podemos ter uma força sem a outra. Num referencial inercial, por outro lado, a força (ação) da borda é a única força sobre a bola de gude e esta exerce uma força (reação) sobre a borda, igual em módulo mas orientada em sentido oposto. Se desejamos usar os termos centrípeta e centrífuga aqui, teremos um par ação-reação atuando em corpos diferentes, consistente com a terceira lei de Newton. Porém, num referencial acelerado, as forças chamadas por estes nomes, atuam sobre o mesmo corpo e não são um par ação-reação.

Em termos mais gerais, podemos dizer que a expressão  $\vec{F} = m\vec{a}$ , usada em um referencial inercial, escreve-se como  $\vec{F} - m\vec{a} = \vec{0}$ , em um referencial não-inercial, e que a interpretação dada para o termo  $-m\vec{a}$ , aparecendo no último caso, é a de uma força existindo somente no referencial acelerado, a qual permite considerar-se o corpo sob a ação da força  $\vec{F}$  como estando em equilíbrio. Neste sentido, é algumas vezes mais simples usar um referencial não-inercial para descrever movimentos, tais como o movimento circular, o objeto sendo observado como em repouso em tal referencial.

Nos problemas mecânicos, temos, portanto, duas escolhas: (1) escolher para sistema de referência um referencial inercial e considerar apenas forças "reais", isto é, forças que podemos associar com corpos determinados da vizinhança, ou (2) escolher para sistema de referência um referencial não-inercial e considerar não somente as forças "reais", mas também forças fictícias ou inerciais escolhidas adequadamente. Embora usualmente seja preferida a primeira alternativa, algumas vezes é escolhida a segunda; ambas são completamente equivalentes e a escolha é questão de conveniência. Nos Caps. 11 e 16, voltaremos a discutir os referenciais não-inerciais e as forças fictícias.

Nestes primeiros capítulos, lançamos as bases da Mecânica Clássica. Apresentamos as leis de movimento e demos vários exemplos das leis de força. Em capítulos posteriores, discutiremos outros tipos de forças e continuaremos a desenvolver a estrutura da teoria. Desejamos, agora, assinalar a posição da Mecânica Clássica, no quadro da Física moderna.

## 6-5

MECÂNICA CLÁSSICA,  
MECÂNICA  
RELATIVÍSTICA E  
MECÂNICA QUÂNTICA

A Física não é um corpo estático de conhecimentos, mas uma ciência em permanente desenvolvimento. Historicamente, houve longos períodos de preocupação com certo tipo de problemas, culminando, às vezes repentinamente e de modo inesperado, em uma "ruptura", sob a forma de uma teoria nova, mais abrangente.<sup>5</sup> Isto ocorreu por volta de 1670 (Mecânica Newtoniana), de 1870 (Teoria do Eletromagnetismo, de Maxwell), de 1905 (Teoria da Relatividade, de Einstein) e de 1925 (Mecânica Quântica). Alguns físicos acreditam que a atual preocupação com problemas da área das partículas elementares (ver Ap. F) levar-nos-ão, eventualmente, a outra "ruptura" importante.

Com a evolução da Física, muitas coisas mudaram, tais como os problemas a serem resolvidos e as ferramentas que usamos para investigá-las. Todavia, o método geral de investigação ou processo de solução permaneceram sempre os mesmos. Assim, as antigas teorias físicas têm domínio limitado de validade e são casos especiais de teorias mais abrangentes, que por sua vez apresentam limitações e, assim por diante. No entanto, independentemente de qualquer área ou problema particular, em Física exige-se sempre que a teoria vença a prova da experiência, procurem-se grandezas invariantes, somos guiados pela crença na simplicidade e simetria da Natureza, procuramos e usamos analogias e modelos. Nascem importantes conceitos unificadores, válidos em todos os domínios da Física, como as leis de conservação. É importante entender tudo isso, pela sua própria importância, independentemente de dominar qualquer tópico particular, e isto é exemplificado através deste livro. Se, além de dominar a Mecânica Clássica, o estudante chegar a entender este processo, ele achará muito mais fácil entender e dominar teorias como a da Relatividade e a Teoria Quântica, em que se aplica o mesmo método de indagação, mas cujas áreas de aplicação, ao contrário da Mecânica Clássica, não é parte familiar de sua vida diária.

A Mecânica Clássica, como todas as teorias da Física, está baseada na observação de acontecimentos naturais. É útil indicar como é limitada nossa experiência habitual dos fenômenos naturais. Isto é particularmente verdadeiro durante os anos de nossa formação, período durante o qual desenvolvemos nossas noções intuitivas (muitas vezes falsas!) do que não é "bom senso" em eventos naturais.

Por exemplo, a velocidade máxima que pode ser utilizada para transmitir sinais de um ponto a outro é a velocidade da luz ( $c = 300\,000\text{ km/s} = 3,00 \times 10^8\text{ m/s}$ ), que parece ser o limite superior para as velocidades dos objetos materiais. No entanto, grandes objetos, mesmo os mais rápidos, como os aviões a jato ou os satélites artificiais da Terra, têm velocidades muitíssimo inferiores a  $c$ . Para um satélite artificial da Terra, que se mova à velocidade de  $27\,000\text{ km/h}$ , a razão  $v/c$  é de apenas  $0,00025$ . A Mecânica Clássica foi edificada ao longo de vários séculos, sobre um conjunto de observações de objetos em movimento relativamente lento, tais como planetas, bolas que descem planos inclinados e corpos que caem. Nossa experiência com os corpos em movimento foi de fato limitada, até as últimas décadas, a uma fração diminuta do domínio das velocidades possíveis.

Durante as últimas décadas, tornou-se possível realizar medições com pequenas partículas, de velocidade potencialmente alta, tais como elétrons, prótons e outras partículas fundamentais. Um próton acelerado no acelerador de  $30$  bilhões de elétron-volts do Laboratório Nacional de Brookhaven (Estados Unidos), por exemplo, tem  $v/c = 0,98$ . Deveríamos esperar que as leis da Mecânica Clássica, que funcionam tão maravilhosamente quando  $v/c \ll 1$ , também se aplicassem à descrição correta das colisões, decaimentos e interações dessas partículas elementares, que se movem a velocidades tão altas? Seria uma extrapolação grosseira e a experiência ensina que aquelas leis realmente não são válidas em tal domínio; a Mecânica Clássica fornece respostas que não concordam com a experiência, se as velocidades dos objetos envolvidos for apreciável em comparação com a velocidade da luz. Isso não nos leva a menosprezar a Mecânica Clássica, que se aplica muito bem na

<sup>5</sup> Ver "The Structure of Scientific Revolutions" por Thomas Kuhn, The University Chicago Press, 1970.

região das baixas velocidades, precisamente a região importante em nossa vida cotidiana. Somos levados, entretanto, a encarar a Mecânica Clássica como um caso especial de uma teoria mais geral, válida para todas as velocidades, até à velocidade da luz.

Einstein, em 1905, propôs esta teoria mais geral, a *Teoria da Relatividade Especial*<sup>6</sup>, que mais adiante será discutida detalhadamente; aqui, desejamos apenas enunciar seu postulado fundamental. Este consiste em considerar a velocidade da luz,  $c$ , como tendo o *mesmo* valor para todos os observadores situados em referenciais inerciais, não importando qual possa ser o movimento da fonte. Em outras palavras, se uma fonte luminosa se mover diretamente para você, à velocidade  $v$ , o valor que você medirá para a velocidade da luz será sempre  $c$ , independentemente do valor de  $v$ ; o mesmo valor,  $c$ , seria obtido, no caso da fonte afastar-se de você à velocidade  $v$ . Se esta suposição básica parece violar o "bom senso", devemos lembrar que nossas sensações intuitivas estão baseadas no "bom senso a baixa velocidade". Não temos experiência direta, em nossas atividades diárias, do que realmente acontece na Natureza, em altas velocidades. Ademais, todas as predições de Einstein (1) concordam com a experiência e (2) reduzem-se às predições da Mecânica Clássica, quando as velocidades são baixas.

Mencionaremos aqui apenas uma das predições da Teoria da Relatividade que divergem da Mecânica Clássica. Considere a Fig. 4-11 e suponha que um objeto se mova paralelamente aos eixos  $Ox$ ,  $O'x'$ . De acordo com a Eq. 4-19, dois observadores, um em cada sistema de referência, julgarão que

$$v = v' + u, \quad (6-5)$$

sendo  $v'$  a velocidade medida por  $S'$ ,  $v$  a que é medida por  $S$  e  $u$  a velocidade relativa dos dois sistemas. Note que nada, na Eq. 6-5, impede  $v$  de ser maior que  $c$ , desde que  $v'$  e  $u$  sejam bastante grandes.

A Teoria da Relatividade prediz que a Eq. 6-5 é um caso especial de uma relação mais geral,

$$v = \frac{v' + u}{1 + v'u/c^2}. \quad (6-6)$$

Note que, para  $v' \ll c$  e  $u \ll c$ , a Eq. 6-6 efetivamente reduz-se à Eq. 6-5. Além disso, se  $v' < c$  e  $u < c$ , então  $v$  não pode exceder  $c$ . Se  $v' = u = 0,8c$ , por exemplo, a Eq. 6-6 fornece  $v = 0,975c$ ; a Eq. 6-5, por outro lado, fornece  $v = 1,6c$ , resultado contrário à experiência.

Para grandes objetos, as Eqs. 6-5 e 6-6 fornecem o mesmo resultado, dentro do erro experimental, de modo que, naturalmente, usamos a mais simples, isto é, a Eq. 6-5. Se dois satélites se movem em sentidos opostos com velocidades  $v' = u = 27\,000$  km/h, o denominador da Eq. 6-6 tem o valor 1,000 000 000 7, portanto a velocidade  $v$  de um dos satélites, visto do outro, realmente difere muito pouco do valor  $v' + u$  previsto pela Eq. 6-5. Seriam necessárias velocidades 3 000 vezes maior que a indicada, cerca de 80 milhões de quilômetros por hora, em geral alcançável apenas no domínio subatômico, para obter uma diferença de 0,5% entre as duas equações.

Sob outro aspecto, nossa experiência diária é limitada; todos os objetos com os quais lidamos normalmente têm massas imensamente maiores que a do elétron ( $m = 9,11 \times 10^{-31}$  kg). Isto tem uma consequência interessante, intimamente relacionada com o próprio conceito de "partícula" sobre o qual está fundada a Mecânica Clássica. Não hesitamos em atribuir massa  $m$ , posição  $x$  e velocidade  $v_x$  a uma partícula, suposta em movimento ao longo do eixo  $Ox$ .<sup>7</sup> Se nos fosse perguntado qual o valor das incertezas  $\Delta x$  e  $\Delta v_x$  com as quais podemos medir, respectivamente, a posição e a velocidade da partícula, estaríamos inclinados a responder que, embora na prática possa haver limites, em princípio não há nenhum e que, dando-se a devida atenção aos métodos experimentais, poderemos determinar  $x$  e  $v_x$  com a precisão que desejarmos. A experiência parece confirmar esse ponto de vista, quando consideramos bolas de golfe ou balas de espingardas.

<sup>6</sup> Para um resumo da Teoria da Relatividade Especial, ver Tópico Suplementar V.

<sup>7</sup> Supomos  $v_x \ll c$ , de forma a excluir dessa discussão quaisquer considerações relativísticas.

No entanto, quando lidamos com objetos de massa muito pequena, como no caso de elétrons, verificamos que os próprios procedimentos de medição introduzem incertezas fundamentais e que, na verdade, quanto maior for nosso conhecimento de  $x$ , tanto menor torna-se nosso conhecimento de  $v_x$ , e reciprocamente. Expressamos esse comportamento pela famosa relação de incerteza de Heisenberg,

$$\Delta x \cong \frac{h}{m\Delta v_x} \quad (6-7)$$

sendo  $h$ , a constante de Planck, uma constante fundamental da Natureza, cujo valor é  $6,63 \times 10^{-34}$  kg m<sup>2</sup>/s. A Eq. 6-7 revela claramente que, se  $\Delta v_x$  for muito pequena (significando que conhecemos  $v_x$  com elevada precisão), então  $\Delta x$  deve ser relativamente grande (isto é, não conheceremos  $x$  com muita precisão). Portanto, não parece possível medir simultaneamente *ambas* as grandezas, posição e velocidade da partícula, com dada precisão. Se não o podemos fazer, então o nosso conceito de partícula como massa puntiforme que descreve uma trajetória, conceito básico da Mecânica Clássica, pode ser questionado.

Tal como no caso da Teoria da Relatividade, essas considerações de Mecânica Quântica não importam, quando tratamos com os objetos de nossa vida diária. Consideremos uma bala com velocidade de  $10^3$  m/s e massa de 1,0 g. Suponhamos que a velocidade seja conhecida com precisão de 0,1%, significando que  $\Delta v_x = 0,001 \times 10^3 = 1$  m/s. Nesse caso, a incerteza na posição da bala, de acordo com a Eq. 6-7, será

$$\Delta x \cong \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}{10^{-3} \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}}$$

$$\Delta x \cong 7 \times 10^{-31} \text{ m.}$$

É um comprimento tão pequeno ( $10^{15}$  vezes menor que um núcleo atômico!) que, provavelmente, não conseguiríamos encontrar qualquer limitação à medição de  $x$ , imposta pela Eq. 6-7.

Consideremos, no entanto, não uma bala, mas um elétron, cuja velocidade é de  $2 \times 10^6$  m/s, aproximadamente a que o elétron possui em um átomo de Hidrogênio. Suponhamos que essa velocidade seja conhecida com precisão de 1%; portanto  $\Delta v_x = 0,01 \times 2 \times 10^6 \text{ m/s} = 2 \times 10^4 \text{ m/s}$ . A incerteza predita pela Eq. 6-7 para a posição, será, pois,

$$\Delta x \cong \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}{9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot 2 \times 10^4 \text{ m/s}}$$

$$\Delta x = 3 \times 10^{-8} \text{ m.}$$

Ora, como o raio de um átomo de Hidrogênio é de  $5 \times 10^{-11}$  m, aproximadamente, vemos que a incerteza com a qual podemos localizar o elétron no átomo de Hidrogênio, supondo que pudemos medir sua velocidade com a precisão indicada, é de 600 vezes o raio do átomo! Nessas circunstâncias, o conceito de "partícula" não tem muito significado. Em outros termos, simplesmente não podemos usar a Mecânica Clássica para descrever os movimentos dos elétrons nos átomos; é necessária a Mecânica Quântica.

A situação é muito semelhante à da Teoria da Relatividade. Idéias aceitáveis em certa região da experiência (balas) não têm êxito, quando as aplicamos a uma região fora de nossa experiência direta normal (elétrons em átomos). Ainda uma vez, a solução é a mesma: a Mecânica Clássica é um caso particular importante de uma teoria mais geral. No presente caso, a teoria geral é a Mecânica Quântica, desenvolvida por volta de 1925 a 1926 por Heisenberg, Schrödinger, Born e outros. Ainda uma vez, a Mecânica Quântica não diminui o valor da Mecânica Clássica, cujos resultados continuam a concordar admiravelmente com a experiência, quando se trata de partículas de massa relativamente grande.

A situação mais afastada de nossa experiência cotidiana é aquela em que lidamos com partículas que possuem pequena massa e alta velocidade. Nesse caso, devemos usar uma teoria ainda mais geral, a *Mecânica Quântica Relativística*, em que se combinam a Teoria da Relatividade e a Mecânica Quântica, tendo sido desenvolvida por Dirac em 1927.

No restante de nosso estudo da Mecânica, retomamos o caso especial familiar de nossa experiência diária, a de objetos de massa relativamente grande e veloci-



dades relativamente baixas (Mecânica Clássica). Ocasionalmente indicaremos, entre parênteses, como as previsões da Mecânica Clássica devem ser modificadas, quando nos afastarmos dessa região da experiência.

## questões

1. Há um limite para o polimento de uma superfície, além do qual o atrito *umenta*, em vez de diminuir. Como você explica isso?
2. Há sentido em esperar que o coeficiente de atrito seja maior que 1?
3. Como uma pessoa, em repouso sobre a superfície gelada e completamente lisa de um lago, poderia alcançar a margem? Ela conseguiria isso caminhando, rolando, agitando os braços ou chutando um pé contra o outro? Como a pessoa poderia ser colocada na posição inicial?
4. Explique como o alcance dos faróis de um carro limita a velocidade de segurança ao dirigir à noite?
5. Seu carro derrapa cruzando a linha divisória de uma rodovia coberta de gelo. Você deveria girar as rodas dianteiras no sentido da derrapagem ou no sentido oposto (a) quando quer evitar uma colisão com um carro que se aproxima, (b) quando nenhum carro está próximo, mas você quer recuperar o controle da direção?
6. Se você quiser parar o carro na distância mais curta possível em uma estrada coberta de gelo, deveria (a) frear firme para travar as rodas, (b) o suficiente para evitar derrapar ou (c) "bombear" os freios?
7. Discuta como a escolha do ângulo para o alcance máximo de um projétil seria afetado pela resistência do ar.
8. Por que os trilhos ferroviários e as rodovias sofrem inclinação nas curvas?
9. Como o movimento de rotação da Terra afeta o peso aparente de um corpo no equador?
10. Explique por quê, na maioria das latitudes da Terra, um fio de prumo não pende exatamente no sentido de sua atração gravitacional.
11. Suponha que você necessite medir se o topo de uma mesa em um trem está realmente na horizontal. Se você usar um nível de bolha, você pode determinar este fato, quando o trem desce ou sobe uma ladeira? Quando o trem percorre uma curva? (*Sugestão*: há dois componentes horizontais.)
12. No pêndulo cônico do Ex. 3, que acontece ao período  $\tau$  e ao módulo da velocidade  $v$ , quando  $\theta = 90^\circ$ ? Por que esse ângulo não é fisicamente alcançável? Discuta o caso em que  $\theta = 0^\circ$ .
13. Uma moeda é colocada sobre o prato de um toca-discos que começa a mover-se, mas antes que ele atinja a sua velocidade final, a moeda é lançada fora. Explique.
14. Suponha que somente duas forças atuam sobre um corpo que está acelerado. Segue-se, então, que (a) o corpo não se pode mover com velocidade constante? (b) a velocidade nunca pode ser nula? (c) a soma das duas forças não pode ser nula? (d) as duas forças atuam na mesma direção?
15. Um carro percorre uma estrada do interior, que se assemelha à rota de uma montanha-russa. Se o carro viaja com velocidade uniforme, compare a força que ele exerce sobre um trecho horizontal da estrada com a força que ele exerce no topo e no sopé de uma colina. Explique.
16. Um passageiro, no banco dianteiro de um carro, sente que escorrega para a porta, quando o motorista faz uma curva para a esquerda repentinamente. Descreva as forças sobre o passageiro e sobre o carro neste instante, se (a) o movimento é visto de um referencial solidário à Terra e (b) de um referencial solidário ao carro.
17. Astronautas em um laboratório espacial em órbita querem manter um registro diário de seus pesos. Pode-se imaginar como eles o fariam, considerando-se que eles estão em "estado de imponderabilidade"?
18. A que conclusão poderia um físico chegar se, enquanto de pé em um elevador, observa que massas desiguais pendentes sobre uma polia permanecem em equilíbrio, isto é, a polia não tende a girar?
19. Explique como a pergunta "Qual é a velocidade linear de um ponto no equador?" requer uma suposição acerca do referencial usado. Mostre como a resposta difere, quando se modificam os referenciais.

20. Qual é a diferença entre referenciais inerciais e os que diferem, apenas, por uma translação ou rotação dos eixos?

## SEÇÃO 6-2

**problemas**

- Um bloco de 10 kg desliza sobre uma pista de gelo e percorre 10 m até parar. A velocidade inicial com que ele é lançado sobre a pista vale 8 m/s. Calcule: (a) o módulo da força de atrito, (b) o coeficiente de atrito cinético.
- Um bloco de massa  $m = 5$  kg escorrega ao longo de um plano inclinado de  $30^\circ$  em relação à horizontal. O coeficiente de atrito cinético vale 0,35. Calcule o módulo da força de atrito.  
*Resposta:* 14,87 N.
- Suponha que apenas as rodas traseiras de um automóvel possam acelerá-lo, e que metade do peso total do carro seja sustentado por estas rodas. (a) Admitindo que o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a estrada seja  $\mu_e$  calcule a aceleração máxima que se pode atingir. (b) Considerando  $\mu_e = 0,40$ , obtenha um valor numérico para esta aceleração.
- Um bloco apoiado sobre um plano inclinado, conforme indicado na Fig. 6-4, está na iminência de escorregar. (a) Sendo o ângulo do plano inclinado igual a  $30^\circ$  qual seria o coeficiente de atrito estático deste bloco? (b) Obtenha uma expressão para a determinação do coeficiente de atrito cinético em função da aceleração do bloco e do ângulo que o plano forma com a horizontal. (c) Determine o coeficiente de atrito cinético sabendo que  $a = 3$  m/s<sup>2</sup> e  $\theta = 35^\circ$ .  
*Resposta:* (a) 0,58. (b)  $\mu_c = \tan \theta - (a/g \cos \theta)$ . (c) 0,33.
- Um bombeiro pesa 750 N. Quando ele desce de um mastro vertical com aceleração de 3,5 m/s<sup>2</sup>, o coeficiente de atrito cinético vale 0,40. Determine: (a) a força de atrito média entre o bombeiro e o mastro, (b) a força média perpendicular ao mastro exercida pelo bombeiro sobre o mastro.
- Um engradado possui massa  $m = 10$  kg. Um homem puxa o engradado por meio de uma corda que faz um ângulo de  $30^\circ$  acima da horizontal. (a) Se o coeficiente de atrito estático vale 0,50, qual a tensão necessária na corda para que o engradado comece a se mover? (b) Se  $\mu_c = 0,35$ , qual será a aceleração do engradado? (c) Qual a tensão na corda durante uma aceleração igual a  $g$ ?  
*Resposta:* (a) 44 N. (b) 1,15 m/s<sup>2</sup>. (c) 127 N.
- Um cubo de massa  $m$  repousa sobre um plano inclinado rugoso, o qual forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal. (a) Determine a força mínima paralela ao plano inclinado necessária para iniciar o movimento do cubo para *baixo* do plano. (b) Ache a força mínima paralela ao plano inclinado necessária para iniciar o movimento do cubo para *cima* do plano. (c) Calcule a força mínima paralela ao plano da base necessária para iniciar o movimento do cubo para *cima* do plano inclinado. (d) Determine a força mínima paralela ao plano da base necessária para iniciar o movimento do cubo para *baixo* do plano inclinado.
- O cabo de um escovão de massa  $m$  forma um ângulo  $\theta$  com o sentido vertical. Seja  $\mu_c$  o coeficiente de atrito cinético entre o escovão e o assoalho e o coeficiente de atrito estático é  $\mu_e$ . Despreze a massa do cabo. (a) Ache o módulo da força  $F$ , dirigida ao longo do cabo, necessária para que o escovão passe a deslizar com velocidade constante ao longo do assoalho. (b) Calcule o ângulo limite  $\theta_0$  tal que se o ângulo  $\theta$  for menor do que  $\theta_0$  o escovão não poderá deslizar sobre o assoalho, por maior que seja a força aplicada ao longo do cabo.  
*Resposta:* (a)  $\mu_c mg / (\sin \theta - \mu_c \cos \theta)$ . (b)  $\theta_0 = \tan^{-1} \mu_e$ .
- Um bloco de gelo escorrega ao longo de um plano inclinado de  $60^\circ$  no dobro do tempo que levaria para escorregar sobre o mesmo plano caso não houvesse atrito. Calcule o tempo que o bloco de gelo leva para escorregar ao longo deste plano.
- Um bloco de massa  $m_1$  está ligado a um bloco de massa  $m_2$  por meio de uma corda de massa desprezível. Os dois blocos estão apoiados sobre um plano horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o plano e o bloco de massa  $m_1$  vale  $\mu_1$  e para o bloco  $m_2$  o coeficiente vale  $\mu_2$ . Sobre o bloco  $m_1$  atua uma força  $F$  que forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal. Determine o módulo da aceleração dos blocos.  
*Resposta:*  $a = (F \cos \theta - \mu_1 m_1 g - \mu_2 m_2 g) / (m_1 + m_2)$ .
- Um estudante deseja encontrar o coeficiente de atrito estático e o coeficiente de atrito cinético entre uma caixa e uma prancha. Ele coloca a caixa sobre a prancha e começa a levantá-la lentamente. Para um ângulo de inclinação igual a  $30^\circ$  a caixa começa a escorregar e desce 4 m ao longo da prancha em 3 s. Calcule o valor do coeficiente de atrito estático e o valor do coeficiente de atrito cinético.

12. Uma força horizontal  $F = 70$  N empurra um bloco que pesa 30 N contra uma parede vertical, conforme indicado na Fig. 6-10. O coeficiente de atrito estático entre a parede e o bloco vale 0,55 e o coeficiente de atrito cinético vale 0,35. Suponha que inicialmente o bloco esteja em repouso. (a) Com a força aplicada acima mencionada o corpo começará a se mover? (b) Qual é neste caso a força exercida pela parede sobre o bloco? (c) Qual seria o valor de  $F$  máximo necessário para começar o movimento? (d) Determine o valor de  $F$  necessário para que o corpo escorregue contra a parede com velocidade constante. (e) Obtenha o valor de  $F$  para que o bloco escorregue contra a parede com uma aceleração igual a  $4$  m/s<sup>2</sup>.

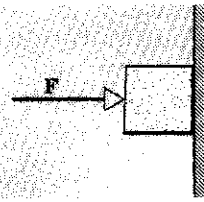


figura 6-10

Resposta: (a) Não. (b) Uma força de 70 N para a esquerda e outra força de 30 N para cima. (c) 54,5 N. (d) 85,7 N (depois de iniciado o movimento). (e) 50,8 N.

13. Um bloco de aço de 90 N está em repouso sobre uma mesa horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a mesa vale 0,60. (a) Calcule o módulo da força horizontal necessária para que o bloco inicie o movimento. (b) Determine o módulo de uma força que, atuando a um ângulo de 60° para cima da horizontal, faz iniciar o movimento do bloco. (c) Se a força atua para baixo, a 60° com a horizontal, que valor máximo ela pode atingir sem que ocorra o movimento do bloco?

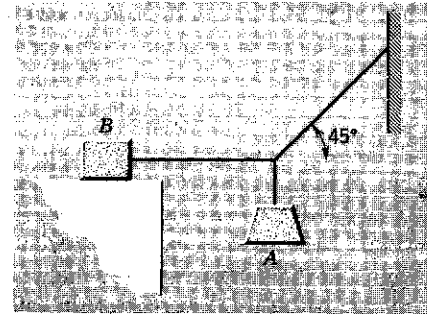


figura 6-11

14. O bloco B da Fig. 6-11 possui massa igual a 75 kg. O coeficiente de atrito estático entre ele e a mesa vale 0,35. Determine o peso máximo do bloco A para que o sistema fique em equilíbrio.

Resposta: 184 N.

15. Observe a Fig. 6-12. Considere  $m_1 = 2,5$  kg,  $m_2 = 3,5$  kg,  $\theta = 30^\circ$ . O coeficiente de atrito cinético entre  $m_1$  e o plano vale  $\mu_1 = 0,20$  e o coeficiente correspondente a  $m_2$  vale  $\mu_2 = 0,12$ . A barra que liga os dois blocos possui massa desprezível. Determine: (a) a tensão na barra que liga os dois blocos, (b) a aceleração comum do sistema, (c) a reação total exercida pelo plano sobre o bloco de massa  $m_1$ . (d) Se você inverter as posições das massas  $m_1$  e  $m_2$ , as respostas dos itens (a) e (b) se alteram?

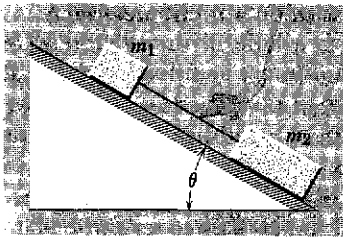


figura 6-12



figura 6-13

16. Um bloco de 4,0 kg é colocado sobre outro de 5,0 kg. Mantendo-se o bloco inferior fixo, para fazer o bloco de cima escorregar sobre o bloco inferior é necessário aplicar uma força horizontal de 15 N sobre o bloco superior. Os blocos são agora colocados sobre uma horizontal sem atrito, conforme indicado na Fig. 6-13. Determine: (a) a força  $F$  horizontal máxima que pode ser aplicada ao bloco inferior para que os blocos se movam permanecendo juntos, (b) a aceleração do sistema.

Resposta: (a) 33,75 N. (b) 3,75 m/s<sup>2</sup>.

17. Um vagão ferroviário aberto está carregado de engradados e o coeficiente de atrito estático entre os engradados e o piso do vagão é igual a 0,35. Suponha que o trem esteja viajando com uma velocidade constante de 60 km/h. Calcule a distância mínima para a qual o trem pode parar sem que os engradados escorreguem.

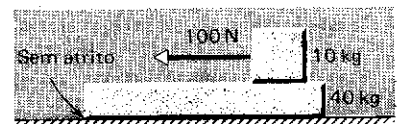


figura 6-14

18. Tome como referência a Fig. 6-14. Uma prancha de 40 kg de massa repousa sobre um assoalho sem atrito. Sobre a prancha existe um bloco de 10 kg de massa. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a prancha vale 0,55 enquanto o coeficiente de atrito cinético vale 0,35. O bloco de 10 kg sofre a ação de uma força horizontal de 100 N. Determine o módulo da aceleração: (a) do bloco, (b) da prancha. (c) Qual seria a força máxima necessária para movimentar os blocos de modo que não existisse movimento relativo entre o bloco e a prancha? (d) Suponha  $F = 10$  N; calcule a aceleração do sistema para este caso.

Resposta: (a) 6,57 m/s<sup>2</sup>. (b) 0,86 m/s<sup>2</sup>. (c) 53,95 N. (d) 0,20 m/s<sup>2</sup>.

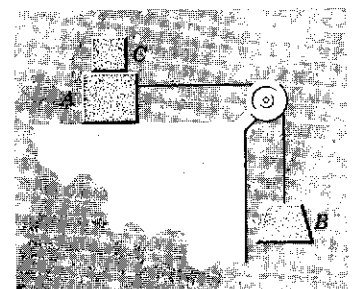


figura 6-15

19. Na Fig. 6-15, A é um bloco de massa igual a 50 kg e B é um bloco de peso igual a 200 N. (a) Determine o peso mínimo do bloco C que deve ser colocado sobre o bloco A para impedi-lo de deslizar sobre a mesa, sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o bloco A e a mesa vale 0,35. (b) Supondo que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco A e a mesa seja de 0,20, calcule a aceleração de A quando repentinamente retiramos o bloco C de cima do bloco A.

20. Considere uma plataforma móvel de massa  $M$  e um bloco de massa de  $m$  apoiado sobre a plataforma, conforme o esquema indicado na Fig. 6-14. Despreze o atrito entre a

plataforma e o plano horizontal. O coeficiente de atrito entre o bloco e a plataforma vale  $\mu$ . Suponha que o coeficiente de atrito estático seja igual ao coeficiente de atrito cinético. Em vez de se aplicar uma força horizontal sobre o bloco, como no caso do Probl. 17, a força horizontal  $F$  é aplicada sobre a plataforma. Seja  $L$  a distância entre o centro de massa do corpo e a extremidade esquerda da plataforma. A força  $F$  é orientada da direita para a esquerda. (a) Obtenha uma expressão para a força máxima que pode ser aplicada para que o bloco não deslize sobre a plataforma. (b) Suponha que a plataforma seja submetida a uma força  $F$  maior do que  $F_{\text{máx}}$ , calculada no item anterior; determine o tempo que o bloco leva para cair da extremidade da plataforma. Resposta: (a)  $F_{\text{máx}} = \mu g(m + M)$ . (b)  $t = \sqrt{2LM/(F - \mu mg - \mu Mg)}$

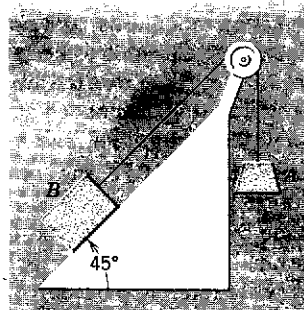


figura 6-16

21. Considere a Fig. 6-16. O corpo  $B$  possui massa de 40 kg e o corpo  $A$  pesa 20 N. Dados  $\mu_e = 0,60$ ,  $\mu_c = 0,30$ , determine: (a) a aceleração do sistema supondo  $B$  inicialmente em repouso, (b) a aceleração supondo que  $B$  já esteja em movimento.

22. Observe a Fig. 6-17. Um bloco de massa  $m$  escorrega sobre a calha que forma um ângulo de  $90^\circ$ , conforme indicado. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a calha vale  $\mu_c$ . (a) Obtenha uma expressão para a aceleração do bloco. (b) No instante  $t = 5$  s sua velocidade vale 22 m/s; supondo  $\theta = 30^\circ$  e levando em conta que o bloco parte do repouso, determine o valor do coeficiente de atrito cinético. Resposta: (a)  $g(\sin \theta - 2^{1/2} \mu_c \cos \theta)$ . (b) 0,41.

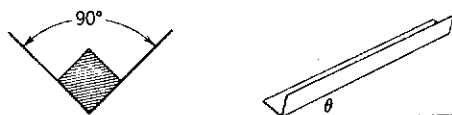


figura 6-17

## SEÇÃO 6-3

23. Mostre que a velocidade angular de um satélite que gira numa órbita circular em torno da Terra é dada por  $(GM/r^3)^{1/2}$ , onde  $G$  é a constante da gravitação universal,  $M$  é a massa da Terra e  $r$  é a distância do satélite ao centro da Terra.

24. Considere a Fig. 6-18. A massa  $m$  está apoiada sobre a mesa sem atrito. Uma corda de massa desprezível liga a massa  $m$  com a massa  $M$ . Determine a velocidade angular de  $m$  para que  $M$  permaneça em repouso.

Resposta:  $\omega = \sqrt{Mg/mr}$

25. Considere a Fig. 6-7. (a) Determine a velocidade angular do pêndulo cônico em função de  $R$ , de  $L$  e de  $g$ . (b) Se um pêndulo cônico gira com velocidade angular  $\omega$ , qual é o ângulo  $\theta$  formado entre o fio e a vertical?

26. Uma pequena moeda é colocada sobre uma plataforma circular horizontal que gira executando 4 rotações completas em 2,5 segundos. (a) Calcule o módulo da velocidade da moeda supondo que ela esteja situada a uma distância de 6 cm do centro de rotação da plataforma, sem deslizar sobre a plataforma. (b) Sendo a massa da moeda igual a 10 g calcule a força centrípeta que atua sobre a moeda neste instante. (c) Qual é o valor da força de atrito que atua sobre a moeda nas condições do item (a)? (d) Qual deveria ser a distância entre a moeda e o centro de rotação para que a moeda comece a deslizar sobre a plataforma, supondo que o coeficiente de atrito estático seja igual a 0,40.

Resposta: (a) 60 cm/s. (b) 0,06 N. (c) 0,06 N. (d) 3,9 cm.

27. Um bloco pequeno de massa  $m$ , preso à extremidade de uma corda, gira com velocidade angular constante num círculo vertical de raio  $R$ . Determine a velocidade crítica, abaixo da qual a corda ficaria frouxa no ponto mais alto da trajetória.

28. Uma curva circular de raio  $R$  é projetada para uma velocidade máxima de 60 km/h. (a) Se o raio da curva for  $R = 140$  m, qual deve ser o ângulo correto de inclinação da estrada na curva? (b) Caso a curva não seja inclinada, qual deve ser o menor coeficiente de atrito entre os pneus e a estrada para evitar a derrapagem para a velocidade de 60 km/h?

Resposta: (a)  $11,4^\circ$ . (b) 0,20.

29. Um manual de motorista estabelece que quando se viaja a 50 km/h e se deseja parar tão rápido quanto possível, percorre-se 10 m antes que a ação do freio comece a se fazer sentir. Depois que o freio começa a atuar o carro ainda percorre 20 m até parar. (a) Calcule o coeficiente de atrito para estas condições. (b) Determine o raio mínimo de uma curva circular que pode ser completada com 50 km/h sem que o carro derrape na curva.

30. Considere um grande avião a jato efetuando uma curva circular, a uma altitude constante, nas vizinhanças da superfície terrestre, com uma velocidade de módulo constante

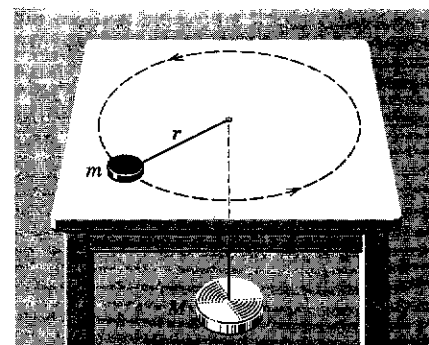


figura 6-18

igual a 480 km/h. As únicas forças que devem ser consideradas são a força de sustentação e o peso do avião. As asas do avião fazem um ângulo de  $60^\circ$  com a horizontal. A força de sustentação é perpendicular às asas. Calcule o raio da circunferência descrita pelo avião.

Resposta: 1 km.

31. Um estudante possui massa igual a 65 kg. Ao andar numa roda-gigante que gira com velocidade constante possui um peso aparente de 530 N, no ponto mais alto da trajetória da roda-gigante. (a) Calcule seu peso aparente no ponto mais baixo da trajetória da roda-gigante. (b) Qual seria seu peso aparente, no ponto mais alto, se a velocidade angular da roda-gigante dobrasse de valor?
32. Suponha que o quilograma-padrão seja atraído pela Terra com uma força exatamente igual a 9,81 N ao nível do mar no equador terrestre. Como a Terra gira com velocidade angular constante, concluímos que toda massa no equador descreve uma circunferência de raio igual ao raio da Terra ( $6,4 \times 10^6$  m) com uma velocidade constante de 465 m/s. (a) Determine a força centrípeta necessária para manter o quilograma-padrão girando com velocidade constante ao longo de um círculo de raio igual ao raio da Terra. (b) Determine o peso do quilograma-padrão determinado por um dinamômetro ou por uma balança de molas no equador terrestre.
33. Um bonde faz uma curva sobre trilhos não inclinados. (a) Supondo que o raio dos trilhos seja de 15 m e que a velocidade do bonde seja igual a 20 km/h, determine o ângulo que o fio de um pêndulo simples faz com a vertical (o fio está preso ao teto do bonde). (b) Determine a força que atua sobre a massa do pêndulo (além da gravidade). (c) Calcule a tensão no fio. Compare os resultados deste problema com o Probl. do acelerômetro (ver o Probl. 30 do Cap. 5).

34. Observe a Fig. 6-19. Uma partícula de massa  $M = 200$  g se move no sentido anti-horário ao longo de uma circunferência horizontal de raio  $r = 2,0$  m. O módulo da velocidade da partícula é constante e dado por  $v = 0,8$  m/s. Determine para o instante em que  $\theta = 330^\circ$  (ângulo medido no sentido anti-horário) as seguintes grandezas: (a) os componentes da velocidade da partícula, (b) os componentes da aceleração total da partícula, (c) o módulo da aceleração tangencial da partícula, (d) o módulo da aceleração angular da partícula, (e) a força total exercida sobre a partícula, (f) o componente tangencial da força exercida sobre a partícula.

Resposta: (a) 0,4 m/s; 0,69 m/s. (b)  $-0,277$ ;  $-0,16$ . (c) 0. (d) 0. (e) 0,064 N. (f) 0.

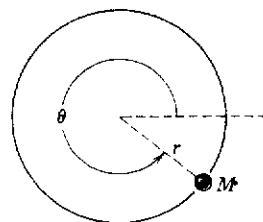


figura 6-19

35. Uma bola de 1,5 kg é ligada a uma haste vertical rígida, conforme indicado na Fig. 6-20. Cada cordão que liga a massa à haste possui comprimento de 1,0 m e massa desprezível. A distância entre os pontos de conexão dos cordões com a haste é de 1,0 m. O sistema gira em torno do eixo da haste com velocidade angular constante e ficam esticados formando um triângulo equilátero com a haste. O módulo da tração no cordão superior vale 30 N. (a) Faça um diagrama de todas as forças que atuam sobre a bola. (b) Calcule a tração no cordão inferior. (c) Qual é, neste caso, a força resultante exercida sobre a bola? (d) Qual é a velocidade da bola?

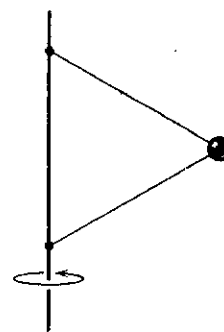


figura 6-20

36. Uma garota está no interior de um elevador que sobe com aceleração  $a$ . Ela gira um balde contendo água num círculo vertical de raio  $R$ . Calcule o menor módulo da velocidade do balde para que a água não caia do balde na parte superior da circunferência.

Resposta:  $v = \sqrt{R(g+a)}$ .

37. Em virtude da rotação da Terra, um fio de prumo pode não pender exatamente numa direção vertical no local em que se encontra. Determine o desvio da vertical do local: (a) no equador, (b) numa latitude de  $30^\circ$ , (c) numa latitude de  $60^\circ$ , (d) nos pólos.

38. Imagine que o disco da Fig. 6-6 esteja ligado a uma mola, e não a um cordão como nesta figura. O comprimento da mola não distendida vale  $L_0$ , e a tração na mola aumenta na razão direta do seu alongamento, sendo  $k$  a tensão por unidade de alongamento. Seja  $f$  a frequência (número de rotações por unidade de tempo). Determine: (a) o raio  $R$  do movimento circular uniforme, (b) a tração  $T$  na mola.

Resposta: (a)  $R = kL_0 / (k - 4\pi^2 mf^2)$ , (b)  $T = 4\pi^2 mkL_0 f^2 / (k - 4\pi^2 mf^2)$ .

39. Observe a Fig. 6-21. Um cubo muito pequeno, de massa  $m$ , é colocado no interior de um funil que gira em torno de um eixo vertical com uma frequência  $f$  rev./s. A parede do funil forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o cubo e o funil vale  $\mu$  e o centro do cubo está situado a uma distância  $r$  do eixo de rotação. Determine o valor (a) máximo e o valor (b) mínimo de  $f$  para que o cubo permaneça em repouso em relação ao funil.

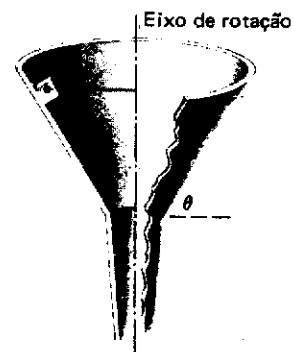


figura 6-21

# 7

## *trabalho e energia*

Um problema fundamental de dinâmica da partícula é determinar como se moverá uma partícula, conhecidas as forças que atuam nela. Pela expressão “como se moverá uma partícula” entende-se como sua posição varia com o tempo. Se o movimento for unidimensional, o problema consiste em determinar  $x$  como função do tempo,  $x(t)$ . Nos dois capítulos precedentes este problema foi resolvido para o caso especial de uma força constante. O método usado foi o seguinte: determina-se a força resultante  $F$  que atua na partícula, a partir da lei de força adequada; o valor da força e da massa  $m$  da partícula são levados à equação da segunda lei de Newton, o que permite encontrar a aceleração  $a$  da mesma:

$$a = F/m.$$

Se a força  $F$  e a massa  $m$  forem constantes, a aceleração  $a$  deve ser constante também. Suponhamos que o sentido positivo do semi-eixo  $Ox$  coincida com o da aceleração, podemos, então, determinar a velocidade da partícula pela Eq. 3-12:

$$v = v_0 + at,$$

e sua posição pela Eq. 3-15 (com  $x_0 = 0$ ):

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2;$$

note que, por simplicidade e conveniência, eliminamos o índice  $x$  nessas equações. A última equação fornece diretamente a infor-

7-1

INTRODUÇÃO

mação que em geral é desejada, isto é,  $x(t)$ , a posição da partícula como função do tempo.

O problema é mais difícil, todavia, quando a força que age na partícula *não é constante*. Em tal caso ainda obtemos a aceleração da partícula, como antes, a partir da segunda lei de Newton. No entanto, a fim de conseguir a velocidade ou a posição da partícula, não mais poderemos utilizar as equações anteriores, válidas unicamente para o caso de aceleração constante. Para resolver tais problemas, usa-se o processo matemático de integração, que consideraremos no presente capítulo.

Limitaremos nossa atenção às forças que variam com a posição da partícula em sua vizinhança, tipo de forças esse comum em Física. Citemos, como exemplo, a força gravitacional entre os corpos, tal como entre o Sol e a Terra, e a força exercida por uma mola distendida sobre o corpo ligado a ela. O procedimento utilizado para determinar o movimento de uma partícula submetida a forças desse tipo, leva aos conceitos de trabalho e energia cinética e ao desenvolvimento do teorema do trabalho — energia, que constitui o tema central deste capítulo. No Cap. 8 consideraremos a energia de um ponto de vista mais amplo, incorporado na lei da conservação da energia, conceito que tem desempenhado papel importante no desenvolvimento da Física.

Consideremos uma partícula sobre a qual atua uma força. No caso mais simples a força  $F$  é constante e o movimento da partícula é retilíneo e no sentido da força. Em tal situação, define-se o *trabalho realizado pela força sobre a partícula* como o produto do módulo da força pela distância que a partícula percorreu, indicando-se

$$W = Fd.$$

No entanto, a força constante que atua na partícula pode não agir no sentido em que a partícula se move. Neste caso, definimos o *trabalho realizado pela força sobre a partícula* como o produto do componente da força na direção do movimento pela distância que a partícula percorreu naquela direção. Na Fig. 7-1 uma força constante  $F$ , inclinada de um ângulo  $\phi$  com o semi-eixo  $Ox$ , atua sobre uma partícula cujo deslocamento naquele eixo é  $d$ . Representando por  $W$  o trabalho realizado pela força  $F$  durante esse deslocamento, então de acordo com essa definição

$$W = (F \cos \phi) d. \quad (7-1)$$

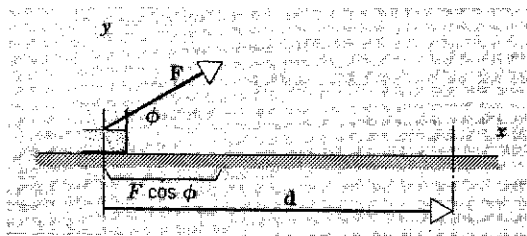


figura 7-1

A força  $F$  provoca no bloco um deslocamento  $d$ . A componente de  $F$  que realiza o trabalho tem módulo  $F \cos \phi$ ; o trabalho realizado é  $Fd \cos \phi (= F \cdot d)$ .

Naturalmente, outras forças devem agir na partícula que se move desse modo (duas delas são o seu peso e a força de atrito exercida pelo plano). Uma partícula sobre a qual atua uma única força pode ter deslocamento em direção diferente da direção da força,

como acontece no movimento de um projétil. Entretanto, ela não pode se mover em linha reta, a menos que a linha tenha a direção da força aplicada à partícula. A Eq. 7-1 refere-se apenas ao trabalho realizado sobre a partícula pela força particular  $F$ . O trabalho realizado sobre a partícula pelas outras forças deve ser calculado separadamente. O trabalho total realizado é a soma dos trabalhos feitos por cada uma das forças.

Quando  $\phi$  for nulo, o trabalho realizado por  $F$  é simplesmente  $Fd$ , em concordância com a equação anterior. Portanto, quando uma força horizontal arrasta um corpo horizontalmente, ou quando uma força vertical desloca verticalmente uma partícula, o trabalho realizado pela força é o produto do módulo da força pela distância percorrida. Quando  $\phi = 90^\circ$  a força não tem componente na direção do deslocamento. Essa força, portanto, não realiza trabalho sobre o corpo. Por exemplo, a força vertical que suporta um corpo a certa altura do solo não trabalha sobre o corpo, mesmo se este se mover horizontalmente no chão. Além disso, a força centrípeta que age sobre um corpo em movimento não trabalha sobre o corpo, pois ela é sempre perpendicular à trajetória. Está claro que nenhuma força trabalha sobre um corpo que não se move, pois seu deslocamento é nulo. Na Fig. 7-2 ilustram-se situações em que uma força aplicada não trabalha sobre o corpo.

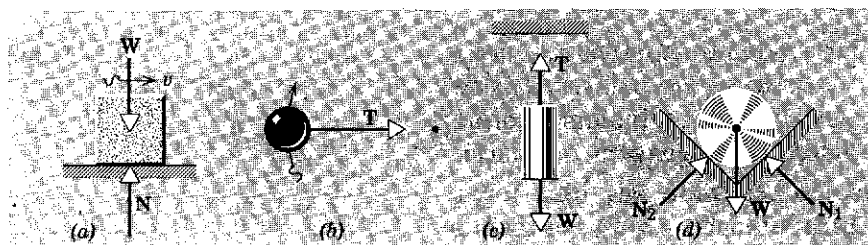


figura 7-2

Nem sempre se realiza trabalho quando se aplica uma força a um corpo. (a) O bloco se move para a direita, com velocidade  $v$  constante, sobre uma superfície considerada sem atrito. Nenhum trabalho é realizado, nem pelo peso  $W$  nem pela força normal  $N$ . (b) A bola se move em círculo, sob a influência de uma força centrípeta  $T$ . Existe uma aceleração centrípeta  $a$  mas nenhum trabalho é realizado por  $T$ . Tanto em (a) como em (b), as forças consideradas ( $W$ ,  $N$  e  $T$ ) são perpendiculares ao deslocamento, de modo que  $W = F \cdot d = Fd \cos \phi = Fd \cos 90^\circ = 0$ . (c) Cilindro suspenso por uma corda. Nenhum trabalho é realizado por  $T$ , tensão na corda, ou por  $W$ , peso do cilindro. (d) Um cilindro repousa numa canaleta; nenhum trabalho é realizado por  $W$ ,  $N_1$  ou  $N_2$ . Tanto em (c) como em (d) o trabalho realizado individualmente pelas forças é zero, porque o deslocamento é nulo.

Note que a Eq. 7-1 pode ser escrita tanto como  $(F \cos \phi)d$  ou como  $F(d \cos \phi)$ . Isto sugere que o trabalho pode ser calculado de dois modos diferentes: ou multiplicamos o módulo do deslocamento pelo componente da força na direção dele, ou multiplicamos o módulo da força pelo componente do deslocamento na direção da força. Esses dois métodos dão sempre o mesmo resultado.

O trabalho é uma grandeza *escalar*, embora as duas grandezas envolvidas em sua definição, força e deslocamento, sejam vetoriais. Na Seção 2-4 definiu-se o *produto escalar* de dois vetores como a grandeza escalar obtida multiplicando-se o módulo de um deles pelo componente do segundo ao longo do primeiro. Indicou-se lá que em breve seriam encontradas grandezas físicas que se comportam



como produtos escalares. A Eq. 7-1 mostra que o trabalho é uma grandeza desse tipo. Em notação da álgebra vetorial, podemos escrever aquela equação como

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}, \quad (7-2)$$

em que o ponto indica produto escalar. A Eq. 7-2 para  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{d}$  corresponde à Eq. 2-11 para  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ .

O trabalho pode ser positivo ou negativo. Se a partícula sobre a qual atua a força tiver um componente de seu movimento oposto ao sentido da força, o trabalho realizado por esta será negativo. Isso corresponde a um ângulo obtuso entre os vetores força e deslocamento. Por exemplo, quando uma pessoa desce um objeto até o assoalho, o trabalho realizado pela força vertical dirigida para cima, exercida pela mão sobre o objeto, é negativo. Nesse caso  $\phi = 180^\circ$ , pois  $\mathbf{F}$  está dirigida para cima e  $\mathbf{d}$  para baixo.

O trabalho, como foi definido (Eq. 7-2), é um conceito muito útil em Física. Nossa definição especial da palavra *trabalho* não corresponde ao uso vulgar do termo, o que pode causar alguma confusão. Uma pessoa parada que suporte um grande peso no ar pode dizer que está realizando um trabalho duro — e ela pode realizar um trabalho duro no sentido fisiológico — mas do ponto de vista da Física afirmamos que ela não está produzindo nenhum trabalho, uma vez que a força aplicada não provoca deslocamento. A palavra *trabalho* é utilizada, apenas, no sentido restrito da Eq. 7-2. Em muitos campos científicos, as palavras de nossa linguagem cotidiana passam a ter significado muito específico. As palavras *básico* e *célula*, por exemplo, representam em química e biologia coisas completamente diferentes do que indicam na linguagem ordinária.

A *unidade* de trabalho é o trabalho realizado por uma força unitária ao deslocar um corpo de uma unidade de comprimento na sua própria direção. No sistema SI a unidade de trabalho é 1 *newton-metro* ou 1 *joule* (símbolo:  $J$ ); no sistema CGS é 1 *dinacentímetro* = 1 *erg*; no sistema técnico métrico é 1 *quilograma-forçametro* ou *quilogrâmetro* e no sistema técnico inglês a unidade de trabalho é o *pé-libra-força*. Utilizando as relações entre Newton, dina e libra-força, de um lado, e metro, centímetro e pé, de outro, obtém-se  $1 \text{ joule} = 10^7 \text{ ergs} = 0,7376 \text{ lb-pé}$ .

Um bloco de massa igual a 10,0 kg deve ser elevado da base ao topo de um declive com 5,00 m de comprimento e altura de 3,00 m, em relação ao solo, no topo. Supondo que as superfícies sejam lisas, que trabalho deve ser realizado por uma força paralela ao plano, que empurre o bloco com *velocidade constante*, sendo  $g = 9,80 \text{ m/s}^2$ ?

### EXEMPLO 1

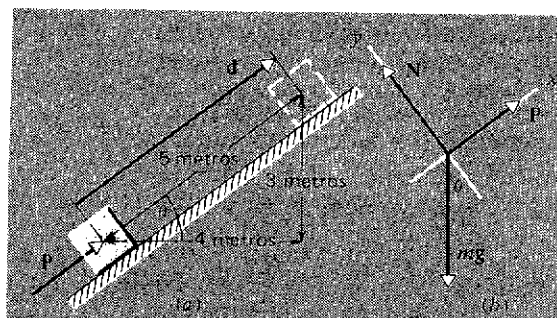


figura 7-3

Exemplo 1. (a) Uma força  $P$  desloca um bloco de uma distância  $d$ , subindo ao longo de um plano inclinado que faz um ângulo  $\theta$  com a horizontal. (b) Diagrama de forças para o bloco.

A situação está representada na Fig. 7-3a. As forças que atuam no bloco estão indicadas na Fig. 7-3b. Primeiro determina-se  $P$ , o módulo da força que empurra o bloco para cima do alicive. Como o movimento não é acelerado, a força resultante paralela ao plano deve ser nula; portanto,

$$P - mg \sen \theta = 0,$$

ou seja,

$$P = mg \sen \theta = (10,0 \text{ kg}) (9,80 \text{ m/s}^2) \left(\frac{3}{5}\right) = 58,8 \text{ N}.$$

Portanto, o trabalho realizado por  $P$ , de acordo com a Eq. 7-1, sendo  $\phi = 0^\circ$ , será

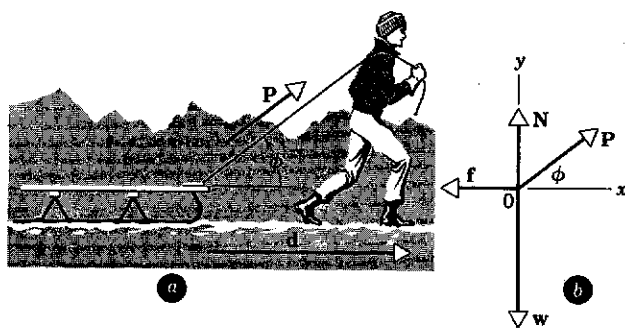
$$W = \mathbf{P} \cdot \mathbf{d} = Pd \cos 0^\circ = Pd = (58,8 \text{ N}) (5,00 \text{ m}) = 294 \text{ J}.$$

Se uma pessoa suspendesse o bloco verticalmente, sem usar a rampa, o trabalho que ela teria de realizar seria a força vertical  $mg$  multiplicada pela distância vertical:

$$98,0 \text{ N} \times 3,00 \text{ m} = 294 \text{ J},$$

resultado idêntico ao anterior. A única diferença é que a rampa permite utilizar, para suspender o bloco, uma força menor (58,8 N) do que a exigida sem a rampa ( $mg = 98,0 \text{ N}$ ); por outro lado, a pessoa teria de empurrar o bloco em uma distância maior (5,00 m) do que a exigida para elevação vertical (3,00 m).

Um garoto puxa um trenó de 5 kgf por 10 m ao longo de uma superfície horizontal, com *velocidade constante*. Que trabalho ele realiza sobre o trenó, sendo de 0,20 o coeficiente de atrito cinético e de  $45^\circ$  o ângulo formado com a horizontal pela força aplicada?



## EXEMPLO 2

figura 7-4

Exemplo 2. (a) Um rapaz desloca um trenó numa distância  $d$ , puxando-o com uma força  $P$ , por meio de uma corda que forma um ângulo  $\phi$  com a horizontal. (b) Diagrama das forças que atuam sobre o trenó.

A situação está indicada na Fig. 7-4a, e na Fig. 7-4b mostram-se as forças sobre o trenó.  $P$  é a força exercida pelo garoto,  $w$  o peso do trenó,  $f$  a força de atrito e  $N$  a força normal exercida pela superfície sobre o trenó. O trabalho realizado pelo garoto sobre o trenó será, então,

$$W = \mathbf{P} \cdot \mathbf{d} = Pd \cos \phi.$$

Para calcular o trabalho, deve-se primeiro determinar  $P$ , cujo valor não foi fornecido. Para isso referimo-nos ao diagrama de forças.

Como o trenó não está acelerado, a partir da segunda lei de movimento, obtém-se:

$$P \cos \phi - f = 0,$$

e

$$P \sen \phi + N - w = 0.$$

Sabemos, também, que  $f$  e  $N$  estão ligados pela equação

$$f = \mu_c N.$$

As três equações acima contêm três incógnitas,  $P$ ,  $f$  e  $N$ , que podem, então, ser determinadas:

$$P = \mu_c w / (\cos \phi + \mu_c \operatorname{sen} \phi).$$

Sendo  $\mu_c = 0,20$ ,  $w = 5 \text{ kgf} = 49 \text{ N}$  e  $\phi = 45^\circ$ , resulta:

$$P = 0,20 \cdot 49 \text{ N} / (0,707 + 0,141) = 12 \text{ N}.$$

Como  $d = 10 \text{ m}$ , o trabalho realizado pelo garoto sobre o trenó será

$$W = Pd \cos \phi = 12 \text{ N} \times 10 \text{ m} \times 0,707 = 85 \text{ J}.$$

O componente vertical da força  $P$  exercida pelo garoto não trabalha sobre o trenó. Note, no entanto, que ele reduz a força normal entre o trenó e a superfície ( $N = w - P \operatorname{sen} \phi$ ) e, portanto, reduz o valor da força de atrito ( $f = \mu_c N$ ).

O garoto realizaria sobre o trenó trabalho maior, menor ou igual, se a força por ele aplicada fosse horizontal e não inclinada de  $45^\circ$ ? Qualquer das outras forças atuantes no trenó, trabalham sobre ele?

Consideremos, agora, o trabalho realizado por uma força variável. Tomemos inicialmente, o caso em que apenas o módulo da força seja variável. Suponhamos que a força seja uma função da posição,  $F(x)$ , e que seu sentido seja o do semi-eixo positivo  $Ox$ . Se um corpo se move ao longo de  $Ox$  sob a ação dessa força, qual o trabalho que ela realiza ao deslocá-lo de  $x_1$  a  $x_2$ ?

Na Fig. 7-5 está representada  $F$  em função de  $x$ . Dividamos o deslocamento total em um grande número de pequenos intervalos iguais,  $\Delta x$  (Fig. 7-5a). Durante o pequeno deslocamento  $\Delta x$  de  $x_1$  a  $x_1 + \Delta x$ ,  $F$  tem módulo aproximadamente constante e o trabalho por ela realizado,  $\Delta W$ , será, aproximadamente,

$$\Delta W = F \Delta x, \quad (7-3)$$

sendo  $F$  o valor da força em  $x_1$ . De modo análogo, no pequeno deslocamento de  $x_1 + \Delta x$  a  $x_1 + 2\Delta x$ ,  $F$  tem valor quase constante e o trabalho por ela realizado é, aproximadamente,  $\Delta W = F \Delta x$ , sendo  $F$  o valor da força em  $x_1 + \Delta x$ . O trabalho total  $W_{12}$  realizado por  $F$  ao deslocar o corpo de  $x_1$  a  $x_2$ , é aproximadamente igual à soma do grande número de termos semelhantes ao da Eq. 7-3,  $F$  tendo valor diferente em cada termo; portanto,

$$W_{12} = \sum_{x_1}^{x_2} F \Delta x, \quad (7-4)$$

a letra grega  $\Sigma$  (sigma) indicando soma em todos os intervalos de  $x_1$  a  $x_2$ .

Para melhorar a aproximação, podemos dividir o deslocamento total de  $x_1$  a  $x_2$  em maior número de intervalos iguais, como na Fig. 7-5b, de forma que  $\Delta x$  seja menor e o valor de  $F$  no início de cada intervalo seja mais típico de seus valores dentro do intervalo. Está claro que podemos obter aproximações cada vez melhores, tomando  $\Delta x$  cada vez menor, de forma a conseguir um número sempre maior de intervalos. Obteremos o valor exato do trabalho realizado pela força  $F$  se fizermos  $\Delta x$  aproximar-se de zero e o número de intervalos tender para infinito. Nesse caso, teremos como resultado exato:

### 7-3 TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA VARIÁVEL — CASO UNIDIMENSIONAL

$$W_{12} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_1}^{x_2} F \Delta x. \quad (7-5)$$

A relação

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_1}^{x_2} F \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F dx,$$

como o estudante deve ter aprendido no curso de cálculo, *defina a integral* de  $F$  em relação a  $x$ , de  $x_1$  a  $x_2$ . Numericamente esta grandeza é exatamente igual à área compreendida entre a curva que representa a força e o eixo  $Ox$ , entre os limites  $x_1$  e  $x_2$  (Fig. 7-5c). Portanto, geometricamente, uma integral pode ser interpretada como uma área. O símbolo  $\int$  é um  $S$  (de *soma*) deformado e simboliza o processo de integração. Podemos escrever o trabalho total realizado por  $F$ , ao deslocar o corpo de  $x_1$  a  $x_2$ , como

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx. \quad (7-6)$$

Como exemplo, consideremos uma mola presa a uma parede. Escolhamos como eixo  $Ox$  o eixo (horizontal) da mola; suponhamos que a origem,  $x = 0$ , coincida com o extremo da mola, quando esta encontrar-se em seu estado normal (não distendida). Admitamos que o sentido positivo  $Ox$  seja da parede para fora e que a mola seja distendida tão lentamente que em qualquer instante ela esteja em equilíbrio ( $a = 0$ ).

Se a mola for distendida até que seu extremo se desloque até à posição  $x$ , a mola exercerá, sobre o agente que a deforma, uma força cujo valor, em boa aproximação, será

$$F = -kx, \quad (7-7)$$

sendo  $k$  uma constante denominada *constante elástica* da mola. A Eq. 7-7 é a *lei de força* para as molas. O sentido dessa força é sempre oposto ao deslocamento da extremidade, a partir da origem. Quando a mola esta distendida,  $x > 0$  e  $F$  é negativa; quando a mola esta comprimida,  $x < 0$  e  $F$  é positiva. A força exercida pela mola é uma *força restauradora*, porque está sempre orientada para a origem. As molas reais obedecerão à Eq. 7-7, conhecida como a *lei de Hooke*, se não forem distendidas além de certo valor. Podemos considerar a constante  $k$  como a força por unidade de alongação; portanto, molas muito duras têm valores de  $k$  muito grandes.

Para distender uma mola devemos exercer sobre ela uma força  $F'$  igual e oposta à força  $F$  exercida sobre nós pela mola. A força aplicada<sup>1</sup> será, portanto,  $F' = kx$  e o trabalho que ela realiza ao distender a mola, de modo que a extremidade desta se mova de  $x_1$  a  $x_2$ , será, portanto,<sup>2</sup>

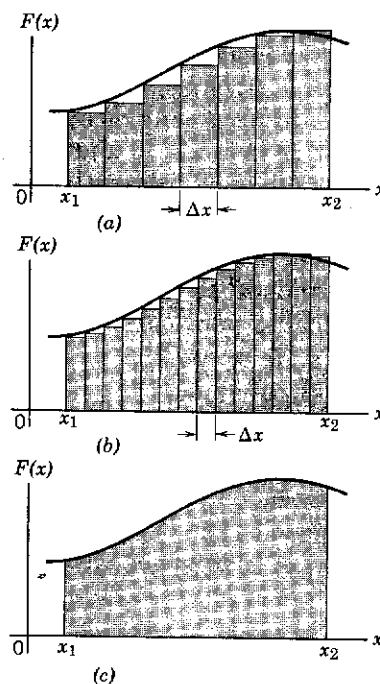


figura 7-5

Calcular  $\int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$  equivale a

obter a área compreendida sobre a curva  $F(x)$ , entre os limites  $x_1$  e  $x_2$ . Isto pode ser realizado aproximadamente, como indica o desenho de cima (a), dividindo a área em algumas faixas, cada uma de largura  $\Delta x$ . As áreas dos retângulos são então somadas e se obtém, assim, um valor grosseiro para a área. No desenho central (b), as faixas foram subdivididas e o valor da área torna-se mais exato, porque os erros nas bases superiores dos retângulos se tornam menores. No desenho inferior (c), as faixas são de largura infinitesimal. A medida da área é exata, já que os erros nas bases superiores dos retângulos tendem a zero quando a largura da faixa  $dx$  tende a zero.

<sup>1</sup> Se a força aplicada fosse diferente de  $F' = kx$ , haveria uma resultante não nula agindo na mola, cujo movimento, portanto, seria acelerado. Para calcular o trabalho realizado teríamos de especificar exatamente o valor da força aplicada em cada ponto. Não importa qual seja a força, o trabalho seria sempre o mesmo para o mesmo deslocamento de  $x_1$  a  $x_2$ , desde que sejam os mesmos os valores inicial e final da velocidade. No entanto, é muito mais fácil usar a força  $F' = kx$  para calcular o trabalho realizado. Tal força aplicada leva ao movimento não acelerado. Foi para conseguir utilizar esta força simples que especificamos, em primeiro lugar, que o movimento fosse não acelerado.

<sup>2</sup> O estudante que esteja se familiarizando com o cálculo deve consultar a lista de integrais do Ap. I.

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F'(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (kx) dx = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2.$$

Se fizermos  $x_1 = 0$  e  $x_2 = x$  obtemos

$$W = \int_0^x (kx) dx = \frac{1}{2}kx^2. \quad (7-8)$$

Este é o trabalho realizado ao distender uma mola de forma que sua extremidade se mova desde a posição distendida até  $x$ . Note que o trabalho para *comprimir* uma mola de  $x$  é o mesmo que para distendê-la de  $x$ , pois o deslocamento  $x$  comparece ao quadrado na Eq. 7-8; qualquer dos dois sinais de  $x$  fornece valor positivo para  $W$ .

Podemos, também, calcular essa integral determinando a área entre a curva força-deslocamento e o eixo  $x$ , desde  $x = 0$  a  $x = x$ ; é o que está desenhado como área branca na Fig. 7-6. A figura é um triângulo de base  $x$  e altura  $kx$ , cuja área será, portanto,

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot kx = \frac{1}{2}kx^2,$$

de acordo com a Eq. 7-8.

A força  $\mathbf{F}$  que atua em uma partícula pode variar tanto em direção como em módulo, e a partícula pode mover-se ao longo de uma trajetória curvilínea. Para calcular o trabalho nesse caso geral, divide-se a trajetória em um grande número de pequenos deslocamentos  $\Delta \mathbf{r}$ , cada um dos quais dirigido ao longo dela no sentido do movimento. A Fig. 7-7 mostra dois deslocamentos escolhidos em situação particular, bem como o módulo de  $\mathbf{F}$  e o ângulo  $\phi$  entre essa força e  $\Delta \mathbf{r}$  em cada caso. O trabalho realizado sobre a partícula durante um deslocamento  $\Delta \mathbf{r}$  pode ser determinado a partir da equação

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cos \phi dr. \quad (7-9)$$

O trabalho realizado pela força variável  $\mathbf{F}$ , sobre a partícula, quando esta se move de  $a$  a  $b$ , por exemplo (Fig. 7-7), é calculado, com excelente aproximação, adicionando-se os trabalhos elementares realizados em cada segmento da trajetória entre  $a$  e  $b$ . À proporção que diminuem os elementos da trajetória  $\Delta \mathbf{r}$ , eles podem ser substituídos por diferenciais  $d\mathbf{r}$  e a soma anterior pode ser substituída por uma integração, como na Eq. 7-6. O trabalho é, portanto, dado por:

$$W_{ab} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F \cos \phi dr. \quad (7-10a)$$

Só poderemos avaliar esta integral se soubermos como  $F$  e  $\phi$  na Eq. 7-10a variam de um ponto a outro da trajetória, pois ambas são funções das coordenadas  $x$ ,  $y$  da partícula, na Fig. 7-7.

Exprimindo  $\mathbf{F}$  e  $d\mathbf{r}$  em função de suas componentes, obtém-se uma outra expressão para a Eq. 7-10a. Com efeito,  $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}$  e  $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$ , conseqüentemente  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy$ , lembrando que  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$  e  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0$  (ver Probl. 21, Cap. 2). Substituindo na Eq. 7-10a obtém-se

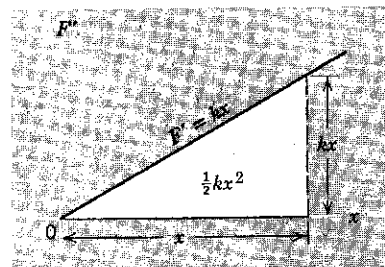


figura 7-6

A força exercida para distender uma mola é  $F' = kx$ . A área situada sob a curva da força é o trabalho realizado ao distender a mola de uma distância  $x$  e pode ser determinado por integração ou usando a fórmula da área de um triângulo.

## 7-4

### TRABALHO DE UMA FORÇA VARIÁVEL — CASO BIDIMENSIONAL

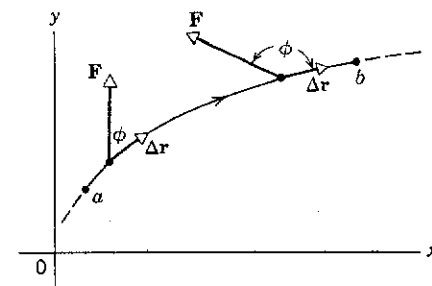


figura 7-7

Como  $\mathbf{F}$  e  $\phi$  poderiam variar ao longo de uma trajetória. Quando  $\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0$ , devemos substituí-lo pela diferencial  $d\mathbf{r}$ , que aponta sempre no sentido da velocidade do objeto em movimento e, como  $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ , é tangente à trajetória em todos os seus pontos.

$$W_{ab} = \int_a^b (F_x dx + F_y dy) \quad (7-10b)$$

As integrais do tipo das que figuram nas Eqs. 7-10a e 7-10b chamam-se *integrais de linha*.

Como exemplo de trabalho de uma força variável, consideremos uma partícula de massa  $m$ , suspensa por um fio sem peso de comprimento  $l$ : é o pêndulo simples. Desloquemos a partícula, ao longo de uma trajetória circular, desde  $\phi = 0$  até  $\phi = \phi_0$ , aplicando-lhe uma força sempre horizontal, por exemplo, puxando a partícula horizontalmente através de uma mola. A partícula terá um deslocamento vertical  $h$ . A Fig. 7-8a mostra a situação e a Fig. 7-8b indica as forças que agem sobre a partícula na posição arbitrária  $\phi$ . A força aplicada é  $F$ ,  $T$  é a tensão do fio e  $mg$  o peso da partícula.

Suponhamos novamente que não haja aceleração (pela mesma razão que antes), de forma que o movimento deve ser muito lento. A força  $F$  é sempre horizontal, porém o deslocamento  $d\mathbf{r}$  está ao longo do arco; a direção de  $d\mathbf{r}$  depende do valor de  $\phi$ , sendo sempre tangente à trajetória circular em qualquer ponto.  $F$  terá módulo variável de tal modo que equilibre o componente horizontal da tensão. Note que o ângulo entre  $F$  e  $d\mathbf{r}$  é igual ao deslocamento angular  $\phi$ , neste caso.

O trabalho realizado quando a massa  $m$  se move de  $\phi = 0$  até  $\phi = \phi_0$ , sob a ação da força  $F$ , será:

$$W = \int_{\phi=0}^{\phi=\phi_0} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\phi=0}^{\phi=\phi_0} F \cos \phi \, d\mathbf{r} \quad (7-10a)$$

ou, ainda,

$$W = \int_{x=0, y=0}^{x=(l-h) \operatorname{tg} \phi_0, y=h} (F_x dx + F_y dy). \quad (7-10b)$$

Avaliemos a segunda das integrais. Note que, de acordo com a primeira lei de Newton (ver Fig. 7-8b),

$$F_x = T \operatorname{sen} \phi, \quad mg = T \cos \phi.$$

Eliminando  $T$  entre essas relações, tem-se

$$F_x = mg \operatorname{tg} \phi.$$

Observemos, também, na Fig. 7-8b, que  $F_y = 0$ , substituindo os valores de  $F_x$  e  $F_y$  na Eq. 7-10b, resultará

$$W = \int_{x=0, y=0}^{x=(l-h) \operatorname{tg} \phi_0, y=h} mg \operatorname{tg} \phi \, dx.$$

Pela Fig. 7-8a, vê-se que

$$\operatorname{tg} \phi = dy/dx, \text{ ou seja, } \operatorname{tg} \phi \, dx = dy.$$

Fazendo esta substituição e notando que a integral depende apenas da variável  $y$  obtém-se, finalmente,

$$W = \int_{y=0}^{y=h} (mg) \, dy = mg \int_0^h dy = mgh.$$

O estudante deve tentar, agora, calcular o trabalho realizado ao deslocar a partícula ao longo do arco de circunferência com velocidade constante, aplicando uma força sempre dirigida *ao longo do arco*. Nesse caso, será mais simples utilizar a Eq. 7-10a, usando a força tangencial e tomando  $d\mathbf{r} = l d\phi$ . O resultado será o mesmo

### EXEMPLO 3

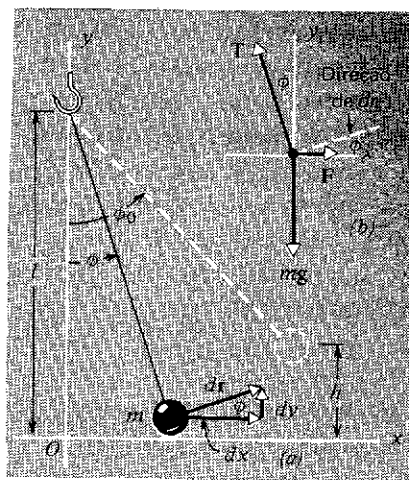


figura 7-8

Exemplo 3. (a) Pêndulo simples. Uma massa puntiforme  $m$  suspensa por um fio de comprimento  $l$ . Seu deslocamento máximo é  $\phi_0$ . (b) Diagrama das forças que a massa, quando aplicada sobre ela uma força horizontal.

que antes,  $W = mgh$ . Observe que ambos os resultados coincidem com o trabalho que seria realizado para elevar a partícula de massa  $m$  ao longo da altura  $h$ .

Que trabalho foi realizado sobre a partícula pela tensão  $T$  do fio?

Nos nossos exemplos precedentes de trabalhos realizados pelas forças, lidamos com objetos *não-acelerados*. Em tais casos a *força resultante* que atua no objeto é nula. Suponhamos, agora, que essa resultante seja *não nula*, de forma que o objeto esteja *acelerado*. As condições são as mesmas, sob todos os aspectos, que aquelas existentes no caso em que atua uma única força sobre o corpo.

A situação mais simples a considerar é a de uma *força resultante constante*  $F$ , que, agindo sobre uma partícula de massa  $m$ , produzirá uma *aceleração constante*  $a$ . Escolhamos o eixo  $Ox$  na direção comum da força  $F$  e da aceleração  $a$ . Que trabalho é realizado por esta força sobre a partícula, ao deslocá-la da distância  $x$ ? Quando a aceleração é constante, podem usar-se as relações

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

e

$$x = \frac{v + v_0}{2} t,$$

que são as Eqs. 3-12 e 3-14, respectivamente (eliminado o índice  $x$ , por conveniência, e escolhido  $x=0$  na segunda equação);  $v_0$  é a velocidade da partícula quando  $t=0$  e  $v$  sua velocidade no instante  $t$ . O trabalho realizado será, portanto,

$$\begin{aligned} W &= Fx = max \\ &= m \cdot \frac{v - v_0}{t} \cdot \frac{v + v_0}{2} \cdot t = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2. \end{aligned} \quad (7-11)$$

O *semiproduto da massa de um corpo pelo quadrado de sua velocidade* é denominado *energia cinética do corpo*. Representando a energia cinética pela letra  $K$  tem-se, por definição,

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (7-12)$$

Podemos, então, enunciar a Eq. 7-11 do seguinte modo: *o trabalho realizado pela força resultante que atua sobre uma partícula é igual à variação da energia cinética da partícula.*

Embora tenhamos demonstrado este resultado apenas para uma força constante, ele é válido também quando a força for variável. Suponhamos que ela varie em módulo, para exemplificar, e que o deslocamento se faça na direção da força, escolhida como a direção do eixo  $Ox$ . O trabalho realizado pela resultante ao deslocar a partícula de  $x_0$  a  $x$  é

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_0}^x F dx.$$

Porém, de acordo com a 2.<sup>a</sup> lei de Newton,  $F = ma$  e a aceleração  $a$  pode ser escrita como

## 7-5 ENERGIA CINÉTICA E O TEOREMA DO TRABALHO-ENERGIA

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = v \frac{dv}{dx};$$

portanto,

$$W = \int_{x_0}^x F dx = \int_{x_0}^x mv \cdot \frac{dv}{dx} dx = \int_{v_0}^v mv dv = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (7-13)$$

Um caso mais geral, é aquele em que a força varia, tanto em módulo, como em direção (e sentido), sendo o movimento, portanto, curvilíneo, como na Fig. 7-7 (ver Probl. 8). Ainda uma vez, verifica-se que o trabalho realizado sobre a partícula pela resultante, é igual à variação da energia cinética da partícula.

O trabalho realizado *sobre* uma partícula pela força *resultante* é sempre igual à variação da energia cinética da partícula.

$$W(\text{da força resultante}) = K - K_0 = \Delta K. \quad (7-14)$$

Essa equação é conhecida como o *teorema do trabalho-energia* para uma partícula.

Note-se que, se a velocidade da partícula for constante, não haverá variação de energia cinética e o trabalho da resultante será nulo. No movimento circular uniforme, por exemplo, a velocidade da partícula tem módulo constante, e a força centrípeta não realiza trabalho sobre a partícula. Uma força normal à direção do movimento apenas altera a *direção* da velocidade e não o seu valor. Somente quando a força *resultante* tem componente na direção do movimento ela modifica o módulo da velocidade ou a energia cinética da partícula. Apenas o componente da força na direção do movimento realiza trabalho, o que concorda com a definição de trabalho como produto escalar, pois no produto  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  apenas o componente de  $\mathbf{F}$  na direção de  $d\mathbf{r}$  contribui para o produto.

Se decresce a energia cinética de uma partícula, o trabalho realizado sobre ela pela força resultante será negativo. O deslocamento e o componente da força resultante na direção do movimento terão sentidos opostos. O trabalho realizado *sobre* a partícula pela força tem sinal oposto ao do trabalho realizado *pela* partícula sobre o objeto que produziu a força. Isto é uma consequência da terceira lei de Newton. Portanto, a Eq. 7-14 pode ser interpretada dizendo que a energia cinética de uma partícula *decrece* de um valor igual ao do trabalho que a partícula *realiza*. Diz-se que um corpo possui energia armazenada em si devido ao movimento; quando o corpo realiza trabalho, ele diminui sua velocidade e perde parte de sua energia. Portanto, *a energia cinética de um corpo em movimento é igual ao trabalho que ele pode realizar ao ser parado*, resultado válido, quer a força resultante seja variável, quer seja constante.

As unidades de energia cinética são as mesmas de trabalho, sendo ambas grandezas escalares. A energia cinética de um sistema de partículas é simplesmente a soma (escalar) das energias cinéticas das partículas do sistema.

---

Um nêutron, um dos constituintes do átomo, passa por dois pontos distantes 6,0 m um do outro, no intervalo de  $1,8 \times 10^{-4}$  s. Supondo que sua velocidade seja constante, determinar sua energia cinética. A massa do nêutron é de  $1,7 \times 10^{-27}$  kg.

#### EXEMPLO 4



Obtém-se a velocidade pela relação

$$v = \frac{d}{t} = \frac{6,0 \text{ m}}{1,8 \times 10^{-4} \text{ s}} = 3,3 \times 10^4 \text{ m/s.}$$

A energia cinética será

$$k = \frac{1}{2}mv^2 = \left(\frac{1}{2}\right) (1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}) (3,3 \times 10^4 \text{ m/s})^2 = 9,3 \times 10^{-19} \text{ J.}$$

Em Física Nuclear, o joule é uma unidade excessivamente grande, usando-se por isso, com maior freqüência, outra unidade, o *elétron-volt* (eV), igual a  $1,60 \times 10^{-19}$  J. No exemplo acima, a energia cinética do nêutron pode ser expressa como

$$K = (9,3 \times 10^{-19} \text{ J}) \left( \frac{1 \text{ eV}}{1,60 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) = 5,8 \text{ eV.}$$

## EXEMPLO 5

Suponha que a força de gravidade seja constante a pequenas distâncias acima da superfície da Terra. Um corpo cai de uma altura  $h$ , acima da superfície terrestre, partindo do repouso. Qual sua energia cinética um momento antes de tocar o solo?

O aumento de energia cinética é igual ao trabalho realizado pela força resultante, que é neste caso a força de gravidade. Esta força é constante e sua direção é a do movimento; portanto, o trabalho por ela realizado é

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = mgh.$$

A velocidade inicial do corpo é  $v_0 = 0$  e a final  $v$ ; o ganho de energia cinética pelo corpo é

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - 0.$$

Comparando as duas relações, conclui-se que,

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = mgh,$$

é o valor da energia cinética do corpo um momento antes de chocar-se com o solo. Portanto, a velocidade do corpo vale

$$v = \sqrt{2gh}.$$

O estudante pode mostrar que ao cair, da altura  $h_1$  à altura  $h_2$ , um corpo aumentará sua energia cinética de  $\frac{1}{2}mv_1^2$  a  $\frac{1}{2}mv_2^2$ , sendo

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = mg(h_1 - h_2).$$

Neste exemplo, estamos lidando com força e aceleração constantes. Os métodos apresentados nos capítulos anteriores seriam úteis aqui também. Você consegue mostrar como os resultados obtidos por considerações de energia poderiam ser alcançados diretamente a partir das leis de movimento para corpos uniformemente acelerados?

## EXEMPLO 6

Um bloco que pesa 35,6 N escorrega sobre uma mesa horizontal lisa com velocidade de 1,22 m/s. Ele pára ao comprimir uma mola colocada em sua trajetória. De quanto a mola é comprimida, sabendo que sua constante elástica é de 3,65 N/m?

A energia cinética do bloco vale

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(w/g)v^2,$$

que é igual ao trabalho  $W$  que o bloco pode realizar antes de parar. O trabalho realizado ao comprimir a mola de  $x$  em relação ao seu comprimento natural será

$$W = \frac{1}{2} kx^2;$$

portanto,

$$\frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} (w/g) v^2,$$

ou, seja,

$$x = \sqrt{\frac{w}{gk}} \cdot v = \sqrt{\frac{35.6}{9.8 \times 3.65}} \times 1.22 \text{ m} \cong 1.2 \text{ m}.$$

O teorema do trabalho-energia *não* representa uma lei nova e independente da mecânica clássica. Simplesmente *definimos* trabalho e energia cinética, *deduzindo* a relação entre ambos diretamente da segunda lei de Newton. O teorema do trabalho-energia, no entanto, é útil na resolução de problemas em que o trabalho realizado pela resultante das forças pode ser calculado facilmente e estamos interessados em determinar a velocidade da partícula em certas posições. De maior significado, talvez, seja o fato de que o teorema do trabalho-energia constitui o ponto de partida para uma ampla generalização na Física. Foi acentuado que o teorema do trabalho-energia é válido quando for interpretado como o trabalho feito pela *resultante* das forças que agem na partícula. Todavia, ele é útil, também, em muitos problemas em que devem ser calculados separadamente o trabalho realizado por certos tipos de força, recebendo nome especial o trabalho que cada uma realiza. Isto leva ao conceito de diferentes tipos de energia e ao princípio de conservação da energia, assunto do próximo capítulo.

## 7-6

### SIGNIFICADO DO TEOREMA DO TRABALHO-ENERGIA

Consideremos, agora, o tempo envolvido na realização do trabalho. O trabalho realizado para suspender dado corpo até determinada altura é o mesmo, quer necessite um segundo ou um ano para ser feito. No entanto, a *taxa em que o trabalho é realizado* é freqüentemente de maior interesse do que o trabalho total feito.

Define-se *potência* como a taxa em que o trabalho é realizado. A potência média liberada por um agente é o quociente do trabalho total que ele realizou pelo correspondente intervalo de tempo, ou seja:

$$\bar{P} = W/t.$$

A potência instantânea liberada pelo agente é

$$P = dW/dt. \quad (7-15)$$

Quando a potência for constante no tempo,  $P = \bar{P}$  e  $W = Pt$ .

A unidade SI de potência é o *watt* = 1 joule/s (abreviatura, W) nome escolhido em homenagem a James Watt, cuja máquina a vapor é a predecessora dos poderosos motores de hoje. No sistema técnico inglês a unidade de potência é 1 lb·ft/s, unidade muito pequena para fins práticos, motivo pelo qual nesse sistema adota-se o *cavalo-vapor* (horse-power, hp), unidade muito maior. O próprio Watt havia sugerido como unidade de potência a que fosse liberada por um cavalo que funcionasse como motor. O cavalo-vapor vale 550 lb·ft/s ou aproximadamente, 746 Watts (cerca de 3/4 do quilo-watt). Um cavalo não agüentaria por muito tempo realizar trabalho a essa taxa.

## 7-7

### POTÊNCIA

O trabalho pode ser expresso, também, em unidades de potência  $\times$  tempo, de onde deriva o termo *quilowatt-hora* (kWh), por exemplo. O quilowatt-hora é o trabalho realizado em uma hora por um agente que trabalha à taxa constante de 1 kW.

Um automóvel, à potência de 75 kW (100 hp) move-se à velocidade uniforme de 90 km/h. Qual o empuxo para a frente exercido pelo motor no carro?

### EXEMPLO 7

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}}{t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

O empuxo  $\mathbf{F}$  para a frente tem o sentido do movimento, dado por  $\mathbf{v}$ ; portanto,

$$P = Fv,$$

e

$$F = \frac{P}{v} = \frac{75 \text{ kW}}{25 \text{ m/s}} = 3 \times 10^3 \text{ N}.$$

Por que o carro não se acelera?

1. Cite outras palavras, tais como *trabalho*, cujo significado vulgar é freqüentemente diverso de seu significado científico.
2. Suponha que três forças constantes atuem sobre uma partícula enquanto ela se movimenta de uma para outra posição. O trabalho produzido pela resultante dessas três forças, sobre a partícula, é igual à soma do trabalho produzido por cada uma das três forças, atuando separadamente?
3. O plano inclinado (ver Ex. 1) é uma máquina simples que nos capacita produzir trabalho com aplicação de uma força menor do que seria necessário em sua ausência. O mesmo se aplica à cunhã, à alavanca, ao parafuso, à roda dentada e à polia. Tais máquinas diminuem o trabalho?
4. Em um "cabo de guerra" uma equipe está lentamente cedendo terreno à outra. Que trabalho está sendo produzido e por quem?
5. O trabalho produzido por forças de atrito é sempre negativo. Pode explicar por quê?
6. Um homem exerce uma força constante sobre uma parede fixa e não realiza nenhum trabalho mecânico sobre ela. Por que ele se cansa nessa operação?
7. Você ergue uma bola de boliche do chão e coloca-a sobre a mesa. Duas forças atuam nela: seu peso  $-mg$  e a força ascendente que você exerce  $+mg$ . Essas duas forças anulam-se mutuamente de sorte que parece que nenhum trabalho é produzido. Por outro lado, você sabe que algum trabalho está sendo feito. O que está errado?
8. Você parte uma mola na metade. Qual é a relação entre a constante  $k$  da mola original e a constante para cada uma das metades?
9. As molas  $A$  e  $B$  são idênticas, exceto pelo fato de que  $A$  é mais dura que  $B$ , isto é,  $k_A > k_B$ . Em qual das molas realiza-se maior trabalho se (a) elas são distendidas igualmente, (b) elas são distendidas pela mesma força?
10. A energia cinética depende da direção do movimento envolvido? Pode ela ser negativa?
11. O trabalho produzido pela força resultante é sempre igual à variação da energia cinética. Pode acontecer que o trabalho realizado por uma das forças componentes sozinha seja maior que a variação da energia cinética? Em caso afirmativo, dê exemplos.
12. Você joga uma bola verticalmente no ar e a agarra. Usando o teorema do trabalho-energia o que se pode dizer qualitativamente sobre a trajetória livre de ida e volta? Responda primeiro a pergunta desprezando a resistência do ar e a seguir, levando-a em consideração.
13. Quando duas crianças, no interior de um trem, jogam bola, a energia cinética da bola depende da velocidade do trem? O referencial escolhido influi em

## questões

- sua resposta? Em caso afirmativo, você diria que a energia cinética é uma grandeza escalar? (Ver Probl. 21.)
- O trabalho realizado pela força resultante que atua em uma partícula depende do referencial (inercial) do observador? A variação da energia cinética depende?
  - Um homem, em um bote, rema contra a corrente, ficando em repouso com relação à margem. (a) O homem realiza trabalho? (b) Se ele deixar de remar e descer com a corrente, realiza-se sobre ele algum trabalho?
  - A potência necessária para suspender uma caixa até uma plataforma, depende da rapidez com que ela foi levantada?
  - Você transfere alguns livros da prateleira de uma estante para outra mais alta no tempo  $t$ . O trabalho que você realiza depende (a) da massa dos livros, (b) do seu peso, (c) da altura da prateleira superior acima do solo, (d) do tempo  $t$  e (e) do modo como você suspende os livros, lateralmente ou diretamente para cima?
  - Ouvimos falar muito sobre "crise de energia". Seria mais apropriada a expressão "crise de potência"?

## SEÇÃO 7-2

**problemas**

- Um homem empurra um bloco de 50 kg aplicando-lhe uma força inclinada de  $60^\circ$  em relação à horizontal. O coeficiente de atrito cinético vale 0,20. O corpo se desloca em linha reta. O trabalho realizado pela força aplicada pelo homem vale 800 J, para um deslocamento de 5 m. Calcule o módulo da força aplicada.
- Considere os mesmos dados do Exemplo 2, usando, porém, o valor  $\phi = 30^\circ$ . Calcule: (a) o trabalho da força  $P$ , (b) o trabalho da força de atrito.  
Resposta: (a) 87,8 J. (b) - 87,8 J.
- Um bloco de massa igual a 4,0 kg é puxado com velocidade constante através de uma distância  $d = 5,0$  m ao longo de um assoalho por uma corda que exerce uma força constante de módulo  $F = 8$  N formando um ângulo de  $20^\circ$  com a horizontal. Calcule: (a) o trabalho realizado pela corda sobre o bloco, (b) o trabalho realizado pela força de atrito sobre o bloco, (c) o trabalho total realizado sobre o bloco.
- Um bloco de gelo de massa igual a 30 kg desliza sobre um plano inclinado de comprimento igual a 2,0 m e de altura igual a 1,0 m. Um força o bloco de gelo para cima, paralelamente ao plano inclinado, de tal modo que ele desce com velocidade constante. O coeficiente de atrito entre o gelo e o plano vale 0,10. Determine: (a) o módulo da força exercida pelo homem, (b) o trabalho realizado pelo homem sobre o bloco, (c) o trabalho realizado pela força da gravidade sobre o bloco, (d) o trabalho realizado pelo atrito sobre o bloco, (e) o trabalho realizado pela força resultante sobre o bloco, (f) a variação da energia cinética.  
Resposta: (a) 121,7 N. (b) - 243,4 N. (c) 294 N. (d) - 51 N. (e) nulo, (f) nula.
- Um caixote possui massa igual a 150 kg. O caixote é suspenso por uma corda de 12 m de comprimento e a seguir deslocado lateralmente de 1,2 m em relação à vertical e mantido nesta posição. (a) Que força aplicada ao longo do arco é necessária para manter o caixote nesta posição? (b) Realiza-se algum trabalho para mantê-lo aí? (c) Realizou-se algum trabalho para deslocá-lo? Em caso afirmativo, qual o valor deste trabalho?
- Uma corda é usada para baixar verticalmente um bloco de massa  $m$  até uma distância  $d$  com uma aceleração constante e igual a  $g/5$ . Calcule o trabalho realizado pela tensão da corda sobre o bloco.  
Resposta:  $-4mgd/5$ .

## SEÇÃO 7-3

- (a) Avalie o trabalho produzido pela força representada no gráfico da Fig. 7-9 ao deslocar uma partícula desde  $x = 1$  m até  $x = 2,5$  m. (b) A curva é dada analiticamente pela equação  $F = a/x^2$ , onde  $a = 9 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ . Mostre como se determina analiticamente o trabalho realizado pelas regras de integração. (c) Faça a integral de  $x = 1$  m até  $x = 2,5$  m e compare o resultado com o obtido no item (a).
- Uma única força atua sobre um corpo em movimento retilíneo. O gráfico da velocidade do corpo em função do tempo é indicado na Fig. 7-10. Determine o trabalho realizado pela força resultante sobre o corpo em cada um dos intervalos indicados. Basta dizer se o trabalho é positivo, negativo ou nulo.  
Resposta: AB: +. BC: nulo. CD: -. DE: +

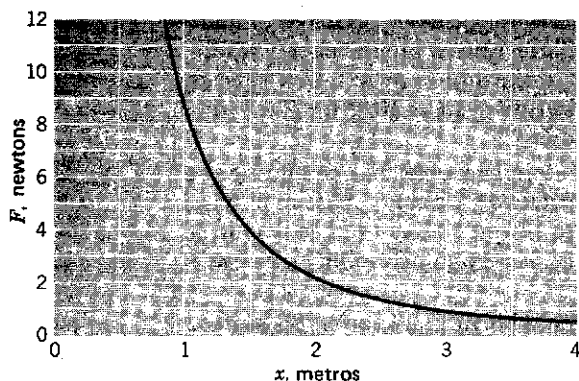


figura 7-9

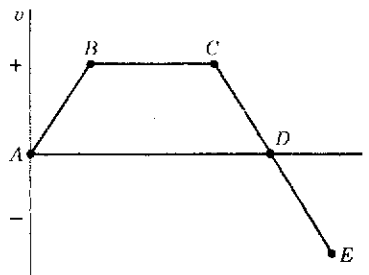


figura 7-10

## SEÇÃO 7-4

9. Quando a força  $F$  for variável, o trabalho realizado por esta força deve ser determinado pela integral de  $dW = F \cdot dx$ , sendo a integração realizada sobre a trajetória curvilínea descrita pela partícula. Deduza uma expressão geral (válida em qualquer número de dimensões) para relacionar o trabalho realizado com a velocidade inicial  $v_0$  e com a velocidade final  $v$  da partícula (nos extremos da trajetória usada para a determinação do trabalho). Mostre que o trabalho é dado pela *variação da energia cinética* nos extremos da trajetória considerada.

## SEÇÃO 7-5

10. A energia cinética de um corpo de 5 kg de massa é igual a 1 000 J. De que altura este corpo deveria cair para que sua energia cinética atingisse este valor?  
Resposta: 20,4 m.
11. Um atleta possui a metade da energia cinética de um garoto que possui metade da massa do atleta. O homem aumenta sua velocidade de 2,0 m/s passando a ter o dobro da energia cinética do garoto. Calcule: (a) a velocidade inicial do garoto e do atleta, (b) a variação da energia cinética do atleta e o trabalho realizado por seus músculos.
12. Um foguete de massa igual a  $5 \times 10^4$  kg deve atingir uma velocidade de escape de 11,2 km/s para que possa fugir à atração terrestre. Qual deve ser a quantidade mínima de energia necessária para levar o foguete desde o repouso até esta velocidade?  
Resposta:  $3,14 \times 10^{12}$  J.
13. Um próton, partindo do repouso, é acelerado por um ciclotron até a velocidade de  $2,0 \times 10^7$  m/s. Sabendo que um elétron-volt vale  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19}$  J, calcule o trabalho em eV necessário para acelerar o próton até esta velocidade.
14. Um projétil de 50 g possui velocidade inicial de 500 m/s. O projétil perfura um bloco de madeira e penetra 12 cm antes de parar. Calcule a força média exercida pelo projétil sobre o bloco de madeira.  
Resposta:  $5,2 \times 10^4$  N.
15. Um garoto chuta uma bola com uma velocidade inicial de 20 m/s. Um goleiro, no mesmo nível, agarra a bola quando a velocidade se reduziu para 10 m/s. Calcule o trabalho realizado pela resistência do ar. A massa da bola vale 200 g.
16. Um automóvel se desloca em linha reta com velocidade constante igual a 60 km/h. Calcule: (a) a variação da energia cinética em 100 m, (b) o trabalho total da força resultante sobre o automóvel em 100 m, (c) o trabalho da força motriz sabendo que durante 100 m de percurso a força motriz vale 7 000 N.  
Resposta: (a) 0. (b) 0. (c)  $7 \times 10^5$  J.
17. Partindo das *considerações sobre trabalho e energia cinética*, mostre que a distância mínima necessária para deter um carro de massa  $m$  e que se move com velocidade  $v$  é dada por  $v^2/2\mu_c g$ , onde  $\mu_c$  é o coeficiente de atrito cinético entre os pneus e a estrada. (Ver o Ex. 2 do Cap. 6 e as Questões 3, 4, 5 do Cap. 8).
18. Um bloco de 4,0 kg move-se em linha reta sobre uma superfície horizontal sem atrito, sob a influência de uma força que varia em função da posição de acordo com o gráfico indicado na Fig. 7-11. (a) Calcule o trabalho realizado pela força quando o bloco parte da origem e atinge a posição  $x = 8,0$  m. (b) Se a velocidade da partícula ao passar pela origem era de 3,0 m/s, calcule o módulo da velocidade da partícula quando ela passar pelo ponto  $x = 8,0$  m.  
Resposta: (a) 25 J. (b) 4,1 m/s.

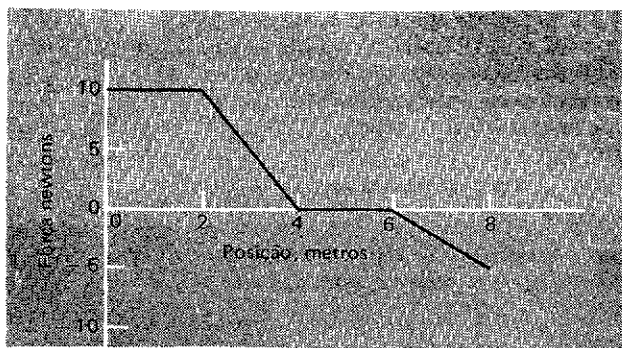


figura 7-11

19. Um helicóptero é usado para erguer do oceano um astronauta de massa igual a 70 kg até uma altura de 17 m, numa direção vertical, por meio de um cabo. A aceleração do astronauta vale  $g/8$ . (a) Calcule o trabalho realizado pelo helicóptero sobre o astronauta. (b) Qual é o trabalho realizado pela força gravitacional sobre o astronauta?
20. Considere a Fig. 7-12. O bloco de massa  $M$  possui velocidade inicial  $v_0$  dirigida da esquerda para a direita e sua posição é tal que a mola não exerce nenhuma força sobre ele, isto é, a mola não está comprimida nem esticada. O bloco percorre uma distância  $l$  para a direita, antes de parar na posição pontilhada. A constante da mola é  $k$  e o coeficiente de atrito cinético entre a mesa e o bloco vale  $\mu_c$ . Determine para o deslocamento  $l$  da massa  $M$ : (a) o trabalho realizado pela força de atrito, (b) o trabalho realizado pela força elástica da mola, (c) o trabalho realizado pelo peso do bloco, (d) o trabalho realizado pela reação normal da mesa sobre o bloco, (e) o trabalho total realizado sobre o bloco. (f) Determine a distância  $l$  em função das grandezas pertinentes usando o teorema que relaciona o trabalho com a energia cinética.

Resposta: (a)  $-\mu_c Mg l$ . (b)  $-kl^2/2$ . (c) 0. (d) 0. (e)  $-(\mu_c Mg l + kl^2/2)$ .

$$(f) l = (\sqrt{\mu_c^2 M^2 g^2 + v_0^2 kM} - \mu_c Mg)/k.$$

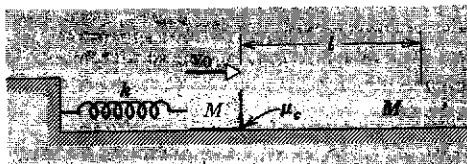


figura 7-12

21. (a) Um corpo de 0,80 kg colocado sobre uma mesa horizontal é ligado a um fio que passa através de um orifício da mesa, no centro do círculo ao longo do qual o corpo se move com velocidade constante. Se o raio do círculo vale 0,50 m e se a velocidade vale 8,0 m/s, qual é a tração do fio? (b) Reduzindo-se o raio do fio para 3,0 m, a tração fica multiplicada por 4,0. Calcule o trabalho realizado pelo fio durante a redução do raio.
22. Trabalho e energia cinética em referenciais móveis. Considere um observador em repouso em relação ao solo e um sistema de coordenadas fixo no solo. Considere outro observador no interior de um trem que se move com velocidade constante  $u$  em relação ao sistema fixo no solo. Uma partícula de massa  $m$ , inicialmente em repouso em relação ao sistema fixo no solo, sofre a ação de uma força constante, paralela e com o mesmo sentido da velocidade  $u$ . (a) Qual é a velocidade da partícula em relação ao sistema fixo? (b) Qual é a velocidade da partícula em relação ao sistema solidário com o trem? (c) A aceleração é a mesma nos dois sistemas? (d) A energia cinética medida pelo observador fixo no solo é igual à energia cinética medida pelo observador no interior do trem? (e) O teorema que afirma que o "trabalho realizado é dado pela variação da energia cinética" continua válido nos dois sistemas? (f) Calcule o trabalho no sistema fixo no solo. (g) Calcule o trabalho em relação ao sistema do trem.

Resposta: (a)  $at$ . (b)  $at - u$ . (c) Sim. (d) Não. (e) Sim.

$$(f) (1/2)ma^2 t^2. (g) (ma^2 t^2/2) - ma ut.$$

### SEÇÃO 7-7

23. Uma garota de massa igual a 50 kg sobe uma rampa, cuja elevação total é de 4,0 m, em 3,0 s. Qual é a potência média que ela desenvolve?

24. Uma cachoeira despeja um volume  $V = 1,2 \times 10^4 \text{ m}^3$  de água em cada intervalo de tempo  $t = 2 \text{ s}$ . A altura da cachoeira vale  $h = 100 \text{ m}$ . (a) Obtenha uma expressão para o cálculo da potência teórica disponível. (b) Supondo que quatro quintos desta potência possa ser transformada em eletricidade por meio de um sistema gerador hidroelétrico, calcule a potência elétrica gerada. A densidade da água vale  $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ .  
*Resposta:* (a)  $P_0 = \rho ghV/t$ . (b)  $4,7 \times 10^9 \text{ W}$ .
25. Um elevador de carga possui massa de  $5,0 \times 10^3 \text{ kg}$ . Ele sobe 200 m em 25 s. Calcule a potência média desenvolvida pelo cabo do elevador.
26. Um cavalo puxa horizontalmente uma carreta com uma força de 200 N. A força forma um ângulo de  $30^\circ$  acima da horizontal. A carreta se move com velocidade de 8 km/h. Calcule a potência média desenvolvida pelo cavalo.  
*Resposta:* 385 W.
27. Calcule a potência desenvolvida por uma máquina de amolar cuja roda possui raio igual a 25 cm e gira a 3,0 r.p.s. quando a ferramenta a ser amolada é mantida em posição por uma força de 190 N. O coeficiente de atrito entre a ferramenta e a roda vale 0,40.
28. Um foguete com massa igual a  $7,0 \times 10^4 \text{ kg}$  adquire uma velocidade de  $1,0 \times 10^4 \text{ km/h}$  em 1,2 min após o lançamento. Calcule a potência média desenvolvida pelo foguete neste intervalo de tempo.  
*Resposta:*  $3,7 \times 10^9 \text{ J}$ .
29. Uma força resultante de 3,0 N atua sobre uma partícula que inicialmente está em repouso. Calcule: (a) o trabalho realizado pela força no primeiro, no segundo e no terceiro segundo e (b) a potência instantânea no terceiro segundo.
30. Uma força atua sobre uma partícula de 2,5 kg de tal forma que a posição da partícula varia em função do tempo de acordo com a expressão:  $x = 3t^4 - 2t^3 - t^2$ , onde  $x$  é expresso em metros e  $t$  em segundos. Calcule: (a) o trabalho realizado pela força nos 3 segundos iniciais, (b) a potência instantânea para  $t = 2,0 \text{ s}$ .  
*Resposta:* (a)  $8,7 \times 10^4 \text{ J}$ . (b)  $2,0 \times 10^4 \text{ W}$ .
31. A força necessária para receber um barco com velocidade constante é proporcional à velocidade escalar. Se 10 Hp (7 500 W) são consumidos para rebocar um certo barco à velocidade escalar de 6 km/h, que potência será necessária para rebocá-lo a uma velocidade escalar de 12 km/h?
32. Um corpo de massa  $m$  acelera-se uniformemente, partindo do repouso até a velocidade  $v_f$  no tempo  $t_f$ . (a) Determine o trabalho realizado sobre o corpo, em função de  $t$ ,  $v_f$  e  $t_f$ . (b) Obtenha a potência instantânea fornecida ao corpo, em função do tempo. (c) Qual a potência fornecida instantaneamente para  $t = 3 \text{ s}$  a um corpo de 1 500 kg que é acelerado de 0 até 100 km/h em 10 segundos.  
*Resposta:* (a)  $mv_f^2 t^2 / (2t_f^2)$ . (b)  $mv_f^2 t / t_f^2$ . (c)  $3,47 \times 10^4 \text{ W}$ .
33. Uma carreta sobe uma estrada cuja inclinação em relação à horizontal é de  $30^\circ$ , a uma velocidade de 30 km/h. A força resistiva é igual a 0,75 do peso da carreta. Que velocidade teria a mesma carreta se descesse a estrada com a mesma potência?
34. Uma locomotiva possui uma potência máxima de  $1,5 \times 10^6 \text{ W}$ . Esta locomotiva acelera um trem com 1 m/s de velocidade até 2,5 m/s, com potência máxima, num tempo de 30 s. (a) Desprezando a força de atrito, calcule a massa do trem. (b) Ache a velocidade do trem em função do tempo durante o intervalo.  
*Resposta:* (a)  $1,7 \times 10^7 \text{ kg}$ . (b)  $(1 + 0,18 t)^{1/2}$ .

# 8

## a conservação da energia

No Cap. 7 o teorema do trabalho e energia foi deduzido a partir da segunda lei de Newton para o movimento. Esse teorema diz que o trabalho realizado pela resultante  $\mathbf{F}$  das forças que agem na partícula, quando esta se desloca de um ponto a outro, é igual à variação  $\Delta K$  da energia cinética da partícula, ou seja,

$$W = \Delta K. \quad (8-1)$$

Muitas vezes várias forças agem na partícula; a resultante  $\mathbf{F}$  dessas forças é a sua soma vetorial, isto é,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n$ , supondo que sejam  $n$  as forças atuantes. O trabalho realizado pela força resultante  $\mathbf{F}$  é a soma algébrica do trabalho realizado pelas forças individuais, ou seja,  $W = W_1 + W_2 + \dots + W_n$ . Pode-se, portanto, escrever o teorema do trabalho e energia (Eq. 8-1) sob a forma

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n = \Delta K. \quad (8-2)$$

Neste capítulo serão considerados sistemas em que uma única partícula está sob a ação de vários tipos de forças e calcularemos os trabalhos  $W_1$ ,  $W_2$  etc. destas forças, isto nos levará a definir diferentes espécies de energia, tais como energia potencial e energia térmica. O processo culmina com a formulação de um dos grandes princípios da ciência, o princípio de conservação da energia.

Inicialmente, devem distinguir-se dois tipos de forças, as *conservativas* e as *não conservativas*. Consideraremos um exemplo de cada tipo e discutiremos cada um de pontos de vista diferentes, embora relacionados.

### 8-1 INTRODUÇÃO

### 8-2 FORÇAS CONSERVATIVAS



Imaginemos uma mola presa por uma extremidade a uma parede (Fig. 8-1). Suponhamos lançado um bloco de massa  $m$ , com velocidade  $v$ , diretamente contra a mola; supõe-se que o plano horizontal seja liso e que a mola seja ideal, isto é, que ela obedeça à lei de Hooke (Eq. 7-7)

$$F = -kx, \quad (8-3)$$

sendo  $F$  a força exercida pela mola quando seu extremo livre for deslocado de uma distância  $x$ ; admitimos, também, que a massa da mola seja tão pequena, comparada à do bloco, que possamos ignorar a energia cinética da mola. Portanto, no sistema (massa + mola) toda a energia cinética está concentrada na massa.

Depois que o bloco alcança a mola, a velocidade  $v$ , portanto, a energia cinética do bloco decresce até que finalmente o bloco pára, pela ação retardadora da força elástica da mola, como indica a Fig. 8-1b. O bloco inverte, então, seu movimento, à proporção que a mola comprimida se alonga. Ele adquire velocidade e energia cinética  $v$ , quando alcançar de novo a posição de contato inicial com a mola, verifica-se que sua velocidade e sua energia cinética são as mesmas que possuía originalmente; variou apenas, o sentido do movimento. O bloco perde energia cinética durante uma parte de seu movimento, mas ela é recuperada completamente durante a outra parte, quando o bloco retorna ao ponto de partida (Fig. 8-1c).

Interpretamos a energia cinética de um corpo como a capacidade que ele possui de realizar trabalho em virtude de seu movimento. Está claro que, ao fim do percurso de ida e volta, a capacidade do bloco da Fig. 8-1 de realizar trabalho permanece a mesma; ela foi *conservada*. A força elástica exercida por uma mola ideal e outras forças que atuam do mesmo modo, são chamadas *conservativas*. A força de gravidade também é conservativa; se lançarmos um corpo verticalmente para cima, desprezando a resistência do ar, ele retornará à nossa mão com a mesma energia cinética que possuía ao ser lançado.

Se a partícula, sob a ação de uma ou mais forças, retorna à sua posição inicial com energia cinética maior ou menor que a original, isso significa que, em um percurso fechado, sua capacidade de realizar trabalho foi modificada. Neste caso, a capacidade de realizar trabalho *não* foi conservada e pelo menos uma das forças atuantes é *não conservativa*.

Ilustraremos o conceito de força não conservativa considerando que as superfícies do bloco e do plano na Fig. 8-1 não sejam lisas, e, portanto, que o plano exerça sobre o bloco uma força de atrito  $F$ . A força de atrito opõe-se ao movimento do bloco, não importa em que sentido ele se mova, verificando-se que o bloco retorna ao ponto de partida com *menor* energia cinética do que possuía originalmente. Desde que foi mostrado, na primeira experiência que a força da mola é conservativa, devemos atribuir este novo resultado à ação da força de atrito.<sup>1</sup> Dizemos que essa força, e quaisquer outras que atuam do mesmo modo, são *dissipativas*. A força de indução em um betatron (Seç. 35-6) também é uma força não conservativa. Em lugar de dissipar energia cinética, porém, esta é gerada por tal força,

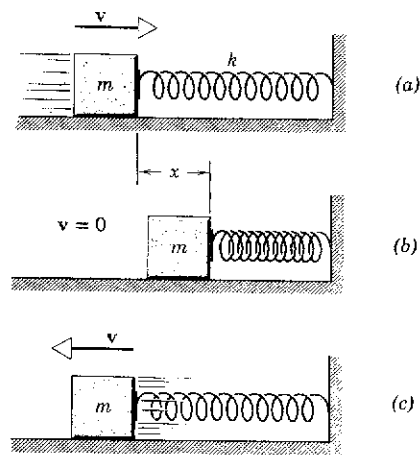


figura 8-1

(a) Um bloco de massa  $m$  é projetado com velocidade  $v$  contra uma mola. (b) O bloco pára, pela ação da força da mola. (c) O bloco recupera sua velocidade inicial  $v$  quando retorna ao seu ponto de partida.

<sup>1</sup> Realmente duas outras forças atuam no bloco da Fig. 8-1: seu peso  $W$  e a força normal  $N$  exercida pelo plano. Como ambas são perpendiculares ao movimento, elas não podem alterar a energia cinética do bloco e portanto não entram em nossa discussão.

de modo que um elétron que percorra uma órbita circular em um betatron retornará à sua posição inicial com *maior* energia cinética do que possuía originalmente. Em um percurso fechado o elétron adquire energia cinética, como deve ser para que o betatron seja eficaz.

Podemos definir as forças conservativas de outro ponto de vista, considerando o trabalho que ela realiza sobre a partícula. No primeiro exemplo acima considerado, era negativo o trabalho realizado sobre o bloco pela força elástica da mola, enquanto esta estava sendo comprimida, pois a força exercida sobre o bloco pela mola (para a esquerda na Fig. 8-1a) tinha sentido oposto ao do deslocamento do bloco (para a direita na Fig. 8-1a). Enquanto a mola estava sendo alongada, o trabalho realizado sobre o bloco pela força elástica da mola era positivo (força e deslocamento com o mesmo sentido). No primeiro exemplo, o trabalho resultante realizado sobre o bloco pela força elástica da mola, em um percurso fechado, era nulo.

No segundo exemplo, considerou-se o efeito da força de atrito. O trabalho realizado sobre o bloco por esta força, em cada trecho do percurso, era negativo, pois a força de atrito tem sempre sentido oposto ao do movimento. Então, o trabalho realizado pela força de atrito, em um percurso fechado, não era zero. Em geral, portanto, *uma força é conservativa se for nulo o trabalho realizado por ela sobre uma partícula que descreve qualquer percurso fechado. Uma força será não conservativa se o trabalho realizado por ela sobre a partícula, ao longo de um percurso fechado, for diferente de zero.*

O teorema do trabalho e energia mostra que este segundo modo de definir as forças conservativas e não conservativas é completamente equivalente à primeira definição. Se não houver variação na energia cinética de uma partícula, que descreve um percurso fechado qualquer, então  $\Delta K = 0$  e, pela Eq. 8-1,  $W = 0$  e a resultante das forças atuantes deve ser conservativa. De modo semelhante, se  $\Delta K \neq 0$ , de acordo com a Eq. 8-1,  $W \neq 0$  e pelo menos uma das forças atuantes deve ser não conservativa.

Pode-se considerar essa questão um pouco mais pormenorizadamente. Quando existe atrito no sistema da Fig. 8-1, quatro forças agem no bloco, a resultante delas sendo

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_m + \mathbf{W} + \mathbf{N} + \mathbf{f},$$

sendo  $\mathbf{F}_m$  a força elástica da mola,  $\mathbf{W}$  o peso do bloco,  $\mathbf{N}$  a força normal exercida pelo plano e a força de atrito  $\mathbf{f}$ . Pode-se escrever a Eq. 8-2, que exprime o teorema do trabalho e energia, sob a forma

$$W_m + W_w + W_N + W_f = \Delta K,$$

os termos do primeiro membro correspondendo ao trabalho realizado sobre o bloco pelas quatro forças indicadas. Vimos que, para um percurso fechado  $W_m = 0$ ; de modo semelhante  $W_w = W_N = 0$ , por se tratar do trabalho de forças perpendiculares ao deslocamento do bloco. Portanto, a variação da energia cinética é inteiramente devida a  $W_f$ , o trabalho realizado pela força de atrito.

A diferença entre forças conservativas e não conservativas pode ser considerada sob um terceiro aspecto. Suponha-se que uma partícula se mova desde *a* até *b*, ao longo da trajetória 1, voltando para *a* ao longo da trajetória 2 (Fig. 8-2a). Várias forças podem agir na partícula durante esse percurso, considere-se cada força

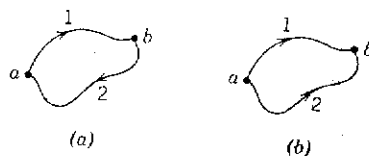


figura 8-2

separadamente. Se a força considerada for conservativa, o trabalho por ela realizado sobre a partícula, em um percurso fechado, deve ser nulo:

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0,$$

que pode ser escrita como

$$W_{ab,1} = -W_{ba,2},$$

ou seja, o trabalho realizado ao ir de  $a$  até  $b$ , ao longo da trajetória 1, tem sinal oposto ao do trabalho produzido ao retornar de  $b$  para  $a$  ao longo da trajetória 2. No entanto, se a partícula for de  $a$  para  $b$  ao longo da trajetória 2, como indica a Fig. 8-2b, simplesmente foi invertido o sentido do movimento precedente ao longo de 2, de forma que

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2},$$

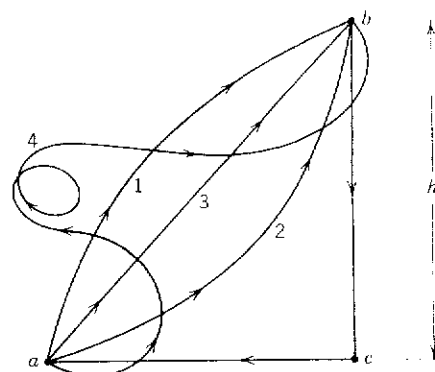
portanto,

$$W_{ab,1} = W_{ab,2},$$

significando que o trabalho realizado sobre a partícula por uma força conservativa, quando a partícula se move de  $a$  até  $b$ , é o mesmo para ambas as trajetórias.

As trajetórias 1 e 2 podem ser quaisquer, desde que liguem os dois pontos  $a$  e  $b$ ; estes também podem ser escolhidos arbitrariamente. Obteremos sempre o mesmo resultado, se a força for conservativa. Portanto, tem-se uma definição equivalente para forças conservativas e não conservativas. *Uma força é conservativa se o trabalho realizado por ela sobre uma partícula que se move entre dois pontos depende somente destes pontos e não da trajetória percorrida. Uma força é não conservativa se o trabalho realizado por ela sobre uma partícula que se desloca entre dois pontos depende da trajetória seguida entre os pontos.*

Para ilustrar essa terceira definição (equivalente) de força conservativa, **considere-se** um segundo tipo, a força da gravidade. Suponha-se que elevemos com a mão uma pedra de massa  $m$  até a altura  $h$  acima do solo, indo de  $a$  para  $b$  ao longo de diferentes trajetórias (Fig. 8-3). Já sabemos que, em um percurso fechado, o trabalho total realizado por uma força conservativa é nulo, e que a força gravitacional é conservativa. O trabalho realizado pela gravidade sobre a pedra, ao longo da trajetória de retorno  $bca$ , é simplesmente  $mgh$ . Portanto, como a gravidade é uma força conservativa, o trabalho realizado por ela sobre a pedra, ao longo de qualquer trajetória de  $a$  até  $b$ , deverá ser  $-mgh$ , pois somente se isto for verdadeiro o trabalho total realizado pela gravidade em um percurso fechado será nulo. Isso significa que a gravidade realiza trabalho negativo sobre a pedra, ao movê-la de  $a$  até  $b$ , ou, dito de outro modo, **deve realizar-se** trabalho *contra* a gravidade ao longo de qualquer das trajetórias  $ab$ . O estudante pode concluir diretamente que o trabalho realizado pela gravidade, ao longo de qualquer trajetória  $ab$ , é igual a  $-mgh$ . Com efeito, qualquer dessas trajetórias pode ser decomposta em deslocamentos infinitesimais, alternadamente horizontais e verticais; nenhum trabalho é realizado pela gravidade nos deslocamentos horizontais e o deslocamento vertical é o mesmo em todos os casos. Portanto, o trabalho reali-



**figura 8-3**  
Uma pedra é erguida de  $a$  para  $b$  por várias trajetórias 1, 2, 3 e 4.

zado pela gravidade sobre a pedra que se move de  $a$  para  $b$  depende apenas das posições  $a$  e  $b$  e não da trajetória seguida.

Para uma força não conservativa, tal como o atrito, o trabalho realizado *não* é independente da trajetória seguida entre os dois pontos. É necessário apenas indicar que se empurrarmos um bloco sobre uma superfície áspera entre dois pontos  $a$  e  $b$ , ao longo de diferentes trajetórias, a distância percorrida varia e, portanto, também o trabalho realizado pela força de atrito, que depende da trajetória.

As definições dadas para força conservativa são equivalentes entre si. Qual delas a usar, é questão de conveniência. A definição em termos de percurso fechado mostra claramente que há conservação da energia cinética quando atuam forças conservativas. No entanto, para desenvolver o conceito de energia potencial, é preferível o enunciado em termos de independência da trajetória.

Nesta seção focalizaremos a atenção não sobre o bloco móvel da Fig. 8-1, mas no sistema (isolado) constituído do bloco e da mola. Em lugar de dizer que o bloco se move, é preferível dizer, sob esse ponto de vista, que a configuração do sistema está variando. Medem-se tanto a posição do bloco como a configuração do sistema, a qualquer instante, pelo mesmo parâmetro  $x$ , ou seja, o deslocamento da extremidade livre da mola em relação à sua posição normal, correspondente à mola não alongada. A energia cinética do sistema é igual à do bloco, pois admitimos que a massa da mola fosse nula.

Vimos que a energia cinética do sistema da Fig. 8-1 decresce durante a primeira parte do movimento, anula-se e depois aumenta durante a segunda parte. Se não houver atrito, a energia cinética do sistema, quando retomar sua configuração inicial, retorna a seu valor inicial.

Nessas circunstâncias (atuando apenas forças conservativas), é razoável introduzir o conceito de *energia de configuração* ou *energia potencial*  $U$ , e dizer que, se a energia cinética  $K$  do sistema variar de  $\Delta K$ , quando variar a sua configuração (isto é, quando o bloco se move no sistema da Fig. 8-1), então a energia potencial  $U$  do sistema deve variar de um valor igual e oposto, de forma que a soma das duas variações seja nula:

$$\Delta K + \Delta U = 0. \quad (8-4a)$$

Alternativamente, pode-se dizer que qualquer variação na energia cinética  $K$  do sistema é compensada por uma variação igual e posta na sua energia potencial  $U$ , de maneira que a soma de ambas permanece constante durante todo o movimento:

$$K + U = \text{constante}. \quad (8-4b)$$

A energia potencial de um sistema representa uma forma de energia armazenada que pode ser completamente recuperada e convertida em energia cinética. Não podemos associar energia potencial com uma força não conservativa tal como a força de atrito, porque a energia cinética de um sistema em que tais forças atuam *não* retorna a seu valor inicial, quando o sistema recupera sua configuração inicial.

As Eqs. 8-4 aplicam-se a um sistema fechado de objetos que interagem, tal como o sistema massa + mola da Fig. 8-1. Neste

## 8-3

## ENERGIA POTENCIAL

exemplo, como consideramos a mola como efetivamente sem massa, a energia cinética pode ser associada, apenas à massa móvel. O bloco diminui (ou aumenta) sua velocidade porque sobre ele a mola exerce uma força; é conveniente, portanto, associar a energia potencial do sistema a essa força, ou seja, à mola. Portanto, nesse caso simples, dizemos que a energia cinética, localizada no bloco, decresce durante a primeira parte do movimento, enquanto a energia potencial, localizada na mola, aumenta nessa fase.<sup>2</sup>

As Eqs. 8-4 são essencialmente uma contabilidade de energia. Tal como o conceito de energia potencial, entretanto, elas não possuem significado real até que saibamos calcular  $U$  em função da configuração do sistema em que atuam as forças conservativas; no exemplo da Fig. 8-1 isto significa que devemos conseguir calcular  $U(x)$ , sendo  $x$  o deslocamento da mola.

Refinemos nosso conceito de energia potencial  $U$ , considerando o teorema do trabalho-energia,  $W = \Delta K$ , sendo  $W$  o trabalho da resultante das forças que agem na partícula quando ela se move desde  $a$  até  $b$ . Para simplificar, suponhamos que apenas uma força  $F$  age na partícula, o que é efetivamente verdadeiro no sistema da Fig. 8-1. Se  $F$  for conservativa, podemos combinar o teorema do trabalho-energia (Eq. 8-1) com a Eq. 8-4a, resultando

$$W = \Delta K = -\Delta U. \quad (8-5a)$$

O trabalho  $W$  realizado por uma força conservativa depende apenas dos pontos inicial e final do movimento, e não da trajetória percorrida entre eles. Tal força pode depender somente da posição da partícula, mas não da velocidade dela ou do tempo, por exemplo.

Para o movimento em uma dimensão, a Eq. 8-5a torna-se

$$\Delta U = -W = -\int_{x_0}^x F(x) dx, \quad (8-5b)$$

movendo-se a partícula de  $x_0$  a  $x$ . Esta equação mostra como calcular a variação  $\Delta U$  da energia potencial quando uma partícula, sob a ação de uma força conservativa  $F(x)$ , move-se do ponto  $a$ , descrito por  $x_0$ , ao ponto  $b$  descrito por  $x$ . A equação mostra que somente podemos calcular  $\Delta U$  se a força  $F$  depender apenas da posição da partícula (isto é, da configuração do sistema), o que equivale a dizer que a energia potencial tem significação apenas para forças conservativas.

Sabendo que a energia potencial  $U$  depende apenas da posição da partícula, a Eq. 8-4b pode escrever-se assim:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E \text{ (unidimensional), onde} \quad (8-6a)$$

$E$ , que permanece constante à proporção que a partícula se move, é denominada *energia mecânica total*. Suponhamos que a partícula se desloque do ponto  $a$  (onde sua posição é  $x_0$  e sua velocidade  $v_0$ ) ao ponto  $b$  (posição  $x$ , velocidade  $v$ ); a energia mecânica total  $E$  deve ser a mesma para cada configuração do sistema, quando a força for conservativa, ou seja, pela Eq. 8-6a:

<sup>2</sup> Assim como supusemos que a massa da mola fosse realmente nula, também admitimos que o bloco fosse rígido, isto é, efetivamente inelástico. Em um sistema mais geral, tanto a energia cinética como a potencial poderiam existir nas várias porções do sistema, em proporções variáveis com as modificações da configuração do sistema.

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0). \quad (8-6b)$$

O valor do segundo membro desta equação depende, apenas, da posição inicial  $x_0$  e da velocidade inicial  $v_0$ , que possuem valores definidos, e é, portanto, *constante durante o movimento*: é a energia mecânica total constante,  $E$ . Note que a força e aceleração não aparecem nessa equação, apenas a posição e a velocidade. As Eqs. 8-6 são denominadas freqüentemente de *lei de conservação da energia mecânica* para forças conservativas.

Em muitos problemas verifica-se que, embora algumas das forças não sejam conservativas, elas são tão pequenas que as podemos desprezar. Em tais casos, podemos usar as Eqs. 8-6 como boa aproximação. Por exemplo, a resistência do ar pode estar presente, mas se for muito pequeno o efeito dela sobre o movimento, poderemos ignorá-la.

Observe que, ao invés de partir das leis de Newton, pode-se simplificar a solução de problemas quando estão envolvidas apenas forças conservativas, partindo das Eqs. 8-6. Esta relação é deduzida das leis de Newton, naturalmente, porém, está um passo mais perto da solução (a assim chamada primeira integral do movimento). Muitas vezes resolvemos problemas sem analisar as forças ou sem escrever as leis de Newton, procurando em lugar disso, algo que seja constante no movimento: aqui a energia mecânica é constante e podem escrever-se as Eqs. 8-6 como primeiro passo.

Para o movimento unidimensional, pode-se também escrever a relação entre força e energia potencial (Eq. 8-5b) sob a forma

$$F(x) = - \frac{dU(x)}{dx}. \quad (8-7)$$

Para prová-lo, basta substituir esta expressão de  $F(x)$  na Eq. 8-5b e verificar que resulta uma identidade. A Eq. 8-7 permite interpretar de outro modo a energia potencial: *é uma função da posição tal que sua derivada, com o sinal oposto, é igual à força*.

Observe o estudante que escrevemos a grandeza  $U(x)$  nas Eqs. 8-6, embora saibamos calcular somente *variações* de  $U$  (pela Eq. 8-5b) e não a própria função  $U$ . Imaginemos que uma partícula se move desde  $a$  até  $b$ , ao longo do eixo  $Ox$ , e que uma única força conservativa  $F(x)$  atue nela. Para atribuir um valor a  $U_b$ , a energia potencial no ponto  $b$ , escrevamos

$$\Delta U = U_b - U_a,$$

ou seja (ver Eq. 8-5b),

$$U_b = \Delta U + U_a = - \int_{x_a}^{x_b} F(x) dx + U_a. \quad (8-8)$$

Não poderemos atribuir um valor a  $U_b$  até que o tenhamos atribuído também a  $U_a$ . Se  $b$  for uma posição arbitrária, qualquer  $x$ , de forma que  $U_b = U(x)$ , o significado de  $U(x)$  obtém-se escolhendo  $a$  como uma posição de referência conveniente, descrita por  $x_a = x_0$ , e atribuindo arbitrariamente um valor à energia potencial  $U_a = U(x_0)$  quando o corpo estiver naquele ponto. Portanto, a Eq. 8-8 torna-se

$$U(x) = - \int_{x_0}^x F(x) dx + U(x_0). \quad (8-9)$$

A energia potencial do corpo quando estiver na posição de referência, isto é,  $U(x_0)$ , usualmente recebe o valor zero.

Freqüentemente convém escolher o ponto de referência  $x_0$  como aquele em que a força atuante na partícula assume valor nulo. Por exemplo, a força elástica de uma mola é nula quando a mola está em seu comprimento normal (não distendida); em geral, diz-se que a energia potencial também é nula para essa condição. A atração da Terra sobre um corpo decresce quando ele se afasta do planeta, anulando-se a uma distância infinita. Usualmente a posição de referência é suposta no infinito e atribui-se o valor zero à energia potencial associada à força gravitacional naquela posição (ver Cap. 16). Até agora, todavia, interessou-nos mais a atração gravitacional sobre corpos que, comparados com o raio da Terra, nunca se afastam demasiadamente da superfície terrestre. Nesses casos, a força gravitacional ( $= mg$ ) é essencialmente constante e verifica-se ser conveniente considerar nula a energia potencial não a uma distância infinita, mas na superfície da Terra.

O efeito de alterar a coordenada do ponto de referência  $x_0$ , ou o valor arbitrário atribuído a  $U(x_0)$ , é apenas o de modificar  $U(x)$  de um valor constante. A presença de uma constante aditiva arbitrária na expressão da energia potencial (Eq. 8-9) não importa nas equações que escrevemos até agora, implicando em somar a mesma constante em ambos os membros da Eq. 8-6b, por exemplo, o que não a altera. Ademais, variando  $U(x)$  de uma constante aditiva, isto não modifica a força calculada pela Eq. 8-7, pois a derivada de uma constante é nula. Tudo isso significa simplesmente que a escolha de um ponto de referência para a energia potencial é irrelevante, pois estamos sempre interessados em *diferenças* de energia potencial, não no valor absoluto que ela possa ter em qualquer ponto.

Há também certa arbitrariedade ao especificar a energia cinética. Para determinar a velocidade, e portanto, a energia cinética, devemos especificar o referencial. A velocidade de um homem sentado em um trem é nula se o referencial for o trem, mas diferente de zero para um observador no solo, que vê o homem mover-se com velocidade uniforme. O valor da energia cinética depende do referencial usado pelo observador. Portanto, a coisa importante acerca da energia mecânica  $E$ , soma das energias cinética e potencial, *não* é seu valor efetivo durante um dado movimento (o que depende do observador) mas o fato de que este valor *não muda* durante o movimento, para qualquer observador particular, quando as forças são conservativas.

Calculemos, agora, a energia potencial no movimento retilíneo para dois tipos de forças conservativas, a da gravidade, em movimentos próximos à superfície da Terra, e a força restauradora de uma mola (ideal) alongada.

No caso da força de gravidade, o movimento retilíneo tem a direção vertical, ao longo do eixo  $Oy$ . Considera-se positivo o sentido de baixo para cima; a força de gravidade será, portanto, negativa, por estar orientada para baixo. Temos então  $F(y) = -mg$ , uma constante. A energia potencial na posição  $y$  obtém-se pela Eq. 8-9, a saber:

$$U(y) = - \int_0^y F(y) dy + U(0) = - \int_0^y (-mg) dy + U(0) = mgy + U(0).$$

## 8-4 SISTEMAS CONSERVATIVOS UNIDIMENSIONAIS

A energia potencial pode ser considerada nula quando  $y = 0$ , de forma que  $U(0) = 0$  e

$$U(y) = mgy. \quad (8-10)$$

A energia potencial gravitacional será então  $mgy$ . A relação  $F(y) = -dU/dy$  (Eq. 8-7) está satisfeita, pois,  $-d(mgy)/dy = -mg$ . Escolhamos  $y = 0$  na superfície da Terra, por conveniência, de forma que a energia potencial gravitacional é nula aí, e aumenta linearmente com a altura  $y$ .

Se compararmos os pontos  $y$  e  $y = 0$ , a conservação da energia cinética mais energia potencial, Eq. 8-6b, fornece-nos a relação

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

equivalente matematicamente ao resultado bem conhecido (Eq. 3-17),

$$v^2 = v_0^2 - 2gy.$$

Se a partícula se mover desde a altura  $h_1$  até a altura  $h_2$ , podemos usar a Eq. 8-6b para obter

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2.$$

Este resultado equivale ao do Ex. 5, Cap. 7. A energia mecânica total  $E$  mantém-se constante e é conservada durante o movimento, mesmo que a energia cinética e a energia potencial variem com a configuração do sistema (partícula + Terra).

Um segundo exemplo de força conservativa é o da força exercida por uma mola elástica sobre um corpo de massa  $m$  preso à sua extremidade e movendo-se numa superfície horizontal lisa. Se tomarmos  $x_0 = 0$  como a posição da extremidade da mola, quando não alongada, a força exercida sobre a massa, quando a mola é distendida de um comprimento  $x$  em relação a seu comprimento normal, é  $F = -kx$ . A energia potencial obtém-se da Eq. 8-9

$$U(x) = -\int_0^x F(x) dx + U(0) = -\int_0^x (-kx) dx + U(0).$$

Se escolhermos  $U(0) = 0$ , a energia potencial, assim como a força, será nula quando a mola estiver em seu comprimento normal e

$$U(x) = -\int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2}kx^2.$$

O resultado é o mesmo, quer alonguemos ou comprimamos a mola, isto é, quer  $x$  seja positivo ou negativo.

A relação  $F(x) = -dU/dx$  (Eq. 8-7) está satisfeita, pois  $-d(\frac{1}{2}kx^2)/dx = -kx$ . A energia potencial da mola será, portanto,

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad (8-11)$$

O corpo de massa  $m$  executará um movimento em que a energia total  $E$  se conserva (Fig. 8-4). Pela Eq. 8-6b tem-se

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Aqui  $v_0$  é a velocidade da partícula para  $x = 0$ . Fisicamente, consegue-se tal resultado distendendo a mola, por meio de uma força aplicada, até certa posição  $x_m$  e em seguida soltando-a. Note que



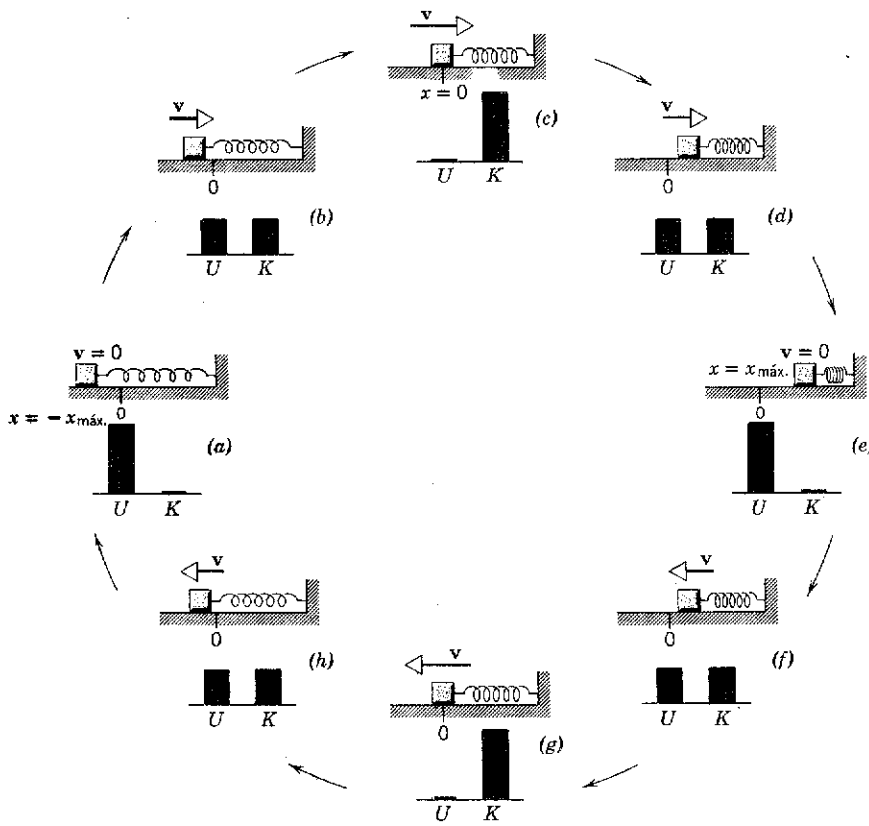


figura 8-4

Uma massa ligada a uma mola desliza para trás e para a frente, sobre uma superfície sem atrito. O sistema se chama oscilador harmônico. É ilustrado o movimento da massa durante um ciclo. Partindo da esquerda (9 horas) a massa está em sua posição esquerda extrema e momentaneamente em repouso:  $K = 0$ . A mola é distendida em seu comprimento máximo:  $U = U_{\text{máx}}$ .  $K$  e  $U$  são ilustrados pelos gráficos de barras, por baixo de cada um dos esquemas. Um oitavo de ciclo mais adiante (desenho seguinte), a massa adquire energia cinética, mas a mola já não está mais tão alongada;  $K$  e  $U$  têm, então, o mesmo valor,  $K = U = U_{\text{máx}}/2$ . Na parte mais alta, a mola não está nem alongada nem comprimida, e a velocidade é máxima.  $U = 0$ ,  $K = K_{\text{máx}} = U_{\text{máx}}$ . O ciclo continua, tendo a energia total  $E = K + U$  sempre igual:  $E = K_{\text{máx}} = U_{\text{máx}}$ . O oscilador harmônico será analisado mais profundamente no Cap. 15.

no ponto  $x = 0$  a energia do sistema (partícula + mola) é toda cinética. Em  $x = x_m$  (o valor máximo de  $x$ )  $v$  deve ser nula, portanto a energia do sistema será inteiramente potencial. Em  $x = x_m$  temos

$$\frac{1}{2} kx_m^2 = \frac{1}{2} mv_0^2,$$

ou seja,

$$x_m = \sqrt{m/k} v_0.$$

Nas posições intermediárias, entre  $x_1$  e  $x_2$ , a Eq. 8-6b fornece

$$\frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} kx_2^2 + \frac{1}{2} mv_2^2.$$

Vimos que a energia cinética de um corpo é igual ao trabalho que ele pode realizar devido a seu movimento, expressando-se pela equação  $K = \frac{1}{2}mv^2$ . Não podemos obter uma fórmula universal semelhante para exprimir a energia potencial. A energia potencial de um sistema de corpos é o trabalho que o sistema pode realizar devido à posição relativa de suas partes, isto é, em virtude de sua configuração. Em cada caso devemos determinar que trabalho o sistema pode realizar, ao passar de uma configuração a outra e considerá-lo como a diferença de energia potencial do sistema entre as duas configurações.

A energia potencial da mola depende da posição relativa de suas partes. Pode obter-se trabalho quando a mola retorna de seu comprimento distendido ao comprimento normal, tempo durante o qual ela exerce uma força ao longo de certa distância. Se ligarmos à mola uma massa, como no exemplo, esta será acelerada pela força e a energia potencial será convertida em energia cinética. No caso gravitacional, um objeto ocupa uma posição em relação à Terra; a energia potencial é uma propriedade do objeto e da Terra, consi-

derados como formando um sistema de corpos. É a posição relativa das partes do sistema que determina sua energia potencial. Esta é maior quando as partes estão mais afastadas do que quando estão próximas. A perda de energia potencial é igual ao trabalho realizado neste processo. Este trabalho é convertido em energia cinética dos corpos. Em nosso exemplo ignoramos a energia cinética adquirida pela própria Terra, quando um objeto cai sobre ela. Em princípio tal objeto exerce uma força sobre a Terra, acelerando-a em relação a algum referencial inercial. A variação resultante de velocidade, no entanto, é extremamente pequena e, a despeito da enorme massa da Terra, o acréscimo de sua energia cinética é desprezível comparada à que adquire o objeto que cai. Em capítulo posterior, isso será provado. Em outros casos, como no movimento planetário, em que as massas do objeto que constituem o sistema podem ser comparáveis, não podemos ignorar nenhuma de suas partes. Em geral, não se atribui *energia potencial* a um corpo isolado; *ela é considerada uma propriedade do sistema*.

Qual a variação da energia potencial gravitacional quando um elevador de 800 kg sobe do nível da rua ao topo de um edifício, 375 m acima?

A energia potencial gravitacional do sistema (elevador + Terra) é  $U = mgy$ , portanto,

$$U = U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1).$$

Porém,

$$mg = W = 800 \text{ kgf} \quad \text{e} \quad y_2 - y_1 = 375 \text{ m},$$

portanto,

$$\Delta U = 800 \text{ kgf} \times 375 \text{ m} = 2,94 \times 10^6 \text{ J}.$$

## EXEMPLO 1

Para ilustrar a simplicidade e utilidade do conceito de energia na solução de problemas dinâmicos, consideremos o problema ilustrado na Fig. 8-5. Um bloco de massa  $m$  desce uma superfície curva e lisa. A força exercida pela superfície sobre o bloco é sempre perpendicular a ela própria e à direção do movimento

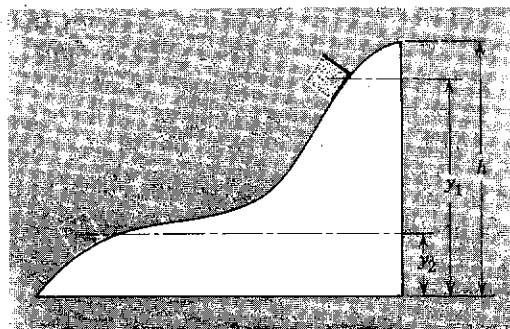


figura 8-5

Exemplo 2. Um bloco deslizando para baixo, numa superfície curva sem atrito.

do bloco, portanto, esta força não realiza trabalho. Apenas a força gravitacional produz trabalho sobre o bloco e essa força é conservativa. A energia mecânica  $E$ , portanto, conserva-se e podemos escrever imediatamente

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2,$$

resultando

$$v_2^2 = v_1^2 + 2g(y_1 - y_2).$$

## EXEMPLO 2

A velocidade, na parte inferior da superfície curva, depende apenas da velocidade inicial e da variação de altura, mas não da forma da superfície. Com efeito, se o bloco estiver inicialmente em repouso no ponto  $y_1 = h$  e fizermos  $y_2 = 0$ , obtemos

$$v_2 = \sqrt{2gh}.$$

O estudante deve recordar que o trabalho de uma força conservativa é independente da trajetória e deve conseguir justificar tal fato para o caso presente, aplicando as idéias desenvolvidas para o movimento unidimensional.

Neste problema o valor da força depende da inclinação da superfície em cada ponto. Portanto, a aceleração não é constante, mas uma função da posição. A fim de obter a velocidade, a partir das leis de Newton, teríamos primeiro de determinar a aceleração em cada ponto e depois integrá-la ao longo da trajetória. Evitamos todo este trabalho partindo logo do fato de que a energia mecânica é constante durante todo o movimento.

Em um canhão de mola, esta tem constante elástica de  $7,0 \times 10^2$  N/m. Ela é comprimida de 5,0 cm em relação a seu comprimento natural e uma bola de 15 g é encostada à boca do cano. Supondo que não haja atrito e que o cano do canhão seja horizontal, determinar a velocidade adquirida pela bola ao disparar o canhão.

A força é conservativa, portanto, a energia mecânica se conserva no processo. A energia mecânica inicial é constituída pela energia potencial elástica da mola,  $\frac{1}{2}kx^2$ , e a energia mecânica final é a energia cinética da bola,  $\frac{1}{2}mv^2$ ; logo,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

ou seja,

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}} x = \sqrt{\frac{7,0 \times 10^2 \text{ N/m}}{15 \times 10^{-3} / 9,8 \text{ m/s}^2}} \cdot 5 \times 10^{-2} \text{ m} = 34 \text{ m/s}.$$

A Eq. 8-6a dá a relação entre coordenada e velocidade, para um movimento unidimensional, quando a força depende apenas da posição. A força e a aceleração foram eliminadas para chegar àquela equação. Para completar a solução do problema dinâmico, devemos eliminar a velocidade e determinar a posição como função do tempo.

Podemos fazê-lo de modo formal como segue. Temos, pela Eq. 8-6a:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = E,$$

resultando para  $v$

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}. \quad (8-12)$$

ou, ainda,

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}} = dt.$$

A função  $x(t)$  pode ser determinada, portanto, resolvendo para  $x$  a equação

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0. \quad (8-13)$$

### EXEMPLO 3

#### 8-5

#### SOLUÇÃO COMPLETA DO PROBLEMA PARA FORÇAS UNIDIMENSIONAIS DEPENDENTES APENAS DA POSIÇÃO

Supõe-se aqui que a partícula esteja em  $x_0$  no instante  $t_0$ , e que  $E$  seja a energia total constante. Ao aplicar essa equação, o sinal da raiz quadrada a ser tomado dependerá de  $v$  estar orientada segundo o sentido positivo ou negativo do eixo  $x'$ . Quando  $v$  muda de sentido durante o movimento, pode ser necessário realizar a integração separadamente para cada parte do movimento.

Mesmo quando esta integral não possa ser avaliada, ou quando a equação resultante não possa ser resolvida para fornecer uma solução explícita para  $x(t)$ , a equação da conservação da energia nos dará informações úteis sobre a solução. Por exemplo, para uma dada energia total  $E$ , a Eq. 8-12 diz que a partícula está restrita às regiões do eixo  $x'$  em que  $E > U(x)$ . Não podemos ter fisicamente velocidades imaginárias ou energia cinética negativa, de forma que  $E - U(x)$  deve anular-se ou ser positiva. Além disso, **pode-se obter** uma boa descrição qualitativa dos tipos de movimento possíveis construindo um gráfico de  $U(x)$  em função de  $x$ . Esta descrição depende do fato de que a velocidade é proporcional à raiz quadrada da diferença entre  $E$  e  $U$ .

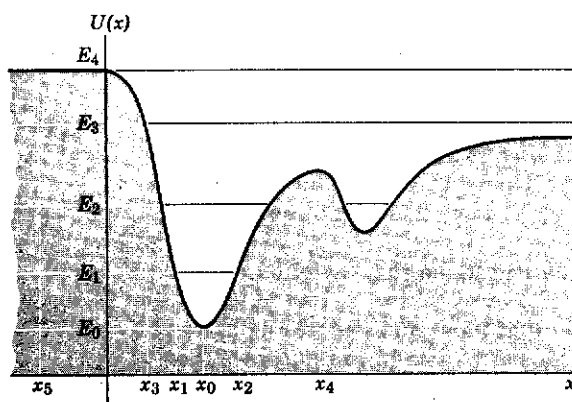


figura 8-6  
Curva de energia potencial.

Por exemplo, consideremos a função energia potencial indicada na Fig. 8-6. Esse gráfico poderia ser imaginado com o perfil de uma montanha russa lisa, mas em geral ele pode representar a energia potencial de um sistema não gravitacional. Como devemos ter  $E \geq U(x)$  para um movimento real, a energia total mais baixa possível será  $E_0$ . Para este valor da energia total,  $E_0 = U$  e a energia cinética deve ser nula. A partícula deve estar em repouso no ponto  $x_0$ . Para um valor da energia ligeiramente maior,  $E_1$ , a partícula poderá mover-se apenas entre  $x_1$  e  $x_2$ . Partindo de  $x_0$ , sua velocidade decresce ao aproximar-se tanto de  $x_1$  como de  $x_2$ ; nesses pontos ela pára e inverte seu sentido. Daí esses pontos serem chamados *pontos de inversão* do movimento. Para o valor  $E_2$  da energia total, existem quatro pontos de inversão, e a partícula pode oscilar em um dos dois vales de potencial. Quando o valor da energia total for  $E_3$  há somente um ponto de inversão do movimento, em  $x_3$ . Se a partícula estiver inicialmente movendo-se no sentido negativo, ela irá parar em  $x_3$ , passando então a mover-se no sentido positivo. Sua velocidade aumenta quando  $U$  decresce e decresce se  $U$  aumenta. Para valores da energia superiores a  $E_4$  não existem pontos de inversão e a partícula não inverterá o sentido de seu movimento. Sua velocidade mudará de acordo com o valor do potencial em cada ponto.

Em um ponto onde  $U(x)$  tenha valor mínimo, tal como em  $x = x_0$ , a inclinação da curva é nula, portanto, a força atuante também é nula, isto é,  $F(x_0) = -(dU/dx)_{x=x_0} = 0$ . Uma partícula em repouso neste ponto permanecerá em repouso. Além disso, se a partícula for ligeiramente deslocada em qualquer sentido, a força  $F(x) = -dU/dx$ , tenderá a restabelecê-la naquele ponto e a partícula oscilará em torno da posição de equilíbrio, que é, por isso, denominada posição de *equilíbrio estável*.

Em um ponto em que  $U(x)$  tenha valor máximo, tal como em  $x = x_4$ , a inclinação da curva é nula, sendo, portanto, a força novamente nula, isto é,  $F(x_4) = -(dU/dx)_{x=x_4} = 0$ . Uma partícula em repouso nesse ponto permanecerá em repouso. No entanto, se a partícula for afastada dessa posição, mesmo que seja ligeiramente, a força  $F(x) = -dU/dx$  tenderá a afastá-la ainda mais da posição de equilíbrio, chamada por isso de *equilíbrio instável*.

Em um intervalo no qual  $U(x)$  seja constante, tal como na proximidade de  $x = x_5$ , a inclinação da curva, é nula, de modo que a força também é nula, ou seja,  $F(x_5) = -(dU/dx)_{x=x_5} = 0$ . Tal intervalo denomina-se de *equilíbrio indiferente*, pois que uma partícula pode ser ligeiramente deslocada sem que atue nela nem uma força restauradora nem uma força de repulsão.

Está claro portanto que, se conhecermos a função energia potencial na região de  $x$  em que se move o corpo, conheceremos muita coisa sobre o movimento dele.

A função energia potencial para a força existente entre dois átomos, em uma molécula diatômica, pode ser expressa aproximadamente do seguinte modo:

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$$

Sendo  $a$  e  $b$  constantes positivas e  $x$  a distância entre os átomos.

(a) Para que valores de  $x$  a função  $U(x)$  se anula? Para que valores de  $x$  a função  $U(x)$  é mínima?

Na Fig. 8-7a está representada  $U(x)$  em função de  $x$ . Os valores de  $x$  para os quais  $U(x)$  se anula, obtêm-se a partir da condição

$$\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6} = 0,$$

portanto,

$$x^6 = a/b \quad x = \sqrt[6]{a/b}.$$

$U(x)$  também se anula quando  $x \rightarrow \infty$  [V. figura ou faça  $x = \infty$  na equação de  $U(x)$ ], de forma que  $x = \infty$  é também uma solução.

O valor de  $x$  para o qual  $U(x)$  é mínima, obtêm-se de

$$\frac{d}{dx} U(x) = 0,$$

isto é,

$$\frac{-12a}{x^{13}} + \frac{6b}{x^7} = 0$$

resultando

$$x^6 = 2a/b \quad x = \sqrt[6]{2a/b}.$$

### EXEMPLO 4

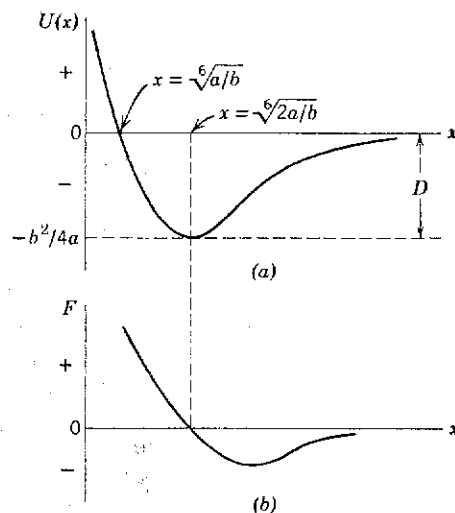


figura 8-7  
Exemplo 4. (a) Energia potencial e (b) força entre dois átomos em uma molécula diatômica, em função da distância  $x$  entre eles.

(b) Determinar a força entre os átomos.

Pela Eq. 8-7,

$$F(x) = -\frac{d}{dx} U(x),$$

$$F = -\frac{d}{dx} \left( \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6} \right) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}.$$

O gráfico da força como função da distância entre os átomos é o da Fig. 8-7b. Quando a força for positiva (desde  $x = 0$  até  $x = \sqrt[6]{2a/b}$ ), os átomos serão repelidos um pelo outro (força dirigida no sentido crescente de  $x'$ ). Se a força for negativa (desde  $x = \sqrt[6]{2a/b}$  até  $x = \infty$ ) os átomos se atrairão (força dirigida no sentido decrescente de  $x'$ ). No ponto  $x = \sqrt[6]{2a/b}$  a força é nula; este é o ponto de equilíbrio, no caso equilíbrio estável.

(c) Suponha que um dos átomos permaneça em repouso e que o outro se mova ao longo de  $x$ ; descrever os movimentos possíveis.

Pela análise desta seção, está claro que o átomo oscila em torno da posição de equilíbrio (no ponto  $x = \sqrt[6]{2a/b}$ ), como se a partícula escorregasse para cima e para baixo, ao longo das colinas sem atrito do vale de potencial.

(d) A energia necessária para romper a molécula e separar os átomos denomina-se energia de dissociação. Qual a energia de dissociação da molécula?

Se um átomo possui energia cinética suficiente para transpor a colina de potencial, ele não mais ficará ligado ao outro átomo. Portanto, a energia de dissociação  $D$  iguala a variação de energia potencial desde o valor mínimo, para  $x = \sqrt[6]{2a/b}$ , até ao valor em  $x = \infty$ , ou seja,

$$U(x = \infty) - U \left( x = \sqrt[6]{\frac{2a}{b}} \right) = 0 - \left( \frac{a}{4a^2/b^2} - \frac{b}{2a/b} \right) = \frac{b^2}{4a}.$$

Se a energia cinética na posição de equilíbrio for igual ou superior a este valor, a molécula se dissociará.

Até agora foi discutida a energia potencial e a conservação da energia para sistemas unidimensionais, em que a força tem a direção do movimento. Pode-se generalizar facilmente a discussão para o caso de movimento tridimensional.

Se o trabalho realizado pela força  $F$  depender somente dos pontos extremos do movimento e for independente da trajetória seguida entre esses pontos, a força será conservativa. Define-se a energia potencial  $U$ , por analogia com o sistema unidimensional, verificando-se que ela é função de três coordenadas espaciais, isto é,  $U = U(x, y, z)$ . Obtém-se novamente uma expressão para a conservação da energia mecânica.

A generalização da Eq. 8-5b ao movimento tridimensional é a seguinte:

$$\Delta U = - \int_{x_0}^x F_x dx - \int_{y_0}^y F_y dy - \int_{z_0}^z F_z dz, \quad (8-5c)$$

ou, mais concisamente, em notação vetorial.

$$\Delta U = - \int_{r_0}^r \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (8-5d)$$

em que  $\Delta U$  é a variação de energia potencial do sistema quando a partícula se move do ponto  $(x_0, y_0, z_0)$ , descrito pelo vetor posição  $\mathbf{r}_0$ , até o ponto  $(x, y, z)$  cujo vetor posição é  $\mathbf{r}$ .  $F_x$ ,  $F_y$  e  $F_z$  são as componentes da força conservativa  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$ .

## 8-6 SISTEMAS CONSERVATIVOS BI E TRIDIMENSIONAIS

A generalização da Eq. 8-6b ao movimento tridimensional é

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0, y_0, z_0) \quad (8-6c)$$

que pode ser escrita em notação vetorial como

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + U(\mathbf{r}_0), \quad (8-6d)$$

sendo  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$  e  $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 = v_0^2$ . Analogamente, a Eq. 8-6a transforma-se em

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) = E,$$

em três dimensões, sendo  $E$  a energia mecânica total constante.

Finalmente, a generalização da Eq. 8-7 para três dimensões será

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Substituindo esta expressão de  $\mathbf{F}$  na Eq. 8-5d obtém-se de novo uma identidade. Em linguagem vetorial, diz-se que a força conservativa  $\mathbf{F}$  tem o sinal oposto ao *gradiente* da energia potencial  $U(x, y, z)$ .

O estudante pode mostrar que todas essas expressões reduzem-se às equações unidimensionais corretas que descrevem o movimento ao longo do eixo  $x'$ .

## EXEMPLO 5

Considere-se o pêndulo simples, Seç. 7-4, Fig. 7-8a. O movimento do sistema ocorre no plano  $xOy$ , isto é, trata-se de um movimento bidimensional. A tensão no fio é sempre perpendicular ao movimento da partícula suspensa, portanto, essa força não produz trabalho sobre a partícula. Deslocando o pêndulo da vertical e soltando-o, somente trabalhará sobre ele a força gravitacional atrativa exercida pela Terra sobre a partícula. Como tal força é conservativa, pode ser usada a equação de conservação da energia em duas dimensões, isto é,

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y) = E.$$

Porém,  $U(x, y) = mgy$ , sendo  $y$  considerado nulo no ponto mais baixo do arco ( $\phi = 0^\circ$ ). Logo,

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = E.$$

O fio é deslocado do ângulo  $\phi_0$  antes de ser largado; a energia potencial aí vale  $mgh$ , correspondendo à altura  $y = h$  acima do ponto de referência. No ponto em que  $\phi = \phi_0$  a velocidade e a energia cinética são nulas, portanto, a energia mecânica total é igual a energia potencial nesse ponto. Portanto,

$$E = mgh$$

e

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgh,$$

ou, ainda,

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(h - y).$$

A velocidade máxima ocorre em  $y = 0$ , onde  $v = \sqrt{2gh}$ .

A velocidade mínima ocorre em  $y = h$ , onde  $v = 0$ .

No ponto  $y = 0$  a energia é totalmente cinética, sendo nula a energia potencial. Ao contrário, no ponto  $y = h$  a energia é inteiramente potencial, sendo nula a energia cinética.

Em posições intermediárias a energia é parcialmente cinética e parcialmente potencial.

Note  $U \leq E$  em todos os pontos do movimento; o pêndulo não pode elevar-se acima do nível  $y = h$ , o ponto em que é largado no início.

Até agora consideramos apenas a ação de uma única força conservativa sobre uma partícula. Partindo do teorema do trabalho e energia, isto é,

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n = \Delta K \quad (8-2)$$

vimos que, se apenas uma força, digamos  $F_1$ , estiver atuando e se ela for conservativa, poderíamos então representar o trabalho  $W_1$  por ela realizado sobre uma partícula como o decréscimo da energia potencial  $\Delta U_1$  do sistema (ver Eq. 8-5a), ou seja,

$$W_1 = -\Delta U_1.$$

Combinando esta equação com a Eq. 8-2 obtém-se

$$\Delta K + \Delta U_1 = 0.$$

Se várias forças conservativas estiverem agindo, tais como a da gravidade, a força elástica de uma mola, uma força eletrostática, pode-se facilmente generalizar estas duas equações:

$$\Sigma W_c = -\Sigma \Delta U \quad (8-14a)$$

e

$$\Delta K + \Sigma \Delta U = 0, \quad (8-14b)$$

em que  $\Sigma W_c$  é a soma dos trabalhos realizados pelas várias forças (conservativas) e os  $\Delta U$  são as variações de energia potencial do sistema associadas com tais forças. A quantidade do primeiro membro da Eq. 8-14b é simplesmente  $\Delta E$ , a variação de energia mecânica total, para o caso de várias forças conservativas estarem agindo sobre a partícula. Podemos, portanto, escrever esta equação sob a forma

$$\Delta E = 0 \text{ (forças conservativas)}, \quad (8-15)$$

a qual afirma que, ao mudar a configuração do sistema, sua energia mecânica total permanece constante.

Suponhamos agora que, além das várias forças conservativas, atue sobre a partícula uma única força não conservativa, devido ao atrito. A Eq. 8-2 pode, então, ser escrita como

$$W_a + \Sigma W_c = \Delta K,$$

sendo  $\Sigma W_c$  a soma dos trabalhos realizados pelas forças conservativas e  $W_a$  o trabalho realizado pela força de atrito. Pode-se reescrever esta equação (ver Eq. 8-14a) como

$$\Delta K + \Sigma \Delta U = W_a, \quad (8-16)$$

que mostra *não* ser constante a energia mecânica total, quando atua uma força de atrito, variando de um valor igual ao trabalho feito pela força de atrito. A Eq. 8-16 pode tomar a forma

$$\Delta E = E - E_0 = W_a. \quad (8-17)$$



Como  $W_a$ , o trabalho da força de atrito *sobre* a partícula, é sempre negativo, segue-se desta equação que a energia mecânica final  $E (= K + \Sigma U)$  é menor que a inicial  $E_0 (= K_0 + \Sigma U_0)$ .

O atrito é um exemplo de força dissipativa, que realiza trabalho negativo sobre um corpo e tende a diminuir a energia mecânica total do sistema. Se tivesse atuado uma outra força não conservativa, então  $W_a$  nas Eqs. 8-16 e 8-17 seria substituído por um termo  $W_{nc}$ , que evidenciaria de novo *não* ser constante a energia mecânica total do sistema, variando de um valor igual ao trabalho realizado pelas forças não conservativas. *Portanto, só pode haver conservação da energia mecânica quando não houver forças não conservativas, ou quando pudermos desprezar o trabalho realizado por elas.*

Que aconteceu à energia mecânica “perdida” no caso do atrito? Ela se transforma em energia interna,  $U_{int}$ , resultando num aumento de temperatura. A energia interna gerada é exatamente igual à energia mecânica dissipada. Em capítulos posteriores muito mais será dito a propósito da energia interna.

Assim como o trabalho realizado por uma força conservativa *sobre* um objeto tem sinal oposto ao da energia potencial, também o trabalho realizado por uma força de atrito *sobre* um objeto tem o sinal oposto ao da energia interna adquirida. Em outros termos, a energia interna produzida é igual ao trabalho realizado *pelo* objeto. Podemos, portanto, substituir  $W_a$ , na Eq. 8-17, por  $-U_{int}$ , sendo  $U_{int}$  a energia interna produzida, ou seja,

$$\Delta E + U_{int} = 0. \quad (8-18)$$

Esta equação assegura que não há variação na soma das energias mecânica e interna do sistema, quando nele atuam, apenas, forças conservativas e de atrito. Escrevendo tal equação como  $U_{int} = -\Delta E$ , vê-se que a perda de energia mecânica é igual à energia interna ganha.

## EXEMPLO 6

Um objeto com uma velocidade inicial  $v_0$  de 14 m/s cai de uma altura de 240 m, enterrando-se 0,20 m em areia. A massa do corpo é de 1,0 kg. Determinar a força resistiva média exercida pela areia sobre o corpo. Desprezar a resistência do ar e resolver o problema segundo considerações de trabalho e energia.

A energia cinética do corpo no início do processo de enterramento é

$$K = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$$

onde  $m$  é a massa do corpo e  $h$  a altura de queda.

Da mesma forma, do princípio do trabalho e energia, temos aproximadamente

$$K = \bar{F}s,$$

onde  $\bar{F}$  é a força resistiva média e  $s$  a distância de penetração no solo.

Igualando e resolvendo para  $\bar{F}$  vem

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \frac{mv_0^2}{2s} + \frac{mgh}{s} \\ &= \frac{(1,0 \text{ kg})(14 \text{ m/s})^2}{2(0,20 \text{ m})} + \frac{(1,0 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)(240 \text{ m})}{(0,20 \text{ m})} \\ &= 12\,250 \text{ N} \end{aligned}$$

Para que equações neste capítulo são as duas primeiras equações deste exemplo casos especiais?

Que erro cometemos (em comparação com  $h$ ) ao desprezar a distância adicional de queda  $s$  antes do objeto atingir o repouso? Mostrar que isso equivale a desprezar  $mg$  em comparação com  $F$  na determinação da força resultante a ser usada no teorema do trabalho e energia. Tais termos na prática nem sempre são desprezíveis (ver Probl. 19. como exemplo).

### EXEMPLO 7

Um bloco de 5,0 kg é lançado para cima, ao longo de um plano inclinado de  $30^\circ$ , com velocidade inicial de 5,0 m/s. Ele percorre 1,5 m ao longo do plano, pára e volta à base do plano inclinado. Calcular a força de atrito  $f$  (suposta de módulo constante) que age no bloco e determinar a velocidade  $v$  do bloco, quando este retorna à base do plano inclinado.

Consideremos primeiro o movimento para cima. No topo ele pára, portanto,

$$E = K + U = 0 + 5,0 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 1,5 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} = 37 \text{ J.}$$

Na base do plano, onde começa esse movimento,

$$E_0 = K_0 + U_0 = \frac{1}{2} \cdot 5,0 \text{ kg} \cdot (5 \text{ m/s})^2 = 63 \text{ J.}$$

Ora,

$$W_a = -fs = -f \cdot 1,5 \text{ m}$$

e

$$E - E_0 = W_a,$$

portanto,

$$37 \text{ J} - 63 \text{ J} = -f(1,5 \text{ m});$$

logo,

$$f = 17 \text{ N.}$$

Consideremos, agora, o movimento para baixo. O bloco retorna à base do plano com velocidade  $v$ . Ao parar aí,

$$E = K + U = \frac{1}{2} \cdot 5,0 \text{ kg} \cdot v^2 + 0 = 2,5 \text{ kg} \cdot v^2.$$

No topo, onde começou o movimento de volta,

$$E_0 = K_0 + U_0 = 0 + 5,0 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 1,5 \frac{1}{2} = 37 \text{ J}$$

e, como

$$W_a = -17 \text{ N} \times 1,5 \text{ m} = -26 \text{ J,}$$

e

$$E - E_0 = W_a,$$

tem-se:

$$2,5 \text{ kg} \cdot v^2 - 37 \text{ J} = -26 \text{ J}$$

resultando

$$v = \sqrt{4,4} \text{ m/s} = 2,1 \text{ m/s.}$$

Pode-se generalizar a discussão da seção anterior, considerando-se não apenas forças conservativas e a força de atrito, como também outras forças não conservativas. O teorema do trabalho-energia, Eq. 8-2,

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n = \Delta K$$

**8-8**  
A CONSERVAÇÃO  
DA ENERGIA

pode ser escrito sob a forma

$$\Sigma W_c + W_a + \Sigma W_{nc} = \Delta K, \quad (8-19)$$

sendo  $\Sigma W_c$  o trabalho total realizado sobre a partícula pelas forças conservativas,  $W_a$  o trabalho da força de atrito e  $\Sigma W_{nc}$  o trabalho total produzido por todas as demais forças não conservativas. Vimos que cada força conservativa pode ser associada com uma energia potencial e que o atrito está associado com a energia interna, ou seja,

$$\Sigma W_c = -\Sigma \Delta U$$

e

$$W_a = -U_{int},$$

portanto, a Eq. 8-19 transforma-se em

$$\Sigma W_{nc} = \Delta K + \Sigma \Delta U + U_{int}.$$

Ora, qualquer que seja  $W_{nc}$ , sempre foi possível identificar novas formas de energia que correspondam a este trabalho. Pode-se, portanto, representar  $\Sigma W_{nc}$  por um outro termo no segundo membro da equação, que expresse a correspondente variação de energia, resultando que o teorema do trabalho-energia pode ser escrito sempre como

$$0 = \Delta K + \Sigma \Delta U + U_{int} + (\text{variação de outras formas de energia}).$$

Em outras palavras, a energia total — cinética mais potencial, interna e outras formas — não varia. *A energia pode transformar-se de uma espécie a outra, mas não pode ser criada ou destruída; a energia total é constante.*

Este enunciado é uma generalização de nossa experiência, até hoje não contestada pela observação da natureza. É denominado *princípio de conservação da energia*. Frequentemente, na história da Física, este princípio pareceu falhar. Mas essa aparente falha, estimulou a investigação das possíveis razões disso. Os experimentadores procuraram descobrir outros fenômenos, além do movimento, que acompanhassem as forças de interação entre os corpos, e tais fenômenos sempre foram revelados. Com o trabalho realizado contra o atrito, está associada a energia interna produzida; em outras interações, pode aparecer energia sob a forma de som, luz, eletricidade etc. Por isso o conceito de energia foi generalizado, a fim de incluir outras formas de energia além da cinética e da potencial de corpos observáveis diretamente. Este procedimento, que relaciona a mecânica dos corpos em movimento com fenômenos não-mecânicos, ou em que o movimento não é diretamente observável, relacionou a mecânica com todas as outras áreas da Física. O conceito de energia penetrou atualmente em toda a ciência física, tornando-se uma de suas idéias unificadoras.<sup>3</sup>

Em capítulos posteriores estudaremos várias transformações da energia — de mecânica em interna, de mecânica em elétrica, de nuclear em interna etc. É durante essas transformações que medimos as variações da energia em termos de trabalho, pois é durante tais transformações que surgem as forças e que elas realizam trabalho.

<sup>3</sup> Ver, por exemplo, "Concept of Energy in Mechanics", por R. B. Lindsay, em "The Scientific Monthly", outubro, 1957.

Embora o princípio de conservação da energia cinética mais potencial seja de uso freqüente, vê-se que ele é um caso particular do princípio mais geral de conservação da energia. Há conservação de energia cinética e potencial somente quando atuam forças conservativas. A energia total *sempre* é conservada.

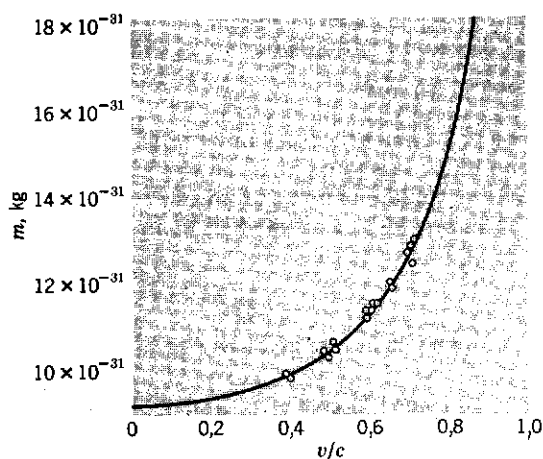
Uma das grandes leis de conservação da ciência é a de conservação da matéria. Do ponto de vista filosófico, um primitivo enunciado deste princípio geral foi proposto pelo poeta romano Lucrécio, contemporâneo de Júlio César, em seu célebre poema intitulado *De Rerum Natura*. Lucrécio escreveu: "As coisas não podem nascer do nada, nem podem desaparecer voltando ao nada". Decorreu longo tempo antes que esse conceito adquirisse uma firme base científica. A principal contribuição experimental é devida a Antoine Lavoisier (1743-1794), considerado por muitos como o pai da Química moderna. Escreveu ele em 1789: "Devemos tomar como axioma incontestável que, em todas as operações da arte e da natureza, nada é criado; a mesma quantidade de matéria existe antes e após a experiência... e nada ocorre além de mudanças e modificações nas combinações desses elementos".

Este princípio, posteriormente denominado de conservação da massa, mostrou-se extremamente fértil em Química e em Física. Sérias dúvidas quanto à validade geral desse princípio foram levantadas por Albert Einstein, em seus trabalhos que lançaram a teoria da relatividade. Experiências posteriores, com elétrons de alta velocidade e matéria nuclear, confirmaram suas conclusões.

As descobertas de Einstein sugeriam que, se certas leis físicas fossem mantidas, a massa de uma partícula deveria ser redefinida como

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (8-20)$$

em que  $m_0$  é a massa da partícula quando está em repouso em relação ao observador, denominando-se *massa de repouso*;  $m$  é a massa da partícula medida quando se move com velocidade  $v$  em relação ao observador; e  $c$  é a velocidade da luz, cujo valor constante é de aproximadamente  $3 \times 10^8$  m/s. Pode-se comprovar experimentalmente essa equação, por exemplo, estudando a deflexão de elétrons de alta velocidade em campos magnéticos e medindo os raios de curvatura de suas trajetórias. Os elétrons descrevem órbi-



## 8-9

### MASSA E ENERGIA

figura 8-8

O modo como a massa de um elétron cresce quando aumenta sua velocidade em relação a um observador. A linha cheia é um gráfico de  $m = m_0(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ , e os pequenos círculos são obtidos de valores experimentais conseguidos por Bucherer e Newmann em 1914. A curva tende ao infinito quando  $v \rightarrow c$ .

tas circulares e a força magnética é centrípeta ( $F = mv^2/r$ ,  $F$  e  $v$  sendo conhecidas). As velocidades habituais, a diferença entre  $m$  e  $m_0$  é demasiado pequena para ser mensurável. Os elétrons, entretanto, podem ser emitidos por núcleos radioativos com velocidades superiores a nove décimos da velocidade da luz, caso em que os resultados (Fig. 8-8) confirmam a Eq. 8-20.

É conveniente representar por  $\beta$  a razão  $v/c$  e a Eq. 8-20 torna-se

$$m = m_0(1 - \beta^2)^{-1/2}.$$

Para se determinar a energia cinética de um corpo, calcula-se o trabalho realizado pela resultante das forças ao colocá-lo em movimento. Na Sec. 7-5 obtivemos

$$K = \int_0^v \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

para expressão da energia cinética, supondo constante a massa  $m_0$  do corpo. Imaginemos, agora, todavia, que levemos em conta a variação da massa com a velocidade, e utilizemos a relação  $m = m_0(1 - \beta^2)^{-1/2}$  na equação anterior. Encontra-se (Probl. 37, Cap. 9) que a energia cinética não é mais expressa por  $\frac{1}{2}m_0v^2$  mas sim pela equação

$$K = mc^2 - m_0c^2 = (m - m_0)c^2 = \Delta mc^2. \quad (8-21)$$

A energia cinética de uma partícula, portanto, é o produto de  $c^2$  pelo aumento  $\Delta m$  de sua massa, resultante do movimento.

Ora, a baixas velocidades é de se esperar que o resultado relativístico concorde com o resultado clássico. Aplicando a fórmula do binômio à expressão  $(1 - \beta^2)^{-1/2}$  obtém-se

$$(1 - \beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \frac{5}{16}\beta^6 + \dots$$

Quando as velocidades são pequenas,  $\beta = v/c \ll 1$ , portanto podem ser desprezados todos os termos além de  $\beta^2$ , resultando

$$\begin{aligned} K &= (m - m_0)c^2 = m_0c^2[(1 - \beta^2)^{-1/2} - 1] \\ &= m_0c^2(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots - 1) \simeq \frac{1}{2}m_0c^2\beta^2 = \frac{1}{2}m_0v^2, \end{aligned}$$

que é o resultado clássico. Note também que, quando  $K=0$ ,  $m = m_0$ , como era de esperar.

A idéia básica de que a energia é equivalente à massa, pode estender-se, de forma a incluir outras formas de energia além da cinética. Por exemplo, quando comprimimos uma mola, fornecendo-lhe energia potencial  $U$ , sua massa aumenta de  $m_0$  a  $m_0 + U/c^2$ . Fornecendo a quantidade de calor  $Q$  a um objeto, sua massa aumenta de  $\Delta m = Q/c^2$ . Chega-se, desse modo, ao *princípio de equivalência da massa e da energia*: para cada unidade de energia  $E$ , de qualquer tipo, fornecida a um corpo, sua massa aumenta de

$$\Delta m = E/c^2,$$

que é a famosa equação de Einstein

$$E = \Delta m \cdot c^2. \quad (8-22)$$

Com efeito, desde que a própria massa é apenas uma forma de energia, pode-se agora afirmar que um corpo em repouso possui a energia  $m_0c^2$ , em virtude de sua massa de repouso e que é chamada energia de repouso. Considerando agora um sistema fechado, o princípio de conservação da energia, conforme a generalização de Einstein, torna-se

$$\Sigma(m_0c^2 + \epsilon) = \text{constante}$$

ou

$$\Delta(\Sigma m_0c^2 + \Sigma \epsilon) = 0,$$

sendo  $\Sigma m_0c^2$  a energia total de repouso e  $\Sigma \epsilon$  a energia total de todos os outros tipos. Nas palavras de Einstein: "A Física pré-relativística contém duas leis de conservação cuja importância é fundamental — a lei de conservação da energia e a lei de conservação da massa, em aparência completamente independentes entre si. Através da teoria da relatividade elas se fundem em um único princípio".

Como o fator  $c^2$  é extremamente grande, não é de esperar que em experiências comuns de mecânica possam ser reveladas variações de massa. Uma variação de 1 grama na massa de um corpo exigiria a energia de  $9 \times 10^{13}$  joules. Porém, se a massa inicial de uma partícula é pequeníssima e ela pode adquirir alta energia, a variação relativa pode ser facilmente revelada. É o que ocorre em fenômenos nucleares e é neste contexto que a mecânica clássica falha, ao mesmo tempo que a mecânica relativística recebe sua confirmação mais notável.

Um belo exemplo de intercâmbio de energia entre massa e outras formas, é oferecido pelo fenômeno da aniquilação ou produção de pares. Neste fenômeno, um elétron e um pósitron, partículas elementares que só diferem no sinal de sua carga elétrica, podem combinar-se e literalmente desaparecer. Em lugar delas encontra-se radiação de alta energia, denominada radiação  $\gamma$ , de valor exatamente igual à massa de repouso mais as energias cinéticas das partículas que desaparecem. O processo é reversível, de forma que pode ocorrer a materialização da massa a partir da energia radiante, quando desaparece um raio  $\gamma$  de energia suficientemente elevada, sob condições adequadas; em seu lugar obtém-se um par de elétron-pósitron, cuja energia total (massa de repouso + cinética) é igual à energia radiante que desapareceu.

## EXEMPLO 8

Consideremos um exemplo quantitativo: Na escala atômica de massas, a unidade de massa vale  $1,66 \times 10^{-27}$  kg, aproximadamente. Nesta escala a massa do próton (núcleo do átomo de hidrogênio) vale 1,00731 e a do nêutron (partícula neutra constituinte de todos os núcleos atômicos exceto o de hidrogênio) é 1,00867. Um dêuteron (núcleo de hidrogênio pesado) consiste de um nêutron e um próton; sua massa é de 2,01360. A massa do dêuteron é menor que a soma das massas do nêutron e do próton de 0,00238 unidade atômica de massa. A discrepância equivale à energia

$$\begin{aligned} E &= \Delta mc^2 = (0,00238 \times 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}) (3,00 \times 10^8 \text{ m/s})^2 \\ &= 3,57 \times 10^{-13} \text{ joule} = 2,22 \times 10^6 \text{ eV.} \end{aligned}$$

Quando um nêutron e um próton se combinam para formar um dêuteron, exatamente essa quantidade de energia é emitida sob a forma de radiação  $\gamma$ . De forma semelhante, verifica-se que a mesma quantidade de energia deve ser adicionada ao

déuteron para decompô-lo em um próton e um nêutron; esta energia é por isso chamada de *energia de ligação* do déuteron.

## questões

1. Nas serras as estradas raramente sobem em linha reta e sim em voltas de ascensão gradual. Explique por que.
2. Está sendo realizado algum trabalho sobre um carro que se move com velocidade constante ao longo de uma estrada horizontal?
3. Um automóvel de massa  $m$  e velocidade  $v$  está se movendo ao longo de uma rodovia. O motorista aperta os freios e o carro derrapa até parar. Sob que forma se apresenta a energia cinética que o carro perde?
4. Na pergunta anterior, suponha que o motorista "bombeie" os freios de tal modo que não haja derrapagem ou deslizamento. Neste caso, sob que forma se apresenta a energia cinética que o carro perde?
5. Um automóvel é acelerado do repouso até uma velocidade  $v$ , sob condições tais que não ocorra deslizamento das rodas motrizes. De onde vem a energia cinética do carro? Pode-se dizer que ela provém do trabalho realizado pelas forças de atrito (estático) que a estrada exerce, sobre o automóvel?
6. Se nenhum trabalho é necessário para segurar um objeto pesado, por que é cansativo fazê-lo?
7. Que acontece à energia potencial que um elevador perde ao descer do topo de um edifício ao pavimento térreo?
8. No Ex. 2 (veja Fig. 8-5), afirmamos que a velocidade na base não depende absolutamente da *forma* da superfície. Isto seria verdade se houvesse atrito?
9. Dê exemplos físicos de equilíbrio instável, indiferente e estável.
10. Explique, usando conceitos de trabalho e energia, como uma criança impulsiona um balanço até grandes amplitudes, partindo do repouso. (Veja "How to Make a Swing Go" de R. V. Hesheth *Physics Education*, julho, 1975.)
11. Um pêndulo em oscilação eventualmente entra em repouso. Isso é uma violação da lei da conservação de energia?
12. Um artigo científico ("The Energetic Cost of Moving About" de V. A. Tucker, *American Scientist*, julho-agosto, 1975) assegura que andar e correr são formas extremamente ineficientes de locomover-se e que ciclistas, pássaros e peixes fazem-no com muito maior eficiência. Você pode dar uma explicação?
13. Dois discos estão ligados por uma mola dura. Pode-se comprimir o disco superior para baixo o suficiente para que, ao soltá-lo, ele recue e levante da mesa o disco inferior? (Veja Fig. 8-9.) Há conservação da energia mecânica em tal caso?
14. No caso de trabalho realizado contra atrito, a quantidade de calor gerada independe da velocidade (ou do referencial inercial) do observador. Isto é, diferentes observadores afirmariam que, devido ao atrito, a mesma quantidade de energia mecânica é transformada em calor. Como isto pode ser explicado, considerando que tais observadores medem, em geral, quantidades diferentes de trabalho total realizado e variações diferentes de energia cinética? (Veja Probl. 21, Cap. 7.)
15. Todas as forças não conservativas devem ser dissipativas, como o atrito? Em princípio, pode  $\Sigma W_{nc}$  ser maior que zero?
16. Deixa-se cair um objeto e ele repica, alcançando uma vez e meia sua altura original. Que conclusão pode-se tirar desta observação?
17. O motorista de um automóvel, viajando à velocidade  $v$ , inesperadamente percebe uma parede de tijolos, à distância  $d$ , diretamente à sua frente. Para evitar o choque, é preferível que ele freie violentamente ou que dê uma guinada na direção? (Sugestão: Considere a força necessária em cada caso.)
18. Mantém-se uma mola comprimida, ao amarrar firmemente suas extremidades uma a outra. Em seguida, é colocada em ácido e dissolvida. Que terá acontecido à energia potencial armazenada?

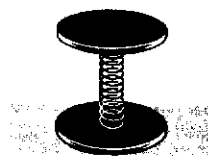


figura 8-9  
Questão 13

### SEÇÃO 8-3

1. Uma partícula se move sobre o eixo  $Ox$  submetida à ação de uma força repulsiva dada por:  $F = kx$ . Determine a energia potencial  $U(x)$ .

## problemas

2. A energia potencial de uma partícula é dada por:  $U(x) = 2x^3 - x^2$ . Determine a expressão do módulo da força em função de  $x$ .

Resposta:  $F(x) = -6x^2 + 2x$ .

3. Uma partícula se move ao longo do eixo  $Ox$  da esquerda para a direita. O módulo da força que atua sobre a partícula é dado por:  $F(x) = 2x - 1$ . Determine a variação da energia potencial da partícula entre os pontos  $x = 2$  m e  $x = 4$  m. Considere todas as unidades no Sistema Internacional.

4. Considere o enunciado do problema anterior. A massa da partícula vale 2,0 kg. (a) Calcule o trabalho realizado para deslocar a partícula do ponto  $x = 2$  m até o ponto  $x = 4$  m. (b) Qual é a aceleração da partícula no ponto  $x = 0,5$  m? (c) E no ponto  $x = 1$  m, qual é sua aceleração?

Resposta: (a) 10 J. (b) 0. (c) 0,5 m/s<sup>2</sup>.

5. Se o módulo da força de atração entre uma partícula de massa  $m_1$  e uma de massa  $m_2$ , é dado por

$$F = k \frac{m_1 m_2}{x^2},$$

onde  $k$  é uma constante e  $x$ , a distância entre as partículas, ache (a) a função energia potencial e (b) o trabalho necessário para aumentar a separação entre as massas de  $x = x_1$  para  $x = x_1 + d$ .

#### SEÇÃO 8-4

6. Uma corrente é segura sobre uma mesa sem atrito, ficando um quinto do seu comprimento pendurado pela borda. Sendo  $l$  o comprimento da corrente e  $m$  sua massa, que trabalho é necessário para puxar para cima da mesa a parte pendente?

Resposta:  $mg/50$ .

7. Uma moeda de 4,0 g é pressionada contra uma mola vertical, comprimindo-a de 2,0 cm. A constante elástica da mola vale 50 N/m. Até que altura a moeda se elevará quando a mola for libertada?

8. Um homem de 75 kg salta de uma janela para uma rede de proteção a 10 m abaixo. A rede sofre uma deformação de 2,0 m e lança-o de volta ao ar. Supondo que não ocorra dissipação de energia no processo, ache a energia potencial da rede distendida.

Resposta:  $8,3 \times 10^3$  J.

9. Para uma certa mola  $k = 2500$  N/m. Um bloco de 4,0 kg cai sobre esta mola de uma altura  $h = 0,6$  m. Despreze o atrito; ache a deformação máxima produzida pela mola.

10. Mostre que, para a mesma velocidade escalar inicial  $v_0$ , a velocidade escalar  $v$  de um projétil será a mesma em todos os pontos de mesma altura, qualquer que seja o ângulo de lançamento.

11. Certa mola peculiar não obedece à lei de Hooke. A força (em newtons) que ela exerce quando distendida a uma distância  $x$  (em metros) tem módulo  $52,8x + 38,4x^2$  no sentido oposto à elongação. (a) Calcule o trabalho total necessário para distender a mola de  $x = 0,50$  m a  $x = 1,00$  m. (b) Com uma das extremidades da mola fixa, uma partícula de massa 2,17 kg é presa à outra extremidade, quando ela está distendida de  $x = 1,00$  m. Se a partícula é, então, liberada do repouso, calcule sua velocidade no instante em que a mola volta a configuração em que a extensão é  $x = 0,50$  m. (c) A força exercida pela mola é conservativa ou dissipativa? Explique.

12. Afirma-se que as grandes árvores podem evaporar até cerca de 900 kg de massa de água por dia. (a) Supondo que a altura média em que a água evapora é 8,0 m, qual é a energia mínima necessária para elevar a água até esta altura? (b) Qual a potência média necessária para o processo descrito, sabendo que ele ocorre durante 12 horas por dia?

Resposta: (a)  $7,06 \times 10^4$  J. (b) 1,6 W.

13. Um objeto está preso a uma mola vertical e é vagarosamente baixado até à posição de equilíbrio, o que distende a mola de um comprimento  $d$ . Se o mesmo objeto for preso à mesma mola vertical, mas solto bruscamente, qual o comprimento máximo de distensão que a mola atinge?

14. Um corpo inicialmente em repouso cai de uma altura  $h$ . Determine a energia cinética e a energia potencial como função (a) do tempo e (b) da altura. Faça gráficos das expressões e mostre que a soma, ou seja, a energia total, é constante para ambos os casos.

#### SEÇÃO 8-5

15. Uma partícula move-se ao longo de uma linha, em uma região em que sua energia potencial varia como na Fig. 8-10. (a) Esboce, usando a mesma escala para as abscissas, o gráfico da força  $F(x)$  que atua na partícula. Indique no gráfico a escala numérica aproximada para  $F(x)$ . (b) Se a partícula tem energia total constante de 4,0 joules, esboce o gráfico de sua energia cinética. Indique a escala numérica para o eixo  $K(x)$ .

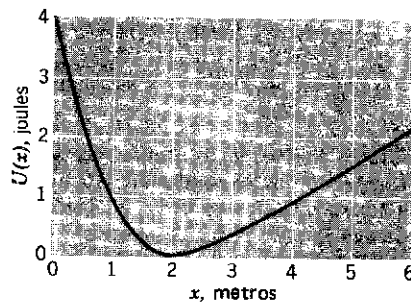


figura 8-10



16. Uma partícula  $\alpha$  (núcleo do átomo de hélio) está ligada a um núcleo pesado por um potencial semelhante ao da Fig. 8-11. (a) Construa uma função de  $x$ , que tenha esse aspecto geral, com valor mínimo  $U_0$  em  $x = 0$  e máximo  $U_1$  em  $x = x_1$  e  $x = -x_1$ . (b) Determine a força entre a partícula  $\alpha$  e o núcleo, como função de  $x$ . (c) Descreva os movimentos possíveis.

Resposta: (a)  $U(x) = -U_0 - (U_0 + U_1) \left[ \frac{x^4}{x_1^4} - 2 \frac{x^2}{x_1^2} \right]$

(b)  $F(x) = 4(U_0 + U_1) \left[ (x^3/x_1^4) - x/x_1^2 \right]$

(c) Equação estável para  $x = 0$  e instável para  $x = x_1$  e  $x = -x_1$ .

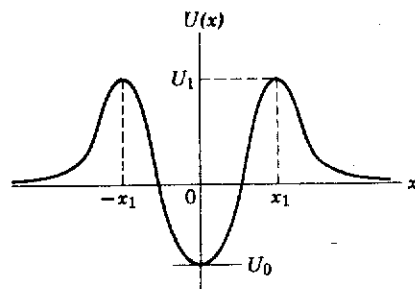


figura 8-11

SEÇÃO 8-6

17. O fio indicado na Fig. 8-12 tem comprimento  $l = 1,5$  m. Quando se soltar a esfera, ela percorrerá o arco pontilhado. Qual será sua velocidade ao atingir o ponto mais baixo de sua trajetória?

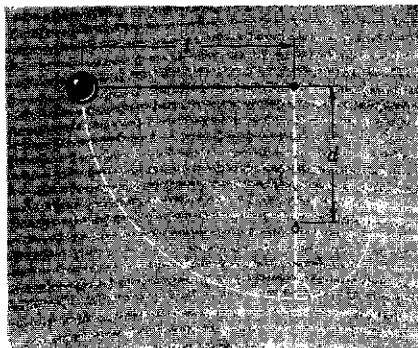


figura 8-12

18. Um carro de montanha-russa com massa  $m$  inicia seu movimento no ponto A com velocidade  $v_0$ , como mostra a Fig. 8-13. Suponha que ele possa ser considerado como uma partícula e que permaneça sempre sobre o trilho. (a) Qual será a velocidade do carro nos pontos B e C? (b) Que desaceleração constante é necessária para detê-lo no ponto E se é freado no ponto D?

Resposta: (a)  $v_B = v_0$ ;  $v_C = \sqrt{v_0^2 + gh}$ . (b)  $a = -(v_0^2 + 2gh)/2L$

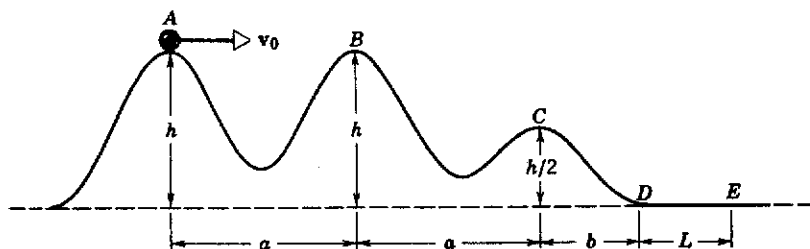


figura 8-13

19. Que força corresponde a uma energia potencial  $U = -ax^2 + bxy + z$ ?  
 20. A energia potencial de certo campo de forças bidimensional é expressa por  $U(x, y) = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2)$ . (a) Deduzir  $F_x$  e  $F_y$  e descrever o vetor força em cada ponto, em termos das coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$ . (b) Deduzir  $F_r$  e  $F_\theta$ , descrevendo o campo de força, em cada ponto, em termos das coordenadas polares  $r$  e  $\theta$  do ponto. (c) Você pode imaginar um modelo físico de tal força?

Resposta: (a)  $F_x = -kx$ ;  $F_y = -ky$ ;  $F$  aponta em direção à origem.

(b)  $F_r = -kr$ ;  $F_\theta = 0$ .

21. O chamado potencial de Yukawa.

$$U(r) = -\frac{r_0}{r} U_0 e^{-r/r_0}$$

fornece uma descrição razoavelmente precisa da interação entre núcleons (isto é, nêutrons e prótons, os constituintes do núcleo). A constante  $r_0$  vale cerca de  $1,5 \times 10^{-15}$  m e a constante  $U_0$  vale cerca de 50 MeV. (a) Ache a expressão correspondente à força de atração. (b) A fim de mostrar o curto alcance dessa força, calcule a razão entre a força em  $r = 2r_0$ ,  $4r_0$  e  $10r_0$  e seu valor em  $r = r_0$ .

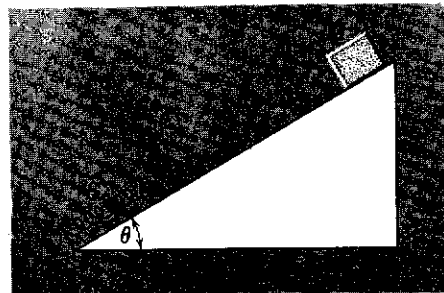


figura 8-14

22. Observe a Fig. 8-14. Uma mola ideal, de massa desprezível,  $S$ , pode ser comprimida 80 cm por uma força de 100 N. Esta mola é colocada na base de um plano inclinado

sem atrito, que forma um ângulo  $\theta = 30^\circ$ . Uma massa de 10 kg é liberada do alto do plano e pára momentaneamente após comprimir a mola 1,5 m. (a) Determine a distância percorrida pela massa. (b) Calcule a velocidade da massa no momento em que atinge a mola.

Resposta: (a) 2,9 m. (b) 3,7 m/s.

23. O módulo da força de atração entre o núcleo positivo e o elétron negativo de um átomo de hidrogênio é expresso por

$$F = k \frac{e^2}{r^2},$$

sendo  $e$  a carga do elétron,  $k$  uma constante e  $r$  a distância entre núcleo e elétron. Suponha que o núcleo seja fixo. O elétron, que inicialmente descreve uma órbita circular de raio  $R_1$ , em torno do núcleo, pula repentinamente para uma órbita circular de raio  $R_2$  menor que  $R_1$ . (a) Calcular a variação de energia cinética do elétron, usando a segunda lei de Newton. (b) Usando a relação entre força e energia potencial, calcular o decréscimo na energia potencial do átomo. (c) Encontrar de quanto decresce a energia total do átomo nesse processo. (Essa energia é emitida sob a forma de radiação.)

24. Uma haste leve e rígida, de comprimento  $l$  tem uma massa  $m$  ligada à extremidade, formando um pêndulo simples. Ela é invertida e a seguir largada. Quais são (a) a velocidade  $v$  no ponto mais baixo e (b) a tração  $T$ , na suspensão, naquele instante? (c) O mesmo pêndulo é, a seguir, colocado em posição horizontal e abandonado. A que ângulo da vertical a tração na suspensão será igual ao peso (em módulo)?

Resposta: (a)  $2\sqrt{gl}$ . (b)  $5mg$ . (c)  $71^\circ$ .

25. Um pêndulo simples de comprimento  $l$ , tendo na extremidade uma bola de massa  $m$ , tem velocidade  $v_0$  quando o fio forma com a vertical um ângulo  $\theta_0$  ( $0 < \theta_0 < \pi/2$ ), como na Fig. 8-15. Em função de  $g$  e das grandezas anteriormente dadas, determine (a) a velocidade  $v_1$  na posição mais baixa, (b) o menor valor  $v_2$  que  $v_0$  poderia ter se o fio atingisse a posição horizontal durante o movimento, (c) a velocidade  $v_3$  tal que, se  $v_0 > v_3$ , o pêndulo não oscilará, pelo contrário, continuará a mover-se em um círculo vertical.

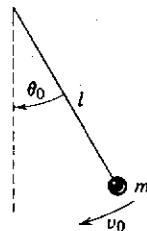


figura 8-15

26. Uma pedra de 3,0 kg está amarrada a uma corda que tem 5,5 m de comprimento. Quando a corda está formando um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal, a pedra é projetada perpendicularmente à corda, afastando-se do solo. Sua velocidade é de 9 m/s quando passa pelo ponto mais baixo de sua trajetória. (a) Determine a velocidade da pedra no momento em que foi lançada. (b) Calcule o maior ângulo formado com a vertical, durante o movimento da pedra. (c) Ache a energia mecânica total do sistema, supondo o ponto mais baixo da trajetória como sendo o zero da energia potencial gravitacional.

Resposta: (a) 7 m/s. (b)  $75,5^\circ$ . (c) 121,5 J.

27. Um pequeno bloco de massa  $m$  desliza ao longo de um trilho, sem atrito, como mostra a Fig. 8-16. (a) Se ele sai do repouso em  $P$ , qual a força resultante que atua nele, em  $Q$ ? (b) A que altura acima da parte horizontal do trilho, deve o bloco ser largado para que a força que o trilho exerce sobre ele, no topo, seja igual ao seu peso?

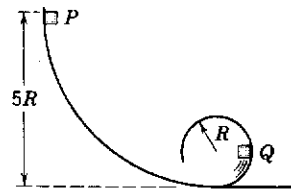


figura 8-16

28. Uma massa puntiforme  $m$  parte do repouso e desliza sobre a superfície de uma esfera sem atrito, de raio  $r$  como na Fig. 8-17. Meça os ângulos a partir da vertical e a energia potencial a partir do topo. Ache (a) a variação de energia potencial da massa com o ângulo; (b) a energia cinética como função do ângulo; (c) as acelerações radial e tangencial em função do ângulo; (d) o ângulo em que a massa abandona a esfera.

Resposta: (a)  $-mgr(1 - \cos \theta)$ . (b)  $mgr(1 - \cos \theta)$ . (c)  $2g(1 - \cos \theta)$ ;  $g \sin \theta$ . (d)  $\cos^{-1} 2/3$ .

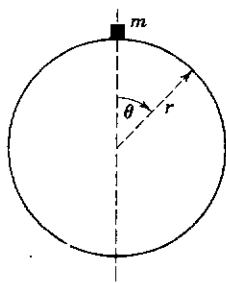


figura 8-17

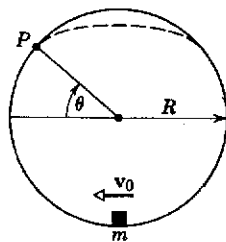


figura 8-18

29. A partícula  $m$  na Fig. 8-18 move-se em um círculo vertical de raio  $R$  dentro de um trilho. Não há atrito. Quando  $m$  está na posição mais baixa, sua velocidade é  $v_0$ . (a) Qual é o valor mínimo  $v_m$  de  $v_0$  para o qual  $m$  percorrerá todo o trilho sem perder contato com ele? (b) Suponha  $v_0$  igual a  $0,775 v_m$ . A partícula subirá pelo trilho até o ponto  $P$ , no qual ela perderá contato com o trilho e percorrerá uma trajetória representada aproximadamente pela linha interrompida. Ache a posição angular  $\theta$  do ponto  $P$ .

30. O prego da Fig. 8-12 está colocado à distância  $d$  abaixo do ponto de suspensão do pêndulo. Mostre que  $d$  deve valer pelo menos  $0,6 l$  para que a esfera descreva um círculo completo tendo o prego como centro.
31. Duas crianças estão brincando com um jogo no qual elas tentam atirar bolas de gude dentro de uma pequena caixa no chão. Elas usam um brinquedo que lança as bolas de gude pela descompressão de uma mola e que é colocada horizontalmente sobre uma mesa sem atrito (Fig. 8-19). A primeira criança comprime a mola  $1,2$  cm e a bola cai  $18$  cm antes do alvo, que está a  $2,0$  m horizontalmente da borda da mesa. A que distância deve a segunda criança comprimir a mola de modo a que a bola atinja o interior do alvo?

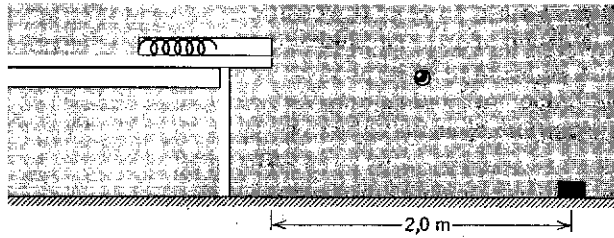


figura 8-19

32. Uma escada rolante liga um andar com outro que está  $8,0$  m acima. A escada tem  $14$  m de comprimento, e move-se a  $0,70$  m/s. (a) Calcule a potência do motor para transportar o máximo de  $100$  pessoas por minuto, sendo a massa média das pessoas igual a  $70$  kg. (b) Um homem de  $780$  N de peso sobe a escada em  $12$  segundos. Ache o trabalho que o motor realiza sobre o homem. (c) Se o homem voltasse no meio e descesse a escada de modo a permanecer no mesmo nível, o motor realizaria trabalho sobre ele?  
Resposta: (a)  $9,1 \times 10^3$  J. (b)  $3,7 \times 10^3$  J. (c) Não.
33. Suponha que o fio da Fig. 8-12 seja muito elástico, digamos, de borracha, e que no momento que a bola é largada, tenha o comprimento  $l$ , sem distensão. (a) Explique por que você esperaria que a bola atingisse um ponto, abaixo do ponto de suspensão, a uma distância desse, superior a  $l$ . (b) Mostre, empregando considerações dinâmicas e de energia que se  $\Delta l$  é pequeno, comparado a  $l$ , o fio esticará por um valor  $\Delta l = 3 mg/k$ , onde  $k$  é a constante elástica do fio. Note que quanto maior for  $k$ , menor será  $\Delta l$ , e melhor a aproximação  $\Delta l \ll l$ . (c) Mostre que, sob tais circunstâncias, a velocidade da bola, embaixo, é  $v = \sqrt{2g(l - 3mg/2k)}$ , inferior a que teria um fio sem elasticidade ( $k = \infty$ ). Dê uma explicação física para tal resultado, empregando considerações de energia.
34. Tome como referência a Fig. 8-16. Calcule a altura mínima em relação à base para que uma partícula, abandonada no ponto  $P$ , possa atingir o ponto superior da circunferência sem cair. Despreze o atrito.  
Resposta:  $5R/2$ .

## SEÇÃO 8-7

35. Dois picos cobertos de neve, com elevações de  $3\ 800$  m e  $3\ 600$  m, estão separados por um vale. Do topo do pico mais alto ao topo do pico mais baixo, estende-se uma rota para esqui, com  $3\ 000$  m de comprimento. (a) Um esquiador parte do repouso do pico mais alto. Com qual velocidade ele atingirá o topo do pico mais baixo, esquiando o mais rápido possível, sem nunca tentar diminuir sua velocidade. Despreze o atrito. (b) Faça uma estimativa da ordem de grandeza do coeficiente de atrito máximo necessário para que o esquiador possa atingir o pico mais baixo.
36. Resolva novamente o Probl. 8 do Cap. 4 usando o princípio da conservação da energia.
37. Um projétil possui massa igual a  $10$  kg. O projétil é lançado verticalmente de baixo para cima com velocidade de  $400$  m/s. A resistência do ar produz a dissipação de uma quantidade de energia igual a  $6 \times 10^3$  J. (a) Calcule a altura máxima que seria atingida pelo projétil desprezando a resistência do ar. (b) Ache a altura que seria atingida pelo projétil supondo a dissipação mencionada. (c) Supondo que na descida do projétil o ar produza a mesma dissipação de energia, qual seria a velocidade do projétil ao retornar ao solo?
38. Mostrar que, existindo atrito em um sistema que sob outros aspectos é conservativo, a taxa de dissipação da energia mecânica é igual à força de atrito multiplicada pelo módulo da velocidade naquele instante, isto é,

$$\frac{d(K + U)}{dt} = -fv.$$

39. Um menino está sentado no alto de um monte hemisférico de gelo (Fig. 8-20). Ele recebe um leve empurrão e começa a deslizar sobre o gelo. (a) Mostre que ele é projetado para fora do gelo de um ponto cuja altura é  $2R/3$ , sendo a superfície sem atrito. (b) Se houver atrito entre o gelo e o menino, ele é projetado para fora de uma altura maior ou menor que a de (a)?

figura 8-20

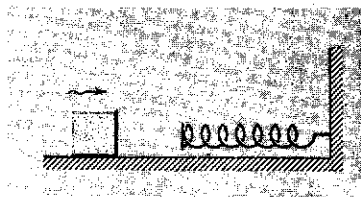


figura 8-21

40. Um bloco de 1,0 kg colide com uma mola horizontal sem massa, cuja constante elástica vale 2,0 N/m. O bloco comprime a mola 4,0 m a partir da posição de repouso. Supondo que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície horizontal seja 0,25, qual era a velocidade do bloco no momento da colisão? (Ver Fig. 8-21.)

Resposta: 7,2 m/s.

41. Um corpo de massa  $m$  parte do repouso, descendo um plano inclinado de comprimento  $l$  e que forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal. (a) Sendo  $\mu$  o coeficiente de atrito determine a velocidade do corpo na base do plano. (b) Que distância  $d$  ele percorre em uma superfície horizontal semelhante, depois de atingir a base do declive? Resolva, usando métodos de energia e diretamente pela aplicação das leis de Newton.

42. Um bloco de 5,0 kg sobe um plano de  $30^\circ$  de inclinação com uma energia cinética inicial de 250 J. (a) Supondo um coeficiente de atrito igual a 0,35 calcule a distância que ele percorrerá. (b) Com que velocidade ele volta à base do plano?

Resposta: (a) 6,3 m. (b) 4,9 m/s<sup>2</sup>.

43. Um corpo com massa igual a 10 kg é empurrado para cima ao longo de um plano inclinado de 3 m de comprimento, que forma com a horizontal um ângulo de  $30^\circ$ , através de uma força horizontal  $F$ . Desprezando o atrito, calcule: (a) o trabalho realizado pela força, sabendo que a velocidade do corpo na base do plano é igual a 0,5 m/s e, no topo do plano a velocidade vale 4,0 m/s, (b) o módulo da força  $F$ . (c) Suponha agora que o plano possua atrito e que o coeficiente de atrito cinético seja igual a 0,27; determine a altura máxima atingida pelo corpo.

44. Considere a Fig. 8-22. Uma partícula desliza sobre um trilho que possui extremidades elevadas e uma parte central plana. A parte plana possui comprimento  $l = 20$  m. As partes curvas não apresentam atrito. O coeficiente de atrito cinético da região plana vale 0,30. Larga-se a partícula do ponto  $A$  cuja altura é dada por  $h = 10$  m. Em que ponto a partícula irá parar?

Resposta: Num ponto situado a 6,7 m da extremidade esquerda da parte plana.

45. Uma haste rígida, bem leve, cujo comprimento é  $l$ , tem presa, em uma extremidade, uma bola de massa  $m$  (Fig. 8-23). A outra extremidade é articulada em torno de um eixo, sem atrito, de tal modo que a bola percorre um círculo vertical. A bola parte de uma posição horizontal  $A$ , com velocidade inicial  $v_0$ , para baixo. A bola chega ao ponto  $D$  e, em seguida, pára. (a) Deduza uma expressão para  $v_0$  em função de  $l$ ,  $m$  e  $g$ . (b) Qual a tensão na haste quando a bola está em  $B$ ? (c) Um pouco de areia é colocado sobre o eixo de articulação, após o que, a bola chega até  $C$ , depois de ter partido de  $A$  com a mesma velocidade de antes. Qual o trabalho realizado pelo atrito durante esse movimento. (d) Qual o trabalho total realizado pelo atrito antes de a bola parar em  $B$ , após oscilar repetidas vezes?

46. Considere a seção reta indicada na Fig. 8-20. Suponha que esta seção semicircular seja obtida pela interseção de um plano ortogonal a um semicilindro. Um menino estava sentado inicialmente no topo desta superfície semicilíndrica. (a) Desprezando o atrito, calcule a altura em que o menino deixa a superfície ao escorregar sem velocidade inicial pela superfície lateral do semicilindro. (b) Suponha agora que exista atrito entre o menino e a superfície. Calcule a altura em que ele abandona a superfície, sabendo que a energia dissipada pelo atrito é igual a um quinto da variação da energia cinética desde o topo até o ponto onde ele abandona a superfície. O raio do cilindro é igual a  $R$ .

Resposta: (a)  $2R/3$ . (b)  $5R/8$ .

47. O cabo de um elevador de  $3,0 \times 10^3$  kg se rompe quando ele está parado no primeiro andar, de modo que o piso do elevador se encontra a uma distância  $d = 3,6$  m acima do nível superior da mola indicada na Fig. 8-24. A constante desta mola amortecedora vale  $k = 1,5 \times 10^6$  N/m. Um dispositivo de segurança aperta os trilhos que serve de guia ao elevador, de modo que surge uma força de atrito constante de  $4,5 \times 10^3$  N que se opõe ao movimento do elevador. (a) Ache a distância em que a mola é comprimida.

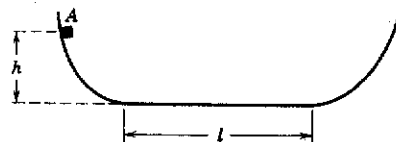


figura 8-22

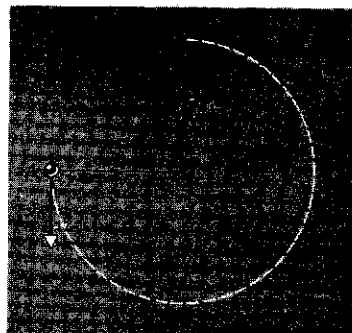


figura 8-23

(b) Calcule a velocidade do elevador quando a mola retorna ao seu ponto de equilíbrio. (c) Calcule a distância percorrida pelo elevador quando ele sobe após a ação da mola. (d) Usando o princípio da conservação da energia calcule a distância aproximada que o elevador percorre até parar.

48. Num determinado campo existe uma força dissipativa  $F$ . Num dado instante, o corpo se move com velocidade  $v$ . Seja  $E$  a energia mecânica total do sistema. Obtenha uma relação entre a potência instantânea dissipada por esta força e a taxa de variação da energia total do sistema.

Resposta:  $dE/dt = -F \cdot v$ .

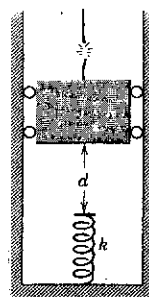


figura 8-24

### SEÇÃO 8-9

49. Uma válvula diodo consiste de um anodo cilíndrico que circunda um catodo também cilíndrico. Um elétron, cuja energia potencial, em relação ao anodo, é de  $4,8 \times 10^{-16}$  J, sai da superfície do catodo com velocidade inicial nula. Suponha que o elétron não se choque com quaisquer moléculas e que a atração gravitacional seja desprezível. (a) Que energia cinética teria o elétron quando atingisse o anodo? (b) Sendo de  $9,1 \times 10^{-31}$  kg a massa do elétron, determine sua velocidade final. (c) É justificável utilizar relações clássicas para a energia cinética e a massa, em lugar das relações relativísticas?
50. Qual a velocidade de um elétron com uma energia cinética de (a)  $1,0 \times 10^5$  eV. (b)  $1,0 \times 10^6$  eV?  
Resposta: (a)  $1,6 \times 10^8$  m/s. (b)  $2,8 \times 10^8$  m/s.
51. Os Estados Unidos consumiram cerca de  $1,6 \times 10^{12}$  kW · h de energia elétrica em 1970. Quantos quilogramas de substância teriam que ser completamente destruídos para produzir esta energia?
52. Um reator nuclear de uma usina elétrica fornece, regularmente, durante um ano, 60 MW de potência utilizável. (a) Que quantidade de energia, em joules, ele fornece? (b) Supondo que ainda 90 MW de potência são perdidos pela produção de calor, determine a massa, convertida em energia, dentro de um ano, pela usina.  
Resposta: (a)  $1,9 \times 10^{15}$  J. (b) 52 g.
53. Que quantidade de substância teria que ser convertida em energia a fim de acelerar uma aeronave espacial de  $1,0 \times 10^6$  kg, a partir do repouso até uma velocidade de  $(1/10)c$ ?
54. A massa de repouso de um elétron vale  $m_0 = 9,1 \times 10^{-31}$  kg. Se um elétron se move com velocidade igual a  $0,999c$ , determine: (a) a razão  $m/m_0$ , (b) sua energia cinética total, (c) a razão entre a energia cinética clássica e a energia cinética relativística.  
Resposta: (a)  $m/m_0 = 22,37$ . (b)  $1,8 \times 10^{-12}$  J. (c) 0,02.
55. A massa de repouso de um corpo vale 0,01 kg. (a) Calcule sua energia cinética quando ele se move com velocidade igual a  $0,99c$ . (b) Qual seria a massa do corpo no caso anterior? (c) Corpos macroscópicos não podem atingir a velocidade mencionada no item anterior. Supondo que a velocidade máxima atingida por um foguete seja da ordem de 50 000 km/h, calcule a razão  $m/m_0$  e verifique se é necessário, neste caso, usar a correção relativística para a massa e para a energia cinética do foguete.
56. A Eq. 8-21,  $K = (m - m_0)c^2$ , é a equação relativística usual para a energia cinética. (a) Mostre que, ao aplicar a Eq. 8-20,  $m = m_0(1 - \beta^2)^{-1/2}$  pode-se também exprimir a energia cinética relativística como sendo  $K = \frac{m}{m + m_0} mv^2$ . (b) Compare o modo pelo qual essas duas expressões reduzem-se ao resultado clássico quando  $m \rightarrow m_0$  ou  $v/c \rightarrow 0$ . (Veja "Parallels between Relativistic and Classical Dynamics for Introductory Courses", de Donald E. Fehline. *American Journal of Physics*, junho, 1975.)
57. Acredita-se que o Sol obtém sua energia através de um processo de fusão em que quatro átomos de hidrogênio são transformados em um átomo de hélio com a emissão de energia sob várias formas de radiação. Se a massa de repouso do átomo de hidrogênio é de 1,0081 unidades atômicas de massa (veja Ex. 8) e a massa de repouso do átomo de hélio é de 4,0039 unidades atômicas de massa, calcule a energia liberada em cada processo de fusão.

# 9

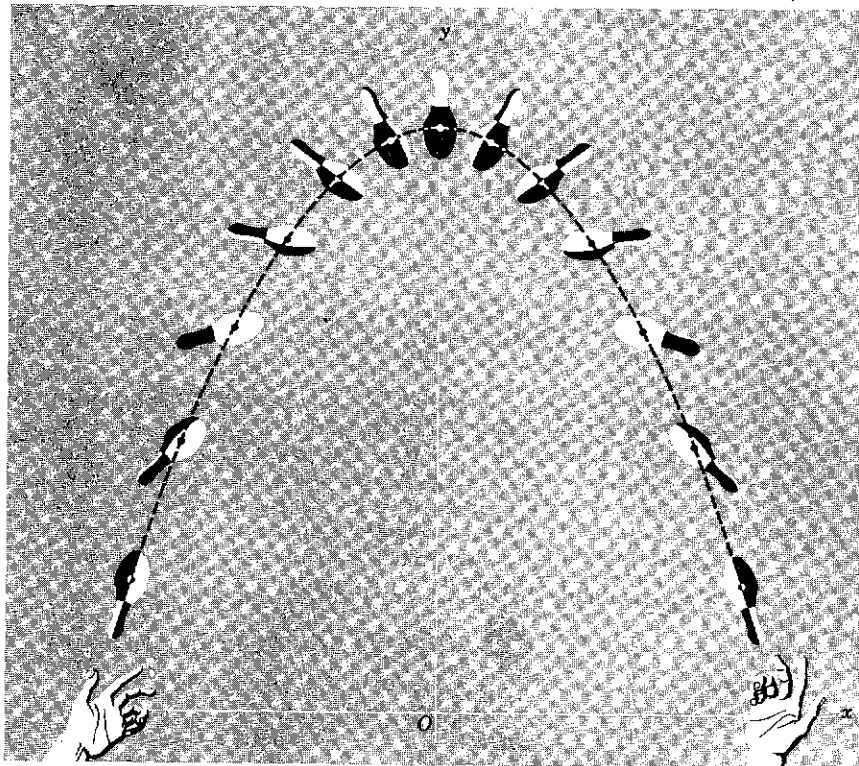
## **conservação do momento linear**

Até agora temos tratado os objetos como se fossem partículas, isto é, temos tratado como objetos que possuem massa mas não têm dimensões. No movimento de translação de um corpo, um de seus pontos, à medida que o tempo passa, sofre o mesmo deslocamento que qualquer outro, de tal maneira que o movimento de uma partícula representa o movimento de todo o corpo. Mas, mesmo quando o corpo roda ou vibra, enquanto se desloca, há um ponto no corpo, chamado *centro de massa*, que se desloca da mesma maneira que se deslocaria uma única partícula, sujeita ao mesmo sistema de forças externas. A Fig. 9-1 mostra o movimento parabólico do centro de massa de uma raquete, lançada de um jogador para o outro; nenhum outro ponto da raquete tem uma trajetória tão simples. Observe que, se a raquete estivesse se movendo em translação simples (veja Fig. 3-1), todos os seus pontos experimentaríamos o mesmo deslocamento que o centro de massa, mostrado na Fig. 9-1. Por esta razão, o movimento do centro de massa de um corpo é chamado de movimento de translação do corpo.

Ainda que o sistema com o qual estamos lidando não seja um corpo rígido, pode ser definido para ele um centro de massa, cujo movimento é também descrito de maneira relativamente simples, mesmo que as partículas que constituem o sistema estejam trocando suas posições, umas em relação às outras, de maneira relativamente complicada, enquanto se processa o movimento. Nesta seção definiremos o centro de massa e mostraremos como calcular sua posição. Na próxima seção discutiremos as propriedades que o tornam útil na descrição dos movimentos de objetos extensos ou sistemas de partículas.

9-1

*CENTRO DE MASSA*



**figura 9-1**  
 Uma raquete é atirada de um jogador ao outro. Embora ela gire e volteie em torno de um eixo, como mostra a figura, existe um ponto deste eixo, o centro de massa, que percorre uma trajetória parabólica simples.

Consideremos, primeiramente, o caso simples do sistema de duas partículas  $m_1$  e  $m_2$  a distâncias  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente, de uma origem  $O$ . O centro de massa do sistema é definido como um ponto  $C$  à distância  $x_{cm}$  da origem, sendo  $x_{cm}$  dada por

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (9-1)$$

Este ponto (Fig. 9-2) tem a seguinte propriedade: o produto de sua distância à origem pela massa total do sistema,  $M (= m_1 + m_2)$ , é igual à soma dos produtos de cada uma das massas pela sua respectiva distância à origem; isto é,

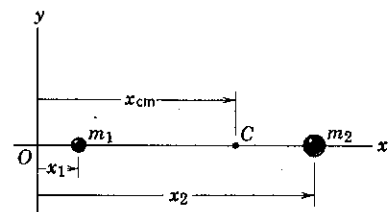
$$(m_1 + m_2) x_{cm} = M x_{cm} = m_1 x_1 + m_2 x_2.$$

Na Eq. 9-1,  $x_{cm}$  pode ser considerada como a média ponderada de  $x_1$  e  $x_2$ , onde os pesos são representados pelas massas. Uma analogia ajudará a fixar este conceito. Suponhamos, por exemplo, que temos em mão duas caixas de pregos. Em uma caixa temos  $n_1$  pregos, todos de mesmo comprimento  $l_1$ ; na outra, temos  $n_2$  pregos, todos de comprimento  $l_2$ . Devemos determinar o comprimento médio dos pregos. Se  $n_1$  fosse igual a  $n_2$ , o tamanho médio seria simplesmente  $(l_1 + l_2)/2$ . Mas se  $n_1 \neq n_2$ , devemos levar em conta o fato de haver maior número de um prego que de outro, introduzindo no cálculo um fator que representa o "peso" de cada comprimento. Para  $l_1$  este fator é  $n_1/(n_1 + n_2)$  e para  $l_2$  é  $n_2/(n_1 + n_2)$ , representando a fração do número total de pregos em cada caixa. Então, a média ponderada dos comprimentos dos pregos será:

$$\bar{l} = \left( \frac{n_1}{n_1 + n_2} \right) l_1 + \left( \frac{n_2}{n_1 + n_2} \right) l_2$$

ou

$$\bar{l} = \frac{n_1 l_1 + n_2 l_2}{n_1 + n_2}$$



**figura 9-2**  
 O centro de massa das duas massas  $m_1$  e  $m_2$  está situado na linha que une  $m_1$  e  $m_2$ , em  $C$ , à uma distância  $x_{cm}$  da origem.

O centro de massa definido na Eq. 9-1 é então uma média ponderada das coordenadas das partículas, onde o "peso", para cada partícula, é a fração da massa total que a massa de cada partícula representa.

Se tivermos  $n$  partículas,  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , ao longo de uma linha reta, por definição, o centro de massa destas partículas, em relação a uma origem, é

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad (9-2)$$

onde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as distâncias das massas à origem em relação à qual  $x_{\text{cm}}$  foi medido. O símbolo  $\Sigma$  representa a operação soma, neste caso, estendida a todas as  $n$  partículas. A soma

$$\sum m_i = M$$

é a massa do sistema. Poderemos, então, reescrever a Eq. 9-2 sob a forma

$$M x_{\text{cm}} = \sum m_i x_i. \quad (9-2a)$$

Suponhamos, agora, três partículas que não estejam em linha reta; elas estão localizadas em um plano, como na Fig. 9-3. O centro de massa  $C$  é definido e localizado pelas coordenadas;  $x_{\text{cm}}$  e  $y_{\text{cm}}$ , tais que

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (9-3)$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

onde  $x_1$  e  $y_1$  são as coordenadas das partículas de massa  $m_1$ ,  $x_2$  e  $y_2$  as de massa  $m_2$  e  $x_3$  e  $y_3$  as de massa  $m_3$ . As coordenadas  $x_{\text{cm}}$  e  $y_{\text{cm}}$  são medidas a partir da mesma origem, arbitrária.

Para um grande número de partículas coplanares, o centro de massa estará em  $x_{\text{cm}}$  e  $y_{\text{cm}}$ , dados por

$$x_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum m_i x_i$$

e

$$y_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum m_i y_i \quad (9-4)$$

em que  $M (= \sum m_i)$  é a massa total do sistema.

Para um grande número de partículas, não necessariamente coplanares, mas distribuídas no espaço, o centro de massa estará em  $x_{\text{cm}}$ ,  $y_{\text{cm}}$  e  $z_{\text{cm}}$ , tais que

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum m_i x_i, \quad y_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum m_i y_i \quad \text{e} \quad z_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum m_i z_i. \quad (9-5a)$$

Pela notação vetorial, cada partícula do sistema pode ter sua posição definida pelo vetor posição  $\mathbf{r}_i$  em um sistema de referência particular e o centro de massa pode ser definido pelo vetor posição

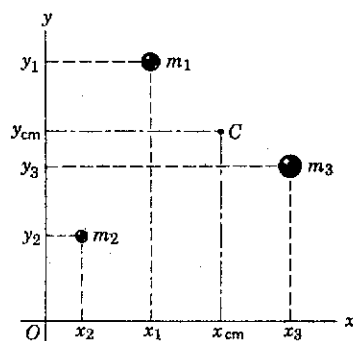


figura 9-3

O centro de massa das três massas  $m_1, m_2$  e  $m_3$  situa-se no ponto  $C$ , cujas coordenadas são  $x_{\text{cm}}, y_{\text{cm}}$ .  $C$  situa-se no mesmo plano do triângulo formado pelas três massas.



$\mathbf{r}_{cm}$ . Estes vetores são relacionados a  $x_i, y_i, z_i$  e  $x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}$  na Eq. 9-5a, por

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k}$$

e

$$\mathbf{r}_{cm} = x_{cm} \mathbf{i} + y_{cm} \mathbf{j} + z_{cm} \mathbf{k}.$$

Então as três equações escalares da Eq. 9-5a, podem ser substituídas por uma única equação vetorial

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum m_i \mathbf{r}_i \quad (9-5b)$$

na qual a soma indicada é uma soma vetorial. O estudante poderá provar que a Eq. 9-5b é verdadeira, substituindo nela as expressões de  $\mathbf{r}_i$  e  $\mathbf{r}_{cm}$  dadas antes. Observe a economia de expressão que o uso da notação vetorial possibilita. A Eq. 9-5b mostra que, se a origem do sistema de referência estiver no centro de massa (o que significa que  $\mathbf{r}_{cm} = 0$ ), então  $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$  para o sistema.

As Eqs. 9-5 representam o caso mais geral para um conjunto de partículas. As Eqs. 9-1 até 9-4 apresentam casos particulares deste. A posição de centro de massa independe do sistema de referência utilizado para localizá-lo (veja o Probl. 1). *O centro de massa de um sistema de partículas depende apenas das massas das partículas e de suas posições umas em relação às outras.*

Um corpo rígido como uma régua, pode ser considerado como um sistema de partículas muito próximas. Assim, também um corpo rígido tem um centro de massa. Entretanto, o número de partículas (átomos, por exemplo) no corpo é tão grande e suas distâncias relativas tão pequenas que devemos tratá-lo como se ele possuísse uma distribuição contínua de massa. Para obter a expressão do centro de massa de um corpo contínuo, comecemos por subdividi-lo em  $n$  pequenos elementos de massa,  $\Delta m_i$ , localizados aproximadamente nos pontos  $x_i, y_i, z_i$ . As coordenadas do centro de massa são dadas, aproximadamente, por

$$x_{cm} = \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i} \quad y_{cm} = \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i} \quad z_{cm} = \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i}.$$

Agora, consideremos que os elementos de massa sejam mais subdivididos, de tal maneira que o número  $n$  de elementos tenda para o infinito. Os pontos  $x_i, y_i, z_i$  localizarão os elementos de massa mais precisamente quando  $n$  cresce, e os localizarão exatamente quando  $n$  torna-se infinito. O corpo contínuo foi, então, subdividido em um número infinito de elementos de massas infinitesimais. As coordenadas do centro de massa podem, então, ser dadas precisamente por

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int x dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int x dm, \\ y_{cm} &= \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int y dm, \\ z_{cm} &= \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{1}{M} \int z dm. \end{aligned} \quad (9-6a)$$

Nestas expressões  $dm$  é o elemento diferencial de massa, no ponto  $x, y, z$ , e  $\int dm$  é igual a  $M$ , massa total do objeto. Para um corpo contínuo, a soma da Eq. 9-5a é substituída pela integral da Eq. 9-6a.

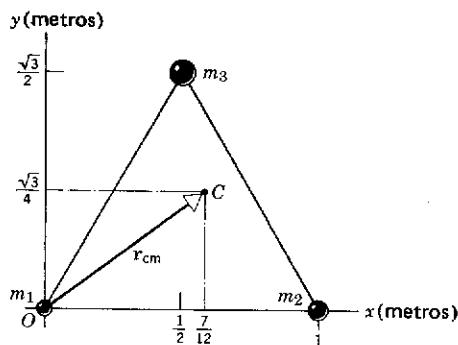
A expressão vetorial, equivalente às três expressões escalares da Eq. 9-6a, é

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm. \quad (9-6b)$$

Como antes, a soma da Eq. 9-5b foi substituída por uma integração. Novamente vemos que, se a origem do nosso sistema de referências estiver no centro de massa (isto é, se  $\mathbf{r}_{cm} = 0$ ), então  $\int \mathbf{r} dm = 0$  para o corpo. Esta integral, assim como a soma correspondente  $\sum m_i \mathbf{r}_i$  da Eq. 9-5b, é chamada de *primeiro momento de massa do sistema*.

Freqüentemente lidamos com objetos homogêneos que apresentam um ponto, uma linha ou um plano de simetria. Então, seu centro de massa cairá no ponto, na linha ou no plano de simetria. Por exemplo, o centro de massa de uma esfera homogênea (que possui um ponto de simetria) estará no centro da esfera, o centro de massa de um cone (que possui uma linha de simetria) estará sobre o seu eixo etc. Pode-se compreender que assim acontece, porque, devido à simetria, o primeiro momento de massa ( $\int \mathbf{r} dm$ ) é nulo, no centro da esfera, em algum ponto do eixo do cone etc. Segue-se, pela Eq. 9-6b, que  $\mathbf{r}_{cm} = 0$  para tais pontos, o que significa que o centro de massa se situa sobre eles.

Determine o centro de massa do sistema constituído por três partículas  $m_1 = 1,0 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 2,0 \text{ kg}$  e  $m_3 = 3,0 \text{ kg}$ , localizadas nos vértices de um triângulo equilátero de  $1,0 \text{ m}$  de lado.



### EXEMPLO 1

figura 9-4

Exemplo 1. Determinação do centro de massa,  $C$ , de três massas desiguais que formam um triângulo equilátero.

Se escolhermos o eixo dos  $x$  ao longo de um dos lados do triângulo, como mostra a Fig. 9-4, teremos:

$$x_{cm} = \frac{1,0 \text{ kg} \times 0 + 2,0 \text{ kg} \times 1,0 \text{ m} + 3,0 \text{ kg} \times 0,5 \text{ m}}{1,0 \text{ kg} + 2,0 \text{ kg} + 3,0 \text{ kg}} = \frac{7}{12} \text{ m}.$$

$$y_{cm} = \frac{1,0 \text{ kg} \times 0 + 2,0 \text{ kg} \times 0 + 3,0 \text{ kg} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m}}{1,0 \text{ kg} + 2,0 \text{ kg} + 3,0 \text{ kg}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m}.$$

O centro de massa,  $C$ , é indicado na figura. Por que ele não está sobre o centro geométrico do triângulo?

Achar o centro de massa da chapa triangular da Fig. 9-5.

### EXEMPLO 2

Se um corpo pode ser dividido em partes cujos centros de massa são conhecidos, o centro de massa do corpo pode, em geral, ser facilmente obtido. A chapa

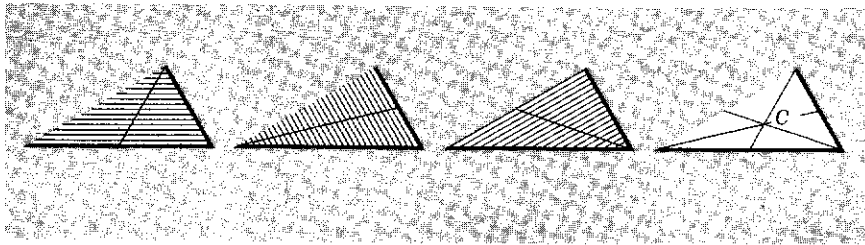


figura 9-5  
Exemplo 2. Determinação do centro de massa, C, de uma chapa triangular.

triangular pode ser dividida em faixas estreitas, paralelas a um lado. O centro de massa de cada faixa estará sobre a linha que une o meio desse lado ao vértice oposto. Mas podemos dividir o triângulo de três maneiras diferentes usando o processo mencionado, para cada um dos lados. Portanto, o centro de massa do triângulo estará na interseção das três linhas que unem o meio de cada lado aos vértices opostos. Ele é o único ponto comum às três linhas.

Agora, podemos discutir a importância física do conceito de centro de massa. Consideremos o movimento de um grupo de partículas cujas massas são  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , e cuja massa total é  $M$ . Suponhamos, por enquanto, que nenhuma massa entre ou saia do sistema, de tal modo que sua massa total,  $M$ , permaneça constante com o tempo. Na Seção 9-7 consideraremos sistemas nos quais  $M$  não é constante; um exemplo comum é o de um foguete, que expelle gases quentes, enquanto seu combustível se queima, tendo, assim, sua massa reduzida.

Da Eq. 9-5b, temos para o nosso sistema de partículas,

$$M\mathbf{r}_{\text{cm}} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots + m_n\mathbf{r}_n,$$

onde  $\mathbf{r}_{\text{cm}}$  é o vetor posição que define o centro de massa em um referencial particular. Derivando esta equação, em relação ao tempo, obteremos:

$$M \frac{d\mathbf{r}_{\text{cm}}}{dt} = m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \dots + m_n \frac{d\mathbf{r}_n}{dt} \quad (9-7)$$

ou

$$M\mathbf{v}_{\text{cm}} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \dots + m_n\mathbf{v}_n,$$

onde  $\mathbf{v}_1$  é a velocidade da primeira partícula etc., e  $d\mathbf{r}_{\text{cm}}/dt (= \mathbf{v}_{\text{cm}})$  é a velocidade do centro de massa.

Derivando a Eq. 9-7 em relação ao tempo, obteremos

$$\begin{aligned} M \frac{d\mathbf{v}_{\text{cm}}}{dt} &= m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} + \dots + m_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} \\ &= m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + \dots + m_n\mathbf{a}_n, \end{aligned} \quad (9-8)$$

onde  $\mathbf{a}_1$  é a aceleração da primeira partícula etc., e  $d\mathbf{v}_{\text{cm}}/dt (= \mathbf{a}_{\text{cm}})$  é a aceleração do centro de massa do sistema. Mas, pela segunda lei de Newton, a força  $\mathbf{F}_1$ , que age na primeira partícula, é dada por  $\mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{a}_1$ . Da mesma forma,  $\mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{a}_2$  etc. Podemos, então, escrever a Eq. 9-8, da seguinte forma

$$M\mathbf{a}_{\text{cm}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n. \quad (9-9)$$

Portanto, o produto da massa total do grupo de partículas pela aceleração do seu centro de massa é igual à resultante de todas as forças que agem no grupo de partículas considerado.

## 9-2 MOVIMENTO DO CENTRO DE MASSA

Entre todas estas forças estarão as forças *internas* exercidas pelas partículas umas sobre as outras. Entretanto, segundo a terceira lei de Newton, estas forças internas ocorrerão aos pares, cada par sendo constituído por duas forças de mesmo módulo e sentidos contrários e, assim, elas não influenciarão na resultante. Deste modo, as forças internas poderão ser retiradas do problema. A soma do segundo membro da Eq. 9-9 representa a resultante apenas das forças externas que agem em todas as partículas. Podemos, então, reescrever a Eq. 9-9 de maneira mais simples:

$$M\mathbf{a}_{cm} = \mathbf{F}_{ext.} \quad (9-10)$$

Isto mostra que *o centro de massa de um sistema de partículas desloca-se como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nele e como se todas as forças externas fossem aplicadas nele.*

Observe que se obtém este resultado muito simples sem especificar a natureza do sistema de partículas. O sistema pode ser um corpo rígido no qual as partículas estão em posições fixas umas em relação às outras, ou uma coleção de partículas na qual pode haver qualquer tipo de movimento interno. Qualquer que seja o sistema, não importando como suas partes individuais estejam se movendo, o seu centro de massa se move de acordo com a Eq. 9-10. Portanto, em lugar de tratar os corpos como partículas isoladas, como foi feito nos capítulos anteriores, podemos tratá-los como conjuntos de partículas.

Poderemos obter o movimento de translação do corpo, isto é, o movimento do seu centro de massa, supondo que toda a massa do corpo esteja concentrada em seu centro de massa e que todas as forças externas estejam aplicadas naquele ponto.<sup>1</sup>

Este é, realmente, o procedimento que temos seguido implicitamente em todos os nossos diagramas de forças e na solução de problemas.

Além de justificar nosso procedimento anterior e de torná-lo mais real, nós sabemos, agora, como descrever o movimento de translação de um *sistema* de partículas e como descrever o movimento de *translação* de um corpo que também esteja em rotação.

Neste capítulo e no seguinte, aplicaremos este resultado no movimento linear de um sistema de partículas. Em capítulos posteriores, veremos como isto simplifica a análise do movimento de rotação.

---

Considere três partículas de massas diferentes, sobre as quais atuam forças externas, como mostra a Fig. 9-6. Determine a aceleração do centro de massa do sistema.

Primeiramente, determinaremos as coordenadas do centro de massa. Da Eq. 9-3, vem

$$x_{cm} = \frac{(8,0 \times 4) + (4,0 \times -2) + (4,0 \times 1)}{16} \text{ m} = 1,8 \text{ m},$$

$$y_{cm} = \frac{(8,0 \times 1) + (4,0 \times 2) + (4,0 \times -3)}{16} \text{ m} = 0,25 \text{ m}.$$

<sup>1</sup> Quando a força externa é a força da gravidade, ela atua no *centro de gravidade* do corpo. Em todos os casos consideramos o centro de gravidade coincidindo com o centro de massa, que é um conceito mais geral. As condições segundo as quais estes pontos deixam de coincidir, em um dado corpo, serão discutidas no Cap. 14.

### EXEMPLO 3

Estes valores são mostrados em  $C$  na Fig. 9-6.

Para obter a aceleração do centro de massa, determinaremos, inicialmente, a resultante das forças externas que atuam no sistema constituído pelas três partículas. O componente desta força segundo o eixo dos  $x$  é

$$F_x = 14 \text{ N} - 6,0 \text{ N} = 8,0 \text{ N},$$

e o componente segundo o eixo dos  $y$  é

$$F_y = 16 \text{ N}.$$

Portanto, a resultante das forças externas tem módulo

$$F = \sqrt{(8,0)^2 + (16)^2} \text{ N} = 18 \text{ N},$$

e faz com o eixo  $ox$  um ângulo  $\theta$  dado por

$$\text{tg } \theta = \frac{16 \text{ N}}{8,0 \text{ N}} = 2,0 \quad \text{ou} \quad \theta = 63^\circ.$$

Então, através da Eq. 9-10, a aceleração do centro de massa será

$$a_{\text{cm}} = \frac{F}{M} = \frac{18 \text{ N}}{16 \text{ kg}} = 1,1 \text{ m/s}^2,$$

que faz um ângulo de  $63^\circ$  com o eixo  $ox$ .

Embora as três partículas tenham suas posições relativas variáveis com o tempo, o centro de massa se deslocará, como foi mostrado, com aceleração constante.

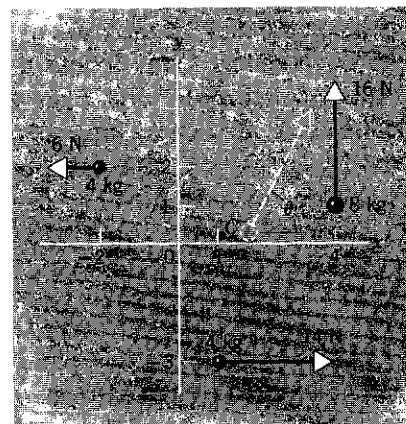


figura 9-6

Exemplo 3. Determinação do movimento do centro de massa de três massas, cada uma submetida a uma força diferente. As forças estão todas situadas no plano definido pelas partículas. As distâncias são indicadas ao longo dos eixos em metros.

O momento linear, ou simplesmente momento, de uma partícula isolada é um vetor  $\mathbf{p}$  definido como o produto de sua massa,  $m$ , pela sua velocidade,  $\mathbf{v}$ . Isto é,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (9-11)$$

O momento, sendo o produto de uma grandeza escalar por um vetor, será um vetor. Por ser proporcional a  $\mathbf{v}$ , o momento  $\mathbf{p}$  de uma dada partícula depende do referencial do observador; é preciso sempre especificar este referencial.

Newton, em seus famosos *Principia*, expressou a segunda lei do movimento em termos do momento linear (que ele chamou "quantidade de movimento"). Em terminologia moderna a segunda lei de Newton pode ser expressa da seguinte maneira: *A taxa de variação do momento linear de um corpo é proporcional à resultante das forças que atuam no corpo e tem a direção desta força.*

Expressando em símbolos, teremos

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (9-12)$$

Se nosso sistema tem uma única partícula de massa (constante)  $m$ , esta formulação da segunda lei de Newton é equivalente à forma  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , que temos usado até agora. Isto é, se  $m$  é constante, então

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

As relações  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  e  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ , para uma partícula isolada, são completamente equivalentes na mecânica clássica.

### 9-3

#### MOMENTO LINEAR DE UMA PARTÍCULA

Na teoria da relatividade (ver Tópico Suplementar V), a forma  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  da segunda lei, para uma partícula isolada, não é válida. Entretanto, verificou-se que a segunda lei de Newton na forma  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  é ainda válida, se o momento  $\mathbf{p}$  da partícula isolada for definido não como  $m_0\mathbf{v}$ , mas como

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (9-13)$$

Este resultado sugere uma nova definição de massa (compare as Eqs. 9-11 e 9-13)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

de modo que o momento possa ainda ser escrito como  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ ; veja Sec. 8-9. Nessas equações  $v$  é a velocidade da partícula.  $c$  é a velocidade da luz e  $m_0$  é a "massa de repouso" do corpo (sua massa quando  $v = 0$ ). Desta definição deve-se esperar que a massa da partícula cresça com a velocidade. Em sistemas atômicos e nucleares, as partículas podem adquirir velocidades enormes, comparáveis à velocidade da luz. Este conceito pode, então, ser verificado diretamente em tais sistemas, porque para essas partículas, o aumento da massa, em relação à massa de repouso, é suficientemente grande para que possa ser medido com precisão. Os resultados de todas as experiências como estas, indicam que o efeito existe realmente, sendo expresso exatamente pela equação acima. (Veja, por exemplo, Fig. 8.8.)

Suponhamos que em lugar de uma partícula única tenhamos um sistema de  $n$  partículas, com massas  $m_1, m_2$  etc. Continuaremos a supor, como fizemos na Sec. 9-2, que nenhuma massa entre no sistema ou saia dele, de maneira que a massa  $M (= \Sigma m_i)$  do sistema permaneça constante com o tempo. As partículas podem interagir umas com as outras e forças externas podem, também, atuar sobre elas. Cada partícula terá uma velocidade e um momento. A partícula 1 de massa  $m_1$  e velocidade  $\mathbf{v}_1$  terá o momento  $\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1$ , por exemplo. O sistema como um todo terá, num referencial particular, um momento  $\mathbf{P}$  que é definido, simplesmente, como a soma vetorial dos momentos das partículas individuais, no mesmo referencial, ou seja,

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n$$

ou

$$\mathbf{P} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \dots + m_n\mathbf{v}_n \quad (9-14)$$

Se compararmos esta relação com a Eq. 9-7 vemos, imediatamente, que

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{cm} \quad (9-15)$$

definição equivalente do momento de um sistema de partículas. Em palavras, a Eq. 9-15 estabelece: *O momento linear total de um sistema de partículas é igual ao produto de sua massa total pela velocidade do seu centro de massa.*

Vimos (Eq. 9-10) que a segunda lei de Newton para um sistema de partículas pode ser escrito como

$$\mathbf{F}_{ext.} = M\mathbf{a}_{cm} \quad (9-10)$$

no qual  $\mathbf{F}_{ext.}$  é a resultante de todas as forças externas que agem no sistema; lembramos que as forças internas que atuam entre as partículas se cancelam mutuamente aos pares, devido à terceira lei de Newton (veja Fig. 9-7).

#### 9-4

#### MOMENTO LINEAR DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

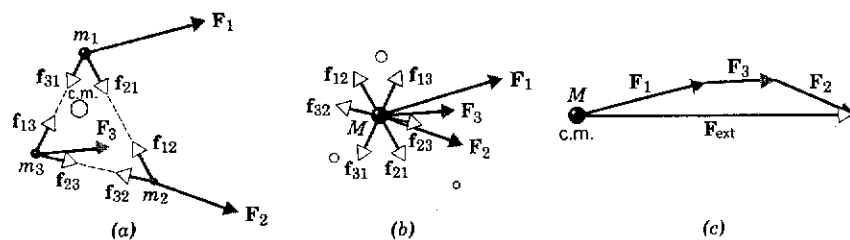


figura 9-7

Relações entre as forças que atuam sobre um sistema de três massas  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_3$ . (a) Todas as forças que atuam sobre cada massa estão representadas, assim como a localização do centro de massa. Sobre  $m_1$  atuam as forças  $f_{21}$  e  $f_{31}$  exercidas por  $m_2$  e  $m_3$ , respectivamente, assim como  $F_1$ , uma força proveniente de algum agente externo. Grupos semelhantes de forças atuam sobre  $m_2$  e  $m_3$ . Entretanto, de acordo com a terceira lei de Newton, as forças internas  $f_{31}$  e  $f_{13}$  devem ser iguais e opostas e ambas devem estar na linha dos centros de  $m_1$  e  $m_3$ . Considerações semelhantes valem para os outros dois pares de forças de ação e reação. (b) Se estivermos interessados apenas no movimento do sistema como um todo, podemos considerar que todas as forças atuam sobre uma massa  $M = m_1 + m_2 + m_3$ , localizada no centro de massa. Devido à igualdade dos pares ação-reação das forças internas, como acima foi dito, elas se anulam, deixando apenas as três forças externas  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$ . Estas são adicionadas graficamente em (c) para dar uma força resultante  $F_{\text{ext}}$ , que atua no centro de massa do sistema.

Se diferenciarmos a Eq. 9-15 em relação ao tempo, para uma massa  $M$ , suposta constante,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_{\text{cm}}}{dt} = M\mathbf{a}_{\text{cm}}. \quad (9-16)$$

A comparação das Eqs. 9-10 e 9-16 nos permitirá escrever a segunda lei de Newton para um sistema de partículas sob a forma

$$\mathbf{F}_{\text{ext.}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (9-17)$$

Esta equação é a generalização para o sistema de muitas partículas, da equação  $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$  (Eq. 9-12) estabelecida para uma partícula isolada, quando massa nenhuma entra no sistema ou sai dele. A Eq. 9-17 se reduz à Eq. 9-12 para o caso especial de uma única partícula, havendo apenas forças externas atuando no sistema considerado.

Suponhamos que a resultante das forças externas que atuam em um sistema seja nula. Então, da Eq. 9-17, resulta

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{P} = \text{constante.}$$

Quando a resultante das forças externas que atuam em um sistema é nula, o vetor momento linear do sistema permanece constante. Este resultado simples, mas realmente geral, é chamado *princípio da conservação do momento linear*. Veremos que ele é aplicável a inúmeras situações físicas importantes.

O princípio de conservação do momento é o segundo dos grandes princípios de conservação encontrados por nós até agora, o

## 9-5

### CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

primeiro sendo o princípio de conservação da energia. Mais tarde, teremos, oportunidade de encontrar vários outros, entre eles os de conservação da carga elétrica e do momento angular. Os princípios de conservação são de importância teórica e prática na física porque são simples e universais. Podem todos eles ser colocados na seguinte forma: enquanto o sistema se modifica, há um aspecto do sistema que permanece invariável. Diferentes observadores, cada um em seu próprio referencial, ao observarem um mesmo sistema que se modifica, concordam todos que as leis da conservação se aplicam ao sistema. Para a conservação do momento, por exemplo, observadores em diferentes referenciais indicariam diferentes valores  $\mathbf{P}$  para o momento do sistema, mas todos eles concordariam (supondo  $\mathbf{F}_{\text{ext.}}=0$ ) que o seu próprio valor de  $\mathbf{P}$  permanece invariável, enquanto as partículas que constituem o sistema se movem.

O momento total de um sistema somente pode ser modificado por forças externas que atuem nele. As forças internas, sendo iguais e opostas, produzem modificações iguais e opostas no momento linear, que se anulam mutuamente. Para um sistema de partículas

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n = \mathbf{P},$$

de tal maneira que, quando o momento linear total é constante, temos

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n = \text{constante} = \mathbf{P}_0. \quad (9-18)$$

Os momentos das partículas individuais podem sofrer variações, mas sua soma permanece constante, se não há resultante para as forças externas.

O momento é uma grandeza vetorial. A Eq. 9-18 é, então, equivalente a três equações escalares, uma para cada coordenada. Portanto, a conservação do momento fornece três relações para o movimento do sistema ao qual ele é aplicado. A conservação da energia, por outro lado, fornece apenas uma relação para o movimento do sistema ao qual é aplicado, porque energia é uma grandeza escalar.

A lei da conservação do momento mantém-se verdadeira, ainda, na Física Atômica e Nuclear, enquanto que com a Mecânica Newtoniana isto não acontece. Portanto, esta lei de conservação deve ser mais fundamental do que os princípios de Newton. Na formulação destes princípios, suposições mais rígidas do que as necessárias devem ter sido feitas. Isto de fato aconteceu mesmo na estruturação da Mecânica Clássica. O estudante deve lembrar o papel importante que a terceira lei de Newton desempenhou na dedução da lei da conservação do momento. Esta lei foi usada para justificar a suposição de que era nula a soma das forças internas que agiam em todas as partículas. Entretanto, é algo artificial considerar as forças internas que agem em uma parte da matéria como resultante dos pares de forças iguais e opostas que agem entre os vários pares de átomos. Estas forças internas são realmente forças de muitos corpos, dependendo não somente da separação relativa e de orientação entre os dois átomos, mas também, das porções e orientações de átomos vizinhos. Se fosse possível provar nossa hipótese, sem usar a terceira lei de Newton, a lei da conservação do momento linear não dependeria da validade desta terceira lei do movimento.

Realmente, é possível provar esta suposição com base em exigências muito menos restritas do que aquelas impostas pela terceira lei.

A demonstração está fora do alcance deste texto.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Veja "On Newton's Third Law and the Conservation of Momentum". E. Gerjuoy. *American Journal of Physics*, Novembro, 1949.



Consideremos em primeiro lugar o problema no qual uma força externa atua no sistema de partículas. Relembremos nossa discussão anterior sobre o movimento do projétil (Cap. 4). Agora, imaginemos que o projétil seja uma bomba que explode durante seu movimento. A trajetória da bomba está mostrada na Fig. 9 8. Supõe-se que a resistência do ar seja desprezível. O nosso sistema é a bomba, o referencial é a Terra e a força externa é a gravidade. No ponto  $x_1$  a bomba explode e seus fragmentos se espalham em todas as direções. Que se pode dizer sobre o momento do sistema após a explosão?

As forças da explosão são internas, são forças exercidas por partes do sistema sobre outras partes do mesmo sistema. Estas forças poderão modificar os valores dos momentos que os fragmentos possuíam, enquanto a bomba estava inteira, mas não poderão modificar o vetor momento total do sistema. Somente uma força externa pode provocar variação no momento total. Mas, a força externa é, apenas, a força da gravidade. Como o sistema de partículas, como um todo, se movimenta como se toda a sua massa estivesse concentrada no centro de massa e a força externa ali aplicada, o centro de massa dos fragmentos continuará a mover-se na trajetória parabólica que a bomba teria seguido se não explodisse. A variação do momento total devido à força da gravidade será a mesma, quer a bomba venha a explodir ou não.

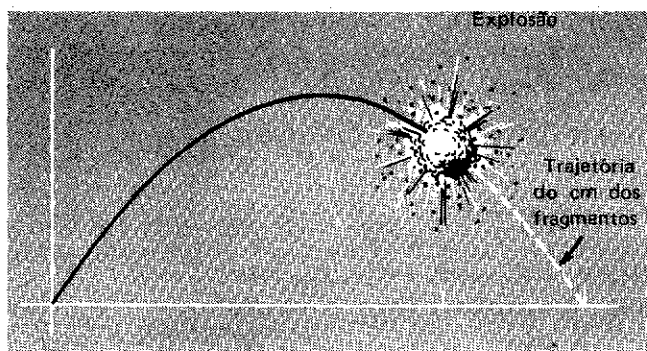


figura 9-8

Exemplo 4. Um projétil, percorrendo a trajetória parabólica usual, explode em  $x_1$ . O centro de massa de todos os fragmentos prossegue ao longo da mesma trajetória parabólica.

Que se pode dizer sobre a *energia mecânica* do sistema antes e depois da explosão?

Consideremos, agora, dois blocos  $A$  e  $B$ , de massas  $m_A$  e  $m_B$ , ligados por uma mola, em repouso sobre uma mesa horizontal lisa. Afastemos os blocos um do outro, esticando a mola, como na Fig. 9 9, e então soltemos os blocos. Descreva o movimento que os blocos adquirirão a seguir.

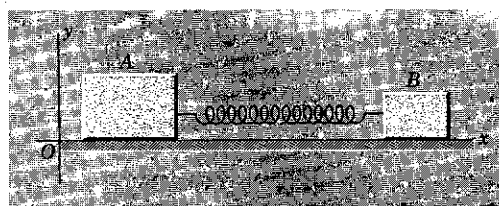


figura 9-9

Exemplo 5. Dois blocos  $A$  e  $B$ , em repouso sobre uma superfície sem atrito, estão ligados por uma mola. Se eles forem puxados e depois soltados, a soma dos seus momentos lineares permanecerá nula.

Se o sistema é constituído pelos dois blocos e pela mola, após soltar os blocos não haverá força *externa* resultante agindo no sistema. Pode-se, então, aplicar o princípio da conservação do momento ao movimento. O momento do sistema, em relação ao referencial mostrado na figura, ligado à mesa, é nulo antes de os blocos serem largados e deverá, então, continuar nulo depois. O momento total pode ser nulo, mesmo com os blocos em movimento, porque o momento é grandeza vetorial. Um bloco terá momento positivo ( $A$  se desloca no sentido de  $+x$ ) e o outro bloco terá momento linear negativo ( $B$  se desloca no sentido de  $-x$ ). Através da conservação do momento linear, teremos:

$$\text{momento inicial} = \text{momento final,}$$

## EXEMPLO 5

$$0 = m_B v_B + m_A v_A.$$

Logo,

$$m_B v_B = -m_A v_A$$

ou

$$v_A = -\frac{m_B}{m_A} v_B.$$

Por exemplo, se  $m_A$  for igual a 2,0 kg e  $m_B$  a 1,0 kg, então  $v_A$  terá sempre módulo igual à metade do de  $v_B$  e sentido oposto.

A energia cinética do bloco  $A$  é  $\frac{1}{2} m_A v_A^2$  e pode ser escrita como  $(m_A v_A)^2 / 2m_A$  e a do bloco  $B$  é  $\frac{1}{2} m_B v_B^2$  e pode ser escrita como  $(m_B v_B)^2 / 2m_B$ . Mas,

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{2m_B(m_A v_A)^2}{2m_A(m_B v_B)^2} = \frac{m_B}{m_A}.$$

pois  $m_A v_A$  é igual a  $m_B v_B$ , devido à conservação do momento. As energias cinéticas dos blocos, em qualquer instante, são inversamente proporcionais às suas respectivas massas. Como a energia mecânica é também conservada, os blocos continuarão a oscilar, a energia sendo parcialmente cinética e parcialmente potencial. Qual é o movimento do centro de massa deste sistema?

Se a energia mecânica não fosse conservada, o que seria verdade se houvesse atrito, o movimento iria se amortecendo à medida que a energia se dissipasse. Poderíamos aplicar a conservação do momento neste caso? Explique.

## EXEMPLO 6

Consideremos uma desintegração radioativa para exemplificar o movimento de recuo. Uma partícula  $\alpha$  (núcleo de um átomo de hélio) é emitida, com velocidade de  $1,4 \times 10^7$  m/s e energia cinética de 4,1 MeV (milhões de elétrons volt), do núcleo do urânio 238, inicialmente em repouso. Determinar a velocidade do movimento de recuo do núcleo residual (tório-234).

Imaginemos o sistema (tório + partícula  $\alpha$ ) inicialmente unido, formando o núcleo do urânio. Depois o sistema se fragmenta em duas partes. O momento linear do sistema antes da fragmentação é zero. Na ausência de forças externas, após a fragmentação, o momento continuará sendo nulo.

Portanto,

momento inicial = momento final,

$$0 = M_\alpha v_\alpha + M_{\text{Th}} v_{\text{Th}},$$

$$v_{\text{Th}} = -\frac{M_\alpha}{M_{\text{Th}}} v_\alpha.$$

A relação entre as massas da partícula  $\alpha$  e do núcleo de tório.  $M_\alpha/M_{\text{Th}}$  é 4/234 e  $v_\alpha = 1,4 \times 10^7$  m/s. Então,

$$v_{\text{Th}} = -(4/234)(1,4 \times 10^7 \text{ m/s}) = -2,4 \times 10^5 \text{ m/s}.$$

O sinal menos indica que o núcleo residual de tório recua em sentido oposto ao do movimento da partícula  $\alpha$ , de tal maneira que o vetor momento linear resultante seja nulo.

Como se poderia calcular a energia cinética do núcleo de tório ao recuar (veja o exemplo anterior)? De onde vem a energia adquirida pelas partículas na fragmentação?

## EXEMPLO 7

Consideremos, agora, o exemplo aparentemente simples de uma bola lançada para cima, do solo, por uma pessoa e depois recolhida pela mesma ao retornar. Para simplificar o problema, consideraremos a pessoa como parte da Terra, uma vez que esta pessoa não perde o contato com a Terra. Vamos supor, também, que a resistência do ar é desprezível.

O sistema a ser considerado é constituído pela Terra e pela bola. As forças gravitacionais entre as partes do sistema são, então, forças internas. Escolhamos um referencial no qual o sistema (Terra + bola) esteja inicialmente em repouso. Quando a bola é lançada para cima, a Terra deve recuar, vista por um observador no referencial escolhido. O momento do sistema (Terra + bola) é inicialmente nulo e não há forças externas em ação. Portanto, o momento é conservado e o momento linear total permanece nulo durante o movimento.

O momento para cima, adquirido pela bola, é anulado por um momento linear de mesmo módulo, mesma direção e de sentido contrário, adquirido pela Terra. Teremos

momento inicial = momento final,

$$0 = m_B v_B + m_T v_T,$$

$$m_B v_B = -m_T v_T.$$

Aqui,  $m_B$  e  $m_T$  são as massas da bola e da Terra, respectivamente, e  $v_B$  e  $v_T$  são as velocidades da bola e da Terra no referencial escolhido. Devido à enorme massa da Terra, em comparação com a da bola, a velocidade de recuo da Terra será extremamente pequena.

Quando a Terra e a bola se separam, a força interna de atração gravitacional atua sobre ambas, puxando-as, uma para a outra, até que a separação cesse e elas comecem a se aproximar. Quando a bola cai para a Terra, a Terra "cai" para a bola com um momento de mesmo módulo, mesma direção e de sentido contrário ao da bola. Quando a bola é recolhida, seu momento é anulado pelo momento da Terra (um anula o outro). Ambas, Terra e bola, perdem seus movimentos relativos, o momento total é ainda nulo, e a situação original, antes do lançamento da bola, é recuperada.

Você deve se lembrar que, ao discutir a conservação da energia, em presença do potencial gravitacional, que o movimento da Terra não foi levado em consideração. A superfície da Terra foi tomada como nível zero da energia potencial gravitacional. Como estávamos lidando apenas com variações de energia potencial, a origem do referencial não importava. Entretanto, no cálculo das variações de energia cinética, supusemos a Terra estacionária, como no caso da bola lançada para cima.

Em princípio, não podemos ignorar a variação da energia cinética da Terra, em si. Por exemplo, quando a bola cai para a Terra, a Terra é ligeiramente acelerada para a bola. Este fato foi anteriormente deixado de lado, porque considerávamos desprezível a variação de energia cinética experimentada pela Terra. Este resultado não é, entretanto, muito claro, porque, embora a velocidade da Terra seja, realmente, muito pequena, sua massa é enorme e a energia cinética por ela adquirida poderia ser significativa. Para esclarecer a questão, vamos calcular a relação entre a energia cinética da Terra e a da bola. Usando a relação  $m_T v_T = -m_B v_B$ , da conservação do momento, teremos

$$\frac{K_T}{K_B} = \frac{\frac{1}{2} m_T v_T^2}{\frac{1}{2} m_B v_B^2} = \frac{\frac{1}{2} (m_T v_T)^2}{\frac{1}{2} (m_B v_B)^2} \cdot \frac{m_B}{m_T} = \frac{m_B}{m_T}.$$

Como a massa da bola é desprezível em relação à da Terra, a energia cinética adquirida pela Terra,  $K_T$ , é desprezível comparada com a da bola,  $K_B$ . Por exemplo, se  $m_B = 6$  kg (uma bola bastante pesada), então, como  $m_T = 6 \times 10^{24}$  kg, teremos  $K_T/K_B = 10^{-24}$ !

Observe que este problema, em princípio, é idêntico ao do Ex. 5. A diferença é apenas, de detalhes, em um caso a energia potencial é elástica e no outro é gravitacional; no primeiro problema, as massas são da mesma ordem de grandeza e neste as partes do sistema possuem massas de ordem de grandeza completamente diferentes.

Até aqui temos trabalhado somente com sistemas nos quais a massa total,  $M$ , permanece constante no tempo. Agora vamos considerar sistemas que, enquanto observados, perdem ou recebem massa,  $dM/dt$  sendo negativa no primeiro caso e positiva no último.

## 9-7 SISTEMAS DE MASSA VARIÁVEL

A Fig. 9-10a mostra um sistema de massa  $M$ , cujo centro de massa está se movendo com velocidade  $v$ , quando observado de um referencial particular. Uma força externa,  $F_{\text{ext}}$ , atua no sistema.

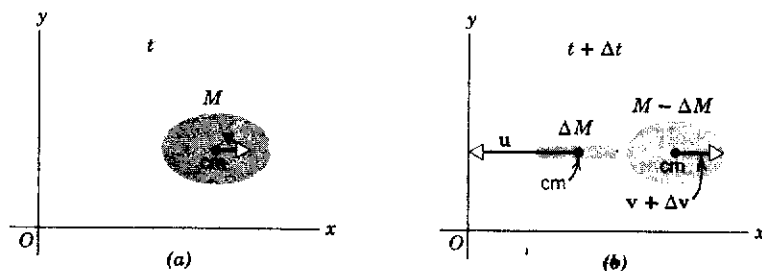


figura 9-10

Uma massa  $M$ , movendo-se com velocidade  $v$ , expelle uma massa  $\Delta M$  durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ . Uma força externa  $F_{\text{ext}}$  (não mostrada) atua sobre o sistema.

Em um instante  $\Delta t$  após, a configuração do sistema, mudou para a nova configuração mostrada na Fig. 9-10b. A massa  $\Delta M$  foi expulsa do sistema, e seu centro de massa se desloca com velocidade  $u$ , quando vista pelo nosso observador, no referencial considerado. A massa do sistema é, então, reduzida para  $M - \Delta M$  e a velocidade do seu centro de massa passou de  $v$  para  $v + \Delta v$ .

O estudante poderá imaginar que o sistema da Fig. 9-10 represente um foguete. Ele lança gases quentes a velocidades muito altas, através de um orifício, fazendo decrescer sua própria massa e aumentar sua velocidade. Em um foguete, a perda de massa é contínua, enquanto durar a combustão. A força externa,  $F_{\text{ext}}$ , não é o empuxo do foguete, mas a força da gravidade sobre ele e a resistência do ar.

Para analisar a situação, definiremos, por enquanto, o sistema como se ele tivesse massa constante. Isto significa que na Fig. 9-10b, incluiremos no nosso sistema, não apenas a massa  $M - \Delta M$  do corpo, mas também a massa  $\Delta M$  expelida, de modo que a massa total do sistema seja ainda  $M$ , como na Fig. 9-10a. Este procedimento permite aplicar ao sistema os resultados anteriormente obtidos para sistemas de massa constante. Veremos que esta orientação nos conduzirá à segunda lei de Newton, em uma forma apropriada a sistemas cuja massa não seja constante. Da Eq. 9-17

$$F_{\text{ext.}} = \frac{dP}{dt} \quad (9-17)$$

podemos escrever, em forma aproximada, para um intervalo de tempo finito  $\Delta t$ :

$$F_{\text{ext.}} \cong \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P_f - P_i}{\Delta t} \quad (9-18)$$

na qual  $P_f$  é o momento linear (final) do sistema na Fig. 9-10b e  $P_i$  é o momento linear (inicial) no sistema na Fig. 9-10a. Mas,  $P_f = (M - \Delta M)(v + \Delta v) + \Delta M u$  e  $P_i = Mv$ . Isto nos leva a

$$\begin{aligned} F_{\text{ext.}} &\cong \frac{[(M - \Delta M)(v + \Delta v) + \Delta M u] - [Mv]}{\Delta t} \\ &= M \frac{\Delta v}{\Delta t} + [u - (v + \Delta v)] \frac{\Delta M}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (9-19)$$

Agora, fazendo  $\Delta t$  tender para zero, a configuração da Fig. 9-10b se aproxima daquela da Fig. 9-10a, isto é,  $\Delta v/\Delta t$  tende para  $dv/dt$ , a aceleração do corpo na Fig. 9-10a.  $\Delta M$  é a massa expelida no intervalo de tempo  $\Delta t$ : isto conduz a um decréscimo da massa  $M$  do corpo original. Como  $dM/dt$ , taxa de variação da massa do corpo com o tempo, é essencialmente negativa neste caso, a grandeza positiva  $\Delta M/\Delta t$ , quando  $\Delta t$  se aproximar de zero, deverá ser trocada por  $-dM/dt$ . Finalmente,  $\Delta v$  tende a zero quando  $\Delta t$  tende a zero. Fazendo estas modificações na Eq. 9-19, teremos:

$$F_{\text{ext.}} = M \frac{dv}{dt} + v \frac{dM}{dt} - u \frac{dM}{dt} \quad (9-20a)$$

ou

$$\mathbf{F}_{\text{ext.}} = \frac{d(M\mathbf{v})}{dt} - \mathbf{u} \frac{dM}{dt}, \quad (9-20b)$$

que é a segunda lei de Newton, definindo a força externa em um corpo (como a da Fig. 9-10a) cuja massa esteja variando.

Observe que estas equações se reduzem às formas familiares  $\mathbf{F}_{\text{ext.}} = M\mathbf{a}$  e  $\mathbf{F}_{\text{ext.}} = (d/dt)(M\mathbf{v})$ , respectivamente, para o caso especial de um corpo de massa constante ( $dM/dt = 0$ ). É importante observar que *não poderemos* obter a expressão geral da segunda lei de Newton para sistemas de massa variável, apenas tratando a massa como *variável* na equação  $\mathbf{F}_{\text{ext.}} = d\mathbf{P}/dt = d(M\mathbf{v})/dt$ . Isto nos levaria a

$$\mathbf{F}_{\text{ext.}} = d(M\mathbf{v})/dt = M d\mathbf{v}/dt + \mathbf{v} dM/dt,$$

que é apenas um caso particular da equação mais geral 9-20, caso este que poderia ser tanto, (a)  $dM/dt = 0$ , um sistema de massa constante, como, (b)  $\mathbf{u} = 0$ , uma escolha especial do sistema de referência. Podemos usar a equação  $\mathbf{F}_{\text{ext.}} = d\mathbf{P}/dt$  para analisar sistemas de massa variável, *somente se* se aplicarmos ao *sistema inteiro, de massa constante*, constituído de partes entre as quais há troca de massa. Isto, na verdade, foi o que fizemos para obter as Eqs. 9-20. A importância, em Física clássica, de formular a segunda lei de Newton sob a forma de momento,  $\mathbf{F}_{\text{ext.}} = d\mathbf{P}/dt$ , está no fato de que esta forma realça a conservação do momento e nos fornece uma maneira simples de tratar fisicamente sistemas complicados. Como a escolha daquilo que vamos considerar como sistema é nossa, poderemos sempre escolher um sistema de massa constante, definindo um sistema suficientemente amplo.

Entretanto, é às vezes conveniente, como no problema do foguete, escolher um sistema cuja massa varie com o tempo. Em tais casos, aplicaremos a segunda lei de Newton na forma apresentada nas Eqs. 9-20, que às vezes é mais conveniente e permite melhor interpretação física do problema. A quantidade  $\mathbf{u} - (\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v})$ , na Eq. 9-19, é exatamente  $\mathbf{v}_{\text{rel.}}$ , velocidade relativa da massa expelida em relação à parte principal do sistema. Então, as Eqs. 9-20 podem ser escritas da seguinte maneira:

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext.}} + (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \frac{dM}{dt} \quad (9-21a)$$

ou

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext.}} + \mathbf{v}_{\text{rel.}} \frac{dM}{dt} \quad (9-21b)$$

O último termo da Eq. 9-21b,  $[\mathbf{v}_{\text{rel.}}(dM/dt)]$ , é a taxa (em relação ao tempo), segundo a qual o momento vai sendo transferido para o (ou do) sistema pela massa que ele ejeta (ou recolhe). Pode ser interpretado como a força exercida sobre o sistema pela massa que o abandona (ou que se junta a ele). Para um foguete, este termo é chamado de empuxo, e o projetista do foguete procura torná-lo o maior possível. O exame da Eq. 9-21b nos mostra que para isto a massa ejetada pelo foguete, na unidade de tempo, deve ser a maior possível e que a velocidade desta massa em relação ao foguete deve ser a mais alta possível. Pode-se reescrever a Eq. 9-21b na forma

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{ext.}} + \mathbf{F}_{\text{reação}}$$

na qual  $\mathbf{F}_{\text{reação}} (= \mathbf{v}_{\text{rel.}} dM/dt)$  é a força de reação exercida sobre o sistema pela massa que o abandona.

Uma metralhadora está montada sobre um carro, situado sobre uma superfície horizontal sem atrito, como na Fig. 9-11a. A massa do sistema (carro + metralhadora) em certo instante é  $M$ . Neste mesmo instante, a metralhadora atira balas de massa  $m$  cada uma, cuja velocidade, no referencial mostrado na figura, é  $\mathbf{u}$ .

## EXEMPLO 8

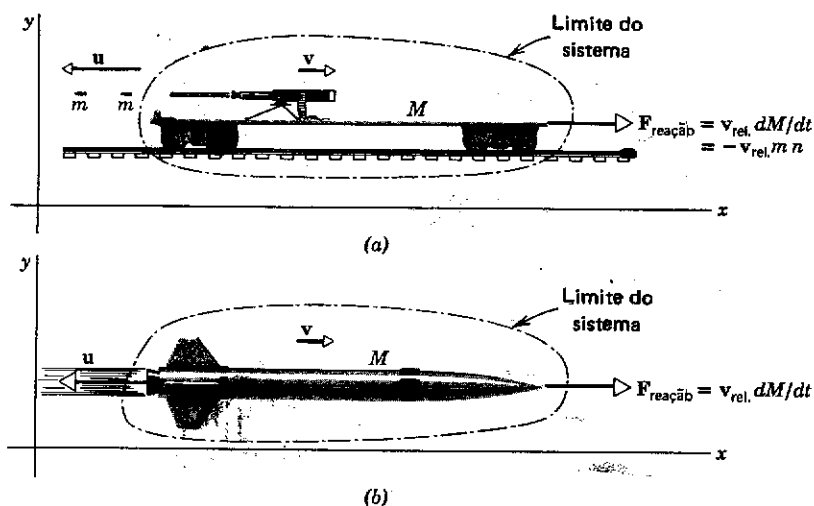


figura 9-11

(a) Exemplo 8. Uma metralhadora é fixada a um vagão que rola com atrito desprezível. A metralhadora atira balas de massa  $m$ , à razão (número por unidade de tempo)  $n$ , sendo  $u - v$  a velocidade das balas em relação ao vagão. No instante indicado, algumas balas já saíram do sistema. As velocidades indicadas para o vagão e para as balas são aquelas que seriam medidas por um observador em um sistema de referência fixo nos trilhos, como é mostrado. A força de reação exercida sobre o sistema é  $F = -mnv_{rel} = (dM/dt)v_{rel}$ . (b) Um foguete se desloca, através do espaço, com forças externas desprezíveis. Partículas de gás são expelidas na descarga, tendo uma velocidade  $u - v$  em relação ao foguete. A taxa com que a massa é expelida na descarga é  $-dM/dt$ . A força de reação sobre o foguete é  $F = (dM/dt)v_{rel}$ . As velocidades indicadas para o foguete e para os gases expelidos são relativas ao chão.

A velocidade do carro, em relação ao mesmo referencial, é  $v$  e a velocidade das balas em relação ao carro é  $u - v$ . O número de balas disparadas por unidade de tempo é  $n$ . Qual a aceleração do carro?

Consideremos o carro e a metralhadora como nosso sistema. Como sua massa  $M$  é variável, aplicaremos a segunda lei de Newton na forma dada na Eq. 9-21b. Nenhuma força externa atua no sistema; então, teremos  $F_{ext.} = 0$ , nesta equação, o que nos conduz a

$$M \frac{dv}{dt} = v_{rel.} \frac{dM}{dt}$$

$dv/dt$  é  $a$ , aceleração do sistema;  $v_{rel.}$  é  $u - v$ , tendo o sentido para a esquerda na Fig. 9-11a, e  $dM/dt$  é  $-mn$ . Introduzindo estes valores na equação acima, teremos

$$a = \frac{dv}{dt} = - \frac{v_{rel.}(mn)}{M}$$

Isto mostra que  $a$  tem sentido oposto a  $v_{rel.}$ , isto é, que  $a$  aponta para a direita na Fig. 9-11a. Se  $v_{rel.} = 500$  m/s,  $m = 10$  g,  $n = 10/s$  e  $M = 200$  kg em um dado instante, então, neste instante

$$a = \frac{500 \text{ m/s} \times 10^{-2} \text{ kg} \times 10/s}{200 \text{ kg}} = 0,25 \text{ m/s}^2$$

O valor do "empuxo" médio que as balas disparadas exercem sobre o sistema (carro + metralhadora), neste instante, é dado por

$$F = v_{rel.} nm = 500 \text{ m/s} \times 10/s \times 10^{-2} \text{ kg}$$

$$F = 50 \text{ N}$$

Na Fig. 9-11b, é mostrada uma situação análoga para um foguete. É instrutivo analisar este problema sob o ponto de vista da terceira lei de Newton e do

princípio da conservação do momento linear. Escolhamos um sistema de massa constante (foguetes + gases) e fixemos um referencial em seu centro de massa. O foguete exerce força sobre os gases quentes, expelindo um jato através do escape; esta é a força de ação. O jato de gases quentes exerce força sobre o foguete, impelindo-o para frente; esta é a força de reação. Essas forças são internas ao sistema (foguetes + gases). Não havendo forças externas, o momento total do sistema não variará (o centro de massa, inicialmente em repouso, permanecerá em repouso). As partes individuais do sistema (foguetes e gases), entretanto, poderão sofrer variações em seus momentos; em relação ao referencial que passa pelo centro de massa, os gases quentes adquirirão um momento para trás (Fig. 9-11b) e o foguete adquirirá um momento igual em módulo e de sentido para a frente.

O estudante poderá analisar o sistema (carro + balas) de maneira semelhante.

### EXEMPLO 9

Um foguete tem massa igual a 15 000 kg quando está completamente cheio de combustível, em uma plataforma de lançamento. Ele é lançado verticalmente e quando o seu combustível for totalmente queimado sua massa passará a ser 5 000 kg. Os gases são ejetados à taxa de 150 kg/s com a velocidade de 2 000 m/s em relação ao foguete (velocidade de escape), valores estes, ambos, supostos constantes, enquanto o combustível é queimado.

(a) Qual é o empuxo? O empuxo  $F$  é o último termo da Eq. 9-21b, ou seja,

$$F = v_{rel.} \cdot \frac{dM}{dt} = 2\,000 \text{ m/s} \times 150 \text{ kg/s} = 300\,000 \text{ N.}$$

Observe que, inicialmente, quando os tanques de combustível estão cheios, a força resultante, para cima, que atua no foguete (despreze a resistência do ar) é o empuxo (300 000 N) menos o peso inicial (cerca de 150 000 N), isto é, 150 000 N. Logo depois que o combustível acaba de queimar, a força resultante será 300 000 N menos 50 000 N (peso aproximado do foguete, sem combustível) ou 250 000 N.

(b) Se pudéssemos desprezar todas as forças externas, incluindo a força de gravidade e a resistência do ar, qual seria a velocidade do foguete após todo o combustível ter sido queimado?

Se fizermos  $F_{ext.} = 0$  na Eq. 9-21b, teremos

$$M \frac{dv}{dt} = v_{rel.} \frac{dM}{dt} \quad \text{ou} \quad dv = v_{rel.} \frac{dM}{M}$$

Integrando esta expressão (ver Ap. I), do instante em que a velocidade é  $v_0$  e a massa do foguete  $M_0$ , até o instante em que a velocidade é  $v$  e a massa  $M$ , obteremos

$$\int_{v_0}^v dv = v_{rel.} \int_{M_0}^M \frac{dM}{M},$$

supondo constante, neste intervalo, a velocidade de ejeção. Isto nos conduz a

$$v - v_0 = -v_{rel.} \ln(M_0/M) = -v_{rel.} \ln\left(1 + \frac{M_0 - M}{M}\right).$$

Portanto, a variação da velocidade do foguete em um intervalo de tempo qualquer depende, apenas, da velocidade de escape (tendo sentido oposto a ela) e da fração da massa expelida naquele intervalo de tempo.

Em nosso exemplo,  $v_0 = 0$  e  $\frac{M_0}{M} = \frac{15\,000}{5\,000} = 3,0$ , de modo que a velocidade do foguete, depois do combustível totalmente queimado, é

$$v = v_{rel.} \ln(M_0/M) = (2\,000 \text{ m/s}) \ln 3 = 7\,900 \text{ km/h.}$$

Se as forças externas da gravidade e da resistência do ar fossem levadas em consideração, a velocidade final seria menor.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Para uma solução completa do clássico problema do foguete, ver "Variable-Mass Dynamics" por J. L. Meriam, *Journal of Engineering Education*, dezembro de 1960.

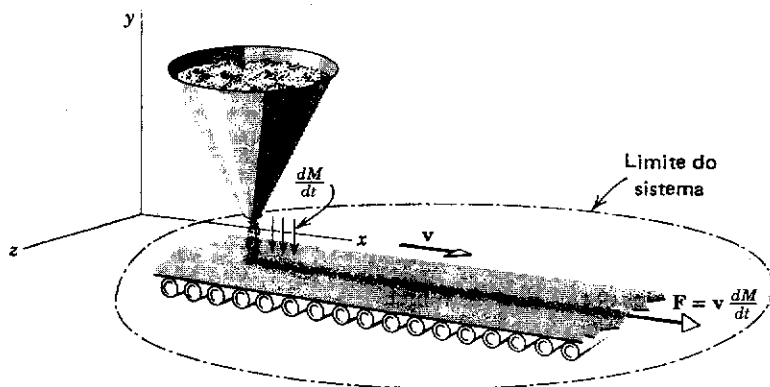
Supondo que o foguete parte do repouso ( $v_0 = 0$ ), com massa inicial  $M_0$  e alcance a velocidade final  $v_f$ , após consumir todo o combustível, quando sua massa for  $M_f$ , pode-se escrever a equação anterior do foguete da seguinte maneira:

$$M_f/M_0 = e^{-v_f/v_{rel}},$$

na qual  $v_{rel}$  é a velocidade de escape.

As equações clássicas do foguete (ou de sistemas de massa variável) indicam que a velocidade do foguete pode crescer indefinidamente desde que o foguete possa expelir suficiente quantidade de gás, de modo que a massa final do sistema se torne bastante pequena. Entretanto, sabe-se, da mecânica relativística, que um foguete não pode atingir velocidade igual ou superior à velocidade da luz. Quando a velocidade do foguete se aproximar daquele limite, as equações clássicas não podem mais ser aplicadas. Nestes casos, deve-se levar em conta a variação da massa inercial de uma partícula com a velocidade e a fórmula relativística de adição de velocidade. As equações daí resultantes são aplicáveis a foguetes relativísticos.<sup>4</sup>

A areia cai de um depósito fixo numa taxa igual a  $dM/dt$ , sobre uma correia transportadora que se desloca com velocidade  $v$ , no referencial do laboratório, como mostra a Fig. 9-12. Qual a força necessária para manter a correia em movimento com essa velocidade  $v$ ?



## EXEMPLO 10

figura 9-12

Exemplo 10. Areia cai de um funil, à razão  $dM/dt$ , sobre uma correia transportadora que se move com velocidade  $v$  no sistema de referência do laboratório. A força  $F$  necessária para manter a correia em movimento com velocidade constante, é  $v dM/dt$ . O funil está em repouso no sistema de referência ilustrado na figura.

Este é um exemplo típico de força associada apenas à variação de massa, permanecendo constante a velocidade. Adotaremos, como nosso sistema, a correia de massa variável, e assim aplicaremos a ele a Eq. 9-21b. Podemos fazer  $dv/dt = 0$  nesta equação, porque a velocidade da correia não varia.

Além disso, para um observador em repouso na correia, a areia que cai (e o depósito) apresenta um movimento horizontal, com velocidade  $v$ , em sentido contrário àquele, no qual a correia se movimentava no laboratório. Portanto,  $v_{rel} = -v$  na Eq. 9-21. Mais formalmente,  $v_{rel} = u - v$ ; mas  $u = 0$  e assim  $v_{rel} = -v$ . Fazendo estas substituições, resulta

$$0 = F_{ext.} - v \frac{dM}{dt}$$

ou

$$F_{ext.} = v \frac{dM}{dt}$$

Neste exemplo,  $dM/dt$  é positivo, porque o sistema está ganhando massa com o tempo. Então, como era de esperar, a força externa necessária para manter a velocidade constante, deve apontar no sentido do movimento da correia. Observe que, não havendo atrito, a massa da correia, em si, não aparece no problema.

<sup>4</sup> Veja "The Equation of Motion for Relativistic Particles and Systems with a Variable Rest Mass", por Kalman B. Pomerans, no número de dezembro de 1964 do *American Journal of Physics*.



A potência fornecida pela força externa é

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{v} \cdot \left( \mathbf{v} \frac{dM}{dt} \right) = v^2 \left( \frac{dM}{dt} \right).$$

Como  $v = \text{constante}$ , pode-se escrever a expressão anterior

$$P = \frac{d(Mv^2)}{dt} = 2 \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Mv^2 \right) = 2 \frac{dK}{dt}.$$

Isto mostra que a potência requerida para manter a correia em movimento é o dobro da taxa de crescimento da energia cinética do sistema; observe que não precisamos considerar a energia cinética da correia, propriamente dita, porque, se sua velocidade permanece constante, sua energia cinética não varia. É claro que a energia mecânica não é conservada neste caso. Onde vai parar a outra metade da potência? Em quais dos exemplos anteriores houve conservação do momento sem conservação da energia mecânica?

O estudante deverá ser capaz de resolver o Ex. 10 de outra maneira, escolhendo um sistema de massa constante e aplicando o princípio da conservação do momento.

1. Deve existir, necessariamente, alguma massa no centro de massa de um sistema?
2. O centro de massa de um corpo sólido está necessariamente dentro do corpo? Se sua resposta for negativa, dê exemplos.
3. Qual a relação existente entre o conceito de centro de massa e o conceito de centro geográfico de um país? Com o centro populacional? Que se pode concluir do fato do centro geográfico diferir do centro populacional?
4. Um escultor resolve esculpir um pássaro (Fig. 9-13). Afortunadamente, a obra é capaz de manter-se de pé. Foi usada uma só folha de metal de espessura uniforme. Dos pontos marcados na figura o que melhor representa o centro de massa?
5. A localização do centro de massa de um grupo de partículas não depende do referencial usado para descrever o sistema. Isso é verdade? Pode-se escolher um referencial cuja origem está no centro da massa?
6. Se somente uma força externa pode fazer variar o estado de movimento do centro de massa de um corpo, como pode a força interna dos freios fazer um carro parar?
7. Pode um corpo possuir energia sem ter momento? Explique. Pode um corpo possuir momento sem ter energia? Explique.
8. Um corpo leve e outro pesado têm a mesma energia cinética de translação. Qual tem o maior momento?
9. Um pássaro está em uma gaiola presa a uma balança de mola. A leitura da balança, quando o pássaro está voando, é maior, menor ou a mesma de quando o pássaro estiver pousado na gaiola?
10. Um barco à vela pode ser impelido pelo vento soprado sobre as velas por um ventilador instalado no próprio barco?
11. Um canoieiro, cuja canoa se encontra em uma lagoa de águas paradas, pode ir até à margem sacudindo vigorosamente a corda que está presa à proa da canoa. Como se explica isso? (Ainda que pareça difícil, é verdade!)
12. Como poderia uma pessoa de pé, parada sobre uma superfície horizontal, sem atrito, sair dela?
13. Um homem está em pé sobre uma placa lisa de gelo segurando um rojão aceso que é lançado para o ar. Descreva, em poucas palavras, mas tão corretamente quanto possa o movimento do centro de massa do rojão e o movimento do centro de massa do sistema constituído pelo homem e pelo rojão. É conveniente descrever cada movimento em cada um dos seguintes períodos: (a) após o lançamento do rojão, mas antes de sua explosão; (b) entre a explosão e a queda no gelo do primeiro fragmento do rojão; (c) entre as quedas no gelo do primeiro e do último fragmento; (d) após a queda de todos os fragmentos, mas antes que algum tenha atingido as bordas da placa de gelo.

## questões

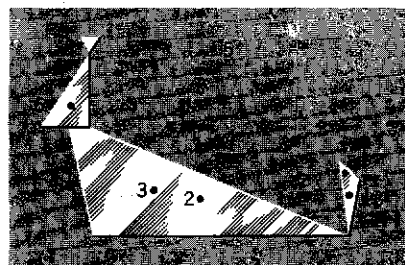


figura 9-13  
Questão 4

14. Como ficou estabelecido no texto, não se pode usar a equação  $F_{\text{ext.}} = d(M\mathbf{v})/dt$  para um sistema de massa variável. Para mostrar isto, (a) ponha a equação na forma equivalente  $(F_{\text{ext.}} - M \frac{d\mathbf{v}}{dt})/(dM/dt) = \mathbf{v}$  e (b) mostre que um dos membros desta equação tem o mesmo valor em todos os referenciais inerciais, enquanto que com o outro membro isto não acontece. Assim, a equação não é válida de um modo geral. (c) Mostre que a Eq. 9-20 não conduz a tal contradição.
15. Joga-se um cubo de gelo com velocidade  $v$  para dentro de uma região do espaço livre da força de gravidade, onde o ar é rarefeito e se mantém uma temperatura alta. O cubo gradualmente derrete e posteriormente a água evapora. (a) Este é um sistema de partículas durante todo o tempo? (b) Nesse caso, é o mesmo sistema de partículas? (c) O movimento do centro de massa possui quaisquer variações abruptas? (d) O momento varia? Seriam outras as respostas se a região estivesse sob a ação da força da gravidade?
16. Em 1920, um proeminente jornal publicou a seguinte matéria sobre as experiências pioneiras com foguetes, realizadas por Robert H. Goddard, repelindo a idéia que um foguete poderia mover-se no vácuo: "Que o Professor Goddard, com sua cátedra no Clark College e o beneplácito da Smithsonian Institution, desconheça a relação entre ação e reação e a necessidade de ter algo melhor além do vazio contra o qual reagir seria por assim dizer, um fato absurdo. Naturalmente, apenas parece faltar-lhe o conhecimento ministrado diariamente na escola". Que há de errado nesse argumento?
17. A velocidade final do estágio final de um foguete de múltiplos estágios, é muito maior que a velocidade final de um foguete de um único estágio, de mesma massa total e mesmo suprimento de combustível. Explique esse fato.
18. Enquanto um foguete expelle o combustível que vai queimando, varia a posição do centro de massa do foguete (em um referencial ligado ao foguete). Deve-se levar em conta este fato para a solução exata do problema do foguete?
19. Explique, claramente, a diferença entre a origem da variação de massa de um sistema clássico e a de um sistema relativístico.
20. Você pode conceber outros sistemas de massa variável além dos exemplos dados no texto?

## SEÇÃO 9-1

1. Uma partícula de massa  $m_1$  está sobre o eixo  $Ox$  no ponto  $x = x_1$ . Outra partícula  $m_2$  está sobre o ponto  $x = x_2$ . Determine o valor da distância entre o centro-de massa e a partícula de massa  $m_1$ .
2. Seja  $d$  a distância entre um corpo de massa  $m_1$  e outro corpo de massa  $m_2$ . Considere um sistema de coordenadas cujo centro coincida com o centro de massa dos dois corpos. Obtenha uma expressão para o cálculo da distância  $d_1$  entre o centro deste sistema e o centro do corpo de massa  $m_1$ .  
*Resposta:*  $d_1 = m_2 d / (m_1 + m_2)$ .
3. Experiências de difração de elétrons indicam que a distância entre o átomo de carbono (C) e o átomo de oxigênio (O), na molécula de monóxido de carbono (CO), é igual a  $1,13 \times 10^{-10}$  m. Calcule a distância do átomo de carbono ao centro de massa da molécula de CO.
4. Calcule a distância entre o centro de massa do sistema Terra-Lua e o centro da Lua. Use os dados do Apêndice C.  
*Resposta:*  $3,79 \times 10^5$  km.
5. Três partículas possuem as seguintes massas e coordenadas: 5,0 kg,  $x = y = 1$  cm; 3,0 kg,  $x = 4$  cm,  $y = 1$  cm; 2,0 kg,  $x = y = 2$  cm. Encontre a posição  $x_{\text{cm}}$  e  $y_{\text{cm}}$  deste sistema de partículas.
6. Na molécula de amônia ( $\text{NH}_3$ ) os três átomos de hidrogênio (H) formam um triângulo equilátero, sendo de  $1,628 \times 10^{-10}$  m a distância entre os centros dos átomos de hidrogênio (H). O átomo de nitrogênio (N) está no vértice de uma pirâmide da qual os três átomos de hidrogênio constituem a base (ver a Fig. 9-14). A distância entre os átomos de hidrogênio e o átomo de nitrogênio vale  $1,014 \times 10^{-10}$  m. Localize o centro de massa deste sistema em relação ao átomo de nitrogênio.  
*Resposta:* Está sobre o eixo de simetria indicado na Fig. 9-14, a uma distância de  $6,74 \times 10^{-12}$  m do plano formado pelos átomos de hidrogênio.

## problemas

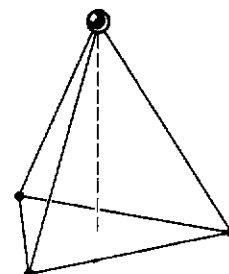


figura 9-14

7. Determine a posição do centro de massa de um arame em forma de arco de circunferência de raio  $R$ , abrangendo um ângulo central igual a  $\theta$ .
8. Determine a posição do centro de massa de uma chapa em forma de quadrante de círculo de raio  $a$ .  
Resposta:  $x_{cm} = y_{cm} = 4a/3\pi$ .
9. Determine a posição do centro de massa de uma placa homogênea semicircular de raio  $a$ .

SEÇÃO 9-2

10. Um bloco possui massa  $m_1$  e outro bloco possui massa  $m_2 = 5m_1$ . Estes blocos são presos às extremidades de uma mola e colocados sobre um plano horizontal sem atrito. O bloco de massa  $m_1$  se aproxima do centro de massa com velocidade de  $6,5$  m/s. O centro de massa permanece em repouso uma vez que não existe nenhuma força externa aplicada. Calcule a velocidade do bloco de massa  $m_2$  em relação ao centro de massa.  
Resposta:  $1,3$  m/s, em direção ao centro de massa.
11. Duas partículas estão inicialmente em repouso, separadas por uma distância de  $1,0$  m. A partícula  $P$  possui massa  $m_1 = 3,0$  kg e a partícula  $Q$  possui massa  $m_2 = 5,0$  kg.  $P$  e  $Q$  atraem-se mutuamente com uma força constante igual a  $3,5 \times 10^{-1}$  N. Nenhuma força externa atua sobre este sistema. (a) Descreva o movimento do centro de massa. (b) A que distância da posição original de  $P$  as partículas deverão colidir?
12. Um homem de massa  $m$  está pendurado em uma escada de corda, suspensa por um balão de massa  $M$ . O balão está estacionário em relação ao solo. (a) Se o homem começar a subir pela escada à velocidade  $v$  (com relação à escada), em que direção e com que velocidade (com relação à Terra) o balão se moverá? (b) Qual o estado do movimento após o homem ter parado de subir?

Resposta: (a) para baixo,  $\frac{m}{m+M}v$ . (b) O balão estará outra vez estacionário.

13. Um canhão e um suprimento de balas estão dentro de um vagão de estrada de ferro completamente fechado (Fig. 9-15). O canhão atira para a direita e o vagão recua para a esquerda. As balas ficam dentro do vagão depois de baterem na parede oposta. Mostre que o vagão partindo do repouso não pode sofrer deslocamento superior ao seu comprimento  $L$ , qualquer que seja a maneira pela qual as balas sejam atiradas.
14. Um cachorro de  $5$  kg está em pé e parado dentro de um barco que se encontra a  $6$  m da margem. Ele anda  $2,4$  m sobre o barco em direção à margem e depois pára. O barco tem massa de  $20$  kg e supõe-se que não haja atrito entre ele e a água. A que distância da margem estará o cachorro no final da caminhada? (Sugestão: O centro de massa do sistema barco + cachorro não se desloca. Por quê?) A margem está, também, à esquerda, na Fig. 9-16.  
Resposta:  $4,1$  m.

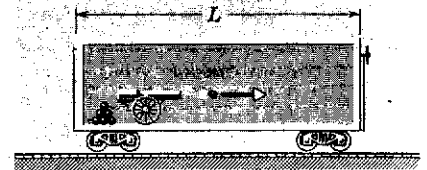


figura 9-15

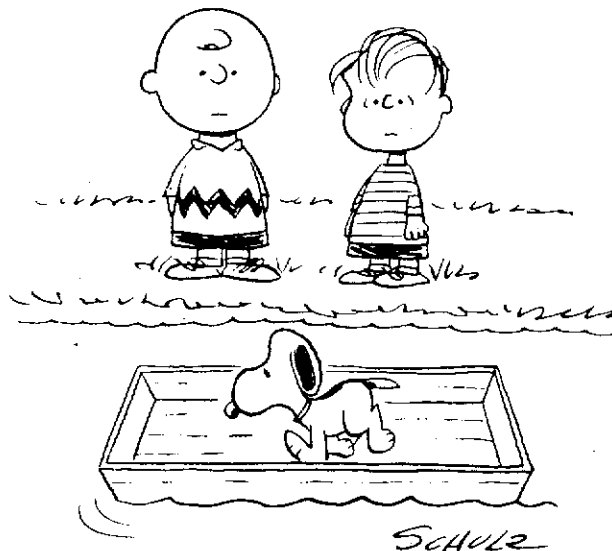


figura 9-16

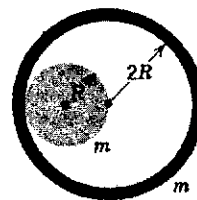


figura 9-17

15. Uma bola de massa  $m$  e raio  $R$  é colocada no interior de uma esfera maior, ôca, com a mesma massa e raio interno  $2R$ . O sistema está em repouso sobre uma superfície sem atrito, na posição em que mostra a Fig. 9-17. A bola menor é solta, gira no interior da esfera ôca e, finalmente, pára no fundo desta. Qual a distância que a esfera maior percorreu neste processo?
16. Uma canoa possui massa de 50 kg. A canoa possui dois assentos separados por uma distância de 3,0 m e localizados simetricamente em relação ao centro de massa da canoa. Num dos assentos existe uma pessoa de 80 kg e no outro assento está sentada uma pessoa de 50 kg. As duas pessoas trocam de lugar quando a canoa estava parada num lago. Calcule de quanto se desloca o centro da canoa em relação a um ponto fixo da margem do lago.  
*Resposta:* 0,50 m.
17. Um homem de massa  $m = 70$  kg está parado sobre a extremidade de uma jangada de 200 kg, que se desloca com velocidade constante num lago. A velocidade da jangada em relação à margem é igual a 3 m/s. Despreze o atrito. O homem anda até a outra extremidade da jangada, cujo comprimento total vale 5 m. A velocidade do homem em relação à jangada vale  $v = 1,5$  m/s e possui direção e sentido paralela à velocidade da jangada. Mostre que a velocidade do centro de massa do sistema permanece constante e igual a 3 m/s. Calcule a distância percorrida pelo centro da jangada e pelo centro de massa do sistema durante o tempo que o homem passa de uma extremidade para outra da jangada.

## SEÇÃO 9-3

18. A massa de um automóvel vale 1 tonelada. (a) Calcule a massa de um caminhão, sabendo-se que quando se desloca com o dobro da velocidade do automóvel seu momento linear é dado por  $p = 10p_0$ , onde  $p_0$  é o momento linear do automóvel. (b) Calcule o momento linear deste caminhão quando ele se desloca com a velocidade de 36 km/h.  
*Resposta:* (a) 5 toneladas. (b)  $5 \times 10^4$  kg · m/s.
19. Uma bola de 50 g é lançada ao ar com uma velocidade inicial de 15 m/s, formando um ângulo com a horizontal de  $45^\circ$ . (a) Quais são os valores da energia cinética da bola, inicialmente, e no momento em que antecede a colisão dela com o solo? (b) Ache os valores correspondentes ao momento (módulo e direção). (c) Mostre que a variação do momento é exatamente igual ao peso da bola multiplicada pelo intervalo de tempo em que ela ficou no ar.
20. Um objeto de 5,0 kg, com velocidade de 30 m/s, atinge uma placa de aço, formando um ângulo de  $45^\circ$  e ricocheteia com a mesma velocidade e mesmo ângulo (Fig. 9-18). Qual é a variação (módulo e direção) do momento do objeto?  
*Resposta:* 212 kg · m/s, perpendicular à placa.
21. Dois corpos, ambos constituídos por pesos de balança, são interligados por um ténue fio que passa através de uma polia leve, sem atrito, de 5,0 cm de diâmetro. Os dois corpos estão no mesmo nível e cada qual tem, originariamente, massa de 500 g. (a) Localize o centro de massa do sistema. (b) Vinte gramas são transferidos de um corpo a outro, mas os corpos são impedidos de mover. Localize o centro de massa. (c) Os dois corpos são, agora, liberados. Descreva o movimento do centro de massa e determine sua aceleração.

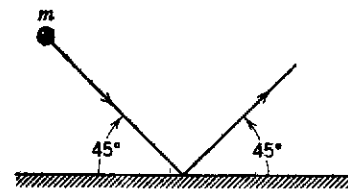


figura 9-18

## SEÇÃO 9-4

22. No interior de uma canoa de massa  $m$  existe um homem de massa  $M$ . A canoa se encontra inicialmente em repouso. O homem atira um objeto de massa  $m'$  numa direção paralela ao comprimento da canoa. A velocidade do objeto em relação à margem vale  $v$ . Determine a velocidade  $u$  adquirida pela canoa imediatamente após o lançamento do objeto.  
*Resposta:*  $u = m'v/(m + M - m')$ ; em sentido contrário ao da velocidade de  $v$ .
23. Uma espingarda atira 10 balas de 10,0 g por segundo com velocidade de 500 m/s. As balas param no interior de uma parede rígida. (a) Ache o momento linear de cada bala. (b) Calcule a energia cinética de cada bala. (c) Qual é a força média exercida pelas balas sobre a parede?
24. Uma metralhadora atira várias balas de 60 g com velocidade de 1 000 m/s. Suponha que a frequência de saída das balas seja de 250 balas por minuto. Calcule a força média exercida pelo atirador para sustentar a metralhadora.  
*Resposta:* 250 N.

25. Uma corrente homogênea, muito flexível, de massa  $M$  e comprimento  $l$ , está suspensa por uma extremidade, pendendo, então, verticalmente. A outra extremidade toca a superfície de uma mesa. A parte superior se desprende e a corrente cai, formando um montículo, sendo que cada elo fica em repouso tão logo toca a mesa. Ache a força exercida pela mesa sobre a corrente em função do peso da parte da corrente que se encontra sobre a mesa, em cada instante.

## SEÇÃO 9-5

26. Um corpo de massa igual a 7,0 kg se desloca com velocidade de 6,0 m/s na ausência de forças externas. Num dado instante o corpo explode e se divide em dois fragmentos de massas iguais. Com a explosão uma energia cinética de 126 J é comunicada ao sistema constituído pelos dois fragmentos. Os fragmentos se deslocam ao longo da mesma linha reta do deslocamento antes da explosão. Determine: (a) a energia cinética total antes da explosão, (b) a energia cinética total depois da explosão, (c) a velocidade e o sentido do movimento de cada fragmento depois da explosão.  
*Resposta:* (a) 126 J. (b) 252 J. (c) um dos fragmentos pára e o outro continua no mesmo sentido da velocidade antes da explosão, sendo o módulo da sua velocidade igual a 12 m/s.
27. O último estágio de um foguete está se deslocando com uma velocidade de 8 500 m/s. Este último estágio é constituído por duas partes engatadas por grampos, a saber, o foguete propriamente dito, com massa de 400 kg, e a carga útil, com massa igual a 100 kg. Quando os grampos são desconectados uma força interna ao sistema faz com que as duas massas se separem com uma velocidade relativa de 800 m/s. (a) Calcule as velocidades das partes em relação a um observador fixo na Terra. Suponha que todas as velocidades possuam a mesma direção e o mesmo sentido. (b) Ache a energia cinética total antes e após a separação e explique a diferença entre estes valores (se houver).
28. Um núcleo radioativo, inicialmente em repouso, desintegra-se, emitindo um elétron e um neutrino, em direções perpendiculares uma à outra. O momento linear do elétron é  $1,2 \times 10^{-22}$  kg · m/s e a do neutrino é  $6,4 \times 10^{-23}$  kg · m/s. (a) Ache a direção e o módulo do movimento adquirido pelo núcleo ao recuar. (b) A massa do núcleo residual é  $5,8 \times 10^{-26}$  kg. Qual é a energia cinética do recuo?  
*Resposta:* (a)  $1,4 \times 10^{-22}$  kg · m/s, a  $150^\circ$  da trajetória do elétron e a  $120^\circ$  da trajetória do neutrino. (b) 1,0 eV.
29. A cada minuto uma metralhadora especial de um funcionário de um jardim zoológico atira 250 balas de borracha, cada uma delas com massa de 10 g, com velocidade inicial de 1 100 m/s. Calcule o número de balas que devem ser atiradas a fim de deter um animal de 90 kg que avança em direção ao funcionário com velocidade igual a 4 m/s. Suponha que a trajetória das balas seja horizontal e que as balas caiam ao solo tão logo atinjam o alvo.
30. Um sapo de massa  $m$  está parado na extremidade de uma tábua de massa  $M$  e comprimento  $L$ . A tábua flutua em repouso sobre a superfície de um lago. O sapo pula em direção à outra extremidade da tábua com uma velocidade  $v$  que forma um ângulo  $\theta$  com a direção horizontal. Determine o módulo da velocidade inicial do sapo para que ele atinja a outra extremidade da tábua.

*Resposta:* 
$$v = \frac{\sqrt{gL}}{(\sin 2\theta)(1 + (m/M))}$$

31. Uma arma atira um projétil, com velocidade de 450 m/s, formando um ângulo de  $60^\circ$  com a horizontal. O projétil explode, em dois fragmentos de massas iguais, 50 s após sair da arma. Um fragmento, cuja velocidade imediatamente após a explosão é zero, cai verticalmente. Supondo que o terreno seja plano, a que distância da arma cairá o outro fragmento?
32. Um bloco de massa  $m$  repousa sobre uma cunha de massa  $M$ , que por sua vez repousa sobre uma mesa horizontal, como mostra a Fig. 9-19. Todas as superfícies são sem atrito. Se o sistema parte do repouso, com o ponto  $P$  do bloco a uma distância  $h$  acima da mesa, ache a velocidade da cunha no instante em que o ponto  $P$  toca a mesa.

*Resposta:* 
$$\frac{\sqrt{2m^2 gh \cos^2 \alpha}}{(M + m)(M + m \sin^2 \alpha)}$$

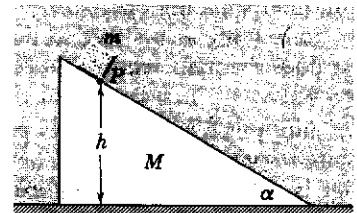


figura 9-19

## SEÇÃO 9-7

33. (a) Mostre que a velocidade de um foguete é igual a velocidade de escape dos gases quando a relação  $M_0/M$  é igual a  $e$  (cerca de 2,7). Especifique o sistema de coordenadas

para o qual este resultado é válido. (b) Mostre, também, que a velocidade do foguete é duas vezes a velocidade de escape, quando  $M_0/M$  é igual a  $e^2$  (cerca de 7,4).

34. Obtenha uma expressão para a aceleração de um foguete lançado verticalmente de baixo para cima, em função da velocidade relativa  $v_p$  e da taxa de queima de combustível  $dm/dt$ .

Resposta: Para um sistema orientado de cima para baixo a aceleração do foguete será  $a = -g - (v_p/m)(dm/dt)$ .

35. Um combustível muito empregado para motores de foguetes é uma mistura de querosene com oxigênio líquido. A queima deste combustível pode produzir uma velocidade de escape igual a 2 500 m/s. (a) Despreze a força da gravidade e o peso dos tanques de combustível, bombas etc. e determine a quantidade de combustível que é necessária para cada kg de carga útil, a fim de permitir ao foguete atingir a uma velocidade de 13 km/s, partindo do repouso (a velocidade de escape na atmosfera terrestre vale 11,2 km/s). (b) Na sonda "Mariner", com destino a Marte, a massa inicial era de  $1,0 \times 10^5$  kg e a carga útil era de apenas 250 kg, correspondendo a uma proporção de 400 unidades de massa de combustível para apenas uma unidade de massa de carga útil. Qual seria, nas condições especificadas, a velocidade final de um foguete partindo do repouso?

36. Suponha que a taxa de queima do combustível de um foguete seja dada por:  $dm/dt = -bm_0$ , onde  $b$  é uma constante cuja dimensão é de tempo<sup>-1</sup> ( $T^{-1}$ ). A massa inicial do combustível é  $m_0$ . (a) Determine a massa  $m$  em função do tempo  $t$ . (b) Calcule o tempo gasto para queimar a metade da massa inicial do combustível. (c) Encontre a aceleração do foguete em função do tempo.

Resposta: (a)  $m = m_0(1 - bt)$ . (b)  $t = 1/2b$ . (c)  $a = -g + v_p b/(1 - bt)$ .

37. Consideremos uma partícula sobre a qual age uma força de mesma direção e sentido que sua velocidade. (a) Usando a relação relativística  $F = d(mv)/dt$  para uma única partícula, mostre que

$$F ds = mv dv + v^2 dm,$$

em que  $ds$  representa um deslocamento infinitesimal. (b) Usando a relação relativística  $v^2 = (1 - m_0^2/m^2)c^2$ , mostre que

$$mv dv = \frac{m_0^2 c^2}{m^2} dm.$$

(c) Substitua as relações para  $mv dv$  e  $v^2$  na expressão resultante em (a) e mostre que

$$W = \int F ds = (m - m_0)c^2.$$

38. Um vagão-prancha de estrada de ferro, de peso  $W$ , pode deslocar-se sem atrito ao longo de um trilho horizontal reto, como mostra a figura. Inicialmente, um homem de peso  $w$  está parado sobre o vagão, que se desloca para a direita com velocidade  $v_0$ . Qual será a variação da velocidade do vagão se o homem correr para a esquerda (Fig. 9-20) de modo que sua velocidade em relação ao vagão seja  $v_{rel}$ , exatamente antes dele saltar pela extremidade?

Resposta:  $wv_{rel}/(W + w)$ .

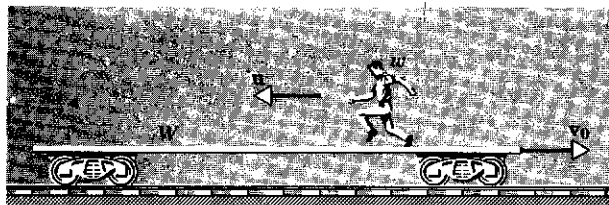


figura 9-20

39. Suponha que o vagão do Probl. 38 esteja inicialmente em repouso. Ele conduz  $n$  homens cada qual com peso  $w$ . Se cada homem corresse sucessivamente, com uma velocidade relativa  $v_{rel}$ , e saltasse pela extremidade do vagão, eles transmitiriam ao carro maior velocidade que a que seria transmitida se todos corressem e saltassem ao mesmo tempo?

40. Um foguete cuja massa vale 6 toneladas é colocado em posição vertical para lançamento. Se a velocidade de escape dos gases  $v_p$  vale 1 km/s, determine a quantidade de gás expelida (por segundo), a fim de proporcionar ao foguete o empuxo necessário para

(a) vencer o peso do foguete, (b) dar ao foguete uma aceleração inicial para cima igual a  $20 \text{ m/s}^2$ .

Resposta: (a)  $59 \text{ kg/s}$ . (b)  $180 \text{ kg/s}$ .

41. Duas barcas longas se deslocam, no mesmo sentido, em águas paradas. Uma delas possui velocidade de  $10 \text{ km/h}$  e a outra,  $15 \text{ km/h}$ . Enquanto uma delas passa pela outra, a mais vagarosa lança, para a mais rápida,  $1\,500 \text{ kg/min}$  de carvão. Que força adicional deve ser produzida pelos motores de cada barca de maneira a não alterar suas velocidades? Suponha que o arremesso do carvão seja sempre feito perpendicularmente às barcas e que as forças de atrito com a água não dependem dos seus respectivos pesos.
42. Um avião a jato se desloca a  $250 \text{ m/s}$ . O motor utiliza, por segundo, uma certa quantidade de ar e combustível. A massa total dos produtos da combustão expelidos, por segundo, é igual a  $200 \text{ kg}$ . Sabendo que esses produtos da combustão são expelidos pela retaguarda, com velocidade de  $500 \text{ m/s}$  em relação ao avião, determine: (a) a força de propulsão do motor e (b) a potência liberada.  
Resposta: (a)  $1,0 \times 10^5 \text{ N}$ . (b)  $2,5 \times 10^7 \text{ W}$ .
43. Um vagão de carga, aberto na parte superior, pesando  $10$  toneladas, está deslizando sobre um trilho horizontal, sem atrito, à velocidade de  $0,6 \text{ m/s}$ , quando começa a chover forte. Os pingos de chuva caem verticalmente em relação ao chão. Qual a velocidade do vagão quando meia tonelada de água já tenha sido acumulada no seu interior? Que suposições devem ser feitas, se forem necessárias, para responder à pergunta?
44. Uma corda flexível, de comprimento  $l$ , é colocada em um tubo liso, no interior do qual ela fica ajustada perfeitamente. O tubo forma um ângulo reto e está de tal forma posicionado no plano vertical que uma parte está na vertical e a outra na horizontal. Inicialmente, no instante  $t = 0$ , um comprimento  $y_0$  da corda está pendendo da parte vertical. A corda é solta e desliza através do tubo, de maneira que em qualquer instante  $t$  posterior, ela se desloca com uma velocidade  $dy/dt$ , em que  $y(t)$  é o comprimento da corda que está então pendendo verticalmente. (a) Mostre que, do ponto de vista do problema de massa variável,  $v_{\text{rel.}} = 0$ , de forma que a equação de movimento se escreve  $m \, dv/dt = F_{\text{ext}}$ . (b) Mostre que a equação do movimento específico é  $(d^2 y/dt^2) = -gy/l$ . (c) Mostre que a conservação de energia mecânica leva a  $(dy/dt)^2 - gy^2/l = \text{constante}$ , e que este resultado é coerente com (b). (d) Mostre que  $y = (y_0/2) (e^{\sqrt{g/l} t} + e^{-\sqrt{g/l} t})$  é a solução da equação de movimento [por substituição em (b)] e discuta a solução.
45. Um trenó cuja massa vale  $10 \text{ kg}$  carrega  $40 \text{ kg}$  de areia. Partindo do repouso, ele desliza sobre uma encosta de  $100 \text{ m}$  de comprimento coberta de neve e com inclinação de  $30^\circ$  em relação à horizontal. O trenó possui um orifício no fundo por onde a areia sai com uma taxa de  $2,5 \text{ kg/s}$ . Quanto tempo levará o trenó para atingir o sopé da encosta?

# 10

## colisões

Observando choques entre partículas atômicas, nucleares e elementares, muita coisa se aprendeu sobre estas partículas. Em escala maior, certos fenômenos, como por exemplo, as propriedades dos gases, podem ser melhor interpretados em termos de colisões entre partículas. Neste capítulo aplicaremos os princípios da conservação da energia e da conservação do momento às colisões de partículas.

Em um choque, forças relativamente grandes atuam em cada uma das partículas que colidem, durante um intervalo de tempo, relativamente pequeno. A idéia básica de um “choque” é que o movimento das partículas que se chocam (ou, pelo menos, de uma delas) sofre uma mudança muito brusca e assim é possível estabelecer uma separação nítida entre o tempo que denominamos “antes do choque” e aquele que chamamos “depois do choque”.

Quando um taco golpeia uma bola de beisebol, por exemplo, o início e o fim da colisão podem ser determinados com precisão. O taco fica em contato com a bola durante um intervalo muito pequeno em relação ao tempo durante o qual observamos a bola. Durante o choque o taco exerce uma força na bola (Fig. 10-1). Esta força varia com o tempo de maneira complicada, que só muito dificilmente se poderia determinar. Tanto o taco como a bola se deformam durante o choque.<sup>1</sup> Forças que atuam durante um intervalo pequeno, comparado com o tempo de observação do sistema, são chamadas forças *impulsivas*.

10-1

QUE É UMA COLISÃO?

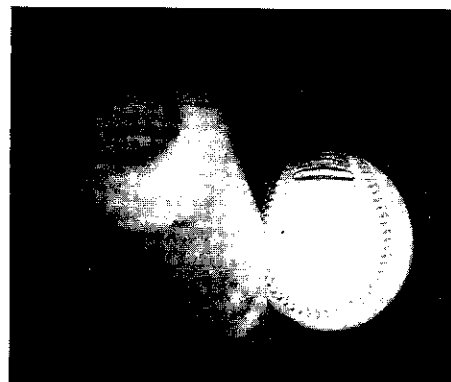


figura 10-1

Fotografia instantânea ultra-rápida de um taco golpeando uma bola de beisebol. Note-se a deformação da bola, indicando a enorme intensidade da força impulsiva nesse instante. (Cortesia de Harold E. Edgerton, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.)

<sup>1</sup> Ver “Batting the Ball” por P. Kirkpatrick, *American Journal of Physics*, agosto, 1963.



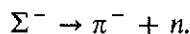
Quando uma partícula alfa ( $\text{He}^4$ ) “colide” com um núcleo de ouro ( $\text{Au}^{197}$ ), a força que atua entre elas pode ser a conhecida força de repulsão eletrostática associada às cargas das partículas. As partículas podem não se tocar, mas ainda continuaremos falando em “colisão”, porque uma força relativamente grande, que atua durante um intervalo de tempo muito curto em relação ao tempo em que a partícula alfa está sendo observada, tem um acentuado efeito em seu movimento.

Quando um próton ( $\text{H}^1$  ou  $p$ ), com energia, digamos, de 25 MeV, colide com um núcleo de um isótopo de prata (talvez  $\text{Ag}^{107}$ ) por exemplo, as partículas podem realmente “tocar-se”, a força predominante que atua entre elas sendo, então, não a força de repulsão eletrostática, mas sim a grande força de atração nuclear, de pequeno raio de ação (veja Seç. 6-4). O próton pode penetrar no núcleo da prata, formando uma estrutura composta. Um instante mais tarde — o intervalo de duração do choque pode ser  $10^{-18}$  s — esta estrutura pode romper-se em duas partículas diferentes, de acordo com uma reação tal como



na qual  $\alpha (= \text{He}^4)$  é uma partícula alfa. Assim, podemos ampliar o conceito de choque para incluir ocorrências (comumente chamadas de *reações*) nas quais a natureza das partículas que interagem, varia durante o evento. Os princípios de conservação são aplicáveis em todos estes exemplos.

Podemos, se quisermos, ampliar ainda mais nossa definição de “choque” para incluir a desintegração espontânea de uma única partícula em duas ou mais outras. Um exemplo é a desintegração da partícula elementar denominada *partícula sigma*, em duas outras partículas, o *pion* e o *nêutron* (veja Ap. I), ou seja,



Embora não tenha havido interação de dois corpos neste processo (a menos que consideremos invertida a marcha da reação), ele possui muitas características comuns com as colisões: (1) há uma diferença bem clara entre o “antes do evento” e o “depois do evento”, e (2) as leis da conservação da energia e do momento nos permitem descobrir muito sobre o processo, estudando a situação “antes” e “após”, mesmo que muito pouco se saiba sobre as leis das forças que atuam durante o fenômeno propriamente dito.

Ao estudarmos as colisões, neste capítulo, nosso objetivo será: dados os movimentos iniciais das partículas envolvidas no choque e supondo que nada conhecemos sobre as forças que atuam durante a colisão, que poderemos conhecer sobre seus movimentos após o choque, a partir dos princípios da conservação da energia e do momento?

Suponhamos que a Fig. 10-2 represente o módulo da força que atua em um corpo durante uma colisão. Supõe-se que a força tenha direção e sentido constantes. A colisão inicia-se no instante  $t_i$  e termina no instante  $t_f$ , sendo a força nula antes e após o choque. Da Eq. 9-12 podemos obter a variação do momento  $d\mathbf{p}$  de um corpo, em um intervalo de tempo  $dt$ , durante o qual atua sobre ele uma força  $\mathbf{F}$ :

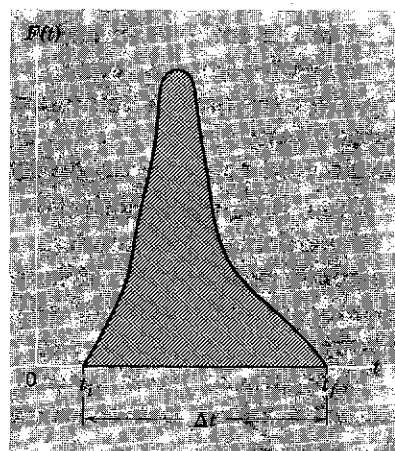


figura 10-2

Como uma força impulsiva  $F(t)$  poderá variar com o tempo, durante um choque que começa no instante  $t_i$  e termina em  $t_f$ .

## 10-2 IMPULSO E MOMENTO LINEAR

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F} dt. \quad (10-1)$$

Podemos encontrar a variação do momento do corpo, durante o choque, integrando a expressão anterior, no intervalo de duração do choque, isto é,

$$\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \int_{\mathbf{p}_i}^{\mathbf{p}_f} d\mathbf{p} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt \quad (10-2)$$

onde os índices  $i$  ( $=$  inicial) e  $f$  ( $=$  final) se referem aos instantes "antes" e "depois" do choque, respectivamente. A integral da força no intervalo de tempo durante o qual ela atua é chamada de *impulso*,  $\mathbf{J}$ , da força. Assim, a variação do momento de um corpo sob a ação de uma força impulsiva é igual ao impulso. Ambos, impulso e momento, são grandezas vetoriais, e ambos têm as mesmas unidades e dimensões.

Supomos que a força impulsiva representada na Fig. 10-2 possuía direção e sentido constantes. O impulso desta força,  $\int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt$ , é representado, em módulo, pela área sob a curva força-tempo.<sup>2</sup>

Consideremos agora a colisão entre duas partículas, de massas  $m_1$  e  $m_2$ , como as mostradas na Fig. 10-3. Durante sua rápida colisão, estas partículas exercem entre si grandes forças. Em um instante qualquer,  $\mathbf{F}_1$  é a força exercida sobre a partícula 1 pela partícula 2 e  $\mathbf{F}_2$  é a força exercida sobre a partícula 2, pela partícula 1. Pela terceira lei de Newton, estas forças, em um instante qualquer, têm módulos iguais e sentidos contrários.

A variação do momento da partícula 1, devida ao choque, é

$$\Delta\mathbf{p}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_1 dt = \bar{\mathbf{F}}_1 \Delta t$$

na qual  $\bar{\mathbf{F}}_1$  é o valor médio da força  $\mathbf{F}_1$  no intervalo em que se processa a colisão,  $\Delta t = t_f - t_i$ .

A variação do momento da partícula 2, devido à colisão, é

$$\Delta\mathbf{p}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_2 dt = \bar{\mathbf{F}}_2 \Delta t$$

na qual  $\bar{\mathbf{F}}_2$  é o valor médio de  $\mathbf{F}_2$  durante o intervalo da colisão,  $\Delta t = t_f - t_i$ .

Se outras forças não agirem nas partículas,  $\Delta\mathbf{p}_1$  e  $\Delta\mathbf{p}_2$  representarão as variações totais dos momentos de cada partícula. Mas vimos que, em cada instante,  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ , então,  $\bar{\mathbf{F}}_1 = -\bar{\mathbf{F}}_2$ , e portanto,

$$\Delta\mathbf{p}_1 = -\Delta\mathbf{p}_2.$$

Se considerarmos as duas partículas como um sistema isolado, o momento total do sistema será

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2,$$

### 10-3

#### CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR DURANTE AS COLISÕES

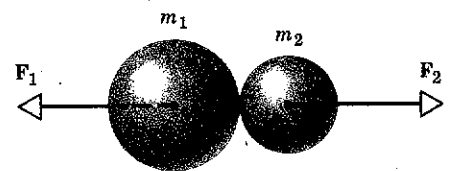


figura 10-3

Duas "partículas"  $m_1$  e  $m_2$  em choque experimentam a ação de forças iguais e opostas ao longo da linha de seus centros, de acordo com a terceira lei de Newton;  $\mathbf{F}_2(t) \equiv -\mathbf{F}_1(t)$ .

<sup>2</sup> O impulso  $\mathbf{J}$ , definido pela Eq. 10-2, não depende de maneira acentuada de valores bem definidos de  $t_i$  e  $t_f$ , bastando que estes instantes estejam suficientemente afastados para incluir a área sombreada da Fig. 10-2. Por motivos que serão vistos posteriormente, é usual escolher  $t_i$  e  $t_f$  com uma separação apenas suficiente para distinguir claramente o "choque" e os intervalos "anterior" e "posterior" ao choque.

e a *variação* total do momento do sistema, devida à colisão, é nula, isto é,

$$\Delta P = \Delta p_1 + \Delta p_2 = 0.$$

Assim, se não há forças externas, o momento total do sistema não varia na colisão. As forças impulsivas que atuam durante a colisão são forças internas que não influenciam no momento total do sistema.

Definimos colisão como uma interação que ocorre em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , desprezível comparado com o tempo durante o qual observamos o sistema. Podemos, também, caracterizar a colisão como um acontecimento no qual as forças externas que eventualmente atuem no sistema sejam desprezíveis, comparadas com as forças impulsivas da colisão. Quando um taco golpeia uma bola de beisebol ou de golfe, um jogador de futebol chuta a bola, ou uma bola de bilhar choca-se com outra, forças externas estão atuando nos sistemas. Por exemplo, a gravidade e forças de atrito estão atuando nestes corpos; estas forças externas podem não ser as mesmas em cada corpo, nem serão necessariamente canceladas com outras forças externas. Ainda assim, podemos seguramente desprezar estas forças externas que agem durante a colisão e supor que o momento se conserva, desde que, como é quase sempre verdadeiro, estas forças externas sejam desprezíveis em relação às forças impulsivas da colisão. O resultado disto é que a variação do momento de uma partícula, durante a colisão, devida a forças externas, é desprezível comparada com a variação do momento da mesma partícula, proveniente das forças impulsivas da colisão (Fig. 10-4).

Por exemplo, quando um taco atinge a bola de beisebol, a colisão dura apenas uma pequena fração de segundo. Como a variação do momento é grande e o tempo de colisão pequeno, segue-se, da relação

$$\Delta p = \bar{F} \Delta t$$

que a força impulsiva média é relativamente grande. Comparada com esta, a força externa da gravidade é desprezível. Assim, para efeito de provocar variação no movimento da bola, *durante a colisão*, a força externa pode ser seguramente ignorada; isto será tanto mais verdadeiro quanto menor for a duração do choque.

Na prática, portanto, podemos aplicar o princípio da conservação do momento linear durante a colisão, se a duração da colisão for suficientemente curta. Podemos então dizer que o momento de um sistema de partículas, imediatamente antes de se iniciar a colisão, é igual ao momento do sistema imediatamente depois da colisão.

Podemos sempre determinar o movimento de corpos depois de uma colisão, a partir de seus movimentos antes, se conhecermos as forças que atuam durante a colisão e se pudermos resolver as equações do movimento. Geralmente não conhecemos estas forças. Entretanto, o princípio de conservação do momento será obedecido durante a colisão. Sabemos, também, que o princípio da conservação da energia total é observado. Embora não conheçamos detalhes da interação, podemos usar estes princípios, em muitos casos, para obter os resultados da colisão.

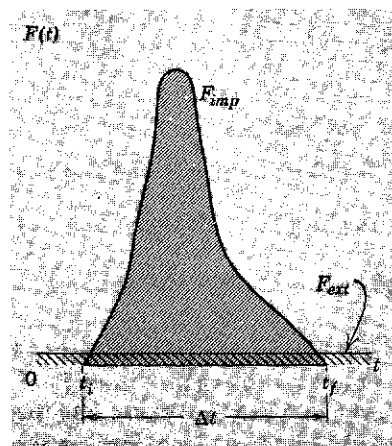


figura 10-4

Durante um choque, a força impulsiva  $F_{imp}$  é geralmente muito maior do que quaisquer forças externas  $F_{ext}$ , que poderão atuar sobre o sistema.

## 10-4 COLISÕES EM UMA DIMENSÃO

As colisões costumam ser classificadas conforme a conservação, ou não, da *energia cinética* na colisão. Se a energia cinética é conservada, dizemos que a colisão é *elástica*. Em caso contrário, dizemos que as colisões são *inelásticas*. Colisões entre partículas atômicas, nucleares e fundamentais são, às vezes, colisões elásticas. De fato, estas são as únicas colisões realmente elásticas conhecidas. Colisões entre corpos grandes são, de maneira geral, sempre inelásticas. Muitas vezes, entretanto, podemos tratá-las como se fossem aproximadamente elásticas, como, por exemplo, as colisões que ocorrem entre bolas de marfim ou de vidro. Quando dois corpos permanecem juntos após a colisão, dizemos que a colisão é *perfeitamente inelástica*. Por exemplo, o choque entre uma bala e seu alvo é perfeitamente inelástico quando a bala fica encravada no alvo. A expressão "perfeitamente inelástico" não significa que toda a energia cinética inicial se perde; como veremos, seu significado é de que a perda é a maior possível, compatível com a conservação do momento.

Mesmo que as forças que agem durante a colisão não sejam conhecidas, podemos obter os movimentos das partículas após a colisão, através do conhecimento de seus movimentos antes da colisão, desde que o choque seja completamente inelástico, ou se a colisão for elástica em uma dimensão. Para o choque em uma dimensão, o movimento relativo das partículas depois do choque se faz ao longo da mesma reta em que se fazia antes do choque. Nosso estudo, por enquanto, se limitará aos movimentos em uma dimensão.

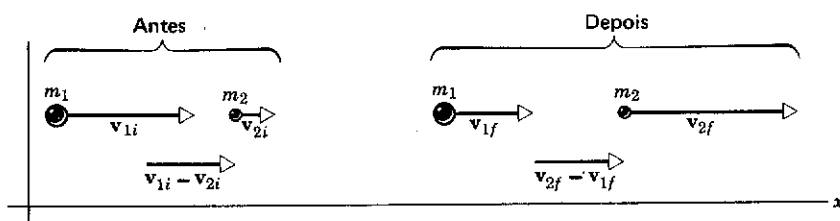


figura 10-5

Duas esferas antes e depois de um choque elástico. A velocidade  $v_{1i} - v_{2i}$  de  $m_1$  em relação a  $m_2$ , antes do choque, é igual à velocidade  $v_{2f} - v_{1f}$  de  $m_2$  em relação a  $m_1$  depois do choque.

Consideremos, em primeiro lugar, uma colisão *elástica* em uma dimensão. Podemos imaginar duas esferas lisas, movimentando-se sem rolar, ao longo da linha que une seus centros, e continuando, depois de colidir, a se mover na mesma linha reta, ainda sem rolar (veja Fig. 10-5). Estas esferas exercerão, uma sobre a outra, durante o choque, forças cujas direções são a do movimento inicial, de modo que o movimento final estará também nesta direção.

As massas das esferas são  $m_1$  e  $m_2$ , os componentes de suas velocidades antes do choque são  $v_{1i}$  e  $v_{2i}$  e, após o choque,  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$ .<sup>3</sup> Tomaremos o sentido para a direita como sendo positivo, tanto para o momento como para a velocidade. Suporemos, ainda, a menos que se esclareça o contrário, que as velocidades das partículas em colisão sejam suficientemente pequenas para não ser necessário usar as expressões relativísticas para o momento e a energia cinética. Então, pela conservação do momento, teremos

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}.$$

<sup>3</sup> A notação usada é fácil de ser interpretada e lembrada, revelando, de maneira simples e compacta, muita informação. Os índices numéricos, como 1 e 2, indicam a partícula a que se referem e os índices literais,  $i$  e  $f$ , indicam o valor inicial (antes do choque) e o valor final (depois do choque), respectivamente.

Como o choque é elástico, a energia cinética se conserva e, portanto,

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2.$$

Fica claro, então, que, conhecendo as massas e as velocidades iniciais, é possível, através das duas equações anteriores, obter as velocidades finais  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$ .

A equação do momento pode ser escrita como

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}), \quad (10-3)$$

e a equação da energia pode ser escrita

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2). \quad (10-4)$$

Dividindo a Eq. 10-4 pela Eq. 10-3 e supondo  $v_{2f} \neq v_{2i}$  e  $v_{1f} \neq v_{1i}$  (veja a questão 7), obtemos

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i},$$

após reagrupar,

$$v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f}. \quad (10-5)$$

Esta última relação nos diz que, em colisões elásticas unidimensionais, a velocidade relativa de aproximação das partículas antes do choque é igual à sua velocidade relativa de separação após o choque.

Para encontrar os componentes das velocidades,  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$ , depois do choque, a partir dos componentes  $v_{1i}$  e  $v_{2i}$ , antes do choque, poderemos usar duas quaisquer das três equações numeradas anteriores. Da Eq. 10-5 teremos

$$v_{2f} = v_{1i} + v_{1f} - v_{2i}.$$

Levando este valor na Eq. 10-3 e resolvendo-a para  $v_{1f}$ , encontraremos

$$v_{1f} = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left( \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}.$$

De maneira semelhante, levando o valor  $v_{1f} = v_{2f} + v_{2i} - v_{1i}$  (da Eq. 10-5), na Eq. 10-3 e resolvendo para  $v_{2f}$ , obteremos

$$v_{2f} = \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}.$$

Há muitos casos de interesse especial. Por exemplo, quando as partículas em colisão têm a mesma massa,  $m_1$  será igual a  $m_2$ , de modo que as duas equações anteriores se tornam simplesmente

$$v_{1f} = v_{2i} \quad \text{e} \quad v_{2f} = v_{1i}.$$

Isto é, em uma colisão elástica, unidimensional, de duas partículas de massa iguais, as partículas simplesmente trocam suas velocidades durante a colisão.

Um outro caso de interesse é aquele no qual uma partícula,  $m_2$ , está inicialmente em repouso. Então,  $v_{2i}$  é igual a zero, e

$$v_{1f} = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} = \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}.$$

Naturalmente, se  $m_1 = m_2$ , então  $v_{1f} = 0$  e  $v_{2f} = v_{1i}$ , como se esperava. A primeira partícula pára repentinamente e a segunda arranca com a velocidade que a primeira tinha inicialmente. Se, entretanto,  $m_2$  é muito maior do que  $m_1$ , teremos

$$v_{1f} \cong -v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \cong 0.$$

Isto é, quando uma partícula leve se choca com outra mais pesada, em repouso, a velocidade da partícula leve é praticamente invertida e a partícula pesada permanece praticamente em repouso. Por exemplo, suponhamos que deixemos cair verticalmente uma bola sobre uma superfície horizontal, presa à Terra. Será, realmente, um choque entre a bola e a Terra. Se a colisão é elástica, a bola saltará com sua velocidade invertida, alcançando a mesma altura de onde caiu.

Se, finalmente,  $m_2$  é muito menor do que  $m_1$ , obteremos

$$v_{1f} \cong v_{1i} \quad \text{e} \quad v_{2f} \cong 2v_{1i}.$$

Isto significa que a velocidade da partícula pesada incidente não é praticamente influenciada pela colisão com a partícula leve estacionária, mas a partícula leve parte com velocidade aproximadamente igual ao dobro da velocidade da partícula incidente. O movimento de uma bola de boliche quase não é afetado pelo choque com um balão de borracha de mesmo tamanho, mas este avança rapidamente para a frente.

Nêutrons produzidos em um reator pela fissão de átomos de urânio se movimentam com alta velocidade; se eles devem produzir outras fissões, seu movimento precisa ser amortecido. Supondo que estes nêutrons se choquem elasticamente com núcleos em repouso, qual deve ser a natureza destes núcleos para produzir o efeito moderador sobre os nêutrons, no reator? Poderemos responder a esta questão através das discussões que acabamos de fazer. Se os alvos fossem núcleos pesados, de chumbo, por exemplo, os nêutrons simplesmente voltariam com velocidade praticamente igual à que tinham inicialmente. Se os alvos fossem muito mais leves do que os nêutrons — elétrons, por exemplo — os nêutrons continuariam a se mover aproximadamente com a mesma velocidade inicial. Entretanto, se os alvos estacionários forem partículas de massas aproximadamente iguais à massa dos nêutrons, estes, após se chocarem (frontalmente) com os núcleos, permanecerão praticamente em repouso. Então, o hidrogênio, que tem a mesma massa do nêutron, seria o alvo mais eficiente. Outras considerações afetam a escolha de um moderador de nêutrons, mas as considerações relacionadas apenas com momento e energia, limitam a escolha a elementos mais leves.

Se a colisão é *inelástica*, então, por definição, a energia cinética não é conservada. A energia cinética final deve ser menor do que o seu valor inicial e a diferença é convertida, por exemplo, em calor ou em energia potencial de deformação na colisão; ou, a energia cinética final pode exceder a inicial, quando a energia potencial for liberada durante a colisão. Em qualquer caso, a conservação do momento e da energia total serão ainda observadas.

Consideremos, finalmente, uma colisão *perfeitamente inelástica*. As duas partículas permanecem juntas após a colisão, de tal modo que haverá uma velocidade final, comum,  $v_f$ . Não é necessário restringir a discussão a um movimento unidimensional. Usando apenas o princípio da conservação do momento, encontramos

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \quad (10-6)$$

Esta equação permite determinar  $v_f$  quando são conhecidos  $v_{1i}$  e  $v_{2i}$ .

Uma bola de beisebol, de massa igual a 0,16 kg, é rebatida por um taco quando se movimentava horizontalmente com velocidade de 30 m/s. Depois da batida, a bola deixa o taco com velocidade de 40 m/s em sentido oposto ao do seu movimento inicial. Determine o impulso do choque.

Não podemos calcular o impulso através de sua definição,  $\mathbf{J} = \int \mathbf{F} dt$ , porque não conhecemos a força exercida na bola em função do tempo. Entretanto, vimos (Eq. 10-2) que a variação do momento de uma partícula, sob a ação de uma força impulsiva, é igual ao impulso. Então

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \text{variação do momento} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i \\ &= m\mathbf{v}_f - m\mathbf{v}_i = m(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i). \end{aligned}$$

Considerando, arbitrariamente, positivo o sentido de  $v_i$  teremos para o impulso

$$J = (0,16 \text{ kg})(-40 \text{ m/s} - 30 \text{ m/s}) = -11 \text{ kg}\cdot\text{m/s}.$$

O sinal negativo mostra que o impulso que atua na bola tem sentido contrário ao da sua velocidade inicial.

Com os dados fornecidos, não será possível determinar a força que atuou na bola durante a colisão. Realmente, qualquer força cujo impulso seja  $-11 \text{ kg}\cdot\text{m/s}$  produzirá a mesma variação no momento. Por exemplo, se o taco e a bola permanecerem em contato durante 0,0010 s, a força média durante este tempo seria

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{-11 \text{ kg}\cdot\text{m/s}}{0,0010 \text{ s}} = -1,1 \times 10^4 \text{ N}.$$

Para tempos de contato mais curtos a força seria maior. A força real teria um valor máximo superior ao seu valor médio.

Durante o tempo do choque, devido à força da gravidade, qual seria o deslocamento, para baixo, que a bola sofreria?

(a) Em que proporção diminuirá a energia cinética de um nêutron (massa  $m_1$ ) que se choca central e elasticamente com um núcleo atômico (massa  $m_2$ ) inicialmente em repouso?

A energia cinética inicial do nêutron,  $K_i$ , é  $\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2$ . Sua energia cinética final,  $K_f$ , é  $\frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2$ . A fração representativa da perda (perda relativa) será

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{v_{1i}^2 - v_{1f}^2}{v_{1i}^2} = 1 - \frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2}.$$

Mas, para este tipo de colisão

$$v_{1f} = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i},$$

então,

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = 1 - \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

## EXEMPLO 1

## EXEMPLO 2

(b) Determine a perda relativa da energia cinética do nêutron quando ele se choca desta maneira, com um núcleo de chumbo, com um núcleo de carbono e com um núcleo de hidrogênio.

A razão entre a massa nuclear e a massa do nêutron ( $= m_2/m_1$ ) é 206 para o chumbo, 12 para o carbono e 1 para o hidrogênio.

Para o chumbo, sendo  $m_2 = 206 m_1$ ,

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{4 \times 206}{(207)^2} = 0,02 \text{ ou } 2\%.$$

Para o carbono,  $m_2 = 12 m_1$ ,

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{4 \times 12}{(13)^2} = 0,28 \text{ ou } 28\%.$$

Para o hidrogênio,  $m_2 = m_1$ ,

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{4 \times 1}{(2)^2} = 1 \text{ ou } 100\%.$$

Este resultado explica porque a parafina, que é rica em hidrogênio, é mais eficiente como moderador de nêutrons do que o chumbo.

*O pêndulo balístico.* O pêndulo balístico é usado para medir velocidades de balas. Consiste em um grande bloco de madeira, de massa  $M$ , suspenso verticalmente por duas cordas. Uma bala de massa  $m$ , deslocando-se com velocidade  $v_i$ , atinge o pêndulo e nele penetra (Fig. 10-6). Se o tempo de colisão (tempo requerido para que a bala atinja o repouso em relação ao bloco) é muito pequeno comparado com o seu período de oscilação, as cordas que sustentam o pêndulo permanecem praticamente na vertical durante a colisão. Portanto, não há força horizontal externa atuando no sistema (bala + pêndulo) durante a colisão, e o componente horizontal do momento é conservado. A velocidade do sistema após a colisão,  $v_f$ , é muito menor do que a velocidade da bala antes. Esta velocidade final pode ser facilmente determinada, de modo que a velocidade inicial da bala poderá ser calculada através da conservação do momento.

O momento inicial do sistema é igual ao da bala,  $mv_i$ , e logo após a colisão é  $(m + M)v_f$ , de modo que

$$mv_i = (m + M)v_f.$$

Depois que a colisão termina, o pêndulo e a bala oscilam até uma altura máxima  $y$ , onde a energia cinética do sistema depois do impacto é convertida em energia potencial gravitacional. Então, usando o princípio da conservação da energia mecânica para esta parte do movimento, obtemos

$$\frac{1}{2}(m + M)v_f^2 = (m + M)gy.$$

Resolvendo as duas equações anteriores para  $v_i$ , obteremos

$$v_i = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gy}.$$

Então, poderemos calcular a velocidade inicial da bala medindo  $m$ ,  $M$  e  $y$ .

A energia cinética da bala era  $\frac{1}{2}mv_i^2$  e a energia cinética do sistema imediatamente após a colisão é  $\frac{1}{2}(m + M)v_f^2$ . A relação entre elas é

$$\frac{\frac{1}{2}(m + M)v_f^2}{\frac{1}{2}mv_i^2} = \frac{m}{m + M}.$$

Por exemplo, se a bala tem massa de 5 g e o bloco tem massa de 2 000 g, apenas cerca de um quarto de 1% da energia cinética inicial permanece; cerca de 99% é convertida em outras formas de energia, como, por exemplo, o calor.

### EXEMPLO 3

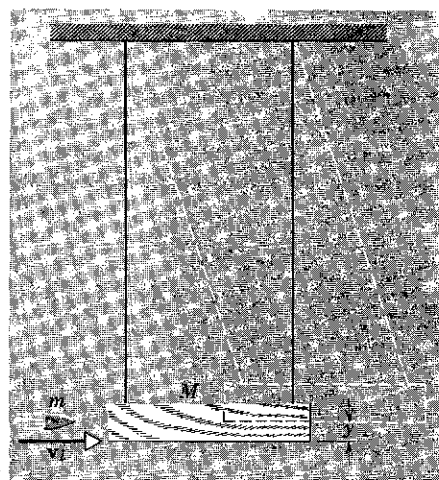


figura 10-6

Exemplo 3. Pêndulo balístico, consistindo de um grande bloco de madeira de massa  $M$  suspenso por duas cordas. Quando se dispara uma bala de massa  $m$  e velocidade  $v_i$  contra o pêndulo, o bloco oscila, elevando-se a uma altura máxima  $y$ .



A velocidade do centro de massa de duas partículas não é modificada pela colisão entre elas, porque a colisão não faz variar o momento total do sistema, influenciando apenas na distribuição do momento entre as duas partículas. O momento linear do sistema pode ser escrito (Eq. 9-15) como  $\mathbf{P} = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{cm}$ . Se não há forças externas atuando, então  $\mathbf{P}$  é constante antes e após a colisão, e o centro de massa move-se com velocidade constante.

Se escolhermos um referencial ligado ao centro de massa, então, neste sistema de referência,  $\mathbf{v}_{cm} = 0$  e  $\mathbf{P} = 0$ . Há grande simplicidade e simetria na descrição das colisões em relação aos referenciais ligados ao centro de massa e na Física Nuclear é comum adotar-se este processo. Quer para as colisões elásticas como para as inelásticas, o momento se conserva e no referencial do centro de massa, o momento total é nulo. Estes resultados são válidos tanto em uma como em duas ou três dimensões, porque o momento é uma grandeza vetorial.

Como exemplo, consideremos uma colisão elástica, unidimensional, entre duas partículas  $m_1$  e  $m_2$ . Seja  $m_2$  igual a 3  $m_1$  e suponhamos que  $m_2$  esteja em repouso para que  $v_{2i}$  seja igual a zero no referencial do laboratório. O momento total das duas partículas, é exatamente o da partícula incidente  $m_1 v_{1i}$ , tal que

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_{cm}$$

ou

$$v_{cm} = \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} = \frac{1}{4} v_{1i}$$

Depois da colisão,  $m_1$  tem a velocidade  $v_{1f} = -\frac{1}{2} v_{1i}$  e  $m_2$  tem velocidade  $v_{2f} = \frac{1}{2} v_{1i}$ . O momento total das duas partículas ( $m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$ ) é o mesmo que possuíam antes da colisão e o movimento do centro de massa não varia (verifique isto). Na Fig. 10-7a mostra-se uma série de "instantâneos" da colisão, tomados em intervalos de tempo iguais, vistos no referencial do laboratório. Na Fig. 10-7b é mostrada a mesma situação, vista do referencial do centro de massa, onde  $v_{cm}$  é nula. Observe a simetria do movimento das partículas quando descritos desta maneira. A partícula que vem da esquerda tem a velocidade de  $\frac{3}{4} v_{1i}$  em relação ao centro de massa (sendo  $v_{1i}$  a velocidade de  $m_1$  no referencial do laboratório) e volta com esta mesma velocidade. A partícula que vem da direita tem velocidade de  $\frac{1}{4} v_{1i}$  em relação ao centro de massa e volta com a mesma velocidade.

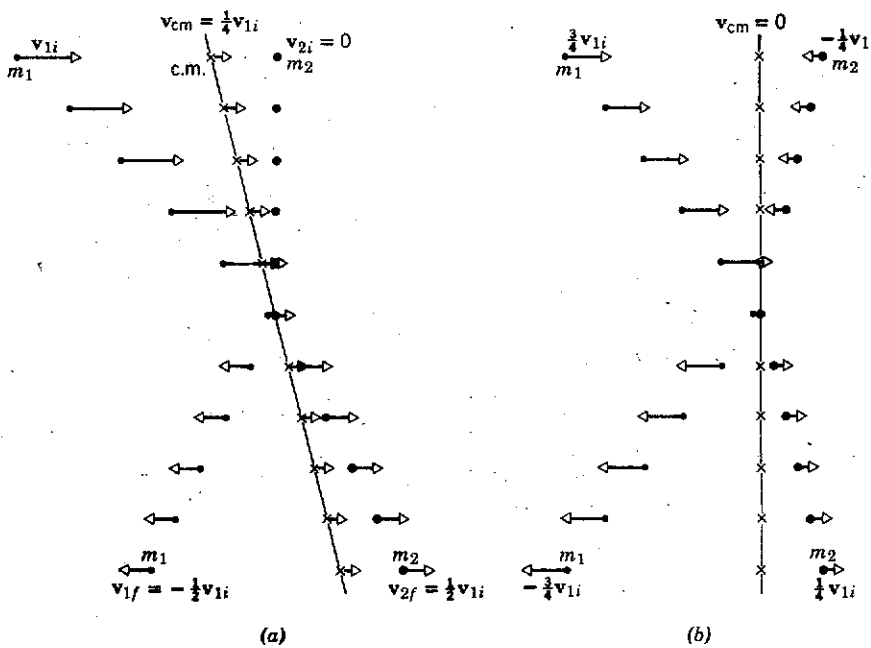


figura 10-7  
(a) Choque elástico no referencial do laboratório. (b) O mesmo choque elástico no referencial do centro de massa.

Se a colisão for completamente inelástica, o movimento após a colisão será simplesmente o de duas partículas que se movem juntas em seu centro de massa.

Nas Figs. 10-8a e 10-8b mostramos como a colisão da Fig. 10-7, agora suposta perfeitamente inelástica, seria descrita nos referenciais do laboratório e do centro de massa, respectivamente. Estas figuras são exatamente iguais às anteriores até o momento do choque; depois da colisão, entretanto, o movimento do centro de massa descreve o movimento de todo o sistema.

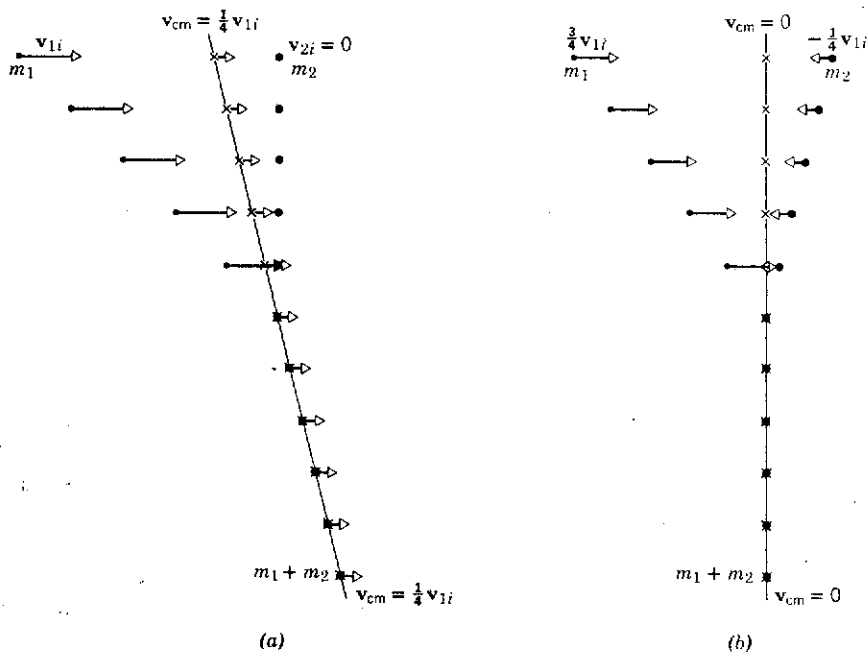


figura 10-8

(a) Choque completamente inelástico no referencial do laboratório. (b) O mesmo choque completamente inelástico no referencial do centro de massa. Em cada caso, o movimento anterior ao choque é o mesmo que o da Fig. 10-7.

A diferença entre energia cinética e momento é a relação entre estes conceitos e o conceito de força não foram claramente percebidas até o século XVIII. Os cientistas indagavam qual das duas grandezas, energia cinética ou momento, representaria a "verdadeira" medida do efeito de uma força sobre um corpo. Descartes argumentava que, quando os corpos interagem, tudo o que pode acontecer é, apenas, transferência de momento de um corpo para outro, pois o momento total do universo permanece constante; então, a "verdadeira" medida de uma força é a variação do momento que ela produz em um dado intervalo de tempo. Leibnitz atacava este ponto de vista e dizia que a "verdadeira" medida de uma força é a variação que ela produz na energia cinética (chamada por ele de *vis viva* ou "força viva", tomada como sendo o dobro daquilo que chamamos de energia cinética).

D'Alembert (1743), em seu tratado de Mecânica, encerrou a discussão, considerando a sem sentido, uma vez que provinha de uma confusão de terminologia. O efeito cumulativo de uma força pode ser medido por seu efeito integrado no tempo,  $\int F dt$ , que produz a variação no momento, ou por seu efeito integrado no espaço,  $\int F dx$ , que produz variação da energia cinética. Ambos os conceitos são úteis e válidos, embora diferentes. A escolha de qual dos dois devemos usar, dependerá daquilo em que estivermos mais interessados ou do que nos será mais conveniente. Como ficou evidenciado em nosso estudo sobre colisão, frequentemente, em um mesmo problema, fazemos uso dos dois conceitos (ver Questão 23).

Um ponto de vista mais moderno é o de procurar grandezas do movimento que sejam invariantes, em lugar de focalizar nossa atenção no conceito de força. A questão de saber se é a energia ou o momento que representa a "verdadeira" grandeza do movimento, torna-se sem sentido, pois não existe uma única grandeza que poderia medir a "quantidade de movimento". Tanto a energia como o momento podem ser encarados como invariantes do movimento, desde que, para um sistema isolado, o total de cada uma destas grandezas, consideradas todas as partes do sistema, permanece constante com o tempo. Pode haver uma troca de energia

## 10-5

### MEDIDA "VERDADEIRA" DE UMA FORÇA

ou de momento entre as diferentes partes de um sistema isolado, mas o total de cada uma destas grandezas é conservado.

Para o choque em duas ou três dimensões (exceto para um choque perfeitamente inelástico), se conhecermos o movimento das partículas antes do choque, as leis da conservação, apenas, não poderão nos fornecer o movimento das partículas após o choque. Por exemplo, para uma colisão elástica bidimensional, que é o caso mais simples, temos quatro incógnitas, a saber, dois componentes da velocidade de cada uma das duas partículas após a colisão; mas temos apenas três relações entre eles, uma para a conservação da energia cinética e uma para a conservação do momento em cada uma das duas dimensões. Assim, necessitaremos mais informações além das condições iniciais. Quando não conhecemos as forças de interação, que é o caso mais comum, outras informações podem ser obtidas através da experiência. É geralmente fácil obter o ângulo de desvio de uma das partículas que colidem.

Consideremos, agora, o que acontece quando uma partícula é lançada sobre uma outra, em repouso. Este caso não é muito particular, como poderia parecer, porque é sempre possível escolher um sistema de referência tal que a partícula-alvo esteja, antes do choque, em repouso em relação a ele. Várias experiências de Física Nuclear envolvem partículas nucleares que são lançadas sobre alvos estacionários no referencial do laboratório. Nestas colisões, em vista da conservação do momento, o movimento se faz em um plano, definido pelas direções de recuo das partículas que colidem. O movimento inicial não precisa estar sobre a reta que une os centros das duas partículas. A força de interação pode ser eletromagnética (incluídas as forças de "contato"; ver Seç. 6-4), gravitacional ou nuclear. As partículas não precisam "tocar-se"; forças fortes, que atuam quando as partículas se encontram a distâncias muito pequenas e cuja duração é muito curta, comparada com o tempo de observação, desviam as partículas de suas trajetórias iniciais.

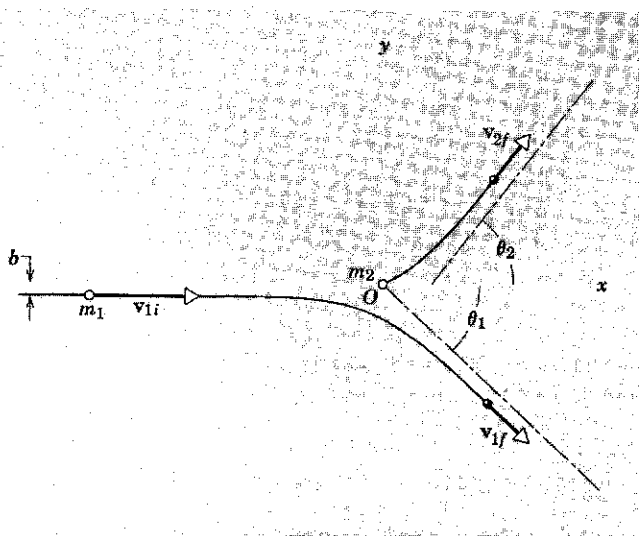


figura 10-9

Duas partículas,  $m_1$  e  $m_2$ , que se chocam. Os círculos brancos indicam suas posições antes do choque, e os círculos sombreados, depois do choque. Inicialmente  $m_2$  está em repouso. O parâmetro de impacto  $b$  é a distância pela qual o choque deixa de ser direto.

Uma situação típica é mostrada na Fig. 10-9. A distância  $b$  entre a direção inicial do movimento e a linha paralela a esta direção que passa pela partícula-alvo, é chamada *parâmetro de im-*

*pacto*. Este valor mede a maior ou menor aproximação do choque em questão, com o choque direto, e se  $b = 0$  o choque será frontal. A direção do movimento da partícula incidente,  $m_1$ , depois da colisão, faz um ângulo  $\theta_1$  com a direção inicial e a partícula-alvo,  $m_2$ , inicialmente em repouso, desloca-se, depois da colisão, em uma direção que faz um ângulo  $\theta_2$  com a direção inicial da partícula incidente. Aplicando a conservação do momento, que é uma relação vetorial, obtemos duas equações escalares; para o componente do movimento ao longo do eixo  $Ox$  obtemos

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2,$$

e para o componente, segundo  $Oy$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin \theta_1 - m_2 v_{2f} \sin \theta_2.$$

Supondo que o choque seja elástico, podemos aplicar a conservação da energia cinética e obteremos uma terceira equação,

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2.$$

Se conhecermos as condições iniciais ( $m_1$ ,  $m_2$  e  $v_{1i}$ ), teremos quatro incógnitas ( $v_{1f}$ ,  $v_{2f}$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ ), mas, apenas, com três equações que as relacionam. Só poderemos determinar o movimento após a colisão, se especificarmos um destes valores incógnitos, como, por exemplo,  $\theta_1$ .

Dois patins colidem e permanecem juntos, como a Fig. 10-10 sugere. Um, cuja massa  $m_1$  é 70 kg, está inicialmente movendo-se de oeste para leste com velocidade  $v_1$  de 6,0 km/h. O outro, cuja massa  $m_2$  é 50 kg está inicialmente movendo-se de sul para norte com velocidade  $v_2$  de 8,0 km/h. (a) Qual é a velocidade final do par? (b) Que fração da energia cinética inicial dos patins é perdida devido a colisão?

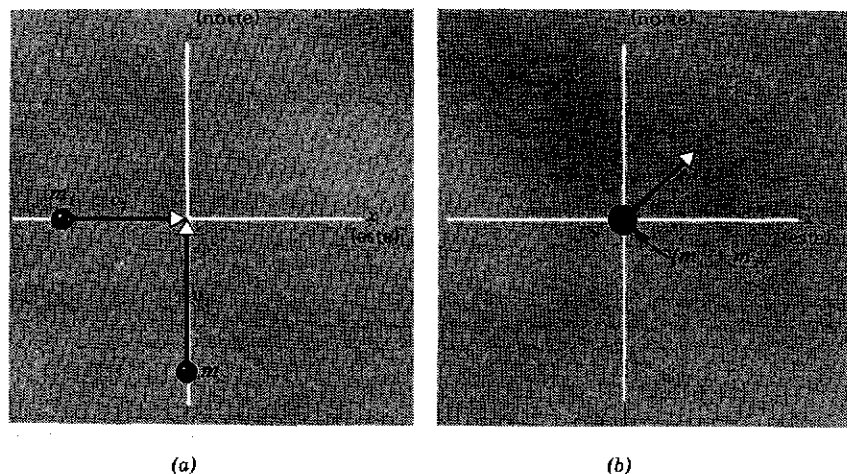


figura 10-10

Exemplo 4. (a) Situação inicial. (b) Situação final.

(a) A Fig. 10-10 mostra as situações inicial e final. Como  $\mathbf{P} = \mathbf{P}_f$  (nenhuma força externa atua) podemos escrever para o componente  $x$  do momento

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v \cos \theta,$$

e para o componente  $y$  do momento

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \sin \theta.$$

Dividindo a segunda equação pela primeira, obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \theta &= \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} = \frac{(50 \text{ kg})(8,0 \text{ km/h})}{(70 \text{ kg})(6,0 \text{ km/h})} \\ &= 0,95 \quad \text{ou} \quad \theta = 43^\circ,\end{aligned}$$

que dá a direção da velocidade final.

Então, da equação do componente  $y$ , temos

$$\begin{aligned}v &= \frac{m_2 v_2}{(m_1 + m_2) \operatorname{sen} \theta} \\ &= \frac{(50 \text{ kg})(8,0 \text{ km/h})}{(70 \text{ kg} + 50 \text{ kg}) \operatorname{sen} 43^\circ} \\ &= 4,9 \text{ km/h}\end{aligned}$$

que dá o módulo da velocidade final.

(b) A energia cinética inicial dos patins é

$$\begin{aligned}K_i &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\ &= \frac{1}{2} (70 \text{ kg})(6,0 \text{ km/h})^2 + \frac{1}{2} (50 \text{ kg})(8,0 \text{ km/h})^2 \\ &= 220 \text{ J}.\end{aligned}$$

A energia cinética final do par é

$$\begin{aligned}K_f &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 \\ &= \frac{1}{2} (70 \text{ kg} + 50 \text{ kg})(4,9 \text{ km/h})^2 \\ &= 110 \text{ J}.\end{aligned}$$

Em consequência,

$$\frac{K_f - K_i}{K_i} = \frac{220 \text{ J} - 110 \text{ J}}{220 \text{ J}} = \frac{1}{2}$$

de modo que 50% da energia cinética inicial é perdida na colisão.

## EXEMPLO 5

Uma molécula de gás, com a velocidade de 300 m/s, colide elasticamente com outra molécula de mesma massa que está inicialmente em repouso. Depois do choque, a primeira molécula desloca-se em uma direção que forma um ângulo de  $30^\circ$  com a direção do movimento inicial da partícula. Determinar a velocidade de cada molécula após o choque e o ângulo que a molécula-alvo, ao avançar, faz com a direção de incidência.

Este exemplo corresponde exatamente à situação que acabamos de discutir, com  $m_1 = m_2$ ,  $v_{1i} = 300 \text{ m/s}$  e  $\theta_1 = 30^\circ$ . Fazendo  $m_1 = m_2$ , teremos as relações

$$v_{1i} = v_{1f} \cos \theta_1 + v_{2f} \cos \theta_2,$$

$$v_{1f} \operatorname{sen} \theta_1 = v_{2f} \operatorname{sen} \theta_2,$$

e

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2.$$

Devemos resolver o sistema para  $v_{1f}$ ,  $v_{2f}$  e  $\theta_2$ . Para isto, vamos elevar a primeira equação ao quadrado (reescrevendo-a na forma  $v_{1i} - v_{1f} \cos \theta_1 = v_{2f} \cos \theta_2$ ) e somar o resultado à segunda equação (lembrando que  $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ); assim, obtemos

$$v_{1i}^2 + v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f} \cos \theta_1 = v_{2f}^2.$$

Combinando esta equação com a terceira, teremos

$$2v_{1f}^2 = 2v_{1i}v_{1f} \cos \theta_1$$

ou (como  $v_{1f} \neq 0$ )

$$v_{1f} = v_{1i} \cos \theta_1 = (300 \text{ m/s}) (\cos 30^\circ)$$

ou

$$v_{1f} = 260 \text{ m/s.}$$

Da terceira equação, tiramos

$$v_{2f}^2 = v_{1i}^2 - v_{1f}^2 = (300 \text{ m/s})^2 - (260 \text{ m/s})^2$$

ou

$$v_{2f} = 150 \text{ m/s.}$$

Finalmente, da segunda equação

$$\sin \theta_2 = (v_{1f}/v_{2f}) \sin \theta_1 = (260/150) \sin 30^\circ$$

$$\sin \theta_2 = 0,866$$

ou

$$\theta_2 = 60^\circ.$$

As duas moléculas se separam, após o choque, em ângulo reto ( $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$  na Fig. 10-9).

O estudante deve ser capaz de mostrar que, em choque elástico entre partículas de massas iguais, uma delas estando inicialmente em repouso, as direções dos movimentos das partículas após o choque serão perpendiculares entre si.

Na Fig. 10-11 mostramos quatro fotografias de colisões elásticas nucleares, observadas em uma câmara de Wilson.<sup>4</sup> As trajetórias das partículas tornam-se visíveis pelas gotículas de vapor d'água condensado, que vão se formando no trajeto das partículas. Em cada caso a partícula incidente é uma partícula  $\alpha$  ( $\text{He}^4$ ) e o núcleo-alvo está praticamente em repouso antes do choque. Observe que, à medida que a massa da partícula-alvo cresce, o ângulo entre as partículas após o choque, também aumenta (veja Probl. 42). No caso (b), em que a partícula-alvo é, também, uma partícula  $\alpha$ , as fotografias estereoscópicas mostram que as partículas se movem em ângulo reto após o choque; o ângulo da figura não parece exatamente um ângulo reto, porque as partículas não estão no plano da figura.

A Fig. 10-12 mostra uma série de quatro colisões elásticas sucessivas entre prótons, provocadas quando um próton de alta energia penetra em uma câmara de bolhas<sup>5</sup> cheia de hidrogênio líquido, que fornece os prótons-alvos. As trajetórias das partículas, neste caso, se tornam visíveis pelas bolhas que se formam nos trajetos das partículas. Como as partículas em choque têm massas iguais

<sup>4</sup> Em 1927, o físico inglês C. T. R. Wilson recebeu o Prêmio Nobel pela invenção da câmara de condensação, que recebeu seu nome; suas investigações iniciaram-se com um objetivo inteiramente diferente, o de tentar produzir no laboratório um fenômeno atmosférico observado nas montanhas Ben Nevis, na Escócia.

<sup>5</sup> Em 1960, o físico americano, Donald Glaser, recebeu o Prêmio Nobel pela invenção da câmara de bolhas; diz-se que a idéia lhe ocorreu ao observar a formação de bolhas em um copo de cerveja.

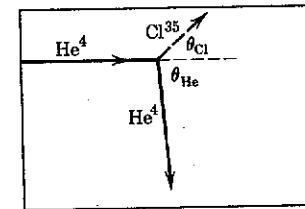
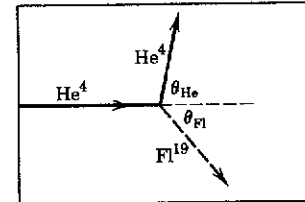
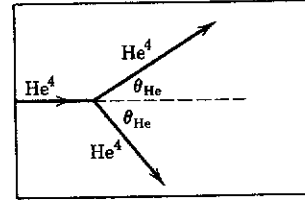
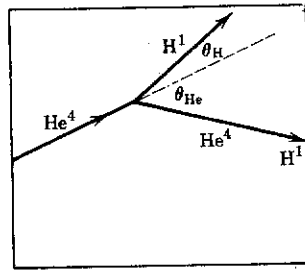
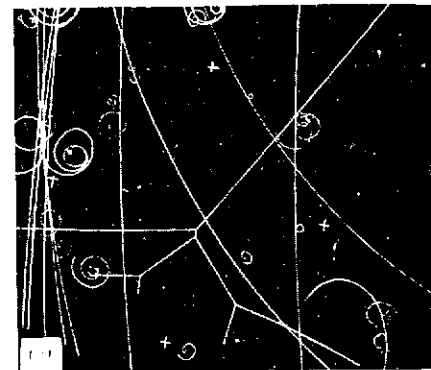
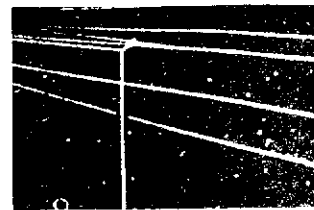
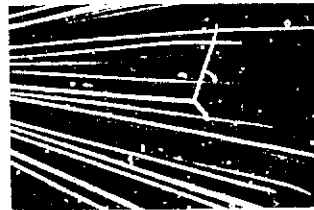
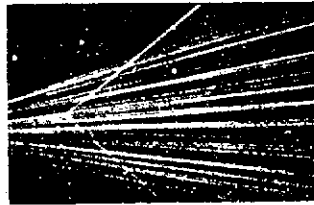
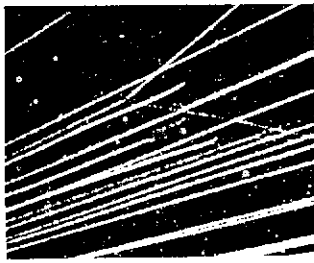


figura 10-11

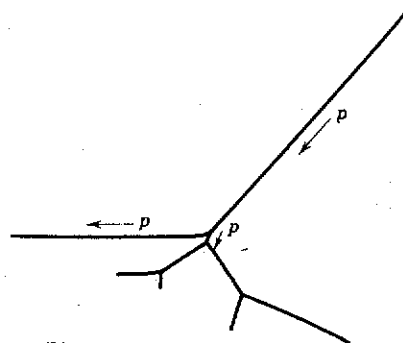
Fotografias de trajetórias de partículas que se chocam numa câmara de Wilson, aparelho que permite ver essas trajetórias. A câmara contém vapor d'água saturado. Se for ligeiramente comprimido e, a seguir, se expandir rapidamente, o vapor se condensará em gotículas, ao longo da trajetória. Nos quatro casos, a partícula incidente é um núcleo de hélio  $\text{He}^4$  ou  $\alpha$ . Em (a), o alvo é um núcleo de hidrogênio ( $\text{H}^1$  ou  $p$ ). As outras trajetórias são semelhantes, exceto em (b) onde o alvo é um outro núcleo de  $\text{He}^4$ , enquanto que em (c) e (d) os alvos são núcleos de flúor e de cloro, respectivamente. De um modo geral, as partículas não se acham situadas no plano da fotografia. São necessárias fotografias estereoscópicas para uma análise completa.

(a)

(b)

(c)

(d)



(b)

figura 10-12

(a) Quatro choques próton-próton em uma câmara de bolhas de 25 cm de diâmetro. O próton original de alta energia entrou pela parte direita superior. As trajetórias em espiral são elétrons de baixa energia. As outras trajetórias que passam através da câmara são mésons de várias espécies. Vista estereoscópica mostra que o ângulo entre as trajetórias de saída, em cada caso, é  $90^\circ$ . Isto não se percebe na figura, porque as trajetórias não se acham no plano da figura. (b) Representação esquemática das trajetórias dos prótons em (a). (Foto cedida como cortesia de Lawrence Radiation Laboratory.)

e as colisões são elásticas, após o choque elas avançam em direções perpendiculares entre si; este fato é visível quando os traços mostrados na Fig. 10-12a são vistos estereoscopicamente.

Embora tenhamos introduzido o conceito de parâmetro de impacto,  $b$ , para descrever os choques (veja Fig. 10-9), deve ficar claro que, quando estivermos tratando com partículas de dimensões atômicas ou subatômicas, não será possível definir com bastante precisão a trajetória da partícula incidente ou a localização da partícula-alvo. Na prática, como no caso em que bombardeamos um alvo, constituído de uma lâmina fina, com um feixe de dêuterons de um ciclotron, devemos tratar, por método estatístico, um grande número de colisões entre os dêuterons e os núcleos do alvo; os parâmetros de impacto para cada colisão individual não podem ser determinados.

A situação é mais ou menos a mesma que teríamos se estivéssemos atirando ao acaso com uma metralhadora (digamos, no escuro), sobre uma parede distante, de área  $A$ , na qual alguém tivesse dependurado, em posições arbitrárias (não superpostas), vários pratos, de área  $\sigma$  cada um.

Se o número de pratos é  $q$  e a taxa de balas que atingem a parede é  $R_0$  (número de balas que batem sobre a parede por segundo), qual é a taxa,  $R$ , em que os pratos serão quebrados? Levando em conta que os acontecimentos se dão ao acaso, teremos

$$R = R_0(\sigma q/A) \quad (10-7a)$$

onde  $\sigma q$  é a área total de todos os pratos.

Podemos, na verdade, usar esta relação para medir a área de cada prato,  $\sigma$ . Explicando  $\sigma$ , teremos a expressão

$$\sigma = RA/R_0q \quad (10-7b)$$

através da qual podemos calcular  $\sigma$ , medindo os valores de  $R$ ,  $A$ ,  $R_0$  e  $q$ . Podemos chamar  $\sigma$  de *seção de choque eficaz* ou simplesmente *seção de choque*, para o fenômeno em questão, isto é, o impacto de uma bala sobre um prato.

Consideremos, agora, uma classe de eventos mais restritos, por exemplo, a colisão de uma bala com um prato, tal que ele se parta em, digamos, cinco pedaços. A taxa de ocorrência,  $R_5$ , deste evento, é muito inferior a  $R$ , taxa em que ocorre o evento anteriormente considerado. Podemos atribuir a este fenômeno, mais restrito, uma *seção de choque eficaz*,  $\sigma_5$ , e podemos calculá-la, por analogia com a Eq. 10-7, pela fórmula

$$\sigma_5 = R_5A/R_0q. \quad (10-8)$$

Poderemos imaginar outras maneiras de quebrar pratos, por exemplo, quebrá-los em treze partes, quebrá-los de maneira que uma das partes tenha área igual ou superior à metade do prato, de modo que uma das partes suba verticalmente etc. A cada um destes acontecimentos, poderemos fazer corresponder sua seção de choque eficaz, particular,  $\sigma_x$ , medindo  $R_x$ , a taxa segundo a qual o acontecimento ocorre. *Nenhuma destas seções de choque têm, necessariamente, alguma relação com a área geométrica dos pratos; todas são medidas da probabilidade de ocorrência dos acontecimentos com os quais estão relacionadas.* As seções de choque são importantes porque elas são associadas a um acontecimento isolado e não dependem de certas particularidades que acompanham a experiência. Na Eq. 10-8, por exemplo, encontraremos o mesmo valor para  $\sigma_5$ , não



importando o tamanho da parede ( $A$ ), o número de pratos ( $q$ ) ou a rapidez com que a metralhadora atira as balas ( $R_0$ ): o valor medido de  $R_x$  será sempre tal que nos conduzirá ao mesmo valor para  $\sigma_x$ .

De maneira semelhante, em Física Nuclear comumente bombardeiam-se alvos com projéteis nucleares, mede-se a taxa segundo a qual um certo tipo de acontecimento ocorre e calcula-se a seção de choque associada a este acontecimento. Por exemplo, consideremos uma lâmina fina, de ouro ( $\text{Au}^{197}$ ) que será bombardeada com dêuterons ( $\text{H}^2$ , ou  $d$ ), cuja energia é, digamos, 30 MeV. Muitos eventos podem ocorrer, entre os quais (1) o espalhamento elástico do dêuteron no hemisfério anterior, (2) espalhamento elástico do dêuteron no hemisfério posterior, (3) espalhamento inelástico do dêuteron entre os ângulos de  $30^\circ$  e  $60^\circ$  com a direção do feixe incidente, (4) a reação nuclear  $d + \text{Au}^{197} \rightarrow p + \text{Au}^{198}$ , e (5) a reação nuclear  $d + \text{Au}^{197} \rightarrow n + \text{Hg}^{198}$ , em que  $n$  representa um nêutron. Cada um desses eventos (e muitos outros que poderiam ser imaginados) tem sua própria seção de choque  $\sigma_x$ , que nos permite calcular a taxa  $R_x$  em que esses eventos ocorrem, se conhecermos os pormenores da experiência. O objetivo final de todas as experiências é compreender a natureza das forças nucleares.

Seja  $A$  a área da lâmina exposta ao feixe e  $x$  sua espessura. Se existem  $n$  partículas-alvo por unidade de volume, na lâmina, o número total de partículas-alvo disponíveis é  $nAx$ . Se a *área efetiva* (isto é, a seção de choque eficaz) do acontecimento em que estamos interessados é  $\sigma_x$ , a *área efetiva total* de todos os núcleos será  $nAx\sigma_x$ . Se  $R_0$  é a taxa segundo a qual os projéteis atingem o alvo e  $R_x$  é a taxa de ocorrência do acontecimento no qual estamos interessados, teremos, em virtude da natureza aleatória dos acontecimentos (veja Eq. 10-7a),

$$\frac{R_x}{R_0} = \frac{(nAx\sigma_x)}{A}$$

ou

$$R_x = R_0 n x \sigma_x \quad (10.9)$$

Então, podemos obter  $\sigma_x$  para o evento, medindo  $R_x$ ,  $R_0$ ,  $n$  e  $x$  e substituindo na Eq. 10-9. As seções de choque são comumente expressas em *burns* ou seus submúltiplos; 1 barn =  $10^{-28}$  m<sup>2</sup>.

As seções de choque, quase sempre, dependem da energia da partícula incidente, apresentando, às vezes, acentuados máximos à medida que a energia varia. Isto significa simplesmente que, para certos valores característicos da energia, é mais provável que a reação ocorra do que para outros. De maneira semelhante, uma lâmina de aço vibrará com grandes amplitudes em uma série de frequências características, bem definidas. Estudaremos tais "ressonâncias" no Cap. 20 e em outros lugares.

A Fig. 10-13 mostra uma das milhares de curvas de seções de choque que têm sido obtidas para processos atômicos e nucleares. Consideremos um feixe de nêutrons, altamente colimado, de energia cinética  $K$ , que incide sobre uma fina lâmina de cádmio. O processo, ao qual se refere a seção de choque  $\sigma$ , da Fig. 10-13, é qualquer um dos processos (absorção, espalhamento elástico ou espalhamento inelástico) que resulta da remoção de um nêutron do feixe colimado. O número acima dos vários "picos" mostra o isótopo particular

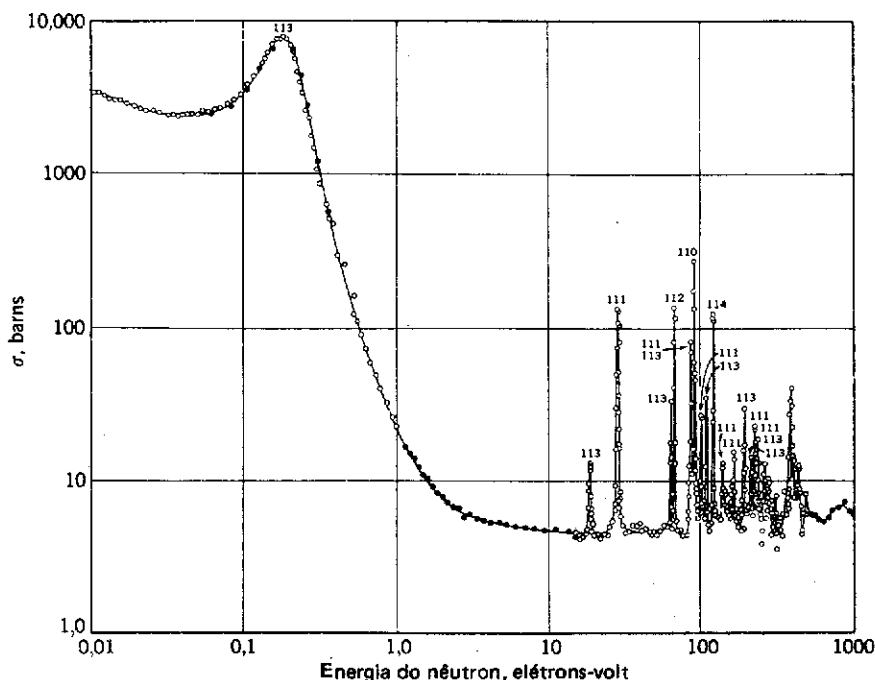
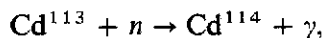


figura 10-13

Seção de choque como função da energia, por processos que removem nêutrons de um feixe colimado, ao passarem através do cádmio. Note-se que ambas as escalas são logarítmicas.

responsável por aquele pico: isto pode ser obtido através de experiências usando lâminas feitas com os isótopos, separadamente. O forte pico indicado por "113", que ocorre na energia de 0,17 elétron-volt, é provocado pela reação



em que  $\gamma$  representa um raio gama. Esta reação, que tem uma seção de choque eficaz máxima de 7 600 barns, é responsável pelo grande poder de absorção do cádmio para os nêutrons lentos. Observe que ambas as escalas da Fig. 10-13 são logarítmicas.

(a) Cerca de 1910, Geiger e Marsden, trabalhando sob a orientação de Lord Rutherford na Universidade de Manchester, realizaram uma série de experiências clássicas que levaram à conclusão de que os átomos consistem em pequenos núcleos circundados por uma nuvem de elétrons e não por uma esfera constituída de cargas positivas e negativas misturadas, como Thomson havia sugerido anteriormente.

## EXEMPLO 6

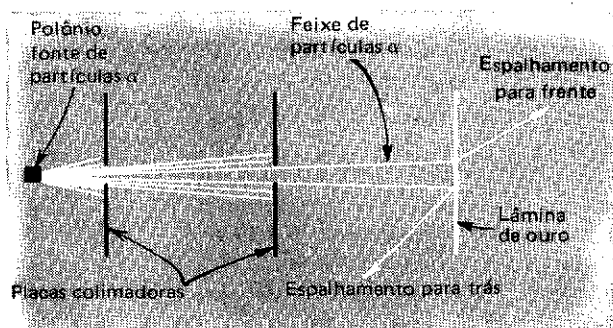


figura 10-14

Exemplo 6. Partículas  $\alpha$  saem de uma fonte de polônio e se forma um feixe, mediante placas colimadoras. Algumas das partículas  $\alpha$  são dispersadas para trás pelo alvo (lâmina de ouro), o restante passa através da lâmina.

Esta experiência, em essência, é a que está mostrada na Fig. 10-14. Partículas  $\alpha$  de uma fonte de polônio atingem uma lâmina de ouro de espessura igual a  $4,0 \times 10^{-7}$  m. Verificou-se que, embora a maioria das partículas  $\alpha$  passassem através da lâmina (espalhamento para a frente), cerca de 1 em  $6,17 \times 10^4$  eram

espalhadas para trás, isto é, eram defletidas de um ângulo maior do que 90°. O número de átomos de ouro por unidade de volume da lâmina é  $5,9 \times 10^{28}/\text{m}^3$ . Qual é a seção de choque do espalhamento para trás, em barns? (1 barn =  $10^{-28} \text{ m}^2$ .)

Da relação

$$n\sigma = \text{fração espalhada para trás}$$

teremos

$$(5,9 \times 10^{28}/\text{m}^3)(4 \times 10^{-7} \text{ m})\sigma = 1/(6,17 \times 10^4)$$

ou

$$\sigma = 6,9 \times 10^{-28} \text{ m}^2 = 6,9 \text{ barns.}$$

Esta é a seção de choque do espalhamento para trás. (b) Rutherford raciocinou que o espalhamento para trás não poderia ser causado pelos elétrons do átomo; as partículas  $\alpha$ , tendo massa muito superior à do elétron, dificilmente poderiam ser desviadas por eles e muito menos poderiam ser espalhadas para trás. Então, sugeriu o modelo nuclear do átomo, atribuindo o espalhamento para trás ao choque das partículas  $\alpha$  com a parte central do átomo, o núcleo, de grande densidade e carregado positivamente.

Supondo que a seção de choque do espalhamento para trás seja aproximadamente igual à área oferecida por um núcleo de ouro aos choques diretos, avaliar o tamanho eficaz de um núcleo de ouro.

Se chamarmos de  $r$  o raio eficaz do núcleo de ouro, teremos

$$\sigma = \pi r^2,$$

$$r^2 = \sigma/\pi = 6,9 \times 10^{-28} \text{ m}^2/\pi,$$

ou

$$r = 1,5 \times 10^{-14} \text{ m.}$$

Este é, aproximadamente, o raio do núcleo de ouro, enquanto o raio do átomo de ouro é cerca de  $1,5 \times 10^{-10} \text{ m}$ . Assim, o núcleo pesado está localizado em uma região muito pequena do átomo (cerca de  $1/10^{12}$  do seu volume).

Na Sec. 10-1 afirmamos que os processos de desintegração radioativa dos átomos, núcleos e partículas elementares podem ser tratados pelos mesmos métodos usados no estudo dos choques: podemos aplicar os princípios de conservação do momento e da energia aos períodos, bem definidos, "antes do evento" e "após o evento". Para esses processos devemos usar a conservação da energia total, porque a energia cinética não é conservada. Nesta seção consideraremos, apenas, exemplos nos quais as velocidades das partículas são desprezíveis, em relação à velocidade da luz. Isto significa que poderemos usar as expressões clássicas para o momento e para a energia, não havendo necessidade de usar as expressões relativísticas.

### 10-8 REAÇÕES E PROCESSO DE DESINTEGRAÇÃO

*Reações Nucleares.* Uma película delgada, contendo um composto de flúor ( $\text{F}^{19}$ ) é bombardeada por um feixe de prótons ( $p$ ) que foram acelerados até atingir a energia de 1,85 MeV (milhão de elétrons-volt; 1 MeV =  $1,60 \times 10^{-13}$  joules), em um acelerador Van de Graaff. Alguns prótons interagem com o núcleo de flúor para produzir a seguinte reação nuclear:



Observou-se que as partículas  $\alpha$  (núcleos de hélio), que emergem em direção perpendicular à direção do feixe de prótons incidente (veja Fig. 10-15), têm velocidade de  $1,95 \times 10^7 \text{ m/s}$ . Que se poderá concluir sobre a reação, aplicando-se as

### EXEMPLO 7

leis da conservação do momento e da energia total? As massas envolvidas, com precisão suficiente para os nossos propósitos, são

$$m_p = 1,01 \text{ uma} \quad m_O = 16,0 \text{ uma}$$

$$m_F = 19,0 \text{ uma} \quad m_\alpha = 4,00 \text{ uma}$$

nas quais 1 uma (*unidade de massa atômica*) =  $1,66 \times 10^{-27}$  kg.

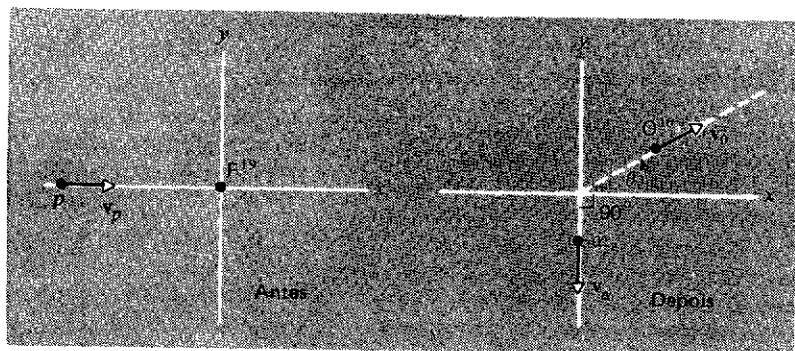


figura 10-15

Exemplo 7. Reação nuclear  $p + F^{19} \rightarrow \alpha + O^{16}$ , mostrando a situação antes e depois do evento, no sistema de referência do laboratório.

Os componentes do momento segundo os eixos  $Ox$  e  $Oy$  são conservados, isto é, têm os mesmos valores antes e depois da reação. No referencial do laboratório, da Fig. 10-15, temos

$$m_p v_p = m_O v_O \cos \theta \quad (\text{componente segundo } Ox) \quad (10-10)$$

e

$$0 = m_\alpha v_\alpha - m_O v_O \sin \theta \quad (\text{componente segundo } Oy). \quad (10-11)$$

Pela conservação da energia total, podemos escrever

$$Q + \frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} m_O v_O^2 + \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \quad (10-12)$$

em que, é evidente,  $Q$  representa o excesso de energia cinética do sistema após a reação, sobre sua energia cinética antes da reação. Observe-se que estamos supondo que as partículas estão se movendo com velocidade tal que podemos usar a expressão clássica da energia cinética ( $\frac{1}{2}mv^2$ ) em lugar da expressão relativística ( $m_0 c^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ). Se  $Q$  é positivo, a reação deve ter gerado energia cinética.

A energia representada por  $Q$  só pode provir das diferenças entre as energias de repouso das partículas, antes e depois da reação, de acordo com a conhecida relação de Einstein,  $E = \Delta mc^2$  (veja a Sec. 8-9). Então, se  $Q$  é positivo, espera-se que a massa de repouso do sistema depois da reação deva ser ligeiramente inferior à sua massa de repouso antes da reação, e  $Q$  seria dado pela relação de Einstein,

$$Q = \Delta mc^2$$

$$Q = [(m_p + m_F) - (m_\alpha + m_O)] c^2. \quad (10-13)$$

Observe-se que as Eqs. 10-12 e 10-13 são relações independentes para  $Q$ , ligadas através da relação massa-energia de Einstein.

As três equações de conservação contêm exatamente três incógnitas,  $v_O$ ,  $\theta$  e  $Q$ . Para encontrar  $Q$ , a partir delas, vamos primeiramente eliminar  $\theta$  entre as duas primeiras equações, elevando-as ao quadrado e somando-as (lembre que  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ). Obtemos:

$$m_p^2 v_p^2 + m_\alpha^2 v_\alpha^2 = m_O^2 v_O^2.$$

Podemos, agora, eliminar  $v_O$  entre essa relação e a Eq. 10-12. O estudante pode mostrar que, após um pequeno artifício, obtemos

$$Q = K_p (1 + m_\alpha/m_O) - K_p (1 - m_p/m_O). \quad (10-14)$$

Pelos valores dados, sabemos que  $K_p (= \frac{1}{2} m_p v_p^2) = 1.85 \text{ MeV}$  e.

$$K_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \text{ ou}$$

$$\begin{aligned} K_\alpha &= \frac{1}{2} (4,00 \text{ uma} \times 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg/uma}) (1,95 \times 10^7 \text{ m/s})^2 \\ &= (1,26 \times 10^{-12} \text{ J}) (1 \text{ MeV}/1,60 \times 10^{-13} \text{ J}) \\ &= 7,88 \text{ MeV.} \end{aligned}$$

Podemos, agora, calcular  $Q$  através da Eq. 10-14,

$$\begin{aligned} Q &= 7,88 \text{ MeV} (1 + 4,00/16,0) - 1,85 \text{ MeV} (1 - 1,01/16,0) \\ &= 8,13 \text{ MeV.} \end{aligned}$$

Então, usando o princípio da conservação do momento e da energia total, podemos calcular  $Q$  para a reação, sem fazer qualquer observação sobre o núcleo  $O^{16}$  que recua. Se desejamos saber  $v_o$  e  $\theta$  para este núcleo, podemos facilmente calculá-los pelas Eqs. 10-10 e 10-11.

O resultado  $Q = 8,13 \text{ MeV}$  é uma parcela importante de informação sobre a reação. Da Eq. 10-13, que é a relação para  $Q$  independente da Eq. 10-14, podemos, agora, calcular o decréscimo da massa de repouso durante a reação, dada por

$$\Delta m = Q/c^2$$

$$\Delta m = (8,13 \text{ MeV} \times 1,60 \times 10^{-13} \text{ J/MeV}) / (3,00 \times 10^8 \text{ m/s})^2$$

$$\Delta m = (1,44 \times 10^{-29} \text{ kg}) (1 \text{ uma}/1,66 \times 10^{-27} \text{ kg})$$

$$\Delta m = 0,00873 \text{ uma.}$$

Podemos verificar esse resultado calculando  $\Delta m [= (m_p + m_\alpha) - (m_\alpha + m_o)]$ , através de medidas diretas, muito precisas, das quatro massas feitas com um espectrômetro de massa (veja Probl. 48). A excelente concordância que se obtém mostra, mais uma vez, a validade da relação massa-energia de Einstein.

## questões

1. Explique como a conservação do momento é aplicada a uma bola que é rebatida em uma parede.
2. Como se pode relacionar o movimento de um barco à vela, velejando em direção à região de onde vem o vento, com o princípio da conservação do momento?
3. É verdade que a aceleração de uma bola de futebol, após ela ter sido chutada, não depende de quem a chutou?
4. Muitos componentes novos em automóveis, tais como volantes dobráveis e painéis acolchoados, são idealizados para transferir momento linear mais seguramente para os passageiros. Explique, usando o conceito de impulso.
5. C. R. Daish (veja "At Impact, Clubhead Travels 100 Mph", *Museum*, dezembro, 1973) afirma que, para jogadores profissionais, a velocidade inicial da extremidade do taco é cerca de 220 km/h. Diz também que: (a) "... se se pudesse impulsionar uma bola usando o edifício 'Empire State' com a mesma velocidade com que se usa o taco de golfe, a velocidade inicial da bola seria aumentada, apenas, de cerca de 2%..." e (b) que, uma vez o golfista já tenha iniciado o balanço do corpo para impulsionar a bola, acidentes como o disparo de máquina fotográfica, espirros etc., não têm o menor efeito sobre o movimento da bola. Você pode apresentar argumentos qualitativos que apoiem essas duas afirmações?
6. As pás de uma turbina são geralmente curvas e não planas, de tal forma que o fluido que as atinge segue uma trajetória em forma aproximada de  $U$ . Convença-se que o movimento do fluido se faz realmente desta maneira e explique a vantagem da forma curva das pás sobre a forma plana.
7. Pelo exame das Eqs. 10-3 e 10-4 é evidente que, para o problema da determinação das velocidades finais de duas partículas em um choque elástico

- unidimensional, a solução  $v_{1f} = v_{1i}$  e  $v_{2f} = v_{2i}$  é válida. Qual o significado físico desta solução? Explique.
8. Consideremos um choque elástico unidimensional entre um corpo  $A$ , que está se aproximando de um corpo  $B$  inicialmente em repouso e este corpo  $B$ . Como você escolherá a massa de  $B$ , em relação à massa de  $A$ , para que  $B$ , após o choque, avance com (a) a máxima velocidade, (b) o momento maior possível, e (c) a máxima energia cinética?
  9. Um jogador de futebol, momentaneamente parado no campo, está prestes a agarrar a bola quando é abalroado por um jogador do outro time, que vem correndo. Os dois jogadores caem. Esta é, naturalmente, uma colisão (não elástica!) e o momento deve ser conservado. No referencial do campo de futebol há um momento antes da colisão, mas parece não haver após ela. O momento é, de fato, conservado?
  10. O aço é mais elástico que a borracha. Explique o que isto quer dizer.
  11. Duas bolas de barro, de igual massa e velocidade, vão de encontro uma à outra em choque frontal, ficam grudadas e atingem o repouso. A energia cinética naturalmente não é conservada. O que aconteceu a ela? O momento é conservado?
  12. Discuta a possibilidade de que se pudéssemos levar em consideração todos os movimentos no interior dos átomos e destes no interior dos corpos, todas as colisões seriam elásticas.
  13. Ao analisar o fato de que a energia cinética não é conservada numa colisão totalmente inelástica, um aluno fez a seguinte observação: "obviamente a energia cinética não é mantida em uma explosão e uma colisão inelástica é meramente o oposto de uma explosão". Esta é uma observação útil ou válida?
  14. Uma ampulheta está sendo pesada por uma balança sensível, primeiro quando a areia cai em fluxo uniforme do vaso superior para o inferior e depois novamente após ter se esvaziado o vaso superior. Os dois pesos são iguais ou não? Explique sua resposta.
  15. Dê uma explicação razoável de como tábuas ou tijolos se quebram por força de um golpe de karatê (veja "Karate Strikes" de Jearl D. Walker, *American Journal of Physics*, outubro, 1975).
  16. Para qual dos objetos abaixo o momento é mais aproximadamente conservado? (a) uma bola caindo livremente no vácuo, (b) um automóvel fazendo uma curva à velocidade constante, (c) uma bola de borracha quando ela rebate no assoalho, (d) duas bolas quando elas colidem em ângulo reto, (e) uma bala e um revólver do qual ela é disparada por um homem que segura o revólver.
  17. Se apenas duas partículas colidem, somos em algum caso, forçados a nos valer de uma descrição tridimensional da colisão para analisar o evento? Explique.
  18. Na colisão de dois corpos, no referencial do centro de massa, os momentos das partículas são iguais em módulo, mas com sentido oposto, antes e após a colisão. A direção do movimento relativo depois da colisão é, necessariamente, a mesma de antes? Sob quais condições os módulos das velocidades dos corpos aumentariam? diminuiriam? permaneceriam a mesma em consequência da colisão?
  19. Quando estamos tratando com átomos, núcleos ou partículas elementares, que significa dizer que duas destas partículas se "tocam" durante uma colisão?
  20. Quando as forças de interação entre duas partículas têm alcance infinito, como na atração gravitacional mútua entre dois corpos, pode a seção de choque para a "colisão" ser finita? Será útil considerar esta interação como um choque?
  21. Por que o cálculo do raio do núcleo de ouro, do Ex. 5, conduziu a apenas um resultado aproximado?
  22. Podemos, em princípio, determinar a seção eficaz de choque para uma colisão, usando somente uma partícula como projétil e outra como alvo? E na prática?
  23. Temos visto que podemos aplicar o princípio da conservação do momento, conservando-se ou não a energia cinética. O que dizer no caso contrário, ou seja, a conservação da energia cinética implica na conservação do momento na Física clássica? (Veja "Connection between Conservation of Energy and Conservation of Momentum" de Carl G. Adler, *Am. J. Phys.*, maio, 1976.)

## SEÇÃO 10-2

## problemas

- Uma bola de massa  $m$  e velocidade  $v$  incide ortogonalmente sobre uma parede e volta sem que ocorra variação no módulo da sua velocidade. Seja  $\Delta t$  o intervalo de tempo da colisão. Determine a força média exercida pela parede sobre a bola.
- A força média exercida pelo pé de um jogador de futebol quando ele chuta uma bola é igual a 100 N no intervalo de tempo durante o qual o pé permanece em contato com a bola é igual a 0,005 s. Calcule a variação do momento linear.  
*Resposta:* 0,5 kg · m/s.
- Uma bola de pingue-pongue cai verticalmente sobre o solo com velocidade de 10 m/s. Ela se reflete e retorna com uma velocidade inicial de 8 m/s. Suponha que a força média exercida pela bola sobre o solo seja igual a 180 N e que o tempo em que ela fica em contato com o solo seja igual a  $10^{-3}$  s. Calcule a massa da bola.
- Uma bola de bilhar de massa igual a 200 g colide contra o anteparo lateral de uma mesa de bilhar. O módulo da velocidade da bola vale 2 m/s e o ângulo com a normal ao anteparo vale  $60^\circ$ ; o tempo de contato da bola com o anteparo é igual a 0,008 s. Determine o módulo da força média exercida pelo anteparo sobre a bola de bilhar supondo que o choque seja perfeitamente elástico.  
*Resposta:* 50 N.
- Um jato de água choca-se contra uma pá de uma turbina que tem forma côncava e está em repouso, como mostra a Fig. 10-16. O módulo da velocidade da água é  $u$ , antes e depois que ela atinge a superfície curva da pá, a massa de água que atinge a pá, por unidade de tempo é constante, igual a  $\mu$ . Determine a força exercida pela água sobre a pá.
- Um taco atinge uma bola de bilhar exercendo sobre ela uma força de 30 N, num intervalo de tempo de 0,010 s. Suponha que a massa da bola seja igual a 250 g. Calcule a velocidade da bola de bilhar após o impacto, supondo que a bola estava inicialmente em repouso.  
*Resposta:* 1,2 m/s.
- Uma bola de massa igual a 0,4 kg é atingida por um taco, recebendo o impulso indicado na Fig. 10-17. Determine o módulo da velocidade da bola no momento em que ela abandona o taco.
- A força sobre um objeto de 8 kg aumenta linearmente com o tempo. A força é nula no instante inicial e igual a 100 N quando  $t = 10$  s. Determine: (a) a expressão do impulso em função do tempo, (b) a força média neste intervalo de tempo, (c) o impulso total, (d) a variação do momento, (e) a velocidade do objeto para  $t = 10$  s.  
*Resposta:* (a)  $J = 5t^2$ . (b) 50 N. (c) 500 N · s. (d) 500 N · s. (e) 62,5 m/s.
- Um jogador de golfe lança uma bola comunicando-lhe uma velocidade inicial de  $7,0 \times 10^3$  cm/s numa direção que forma um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal. Supondo que a massa da bola seja igual a 30 g e que o taco esteve em contato com a bola durante um intervalo de tempo de 0,015 s, determine: (a) o impulso comunicado à bola, (b) o impulso comunicado ao taco, (c) a força média exercida pela bola sobre o taco, (d) o trabalho realizado sobre a bola.
- A água proveniente de uma mangueira é lançada contra uma parede. Se a velocidade da água for igual a 5,0 m/s e se a vazão volumétrica da água que sai da mangueira for igual a  $400 \text{ cm}^3/\text{s}$ , calcule: (a) o impulso transmitido para a parede durante um segundo, (b) a força média exercida sobre a parede. Considere a densidade da água igual  $10^3 \text{ kg/m}^3$ .  
*Resposta:* (a) 2,0 N · s. (b) 2,0 N.
- Um bloco de massa  $m = 10 \text{ kg}$  está em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. Sobre o bloco atua uma força horizontal cujo módulo é dado em função do tempo pela expressão:

$$F = bt^2 - ct$$

onde  $b = 4 \text{ N/s}^2$  e  $c = 1 \text{ N/s}$ ,  $t$  é dado em s e  $F$  em N. Obtenha: (a) a expressão do impulso em função do tempo, (b) o impulso total nos 4 segundos iniciais, (c) a variação do momento linear nos 4 segundos iniciais, (d) a velocidade do bloco no instante  $t = 4$  s.

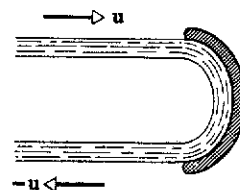


figura 10-16

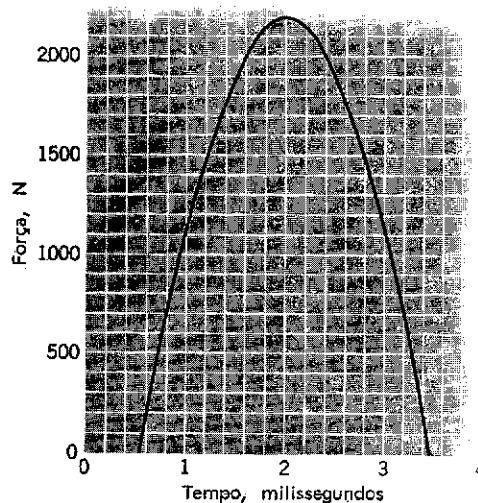


figura 10-17

## SEÇÃO 10-4

- Um pêndulo balístico é constituído por uma caixa de areia suspensa por um fio. Um projétil de massa  $m_1 = 30 \text{ g}$  penetra na caixa e fica nela encaixado. O centro de massa da caixa se eleva até uma altura  $h = 30 \text{ cm}$ . A massa da caixa vale  $m_2 = 3,0 \text{ kg}$ . (a) De-

duza uma expressão para a velocidade do projétil em função destes dados. (b) Calcule o valor numérico da velocidade do projétil quando ele atinge a caixa.

Resposta: (a)  $v = (m_1 + m_2)(2gh)^{1/2}/m_1$ . (b)  $v = 245$  m/s.

13. Um trenó de massa igual a 6,0 kg desloca-se no gelo com velocidade de 15 m/s quando um pacote de 18 kg cai verticalmente sobre ele. Descreva o movimento subsequente do trenó.
14. (a) Mostre que em uma colisão elástica unidimensional a velocidade do centro de massa de duas partículas,  $m_1$ , cuja velocidade inicial é  $v_{1i}$  e  $m_2$ , com velocidade inicial  $v_{2i}$  é

$$v_{cm} = \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}$$

(b) Use as expressões obtidas para  $v_{1f}$  e  $v_{2f}$  as velocidades das partículas após a colisão, para obter o mesmo resultado para  $v_{cm}$  após a colisão.

15. Um corpo de massa igual a 5,0 kg colide elasticamente com outro que se encontra inicialmente em repouso e continua sua trajetória no mesmo sentido, porém o módulo da velocidade se reduz a um quinto do módulo inicial. Calcule a massa do corpo atingido.
16. Em uma arma de fogo automática de carregamento pela culatra, de modelo antigo, o mecanismo de carga situado atrás da culatra entra em ação quando o bloco da culatra, que recua depois de a bala ser disparada, comprime uma mola de um comprimento predeterminado  $d$ . (a) Mostre que a velocidade  $v$  da bala de massa  $m$ , ao ser atirada, deve ser no mínimo,  $d\sqrt{kM/m}$ , sendo  $k$  a constante elástica da mola e  $M$  a massa do bloco da culatra. (b) Em que sentido pode este processo ser considerado como um choque?

17. Uma bola de aço de massa 0,5 kg é amarrada a uma corda de 70 cm de comprimento e é largada quando a corda está na horizontal. Na parte mais baixa de sua trajetória, a bola atinge um bloco de aço de massa igual a 2,5 kg, inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito (Fig. 10-18). A colisão é elástica. Determine (a) a velocidade da bola e (b) a velocidade do bloco logo após a colisão.

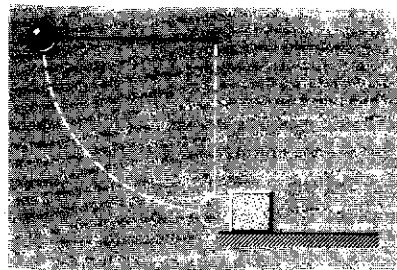


figura 10-18

18. Uma bala de massa igual a 30 g é disparada horizontalmente num bloco de madeira de massa igual a 30 kg em repouso sobre uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície vale 0,20. A bala penetra no bloco e fica retida em seu interior. O centro de massa do bloco se desloca de 1,1 m. Calcule a velocidade da bala.

Resposta:  $2,08 \times 10^3$  m/s.

19. Dois pêndulos, cada um de comprimento  $l$  estão, inicialmente, posicionados como mostra a Fig. 10-19. O primeiro pêndulo é solto e atinge o segundo. Suponha que a colisão seja completamente inelástica e despreze a massa dos fios e quaisquer efeitos resultantes do atrito. Até que altura o centro de massa sobe após a colisão?

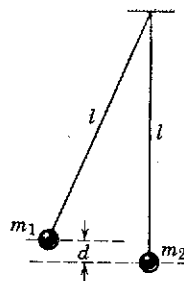


figura 10-19

20. Duas partículas, uma tendo o dobro da massa da outra, com uma mola comprimida entre elas são mantidas juntas. A energia armazenada na mola é 60 J. Que energia cinética tem cada partícula após elas terem sido soltas?

Resposta: 20 J para a partícula mais pesada; 40 J para a mais leve.

21. Um vagão de carga com massa igual a 40 toneladas se desloca a 2,5 m/s e colide com outro que viaja no mesmo sentido com velocidade igual a 1,5 m/s; a massa do segundo vagão é igual a 25 toneladas. (a) Ache as velocidades dos dois vagões após a colisão e a perda de energia cinética durante a colisão, supondo que os dois vagões passam a se mover juntos. (b) Se a colisão fosse elástica, os dois vagões não se uniriam e continuariam a se locomover separados; qual seria neste caso a velocidade de cada vagão?

22. Um elétron colide elasticamente com um átomo de hidrogênio inicialmente em repouso. Os deslocamentos inicial e final se fazem ao longo do mesmo curso. Que fração da energia cinética inicial do elétron é transferida ao átomo de hidrogênio? A massa do átomo de hidrogênio é 1 840 vezes a massa do elétron.

Resposta: 0,22%.

23. Um bloco de massa  $m_1 = 100$  kg está em repouso sobre uma mesa lisa, bem comprida e que tem uma das suas extremidades encostada a uma parede. Um outro bloco de massa  $m_2$  é colocado entre o primeiro bloco e a parede e posto em movimento para a esquerda com velocidade constante  $v_{2i}$ , como mostra a Fig. 10-20. Supondo que todas as colisões sejam inteiramente elásticas, ache o valor de  $m_2$  para o qual os dois blocos se deslocam com a mesma velocidade após ter  $m_2$  colidido uma vez com  $m_1$  e uma vez com a parede. A parede tem massa praticamente infinita.

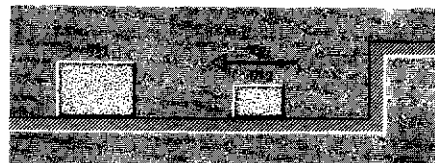


figura 10-20

24. Um elétron de massa  $m$  choca-se frontalmente com um átomo de massa  $M$ , inicialmente em repouso. Em consequência da colisão, uma certa quantidade de energia  $E$  característica, é armazenada internamente no átomo. Qual a velocidade inicial mínima,  $v_0$ , que o elétron deve ter? (Sugestão: Os princípios de conservação conduzem a uma



equação quadrática para a velocidade final  $v$  do elétron e a uma equação quadrática para a velocidade final  $V$  do átomo. O valor mínimo  $v_0$  resulta da necessidade de ser real o radical das soluções obtidas para  $v$  e  $V$ .)

Resposta:  $v_0 = \left( 2E \frac{M+m}{Mm} \right)^{1/2}$ .

25. Uma bola de massa  $m$  e velocidade  $v_i$  é projetada no cano de uma espingarda de mola, de massa  $M$ , inicialmente em repouso sobre uma superfície sem atrito (veja Fig. 10-21). A massa  $m$  adere ao cano no ponto da compressão máxima da mola. Nenhuma energia é perdida em atrito. Que fração da energia cinética inicial da bola fica armazenada na mola?
26. Uma caixa é colocada sobre uma balança de molas que é ajustada para que a leitura seja zero quando a caixa estiver vazia. Um punhado de seixos é, então, despejado na caixa de uma altura  $h$  à razão de  $\mu$  (seixos por segundo). Cada seixo tem uma massa  $m$ . Se os choques entre os seixos e a caixa são inteiramente inelásticos, ache a leitura da balança  $t$  segundos após o instante em que os seixos começaram a encher a caixa. Determine uma resposta numérica quando  $\mu = 100 \text{ s}^{-1}$ ,  $h = 7,5 \text{ m}$ ,  $mg = 0,05 \text{ N}$  e  $t = 10 \text{ s}$ .  
Resposta: 5,5 kg.
27. Uma balança é ajustada para leitura zero. De uma altura de 3,5 m, caem partículas que se chocam com o prato da balança; as colisões são elásticas, isto é, as partículas se refletem para cima com a mesma velocidade. Suponha que cada partícula possua massa de 50 g e que os choques ocorram com uma frequência de 30 colisões/segundo. Encontre o valor da leitura da balança.
28. A massa  $m_1$  colide frontalmente com a massa  $m_2$ , inicialmente em repouso, em uma colisão inteiramente inelástica. (a) Qual é a energia cinética do sistema antes da colisão? (b) Qual é a energia cinética do sistema após a colisão? (c) Que fração da energia cinética original foi convertida em calor? (d) Seja  $v_{\text{cm}}$  a velocidade inicial do centro de massa do sistema. Observe a colisão de um referencial que se move com o centro de massa, tal que  $v_{1i}' = v_{1i} - v_{\text{cm}}$ ,  $v_{2i}' = -v_{\text{cm}}$ . Repita os itens (a), (b) e (c) para um observador situado neste referencial. A energia mecânica transformada em calor é a mesma para os dois referenciais? Explique.  
Resposta: (a)  $m_1 v_{1i}^2 / 2$ . (b)  $m_1^2 v_{1i}^2 / 2(m_1 + m_2)$ . (c)  $m_2 / (m_1 + m_2)$ . (d)  $m_1 m_2 v_{1i}^2 / 2(m_1 + m_2)$ ; zero; um; sim.
29. Um elevador sobe com velocidade de 2 m/s. No instante em que o elevador está a uma altura de 20 m da extremidade superior do poço, uma bola cai do alto desta extremidade e se choca elasticamente com o teto do elevador. (a) Até que altura acima da extremidade superior do poço a bola subiria (caso o poço não fosse fechado)? (b) Repita os cálculos para responder a pergunta do item anterior, supondo que o elevador esteja descendo com uma velocidade de 2 m/s.
30. Um bloco de massa  $m_1 = 3,0 \text{ kg}$  desliza ao longo de uma mesa sem atrito com velocidade  $v_1 = 15 \text{ m/s}$ . Na frente dele, e movendo-se na mesma direção e sentido, existe um bloco de massa  $m_2 = 6,0 \text{ kg}$  que se move com velocidade de 5 m/s. A mola indicada na Fig. 10-22 possui massa desprezível e uma constante elástica  $k = 1\,500 \text{ N/m}$ . A massa reduzida  $M_r$  de um sistema de duas partículas é definida pela expressão:

$$M_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$$

(a) Obtenha uma expressão para a energia cinética de um sistema de duas massas em relação ao referencial do centro de massa em função da massa reduzida  $M_r$  e em função velocidade relativa  $v_r$ . (b) Quando os dois blocos colidem qual deve ser a energia potencial do sistema constituído pelas duas massas que comprimem a mola? (c) Ache o valor numérico da deformação máxima da mola depois do impacto.

Resposta: (a)  $M_r v_r^2 / 2$ . (b)  $kx^2 / 2$ . (c)  $x_{\text{máx.}} = 0,365 \text{ m}$ .

31. As duas massas à direita da Fig. 10-23 estão ligeiramente separadas e inicialmente em repouso; a massa da esquerda incide sobre as outras duas com velocidade  $v_0$ . Supondo que as colisões sejam frontais e elásticas (a) mostre que há duas colisões e ache todas as velocidades finais se  $M \leq m$ ; (b) mostre que há três colisões e ache todas as velocidades finais se  $M > m$ .

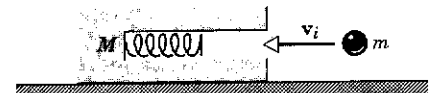
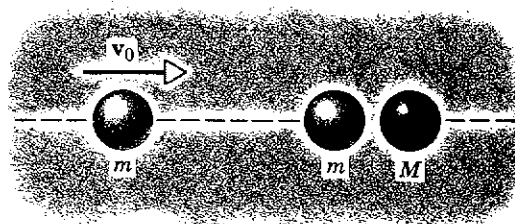


figura 10-21



figura 10-22

figura 10-23

32. Considere uma situação tal como a que apresentamos no problema anterior (10-30), porém em que as colisões desta vez devam ser ou todas elásticas, ou todas inelásticas, ou algumas elásticas e algumas inelásticas e também que as massas agora sejam  $m$ ,  $m'$  e  $M$ . Mostre que para transferir a energia cinética máxima de  $m$  a  $M$  o corpo intermediário deveria ter uma massa  $m' = \sqrt{mM}$ , isto é, a média geométrica das massas adjacentes. (É interessante observar que esta mesma relação existe entre massas de sucessivas camadas de ar na buzina exponencial, em Acústica. Veja "Energy Transfer in One-Dimensional Collisions of Many Objects", de John B. Hart e Robert B. Hermann, *American Journal of Physics*, janeiro, 1968.)

## SEÇÃO 10-6

33. Dois veículos,  $A$  e  $B$ , estão se deslocando, respectivamente, para Oeste e para Sul, em direção ao cruzamento destas direções, onde eles devem colidir e engavetar. A massa do veículo  $A$  vale 700 kg e a massa do veículo  $B$  vale 900 kg. O veículo  $A$  se desloca com velocidade de 80 km/h e o veículo  $B$  se locomove com velocidade de 60 km/h. Ache o vetor velocidade (módulo, direção e sentido) de cada veículo após a colisão.
34. Duas bolas  $A$  e  $B$ , tendo massas diferentes e desconhecidas, colidem.  $A$  está inicialmente em repouso, quando  $B$  tem uma velocidade  $v$ . Após a colisão,  $B$  passa a ter uma velocidade  $v/2$  e se desloca em ângulo reto com a direção de seu movimento original. (a) Ache a direção em que a bola  $A$  se desloca após a colisão. (b) Pode-se determinar a velocidade de  $A$  a partir do enunciado? Explique.  
*Resposta:* (a)  $117^\circ$  da direção final de  $B$ . (b) Não.
35. Uma bola de bilhar, deslocando-se com velocidade de 3,0 m/s, atinge outra bola idêntica, inicialmente em repouso, num choque oblíquo. Após a colisão, uma bola desloca-se com uma velocidade de 1,2 m/s numa direção que forma um ângulo de  $60^\circ$  com a direção original do movimento. (a) Determine a velocidade da outra bola (módulo, direção e sentido). (b) Levando em conta os dados acima verifique se é possível uma colisão perfeitamente elástica.
36. Uma partícula  $\alpha$  colide com um núcleo de oxigênio, inicialmente em repouso. A partícula  $\alpha$  é desviada de um ângulo de  $64^\circ$ , em relação à direção inicial do movimento, e o núcleo de oxigênio recua em uma direção que faz um ângulo de  $51^\circ$  com a direção inicial mencionada, para o outro lado. Qual a relação das velocidades das duas partículas? A massa do núcleo de oxigênio é quatro vezes maior do que a massa da partícula  $\alpha$ .  
*Resposta:* 3,46.
37. Um dêuteron é uma partícula nuclear constituída por um próton e um nêutron. Sua massa é cerca de  $3,4 \times 10^{-24}$  g. Um dêuteron, acelerado por um ciclotron a uma velocidade de  $10^9$  cm/s, colide com um outro dêuteron em repouso. (a) Se as duas partículas permanecem juntas formando um núcleo de hélio, ache a velocidade do núcleo resultante. (b) O núcleo do hélio em seguida desintegra-se em um nêutron com massa aproximada de  $1,7 \times 10^{-24}$  g e um isótopo de hélio de massa igual a  $5,1 \times 10^{-24}$  g. Se o nêutron é emitido em uma direção perpendicular à direção da velocidade original, com velocidade de  $5,0 \times 10^8$  cm/s, ache o módulo e a direção da velocidade do isótopo do hélio.
38. Um certo núcleo, em repouso, desintegra-se em três partículas. Duas delas têm massas e velocidades como mostradas na Fig. 10-24. (a) Qual é o momento linear da terceira partícula, sabendo-se que ela tem uma massa de  $12 \times 10^{-27}$  kg? (b) Quanta energia foi empregada no processo de desintegração?  
*Resposta:* (a)  $(-1,0i + 0,64j) \times 10^{-19}$  N. (b)  $1,1 \times 10^{-12}$  J.
39. Em 1932, Chadwick, na Inglaterra, demonstrou a existência do nêutron (uma das partículas fundamentais que constituem o átomo), determinando suas propriedades através do dispositivo mostrado na Fig. 10-25. Em uma câmara de vácuo, uma amostra de polônio radioativo se desintegra, emitindo raios  $\alpha$  (núcleo de hélio). Estes núcleos se chocam com um bloco de berílio, iniciando um processo pelo qual os nêutrons são emitidos. (A reação é: He e Be combinam-se para formar o carbono radioativo, que se desintegra em carbono estável + nêutrons.) Os nêutrons atingem uma película de parafina ( $\text{CH}_4$ ), libertando núcleos de hidrogênio que são detectados em uma câmara de ionização. Em outras palavras, um choque elástico ocorre, no qual o momento linear do nêutron é parcialmente transferido para o núcleo do hidrogênio. (a) Determine uma expressão para a velocidade máxima  $v_H$  que o núcleo de hidrogênio (massa  $m_H$ ) pode adquirir. Suponha que os nêutrons incidentes tenham massa  $m_n$  e velocidade  $v_n$ . (*Sugestão:* Haverá maior transferência de energia em um choque direto ou em um choque oblíquo?) (b) Um dos objetivos de Chadwick era o de determinar a massa da nova partícula. Observando a expressão (a) que contém este parâmetro, entretanto, vemos que duas incógnitas estão presentes,  $v_n$  e  $m_n$  ( $v_H$  é conhecido; seu valor pode ser obtido com a câmara de ionização). Para eliminar a incógnita  $v_n$ , ele substituiu os

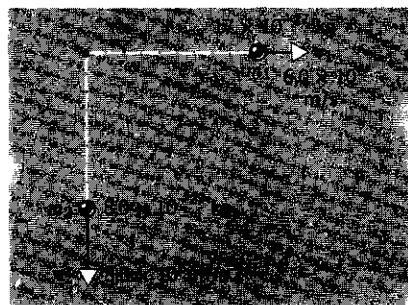


figura 10-24

blocos de parafina por outros de paracianogênio (CN). Os nêutrons, então, se chocaram elasticamente com núcleos de nitrogênio em lugar de núcleos de hidrogênio. É evidente que a expressão (a) é ainda válida, se substituirmos  $v_H$  por  $v_N$  e  $m_H$  por  $m_N$ . Portanto, se  $v_H$  e  $v_N$  forem medidos em experiências diferentes,  $v_n$  pode ser eliminado entre as duas expressões para o hidrogênio e para o nitrogênio e poderemos obter o valor de  $m_n$ . O valor encontrado por Chadwick foi

$$v_H = 3,3 \times 10^9 \text{ cm/s,}$$

$$v_N = 0,47 \times 10^9 \text{ cm/s.}$$

Qual foi o valor por ele encontrado para  $m_n$ ? Qual a relação entre este valor e o valor aceito para  $m_n = 1,00867$  uma? (Considere  $m_H = 1,0$  uma e  $m_N = 14$  uma.)

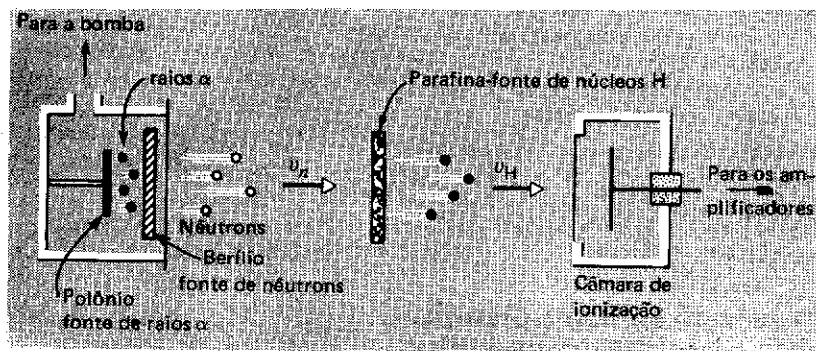


figura 10-25

40. Uma bola com velocidade inicial de 10 m/s colide elasticamente com duas outras idênticas, cujos centros de massa estão em uma direção perpendicular à velocidade inicial e que estão inicialmente em contato (Fig. 10-26). A primeira bola está na linha de direção do ponto de contato e não há atrito entre as bolas. Determine a velocidade das três bolas após a colisão. (*Sugestão:* As direções das duas bolas originalmente estacionárias podem ser obtidas considerando-se a direção do impulso que elas recebem durante a colisão.)

*Resposta:*  $v_2$  e  $v_3$  estarão a  $30^\circ$  de  $v_0$  e terão um módulo de 6,9 m/s.

$v_1$  estará na direção oposta a  $v_0$  e terá módulo de 2,0 m/s.

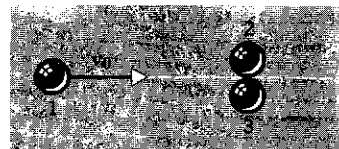
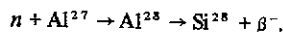


figura 10-26

41. Duas partículas de mesma massa e mesma velocidade sofrem uma colisão totalmente inelástica. Depois do choque elas se deslocam, unidas, com uma velocidade  $u$ . Suponha que o módulo da velocidade inicial seja  $n$  vezes maior do que o módulo da velocidade  $u$ . (a) Obtenha uma expressão para a determinação do ângulo entre as velocidades iniciais das partículas. (b) Considerando  $n = 3$ , calcule o valor numérico do ângulo entre as velocidades iniciais das partículas.
42. Suponha que um dêuteron esteja inicialmente em repouso num reservatório de água pesada (a água pesada é constituída por dois átomos de dêuteron e um átomo de oxigênio). Um nêutron colide com um dêuteron, perdendo  $2/3$  da sua energia cinética inicial. Determine o ângulo formado entre a velocidade do dêuteron e a velocidade do nêutron depois da colisão.
- Resposta:*  $90^\circ$ .
43. Mostre que, no caso de uma colisão elástica entre uma partícula de massa  $m_1$  e outra de massa  $m_2$ , inicialmente em repouso, (a) o ângulo máximo  $\theta_m$  através do qual  $m_1$  pode ser defletido pela colisão, é dado por  $\cos^2 \theta_m = 1 - m_2^2/m_1^2$ , de modo que  $0 \leq \theta_m \leq \pi/2$ , quando  $m_1 > m_2$ , (b)  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ , quando  $m_1 = m_2$ ; (c)  $\theta_1$  pode adquirir todos os valores entre 0 e  $\pi$ , quando  $m_1 < m_2$ .

## SEÇÃO 10-7

44. Uma esfera de raio  $r_1$  incide em uma esfera de raio  $r_2$ . Qual é a seção de choque para uma colisão de contato?
- Resposta:*  $\pi(r_1 + r_2)^2$ .
45. Um feixe de nêutrons lentos atinge uma lâmina de alumínio de espessura igual a  $1,0 \times 10^{-5}$  m. Alguns nêutrons são capturados pelo alumínio que se torna radioativo e se desintegra, emitindo um elétron ( $\beta^-$ ), formando silício:



Suponha que o fluxo de nêutrons seja  $3,0 \times 10^{16} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$  e que a seção eficaz de choque para a captura de nêutrons seja 0,23 barn. Quantas transmutações ocorrerão por  $\text{m}^2$ , a cada segundo?

46. Um feixe de nêutrons rápidos incide sobre uma amostra de  $\text{Cu}^{65}$ , um isótopo estável de cobre, de massa igual a 5,0 mg. Existe uma possibilidade de que o núcleo de cobre possa capturar um nêutron para formar o  $\text{Cu}^{66}$ , que é radioativo e se desintegra em  $\text{Zn}^{66}$ , que é novamente estável. Se um estudo da emissão do elétron da amostra de cobre implica na ocorrência, a cada segundo, de  $4,6 \times 10^{11}$  capturas de nêutrons, qual é, em barns, a seção eficaz de choque para a captura de nêutrons neste processo? A intensidade do feixe de nêutrons é  $1,1 \times 10^{18}$  nêutrons  $\text{m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ .

Resposta: 90 barns.

47. Em uma lâmina espessa, há um grande número de camadas de partículas-alvo, de modo que o número de partículas incidentes que atinge uma camada depende do número de partículas que foram espalhadas pelas camadas anteriores. Sejam  $N$  o número de partículas que atinge uma camada de profundidade  $s$  e de espessura  $ds$  e  $-dN$  o número de partículas perdidas por espalhamento nesta camada; então, mostre que,

$$-\frac{dN}{N} = n\sigma ds$$

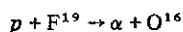
e verifique que

$$N = N_0 e^{-n\sigma s}$$

em que  $N_0$  é o número de partículas incidentes na face da lâmina ( $s = 0$ ) por unidade de área e  $n$ , o número de partículas do alvo por unidade de volume.

#### SEÇÃO 10-8

48. As massas precisas na reação



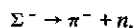
foram determinadas em um espectrômetro de massa, encontrando-se

$$\begin{aligned} m_p &= 1,00783 \text{ uma} & m_\alpha &= 4,00260 \text{ uma} \\ m_F &= 18,99840 \text{ uma} & m_O &= 15,99491 \text{ uma} \end{aligned}$$

Calcule o  $Q$  desta reação a partir destes dados e compare com o valor de  $Q$  calculado no Ex. 7.

Resposta: 8,14 MeV.

49. Uma partícula elementar chamada  $\Sigma^-$ , em repouso em certo referencial, desintegra-se espontaneamente em duas outras partículas, de acordo com a equação



As massas são

$$\begin{aligned} m_{\Sigma^-} &= 2\,340,5 m_e \\ m_{\pi^-} &= 273,2 m_e \\ m_n &= 1\,838,65 m_e \end{aligned}$$

em que  $m_e$  é a massa do elétron. (a) Qual a quantidade de energia cinética gerada neste processo? (b) Qual dos produtos ( $\pi^-$  ou  $n$ ), recebe a maior parcela desta energia cinética? E do momento linear?

50. O  $Q$  da reação, em que um núcleo de  $\text{U}^{236}$ , em repouso, divide-se em apenas dois fragmentos de massas 132 uma e 98 uma, é 192 MeV. (a) Que quantidade de energia foi perdida por radiação? (b) Qual é a velocidade de cada fragmento? (c) Qual é a energia cinética de cada fragmento?

Resposta: (a)  $5,4 \times 10^3$  MeV. (b)  $v_{132} = 1,09 \times 10^7$  m/s;  $v_{98} = 1,47 \times 10^7$  m/s. (c)  $K_{132} = 81,7$  MeV;  $K_{98} = 110$  MeV.

# 11

## cinemática da rotação

Até agora, temos nos dedicado, primordialmente, ao estudo do movimento de translação de partículas ou de corpos rígidos, isto é, de corpos cujas partes guardam relações fixas entre si. Nenhum corpo real é verdadeiramente rígido, mas muitos corpos, como as moléculas, barras de aço e os planetas, são suficientemente rígidos para que, em muitos problemas, possamos ignorar o fato de que eles se torcem, curvam-se ou vibram. Como se mostra na Fig. 3-1, um corpo rígido move-se em translação pura, se todas as suas partículas sofrem o mesmo deslocamento, em qualquer intervalo de tempo considerado.

Neste capítulo, trataremos da *rotação*, ao invés de translação. Ainda aqui, estaremos restritos ao estudo de partículas e de corpos rígidos, o que significa que não consideraremos movimentos de rotação, tais como o do sistema solar ou o da água em um copo girante. Também trataremos, somente, da rotação em torno de um eixo que permanece fixo no sistema de referência em que observamos a rotação.

A Fig. 11-1 mostra o movimento de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo, considerado como o eixo  $Oz$  de nosso sistema de referência. Seja  $P$  uma partícula do corpo rígido, selecionada arbitrariamente e especificada pelo vetor posição  $\mathbf{r}$ . Dizemos, então, que um corpo rígido move-se em rotação pura, se as partículas do corpo (como  $P$ , na Fig. 11-1) descrevem trajetórias circulares cujos centros situam-se sobre uma mesma reta, denominada eixo de rotação (o eixo  $Oz$ , na Fig. 11-1). Se, de quaisquer pontos do corpo, traçarmos retas perpendiculares ao eixo, todas elas descreverão o mesmo

### 11-1

#### MOVIMENTO DE ROTAÇÃO

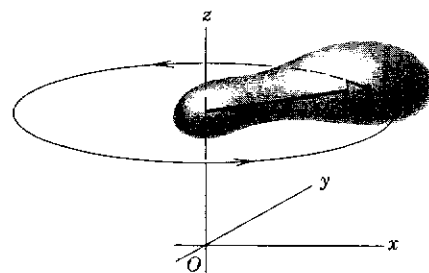


figura 11-1

Um corpo rígido girando em torno do eixo  $Oz$ . Cada ponto do corpo, tal como  $P$ , descreve uma trajetória circular em torno do eixo.

ângulo em um dado intervalo de tempo. Assim, podemos descrever a rotação pura de um corpo rígido considerando o movimento de qualquer uma das partículas (tal como  $P$ ) que o constituem. (Devemos excluir, entretanto, as partículas situadas sobre o eixo de rotação. Por quê?)

O movimento mais geral de um corpo rígido é, contudo, uma combinação de translação e rotação, e não uma rotação pura. Podemos localizar um corpo rígido, que se move com translação pura, fornecendo as três coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  de qualquer um de seus pontos (o centro de massa, por exemplo) em relação a um determinado referencial. Para um corpo que gira, ao mesmo tempo que se translada, necessitamos, no caso geral, de mais três coordenadas, como ângulos, por exemplo, para especificar a orientação do corpo em relação ao referencial. A Fig. 11-2 (veja também a Fig. 9-1) mostra um caso especial do movimento de um corpo rígido em translação e rotação. Essa figura é uma extensão da Fig. 3-1, sendo que, agora, o corpo gira, à medida que se translada. Para localizar este corpo, deveremos não só localizar o ponto  $O$  do corpo no referencial  $xOy$  mas, também, especificar como o referencial  $x'Oy'$ , fixado no corpo, está orientado em relação ao referencial  $xOy$ .

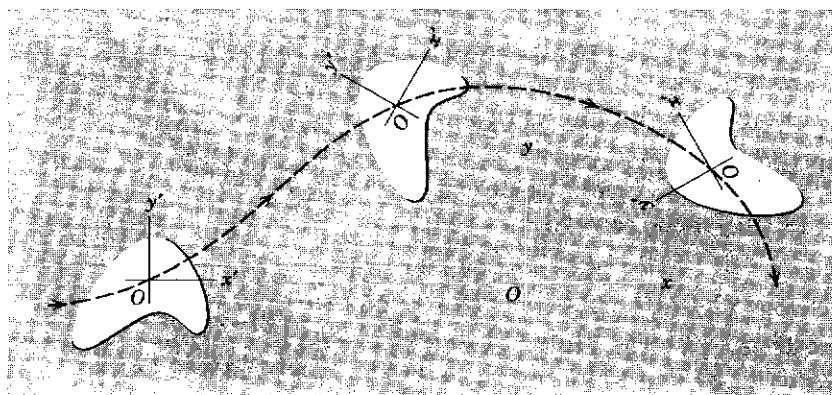


figura 11-2

Um corpo rígido em movimento de translação e rotação combinados, em relação ao referencial  $xOy$ . Observe que o referencial fixo no corpo ( $x'Oy'$ ) muda sua orientação relativa a  $xOy$  durante o movimento. Compare com as Figs. 3-1 e 9-1. Esta figura representa um caso especial em que a translação se processa em duas dimensões apenas (no plano  $xOy$ ) e a rotação se faz em torno de um eixo cuja direção é fixa (o eixo  $Oz'$ ).

Conforme vimos no Cap. 9, podemos descrever o movimento de translação de qualquer sistema de partículas — seja ele rígido ou não, quer esteja ou não em rotação — supondo que toda a massa  $M$  do corpo esteja concentrada no centro de massa e que a resultante das forças externas que atuam no corpo,  $F_{ext}$ , esteja aplicada naquele ponto. A aceleração do centro de massa será, então, dada pela Eq. 9-10:  $F_{ext} = Ma_{cm}$ . O fato de podermos representar o movimento de translação de um corpo rígido pelo movimento de um único ponto — seu centro de massa — é de grande utilidade; resta apenas determinar o seu movimento de rotação. Analisaremos este movimento de translação e rotação combinados no capítulo seguinte. Esta análise tornar-se-á mais simples após termos estudado a rotação pura em torno de um eixo fixo.

Retornemos, portanto, à rotação pura de um corpo rígido em torno de um eixo fixo (Fig. 11-1). Devemos, primeiro, descrever o

movimento de rotação. Esta descrição se denomina cinemática da rotação; devemos definir as variáveis do movimento angular e relacioná-las entre si, da mesma forma que, na cinemática de uma partícula (ver Cap. 4), definimos as variáveis do movimento de translação e as relacionamos entre si. A etapa seguinte de nosso programa será relacionar o movimento de rotação de um corpo com suas propriedades e com as propriedades do ambiente que o envolve. Nisto consiste a dinâmica da rotação. Neste capítulo, estudaremos a cinemática da rotação; desenvolveremos a dinâmica da rotação no próximo capítulo.

Na Fig. 11-1, façamos passar um plano por  $P$ , em ângulo reto com o eixo de rotação. Este plano, que secciona o corpo em rotação, contém a circunferência em que a partícula  $P$  se move. A Fig. 11-3 mostra este plano, visto de cima, ao longo do eixo  $Oz$  da Fig. 11-1.

Poderemos dizer, com exatidão, onde se encontra o corpo em rotação em nosso referencial, se conhecermos a localização de uma partícula qualquer ( $P$ ) do corpo neste referencial. Assim, para a cinemática deste problema, teremos que considerar, apenas, o movimento (bidimensional) de uma partícula em uma circunferência.

O ângulo  $\theta$  na Fig. 11-3 é a posição angular da partícula  $P$  em relação à posição de referência. Escolhemos, arbitrariamente, o sentido positivo de rotação, na Fig. 11-3, como sendo anti-horário, de modo que  $\theta$  aumenta em rotações anti-horárias e diminui em rotações horárias.

É conveniente que  $\theta$  seja medido em radianos<sup>1</sup>, em vez de em graus. Por definição,  $\theta$  é dado em radianos pela relação

$$\theta = s/r,$$

onde  $s$  é o comprimento do arco mostrado na Fig. 11-3.

Consideremos o corpo da Fig. 11-3 em rotação no sentido anti-horário. No instante  $t_1$ , a posição angular de  $P$  é  $\theta_1$  e, no instante  $t_2$  posterior, sua posição angular é  $\theta_2$ . Isto está mostrado na Fig. 11-4, onde se indicam as posições de  $P$  e do vetor posição  $r$  nestes instantes; por simplicidade, o contorno do corpo foi omitido naquela figura. O deslocamento angular de  $P$  será  $\theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta$ , durante o intervalo de tempo  $t_2 - t_1 = \Delta t$ . A velocidade angular média,  $\bar{\omega}$ , da partícula  $P$ , neste intervalo de tempo, é definida como

$$\bar{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

A velocidade angular instantânea,  $\omega$ , é definida como sendo o limite para o qual tende esta relação quando  $\Delta t$  tende para zero:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \quad (11-1)$$

Em um corpo rígido, todas as linhas radiais, fixas nele e perpendiculares ao eixo de rotação, giram de um mesmo ângulo no

## 11-2 CINEMÁTICA DA ROTAÇÃO — AS VARIÁVEIS

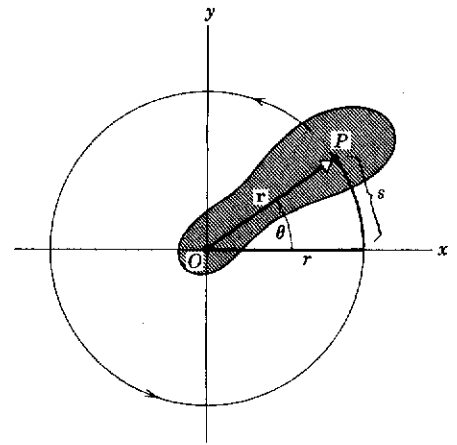


figura 11-3  
Vista de uma seção transversal do corpo rígido da Fig. 11-1, mostrando o ponto  $P$  e o vetor  $r$  daquela figura. O ponto  $P$ , fixo no corpo em rotação, gira no sentido anti-horário, em torno da origem, em uma circunferência de raio  $r$ .

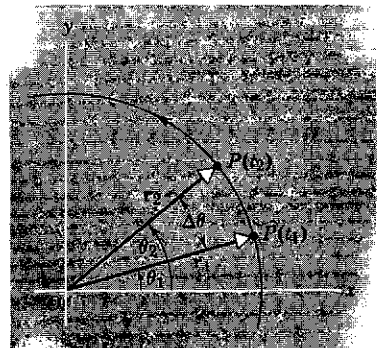


figura 11-4  
A reta de referência,  $r (= OP)$ , fixa no corpo das Figs. 11-1 e 11-3, gira de um ângulo  $\Delta\theta (= \theta_2 - \theta_1)$  durante o tempo  $\Delta t (= t_2 - t_1)$ .

<sup>1</sup> O radiano é um número puro, não tendo dimensão física, pois é a razão de dois comprimentos. Como o comprimento de uma circunferência de raio  $r$  é  $2\pi r$ , temos  $2\pi$  radianos em uma circunferência completa, isto é,  $\theta = 2\pi r/r = 2\pi$ . Portanto,  $2\pi$  radianos =  $360^\circ$ ,  $\pi$  radianos =  $180^\circ$  e 1 radianos  $\cong 57,3^\circ$ .

mesmo intervalo de tempo, de modo que a velocidade angular  $\omega$  em torno deste eixo é a mesma para todas as partículas do corpo. Assim,  $\omega$  é uma característica do corpo como um todo. A velocidade angular tem dimensão de inverso de tempo ( $T^{-1}$ ); suas unidades comumente usadas são rad/s ou rotações/s.

Se a velocidade angular de  $P$  não for constante, a partícula terá uma aceleração angular. Sejam  $\omega_1$  e  $\omega_2$  as velocidades angulares instantâneas nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ , respectivamente; então, a *aceleração angular média*,  $\bar{\alpha}$ , da partícula  $P$  é definida como

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

A *aceleração angular instantânea* é o limite desta relação quando  $\Delta t$  tende a zero, ou seja,

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (11-2)$$

Como  $\omega$  é a mesma para todas as partículas do corpo rígido, concluímos, pela Eq. 11-2, que  $\alpha$  terá o mesmo valor para todas elas e, então,  $\alpha$ , do mesmo modo que  $\omega$ , é uma característica do corpo como um todo. As dimensões da aceleração angular são as do inverso do quadrado do tempo ( $T^{-2}$ ); suas unidades usadas mais comumente são rad/s<sup>2</sup> ou rotações/s<sup>2</sup>.

A rotação de uma partícula (ou de um corpo rígido) *em torno de um eixo fixo* tem uma correspondência formal com o movimento de translação de uma partícula (ou de um corpo rígido) *ao longo de uma direção fixa*.

No primeiro caso, as variáveis cinemáticas são  $\theta$ ,  $\omega$  e  $\alpha$  e, no segundo caso, são  $x$ ,  $v$  e  $a$ . Estas grandezas correspondem-se aos pares:  $\theta$  a  $x$ ,  $\omega$  a  $v$  e  $\alpha$  a  $a$ . Observe-se que cada grandeza angular difere dimensionalmente, por um fator comprimento, da grandeza linear correspondente. Observe-se, também, que para esses casos particulares, todas as seis grandezas podem ser tratadas como escalares. Por exemplo, uma partícula, em qualquer instante, pode estar se movendo em um outro sentido em sua trajetória retilínea, correspondendo a um valor positivo ou negativo de  $v$ ; de modo semelhante uma partícula, em qualquer instante, pode estar girando em um ou outro sentido em torno do eixo fixo, correspondendo a um valor positivo ou negativo de  $\omega$ .

Quando, no movimento de translação, eliminamos a restrição de que o movimento se faça ao longo de uma linha reta e consideramos o caso geral de movimento tridimensional ao longo de uma trajetória curva, as variáveis lineares  $x$ ,  $v$  e  $a$  revelam-se como componentes escalares dos vetores  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{a}$  da cinemática. Na Sec. 11-4, veremos até que ponto as variáveis da cinemática da rotação revelam-se como vetores, quando eliminamos a restrição de ser fixo o eixo de rotação.

No movimento de translação de uma partícula ou de um corpo rígido ao longo de uma determinada direção, como, por exemplo, ao longo do eixo  $Ox$ , vimos (Cap. 3) que o tipo mais simples de movimento é aquele no qual a aceleração  $a$  é nula. O tipo de movimento seguinte corresponde a  $a = \text{constante}$  (diferente de zero); para

### 11-3 ROTAÇÃO COM ACELERAÇÃO ANGULAR CONSTANTE



este movimento, obtivemos as equações da Tab. 3-1, que relacionam as variáveis cinemáticas  $x$ ,  $v$ ,  $a$  e  $t$  em todas as combinações possíveis.

No movimento de rotação de uma partícula ou de um corpo rígido em torno de um eixo fixo, o tipo mais simples de movimento é aquele no qual a aceleração angular,  $\alpha$ , é nula (como no movimento circular uniforme). O tipo seguinte de movimento, no qual  $\alpha = \text{constante}$  (diferente de zero), corresponde exatamente ao movimento linear com  $a = \text{constante}$  (diferente de zero). Como antes, podemos deduzir quatro equações ligando as quatro variáveis cinemáticas  $\theta$ ,  $\omega$ ,  $\alpha$  e  $t$  em todas as combinações possíveis. O estudante poderá obter estas equações angulares pelos métodos usados para deduzir as equações lineares (veja o Ex. 2), ou poderá escrevê-las, imediatamente, pela simples substituição das grandezas lineares pelas correspondentes grandezas angulares nas equações lineares.

Os dois conjuntos de equações estão relacionados na Tab. 11-1, tendo-se escolhido, por simplicidade, nestas equações,  $x_0 = 0$  e  $\theta_0 = 0$ . Nelas,  $\omega_0$  representa a velocidade angular no instante  $t = 0$ . O estudante deverá verificar dimensionalmente estas equações. Ambos os conjuntos de equações são válidos, tanto para partículas, quanto para corpos rígidos.

**Tabela 11-1**

**Movimento com Aceleração Linear ou Angular Constante**

	Movimento de Translação (Direção Fixa)	Movimento de Rotação (Eixo Fixo)	
(3-12)	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(11-3)
(3-14)	$x = \frac{v_0 + v}{2} t$	$\theta = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t$	(11-4)
(3-15)	$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	(11-5)
(3-16)	$v^2 = v_0^2 + 2ax$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$	(11-6)

Para as variáveis angulares, escolhemos, arbitrariamente, um dos dois possíveis sentidos de rotação em torno do eixo fixo como sendo o sentido de crescimento de  $\theta$ . Da Eq. 11-1 ( $\omega = d\theta/dt$ ), vemos que se  $\theta$  cresce com o tempo, então  $\omega$  é positiva. Da mesma forma, da Eq. 11-2 ( $\alpha = d\omega/dt$ ), observamos que se  $\omega$  cresce com o tempo,  $\alpha$  é positiva. Há, como já vimos, convenções de sinal correspondentes para as grandezas lineares.

Um esmeril, partindo do repouso, tem uma aceleração angular constante,  $\alpha$ , de  $3,0 \text{ rad/s}^2$ . Consideremos uma linha, inicialmente na posição horizontal, tal como  $OP$  na Fig. 11-5. Determine: (a) o deslocamento angular da linha  $OP$  (e, portanto, do esmeril), e (b) a velocidade angular do esmeril,  $2,0 \text{ s}$  depois.

(a) São dados  $\alpha$  e  $t$ ; queremos calcular  $\theta$ . Então, usamos a Eq. 11-5,

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Em  $t = 0$ , temos  $\omega = \omega_0 = 0$  e  $\alpha = 3,0 \text{ rad/s}^2$ . Portanto, após  $2,0 \text{ s}$ ,

$$\theta = 0 \times 2,0 \text{ s} + \frac{1}{2} (3,0 \text{ rad/s}^2) (2,0 \text{ s})^2 = 6,0 \text{ rad} = 0,96 \text{ de uma volta completa.}$$

## EXEMPLO 1

(b) São dados  $\alpha$  e  $t$ : queremos calcular  $\omega$ . Usamos, então, a Eq. 11-3

$$\omega = \omega_0 + \alpha t,$$

e

$$\omega = 0 + (3,0 \text{ rad/s}^2) \times 2,0 \text{ s} = 6,0 \text{ rad/s}.$$

A título de verificação, podemos usar a Eq. 11-6.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta,$$

obtendo

$$\omega^2 = 0 + 2 \times (3,0 \text{ rad/s}^2) \times 6,0 \text{ rad} = 36 \text{ rad}^2/\text{s}^2,$$

$$\omega = 6,0 \text{ rad/s}.$$

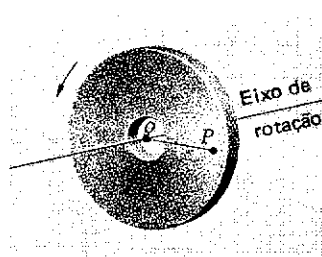


figura 11-5

Exemplo 1. A reta  $OP$  é fixa no esmeril que gira, como está mostrado, em torno de um eixo que passa por  $O$  e que é fixo no referencial do observador.

Deduzir a equação  $\omega = \omega_0 + \alpha t$  para o movimento com aceleração angular constante.

(a) Partindo da definição de aceleração angular.

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt},$$

obtemos

$$\alpha dt = d\omega$$

ou

$$\int \alpha dt = \int d\omega.$$

Mas, como  $\alpha$  é constante, temos

$$\alpha \int dt = \int d\omega.$$

Se a velocidade angular em  $t = 0$  é representada por  $\omega_0$ , vem

$$\alpha \int_0^t dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega$$

ou

$$\alpha t = \omega - \omega_0$$

e

$$\omega = \omega_0 + \alpha t.$$

(b) Podemos também chegar a este resultado se lembrarmos que, quando a aceleração é constante, a aceleração média é igual à aceleração instantânea. A aceleração média é

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0}.$$

Quando a aceleração é constante, temos  $\alpha = \bar{\alpha}$ . Fazendo  $t_0 = 0$ , obtemos

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

ou

$$\omega = \omega_0 + \alpha t.$$

O estudante deverá comparar esta dedução com a da relação linear correspondente,  $v = v_0 + at$ , na Sec. 3 8.

O deslocamento, a velocidade e a aceleração lineares são vetores. As grandezas angulares, correspondentes *podem* ser vetores também, pois, além de um módulo, podemos especificar uma direção para elas, isto é, a direção do eixo de rotação no espaço. Em virtude de termos considerado apenas a rotação em torno de um eixo fixo, foi possível tratar  $\theta$ ,  $\omega$  e  $\alpha$  como grandezas escalares. Entretanto, se variar a direção do eixo, não poderemos mais evitar a pergunta "as grandezas da rotação são vetores?". Somente podemos descobrir a resposta, verificando se elas obedecem às leis da adição vetorial.

Consideremos, primeiramente, o deslocamento angular,  $\theta$ . O valor do deslocamento angular de um corpo é o ângulo de que ele gira. Os deslocamentos angulares, contudo, *não* são vetores, porque eles *não* se adicionam como vetores. Por exemplo, apliquemos duas rotações sucessivas,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , a um livro que inicialmente repousa sobre uma mesa. Suponha que a rotação  $\theta_1$  seja de  $90^\circ$ , em torno de um eixo vertical que passa pelo centro do livro, e que tenha sentido horário se observada de cima. Considere  $\theta_2$  como uma rotação de  $90^\circ$ , em torno de um eixo norte-sul passando pelo centro do livro, no sentido horário se observada do sul. Em primeiro lugar, aplique antes a operação  $\theta_1$  e, em seguida, a operação  $\theta_2$ . Em segundo lugar, aplique a operação  $\theta_2$  seguida da operação  $\theta_1$ . O estudante

## 11-4 GRANDEZAS VETORIAIS NA ROTAÇÃO

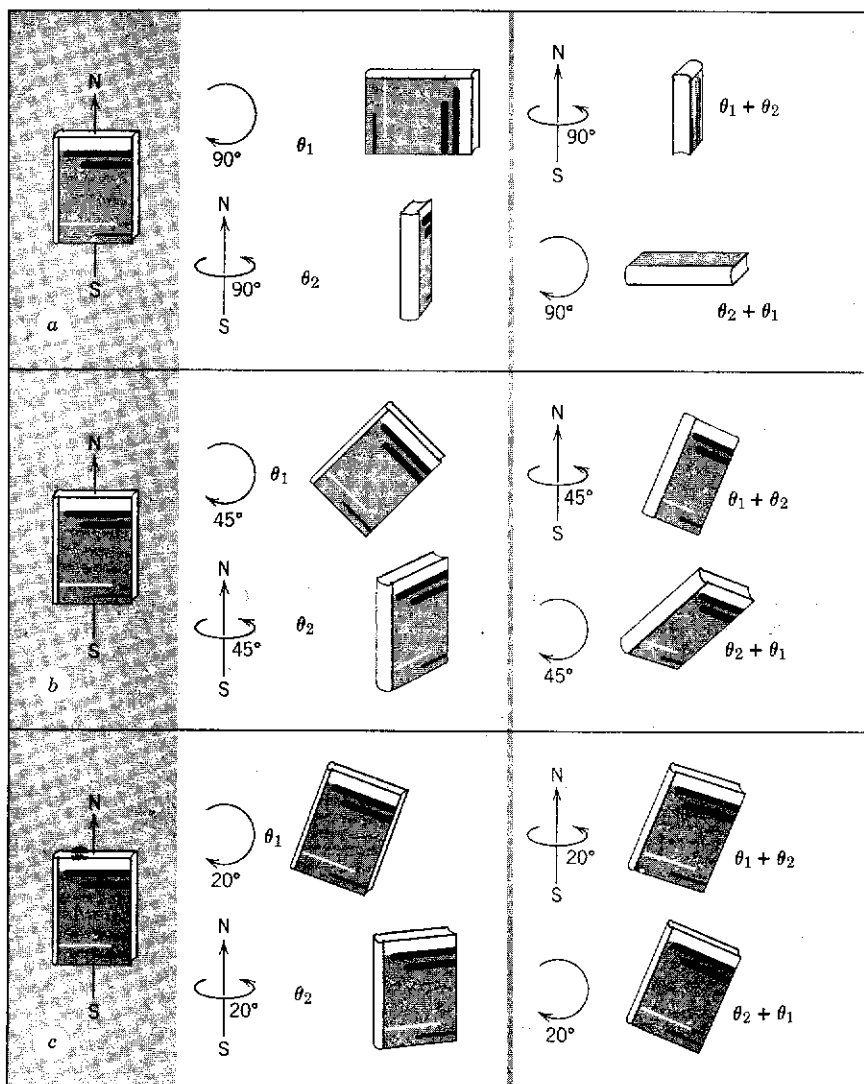


figura 11-6

(a) Um livro ao qual se aplica uma rotação  $\theta_1$  ( $90^\circ$ , como é mostrado, em torno de um eixo vertical) e, em seguida, uma rotação  $\theta_2$  ( $90^\circ$ , como é mostrado, em torno de um eixo norte-sul) terá uma orientação final diferente da que teria se tivesse tido primeiro a rotação  $\theta_2$  e, em seguida, a rotação  $\theta_1$ . Esta propriedade se denomina não-comutatividade da adição de ângulos finitos:  $\theta_1 + \theta_2 \neq \theta_2 + \theta_1$ .  
(b) O grupo do meio representa uma situação semelhante, exceto que, agora, os deslocamentos angulares são de  $45^\circ$ , menores do que antes. Ainda que as orientações finais sejam diferentes, elas estão bem mais próximas uma da outra.  
(c) O grupo inferior repete a experiência para deslocamentos de  $20^\circ$ . Vemos, aqui, que  $\theta_1 + \theta_2 \cong \theta_2 + \theta_1$ . Quando  $\theta_1, \theta_2 \rightarrow 0$ , as posições finais tornam-se mais próximas uma da outra. Rotações de ângulos finitos, na adição, tendem a poder ser comutados à medida que os ângulos tornam-se muito pequenos. Deslocamentos de ângulos infinitesimais podem ser comutados na adição, permitindo que sejam tratados como vetores.

deverá, ele próprio, realizar estas operações. Se os deslocamentos angulares são grandezas vetoriais, eles deverão se adicionar como vetores. Em particular, devem obedecer à lei de adição vetorial  $\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$ , a qual estabelece que a ordem em que os vetores são adicionados não afeta sua soma. Esta lei falha para deslocamentos angulares finitos (veja o exercício acima e também a Fig. 11-6a). Portanto, os deslocamentos angulares finitos *não* são grandezas vetoriais.

Suponha que, em vez de rotações de  $90^\circ$ , aplicássemos rotações de  $3^\circ$ . O resultado de  $\theta_1 + \theta_2$  ainda seria diferente do resultado de  $\theta_2 + \theta_1$ , mas a diferença seria muito menor. Na realidade, à medida que os dois deslocamentos angulares se tornam cada vez menores, a diferença entre as duas somas diminui rapidamente (Fig. 11-6b, c). Se os deslocamentos angulares forem infinitesimais, a ordem da adição não mais afetará o resultado. Portanto, *os deslocamentos angulares infinitesimais são vetores*.

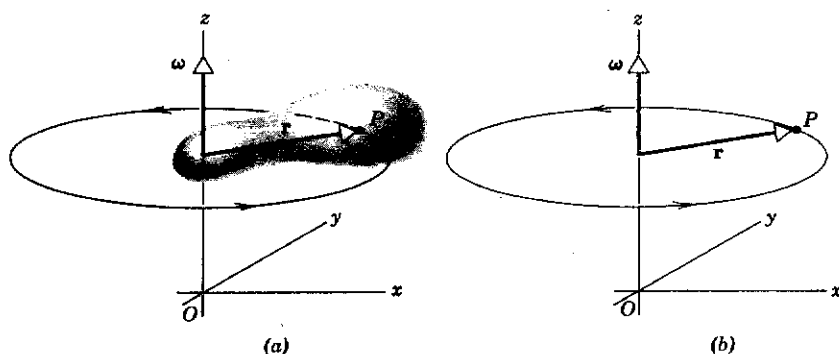


figura 11-7

A velocidade angular,  $\omega$ , de (a) um corpo rígido em rotação e (b) de uma partícula girante, em torno de um eixo fixo.

As grandezas definidas em termos de deslocamentos angulares infinitesimais podem ser, portanto, grandezas vetoriais. Por exemplo, a velocidade angular é  $\omega = d\theta/dt$ . Uma vez que  $d\theta$  é um vetor e  $dt$  é um escalar, o quociente é um vetor. Logo, a velocidade angular é um vetor. Na Fig. 11-7a, por exemplo, representamos a velocidade angular,  $\omega$ , de um corpo rígido em rotação, por meio de uma flecha traçada ao longo do eixo de rotação; na Fig. 11-7b, representamos a rotação de uma partícula (tal como P na Fig. 11-7a), em torno de um eixo fixo, exatamente da mesma maneira. O comprimento da flecha é proporcional ao módulo da velocidade angular. O sentido de rotação determina o sentido no qual a flecha aponta ao longo do eixo. Por convenção, se curvamos os dedos da mão *direita* em torno do eixo, no sentido da rotação do corpo, o polegar estendido apontará no sentido do vetor velocidade angular. Portanto, para o corpo rígido da Fig. 11-1, o vetor velocidade angular apontará no sentido positivo do eixo Oz. Na Fig. 11-3,  $\omega$  será perpendicular à página e voltada para o leitor, correspondendo à rotação anti-horária. A velocidade angular do prato de uma eletrola é um vetor voltado para baixo. Observe que não há nenhum movimento na direção do vetor velocidade angular. O vetor representa a velocidade angular do movimento de rotação que se processa no plano perpendicular a ele.

A aceleração angular é, também, uma grandeza vetorial, como se percebe pela definição,  $\alpha = d\omega/dt$ , em que  $d\omega$  é um vetor e  $dt$  é um escalar. Mais tarde, encontraremos outras grandezas da rotação, como o torque e o momento angular, que também são grandezas vetoriais.

Um disco gira em torno de um eixo horizontal, montado em mancais, com uma velocidade angular,  $\omega_1$ , de 100 rad/s, como mostra a Fig. 11-8a. O conjunto está adaptado a uma plataforma que gira em torno de um eixo vertical, com  $\omega_2 = 30,0$  rad/s, no sentido anti-horário, quando vista de cima. Descreva a rotação do disco em relação a um observador situado no recinto.

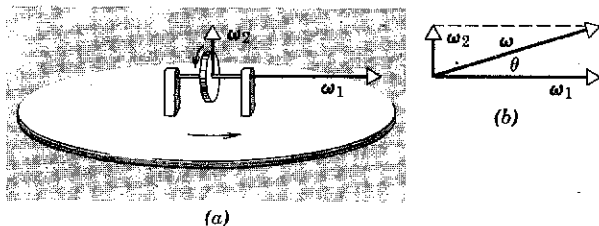


figura 11-8

Exemplo 3.

(a) Um disco girando em uma plataforma também em rotação. (b) As velocidades angulares se adicionam como os vetores.

O disco está sujeito, simultaneamente, a duas velocidades angulares; podemos descrever o seu movimento resultante pela soma vetorial destes vetores. A velocidade angular  $\omega_1$ , associada ao eixo do disco, vale 100 rad/s e se processa em torno de um eixo que não está fixo mas, em relação a um observador no recinto, gira em um plano horizontal, a 30 rad/s. A velocidade angular  $\omega_2$ , associada à plataforma, tem direção vertical e vale 30 rad/s.

A velocidade angular resultante do disco,  $\omega$ , é a soma vetorial de  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . O módulo,  $\omega$ , é

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{(100 \text{ rad/s})^2 + (30,0 \text{ rad/s})^2} = 104 \text{ rad/s.}$$

A direção de  $\omega$  não é fixa no referencial de nosso observador, mas gira com a mesma velocidade angular que a plataforma. O vetor  $\omega$  não está situado no plano horizontal, mas aponta em uma direção que forma um ângulo  $\theta$  acima deste plano (veja a Fig. 11-8b), sendo

$$\theta = \text{arc tg } \omega_2/\omega_1 = \text{arc tg } 30,0 \text{ rad/s} / 100 \text{ rad/s} = \text{arc tg } 0,300 = 16,7^\circ.$$

Podemos descrever o movimento do disco como uma simples rotação em torno deste novo eixo (cujá direção, no referencial de nosso observador, varia no tempo da maneira descrita acima) com uma velocidade angular de 104 rad/s. Como se alteraria a situação, se fosse invertido o sentido de rotação do disco ou da plataforma?

Nas Seções 4-4 e 4-5, discutimos a velocidade e a aceleração lineares de uma partícula em movimento circular. Quando um corpo rígido gira em torno de um eixo, cada partícula do corpo move-se em uma circunferência. Portanto, podemos descrever o movimento de tais partículas tanto com variáveis lineares quanto com variáveis angulares. A relação entre as variáveis lineares e angulares permite-nos passar de uma descrição para a outra e é muito útil.

Consideremos uma partícula em  $P$  no corpo rígido, a uma distância  $r$  do eixo que passa por  $O$ . Esta partícula move-se em uma circunferência de raio  $r$  enquanto o corpo gira, como na Fig. 11-9a. A posição de referência é  $Ox$ . A partícula percorre uma distância  $s$  ao longo do arco, quando o corpo gira de um ângulo  $\theta$ , de modo que

$$s = \theta r, \quad (11-7)$$

onde  $\theta$  é medido em radianos.

Derivando ambos os membros desta equação em relação ao tempo, e lembrando que  $r$  é constante, obtemos

## 11-5

### RELAÇÃO ENTRE A CINEMÁTICA LINEAR E A CINEMÁTICA ANGULAR DE UMA PARTÍCULA EM MOVIMENTO CIRCULAR-FORMA ESCALAR

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r.$$

Mas  $ds/dt$  é o valor da velocidade linear da partícula em  $P$  e  $d\theta/dt$  é a velocidade angular,  $\omega$ , do corpo em rotação e, assim,

$$v = \omega r. \quad (11-8)$$

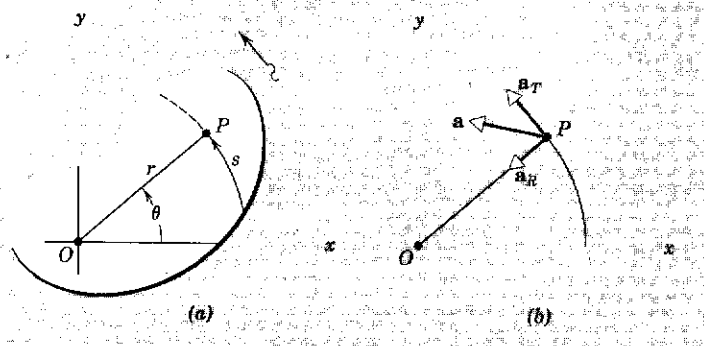


figura 11-9

(a) Um corpo rígido em rotação em torno de um eixo que passa por  $O$ , perpendicularmente à página. O ponto  $P$  descreve um arco,  $s$ , que subtende um ângulo  $\theta$ . (b) A aceleração,  $\mathbf{a}$ , do ponto  $P$  tem os componentes  $\mathbf{a}_T$  (tangencial), sendo  $a_T = \alpha r$ , e  $\mathbf{a}_R$  (radial), sendo  $a_R = v^2/r = \omega^2 r$  ( $\omega$  = velocidade angular).

Esta é a relação entre os *módulos* da velocidade linear e da velocidade angular; o módulo da velocidade linear de uma partícula em movimento circular é o produto do valor da velocidade angular pela distância,  $r$ , da partícula ao eixo de rotação.

Derivando a Eq. 11-8 em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r.$$

Mas  $dv/dt$  é o módulo do componente *tangencial* da aceleração da partícula (veja a Seç. 4-5) e  $d\omega/dt$  é o módulo da aceleração angular do corpo em rotação e, então,

$$a_T = \alpha r. \quad (11-9)$$

Assim, o valor do componente tangencial da aceleração linear de uma partícula em movimento circular é o produto do valor da aceleração angular pela distância,  $r$ , da partícula ao eixo de rotação.

Vimos que o componente *radial* da aceleração vale  $v^2/r$ , para uma partícula em movimento circular. Este resultado pode ser expresso em termos da velocidade angular, usando-se a Eq. 11-8.

Teremos

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r. \quad (11-10)$$

A aceleração resultante do ponto  $P$  está mostrada na Fig. 11-9b.

As Eqs. 11-7 a 11-10 permitem-nos descrever o movimento de um ponto em um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo, *tanto* em variáveis angulares *quanto* em variáveis lineares. Poder-se-ia indagar por quê necessitamos das variáveis angulares, se já estamos familiarizados com as variáveis lineares equivalentes. A resposta é que a descrição angular oferece uma vantagem adicional em relação à descrição linear, quando se consideram vários pontos de um mesmo corpo em rotação. Diferentes pontos em um mesmo corpo em rotação não têm o mesmo deslocamento, velocidade e aceleração lineares, mas *todos* os pontos em um corpo rígido girando

em torno de um eixo fixo têm o mesmo deslocamento, a mesma velocidade e a mesma aceleração *angulares*, em qualquer instante. Pelo uso das variáveis angulares podemos descrever o movimento do corpo, como um todo, de modo bastante simples.

Se o raio do esmeril do Ex. 1 é de 0,50 m, calcular (a) o valor da velocidade linear (ou tangencial) de uma partícula situada na periferia, (b) a aceleração tangencial desta partícula e (c) a aceleração centrípeta desta mesma partícula, após 2,0 s.

Temos  $\alpha = 3,0 \text{ rad/s}^2$ ,  $\omega = 6,0 \text{ rad/s}$  após 2,0 s e  $r = 0,50 \text{ m}$ . Então

(a) 
$$\begin{aligned} v &= \omega r \\ &= 6,0 \text{ rad/s} \times 0,50 \text{ m} \\ &= 3,0 \text{ m/s} \end{aligned} \quad \text{(velocidade linear);}$$

(b) 
$$\begin{aligned} a_T &= \alpha r \\ &= 3,0 \text{ rad/s}^2 \times 0,50 \text{ m} \\ &= 1,5 \text{ m/s}^2 \end{aligned} \quad \text{(aceleração tangencial);}$$

(c) 
$$\begin{aligned} a_R &= v^2/r = \omega^2 r \\ &= (6,0 \text{ rad/s})^2 \times 0,50 \text{ m} \\ &= 18 \text{ m/s}^2 \end{aligned} \quad \text{(aceleração centrípeta).}$$

(d) Estes resultados serão os mesmos para uma partícula a meio caminho entre o eixo e a borda, isto é, a uma distância  $r = 0,25 \text{ m}$  do eixo?

As variáveis *angulares* são as mesmas para este ponto e para o ponto da periferia, isto é, temos novamente

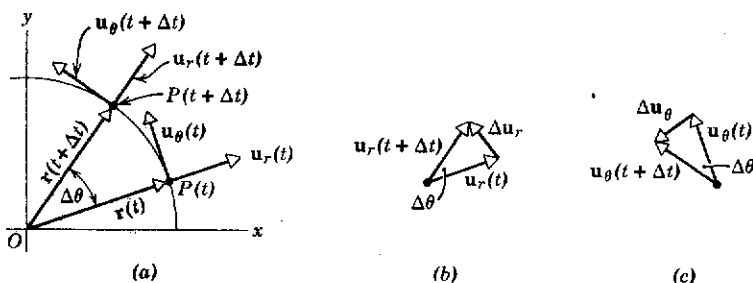
$$\alpha = 3,0 \text{ rad/s}^2, \quad \omega = 6,0 \text{ rad/s}.$$

Mas, agora,  $r = 0,25 \text{ m}$ , de modo que, para esta partícula,

$$v = 1,5 \text{ m/s}, \quad a_T = 0,75 \text{ m/s}^2, \quad a_R = 9,0 \text{ m/s}^2.$$

O estudante deverá observar que as relações deduzidas na seção anterior são relações entre grandezas escalares, pois tanto as variáveis lineares quanto as angulares estão expressas em forma escalar. Empreguemos, agora, métodos vetoriais, fazendo uma análise semelhante à da Sec. 4-5, exceto que introduziremos aqui as variáveis angulares. Este procedimento ilustrará, para um caso familiar, o tratamento mais geral e preparará o caminho para situações em que os métodos vetoriais são essenciais.

A Fig. 11-10a mostra uma partícula, P, girando em torno de um eixo fixo que passa pela origem, nos instantes  $t$  e  $t + \Delta t$ . A partícula move-se em uma circunferência de raio  $r$  constante, fora isto, não há outras restrições ao seu movi-



### EXEMPLO 4

### 11-6 RELAÇÃO ENTRE A CINEMÁTICA LINEAR E A CINEMÁTICA ANGULAR DE UMA PARTÍCULA EM MOVIMENTO CIRCULAR-FORMA VETORIAL

figura 11-10

(a) A partícula P gira de um ângulo  $\Delta\theta$ , no tempo  $\Delta t$ . Os vetores unitários, em coordenadas polares, estão mostrados em cada ponto. (b) A variação em  $u_\theta$ ; observe que  $\Delta u_\theta$  aponta na direção de  $u_\theta$ , quando  $\Delta\theta \rightarrow 0$ . (c) A variação em  $u_r$ ; observe que  $\Delta u_r$  aponta segundo  $-u_r$ , quando  $\Delta\theta \rightarrow 0$ .

mento e, em geral,  $\omega$  e  $\alpha$  podem ter valores que variam, enquanto a partícula se move. Podemos expressar a restrição de o raio ser constante por

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_r r, \quad (11-11)$$

em que  $\mathbf{u}_r$  é um vetor unitário na direção e sentido de  $\mathbf{r}$ .

Derivando a Eq. 11-11, e lembrando que  $r$  é constante (mas não  $\mathbf{r}$  ou  $\mathbf{u}_r$ , pois suas direções variam), teremos

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} r. \quad (11-12)$$

Mas  $d\mathbf{r}/dt$  é o vetor velocidade linear,  $\mathbf{v}$ , da partícula. Para calcularmos  $d\mathbf{u}_r/dt$ , consideremos a Fig. 11-10b, que mostra o vetor unitário  $\mathbf{u}_r$  em duas posições diferentes de  $P$ , correspondendo a uma rotação de um (pequeno) ângulo  $\Delta\theta$ . Usando a definição da medida de um ângulo em radianos, obtemos o módulo da variação (vetorial),  $\Delta\mathbf{u}_r$ , de  $\mathbf{u}_r$ , a partir de

$$\Delta\mathbf{u}_r = (1)\Delta\theta,$$

em que o fator (1) nos lembra que os dois vetores unitários da Fig. 11-10b têm comprimentos unitários. A equação acima será correta se  $\Delta\theta$  for suficientemente pequeno, para que possamos desprezar a diferença entre a corda e o arco, no pequeno triângulo da Fig. 11-10b. A variação em  $\mathbf{u}_r$  é um vetor,  $\Delta\mathbf{u}_r$ , cujo módulo é dado pela equação acima; sua direção, admitindo-se novamente que  $\Delta\theta$  seja suficientemente pequeno, será a mesma do vetor unitário  $\mathbf{u}_\theta$ . Chegamos a esta conclusão porque, se  $\Delta\mathbf{u}_r$ , na Fig. 11-10b, for trasladado para o ponto  $P$  da Fig. 11-10a, vemos que, quando  $\Delta\theta \rightarrow 0$ , ele aponta na mesma direção e no mesmo sentido de  $\mathbf{u}_\theta$ . Concluimos, assim, que

$$\Delta\mathbf{u}_r \cong \mathbf{u}_\theta \Delta\theta.$$

Dividindo por  $\Delta t$ , e fazendo  $\Delta t$  tender para zero, temos

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \mathbf{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} = \mathbf{u}_\theta \omega. \quad (11-13)$$

Substituindo estes resultados na Eq. 11-12, obtemos

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_\theta \omega r. \quad (11-14a)$$

A relação escalar que corresponde a esta relação é

$$v = \omega r, \quad (11-14b)$$

e é uma das equações obtidas anteriormente, que relacionam o valor da velocidade linear,  $v$ , de uma partícula em movimento circular, com o valor de sua velocidade angular,  $\omega$ .

Para encontrarmos a relação entre a aceleração linear e a aceleração angular, derivamos a Eq. 11-14a, lembrando que  $r$  é constante, enquanto  $\mathbf{u}_\theta$  e  $\omega$  variam. Temos

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}_\theta \frac{d\omega}{dt} r + \omega \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} r. \quad (11-15)$$

Mas  $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a}$ , a aceleração linear da partícula, e  $d\omega/dt = \alpha$ , sua aceleração angular. A partir da Fig. 11-10c, o estudante, guiado pela dedução da Eq. 11-13, poderá provar que

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\mathbf{u}_r \omega. \quad (11-16)$$



O sinal negativo aparece porque, quando trasladamos  $\Delta \mathbf{u}_\theta$ , na Fig. 11-10c, para o ponto  $P$ , vemos que, quando  $\Delta \theta \rightarrow 0$ , ele aponta radialmente para dentro, em sentido contrário a  $\mathbf{u}_r$ .

Fazendo estas substituições na Eq. 11-15, obtemos

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}_\theta \alpha r - \mathbf{u}_r \omega^2 r. \quad (11-17)$$

Assim, conforme já sabemos da Seção 4-5,  $\mathbf{a}$  tem uma componente radial (ou centrípeta),  $\mathbf{a}_R$ , e uma componente tangencial,  $\mathbf{a}_T$ . Seus módulos, pela Eq. 11-17, são dados por

$$a_T = \alpha r \quad (11-18a)$$

e (usando a Eq. 11-14b)

$$a_R = \omega^2 r = v^2/r. \quad (11-18b)$$

Esta última equação é um resultado conhecido, obtido na Seção 4-4. No Tópico Suplementar I deduziremos as relações entre as variáveis cinemáticas lineares e angulares de uma partícula que pode mover-se livremente em um plano, não estando restrita ao movimento circular. As Eqs. 11-14a e 11-17 constituem casos especiais das relações mais gerais ali deduzidas.

As Eqs. 11-14a e 11-17 são relações entre as variáveis cinemáticas lineares, em forma vetorial, e as variáveis cinemáticas angulares, em forma escalar. Deveríamos procurar obter relações em que *ambos* os conjuntos de variáveis estejam expressos em forma vetorial. Fazemos isto agora. Elas serão especialmente úteis em casos nos quais o eixo de rotação não é fixo.

A Fig. 11-11 mostra os vetores  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a}_T$ ,  $\mathbf{a}_R$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\boldsymbol{\alpha}$  para a partícula em rotação na Fig. 11-7b. As grandezas angulares situam-se ao longo do eixo de rotação, apontando no sentido dado pela regra da mão direita da Fig. 2-12. Afirmamos — e provaremos — que as relações procuradas são

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (11-19)$$

e

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_R, \quad (11-20a)$$

em que

$$\mathbf{a}_T = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_R = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (11-20b)$$

Na Seção 2-4 (que o estudante deverá reler agora), definimos o produto vetorial de dois vetores. Se  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , então o *módulo* de  $\mathbf{c}$  é  $ab \sin \phi$ , onde  $\phi$  é o ângulo entre  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . Aplicando esta parte da definição às Eqs. 11-19 e 11-20, observamos (veja a Fig. 11-11) que  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{r}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{v}$ , e  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\mathbf{r}$  são mutuamente perpendiculares; assim, o ângulo  $\phi$ , para cada um destes três pares de vetores, é de  $90^\circ$ . Na Eq. 11-19 teremos, para os módulos,

$$v = \omega r \sin 90^\circ = \omega r,$$

que é exatamente a Eq. 11-14b. Nas Eqs. 11-20b, teremos, para os módulos,

$$a_R = \omega v = \omega(\omega r) = \omega^2 r$$

e

$$a_T = \alpha r.$$

Estas relações concordam exatamente com as Eqs. 11-18b e a.

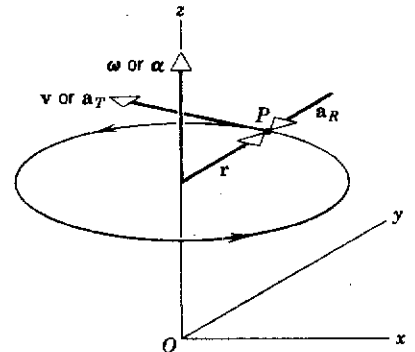


figura 11-11  
Direções e sentidos dos vetores  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a}_T$ ,  $\mathbf{a}_R$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\boldsymbol{\alpha}$  para uma partícula em movimento circular em torno do eixo  $Oz$ .

Resta verificar se os *sentidos* estão determinados corretamente pelas Eqs. 11-19 e 11-20b. O sentido do produto vetorial  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , conforme indica a Fig. 2-12, obtém-se fazendo  $\mathbf{a}$  superpor-se a  $\mathbf{b}$ , após descrever o menor ângulo entre os dois vetores; é a regra da mão direita: dispondo os dedos desta mão, de modo a acompanharem a rotação de  $\mathbf{a}$ , o polegar apontará no sentido do vetor produto,  $\mathbf{c}$ .

O estudante poderá verificar facilmente que, na Fig. 11-11, os sentidos dos vetores  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a}_T$  e  $\mathbf{a}_R$  são, de fato, dados corretamente pelas Eqs. 11-19 e 11-20b.

## questões

1. Na Seq. 11-1, afirmamos que, em geral, necessitam-se seis variáveis para localizar um corpo rígido em relação a um determinado referencial. Quantas variáveis são necessárias para localizar o corpo da Fig. 11-2 em relação ao referencial  $xOy$ , mostrado nesta figura? Se a resposta não for seis, explique o motivo da diferença.
2. Um corpo irregular pode girar livremente em torno do seu centro de massa, o qual é colocado na origem de um referencial. Como você especificaria sua orientação?
3. Poderiam as grandezas angulares  $\theta$ ,  $\omega$  e  $\alpha$  ser expressas em graus, em vez de em radianos, nas equações cinemáticas?
4. Explique por quê a medida de um ângulo em radianos é igualmente satisfatória em todos os sistemas de unidades. Isto é verdadeiro para a medida em graus?
5. Se o velocímetro de um carro tiver sido ajustado para marcar uma velocidade proporcional à velocidade angular de suas rodas traseiras, será necessário corrigir o ajuste quando se substitui pneus regulares por pneus maiores?
6. Como você expressaria, de maneira simples, a relação entre os vetores velocidades angulares de um par de engrenagens que estão acopladas?
7. Uma roda gira em torno de um eixo que passa por seu centro e é perpendicular ao plano da roda. Considere um ponto da periferia. Se a roda gira com *velocidade angular constante*, o ponto terá aceleração radial? Terá aceleração tangencial? Se a roda gira com *aceleração angular constante*, o ponto terá aceleração radial? Terá aceleração tangencial? Os módulos destas acelerações sofrem variações?
8. Suponha que lhe tenha sido pedido para determinar a distância equivalente percorrida por uma agulha de eletrola ao tocar, digamos, um disco de 30 cm,  $33\frac{1}{2}$  rotações por minuto (r.p.m.). De que informações você necessitaria? Discuta do ponto de vista dos referenciais, (a) fixo na sala, (b) fixo no disco em rotação, (c) fixo no braço do toca-discos.
9. (a) Descreva o vetor que representaria a velocidade angular da Terra ao girar em torno de seu eixo. (b) Descreva o vetor que representaria a velocidade angular da Terra girando em torno do Sol.
10. É conveniente representar os vetores que descrevem uma rotação, por flechas ao longo do eixo de rotação. Haveria algum motivo pelo qual eles não pudessem ser aplicados em outro ponto qualquer, conservando-se paralelos ao eixo? Lembre-se de que podemos deslizar um vetor deslocamento ao longo de sua própria direção ou transladá-lo paralelamente a si mesmo, sem alterar o seu valor.
11. Em uma centrifugadora, as partículas tendem a se separar do fluido no qual elas estão suspensas, se sua densidade (massa/volume) diferir da densidade do fluido. Discuta os princípios dinâmicos em que se baseia a operação de uma centrifugadora. Considere a situação em relação a um sistema inercial (laboratório) e em relação a um sistema não-inercial (em rotação).
- 12.<sup>2</sup> Um atirador, localizado no centro de um carrossel, aponta para um alvo fixado em uma pilastra na borda do carrossel. Se ele deseja atingir o alvo, como deverá proceder, levando em consideração a velocidade angular (constante) do carrossel? E se as posições do atirador e do alvo se invertem?
- 13.<sup>2</sup> Um homem, em um carrossel que gira com velocidade angular constante,  $\omega$ , abandona um pedaço de gelo que ele mantinha fixo no carrossel, à distância  $r_0$  do centro. Descreva o movimento do gelo em relação ao referencial (a) de um observador no solo e (b) do homem no carrossel. Despreze as forças de atrito, mas descreva todas as outras forças.
- 14.<sup>2</sup> Um homem, sobre um carrossel em rotação, chuta um pedaço de gelo radialmente para fora. Qual é o seu movimento subsequente, visto por um obser-

<sup>2</sup> Veja o Tópico Suplementar I.

vador (a) no carrossel e (b) no solo? Suponha que as forças de atrito são desprezíveis.

SEÇÃO 11-2

1. Calcule o comprimento de um arco de uma circunferência de raio  $R = 0,5$  m, sabendo que o arco abrange um ângulo, em radianos, igual a  $\pi/16$ . Uma partícula percorre este arco com uma velocidade angular constante num intervalo de tempo de 0,3 s; qual é sua velocidade angular?
2. Para o ponteiro dos segundos de um relógio, calcule: (a) a frequência angular, (b) a velocidade angular. (c) Qual é a velocidade angular do ponteiro dos minutos?  
Resposta: (a) 1 r.p.m. (ou  $0,017 \text{ s}^{-1}$ ). (b)  $0,10 \text{ rad/s}$ . (c)  $1,7 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$ .
3. Um disco gira em uma eletrola a 33 r.p.m. Qual a velocidade linear de um ponto do disco sob a agulha (a) no começo e (b) no fim do disco? Nestas duas posições, as distâncias da agulha ao eixo de rotação são 15 cm e 7 cm, respectivamente.
4. Um método de medida da velocidade da luz utiliza uma roda dentada em rotação. Um feixe de luz passa por uma das fendas na borda da roda, como se pode ver na Fig. 11-12, propaga-se até um espelho distante e retorna à roda exatamente a tempo de passar pela fenda seguinte. A roda tem 5,0 cm de raio e 500 dentes na periferia. As medidas tomadas quando o espelho estava a 500 m de distância da roda, forneceram para a luz a velocidade de  $3,0 \times 10^8 \text{ km/s}$ . (a) Qual foi a velocidade angular (constante) da roda? (b) Qual foi a velocidade linear de um ponto na sua periferia?  
Resposta: (a)  $3,8 \times 10^3 \text{ rad/s}$ . (b)  $190 \text{ m/s}$ .

# problemas

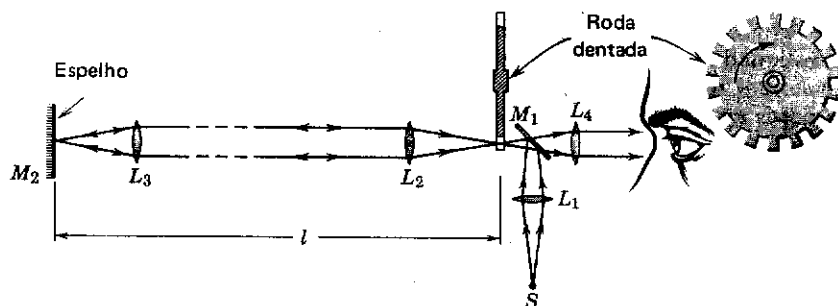


figura 11-12

5. A hélice de um avião tem raio de 1,3 m e gira a 2 500 r.p.m., enquanto o avião se desloca com uma velocidade de 480 km/h em relação ao solo. Calcule a velocidade de um ponto da extremidade da hélice, quando ela for medida (a) pelo piloto e (b) por um observador situado no solo.
6. Uma partícula se move ao longo de uma circunferência. Num dado instante ela está num ponto  $\theta_1 = \pi/24$ . Depois de 0,25 s a partícula passa para um ponto  $\theta_2 = \pi/12$ . Calcule a velocidade angular média da partícula.  
Resposta:  $(\pi/6) \text{ rad/s}$ .
7. A velocidade angular de uma partícula, em rad/s, é dada por:  $\omega = kt$ , onde  $t$  é dado em segundos e  $k = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$ . No instante inicial a partícula está passando pelo eixo  $Ox$  ( $\theta = 0$ ). Calcule o ângulo em que a partícula se encontra no instante  $t = 1$  s.
8. O deslocamento angular de um ponto na borda de uma roda é dado por:

$$\theta = 5t - t^2 - t^3 + t^4,$$

onde todas as unidades são expressas no sistema MKS. (a) Obtenha a expressão da velocidade angular em função do tempo  $t$ . (b) Calcule a aceleração angular média para o intervalo de tempo compreendido entre  $t = 1$  e  $t = 3$  s.

Resposta: (a)  $\omega = 5 - 2t - 3t^2 + 4t^3$ . (b)  $38 \text{ rad/s}^2$ .

9. Durante um intervalo de tempo  $t$ , o volante de um gerador gira de um ângulo  $\theta$ , dado por

$$\theta = at + bt^3 - ct^4,$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes. Qual é a expressão para sua aceleração angular?

10. Uma roda gira com aceleração angular,  $\alpha$ , dada por

$$\alpha = 4at^3 - 3bt^2,$$

onde  $t$  é o tempo e  $a$  e  $b$  são constantes. Se a roda tem uma velocidade angular inicial  $\omega_0$ , escreva as equações para (a) a velocidade angular e (b) o ângulo descrito, em função do tempo.

Resposta: (a)  $\omega_0 + at^4 - bt^3$ . (b)  $\theta_0 + \omega_0 t + at^5/5 - bt^4/4$ .

11. Um planeta,  $P$ , e a Terra,  $T$ , giram em órbitas supostas circulares, coplanares e concêntricas em torno do Sol,  $S$ , que se encontra no centro dos círculos.  $P$  e  $T$  giram na mesma direção. Os tempos necessários para as revoluções de  $P$  e  $T$  em torno do Sol são  $T_P$  e  $T_T$ . Seja  $T_S$  o tempo necessário para fazer, em relação a  $T$ , uma revolução em torno do Sol. Mostre que  $1/T_S = 1/T_T - 1/T_P$ . Suponha  $T_P > T_T$ .
12. Um dia solar é o intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas do Sol por um determinado meridiano, isto é, o tempo de uma revolução completa da Terra em relação ao Sol. Um dia sideral é o tempo de uma revolução completa da Terra em relação às estrelas fixas, isto é, o intervalo de tempo, entre duas observações sucessivas feitas olhando-se diretamente para cima, de uma direção fixa nos céus, chamada de equinócio vernal. (a) Mostre que existe exatamente um dia solar médio a menos num ano que dias siderais médios no mesmo intervalo de tempo. (b) Se o dia solar médio tem exatamente 24 horas, quantas horas há em um dia sideral médio?

Resposta: (b) 23 h 56 min.

### SEÇÃO 11-3

13. A frequência angular do motor de um automóvel aumenta de 1 000 r.p.m. para 3 500 r.p.m. em 18 s. (a) Calcule a aceleração angular supondo que ela seja uniforme. (b) Quantas rotações completas efetua o motor durante este período?
14. Um prato de eletrola, girando a 33 r.p.m., perde velocidade e pára 15 segundos depois que o motor é desligado. Suponha que a rotação seja uniformemente desacelerada. (a) Calcule a aceleração angular. (b) Determine o número completo de rotações que o prato realiza até parar.  
Resposta: (a)  $-0,23 \text{ rad/s}^2$ . (b) 4.
15. Um volante pesado, girando em torno de seu eixo, perde velocidade devido ao atrito nos mancais. Ao final do primeiro minuto, sua velocidade angular é 0,90 de sua velocidade angular inicial,  $\omega_0$ . Supondo constantes as forças de atrito, determine a velocidade angular do volante no final do segundo minuto.
16. Uma roda ligada a um motor gira com frequência angular de 240 r.p.m. A partir deste momento o motor pára de funcionar e a roda passa a girar com velocidade angular uniformemente decrescente, até parar. Seis segundos depois de o motor parar, a roda possui uma frequência angular de 180 r.p.m. Calcule o tempo total que a roda leva até parar.  
Resposta: 24 s.
17. Uma roda possui aceleração constante de  $4,0 \text{ rad/s}^2$ . No intervalo de 5,0 s ela gira de um ângulo igual a 230 radianos. Supondo que a roda partiu do repouso, calcule o intervalo de tempo em que ela esteve em movimento antes do início do intervalo de 5,0 segundos.
18. Um disco homogêneo gira em torno de um eixo fixo, partindo do repouso e acelerando com uma aceleração constante. Num dado instante, ele gira com uma frequência angular de 10 r.p.s. Após executar mais 65 revoluções completas, sua frequência angular passa para 18 r.p.s. Determine: (a) a aceleração angular, (b) o tempo necessário para completar as 65 rotações mencionadas, (c) o tempo necessário para atingir a frequência angular de 10 r.p.s. e (d) o número de rotações no intervalo de tempo que vai do repouso até o momento em que o disco atinge a frequência angular de 10 r.p.s.  
Resposta: (a)  $10,8 \text{ rad/s}^2$ . (b) 4,6 s. (c) 5,8 s. (d) 29.
19. Um volante completa 45 rotações quando diminui sua velocidade angular de  $2,0 \text{ rad/s}$  até zero. Supondo uma desaceleração angular constante, determine: (a) o tempo necessário para que o volante atinja o repouso, (b) a aceleração angular, (c) o tempo necessário para completar as 30 rotações finais.
20. Um automóvel se desloca com velocidade de 120 km/h. Cada roda do automóvel possui um diâmetro de 90 cm. (a) Calcule a velocidade angular da roda do automóvel em torno do seu eixo. (b) Ache a desaceleração angular se o carro parar depois de 40 rotações da roda. (c) Calcule a distância percorrida pelo centro de massa do carro depois que ele começa a frear.  
Resposta: (a)  $74 \text{ rad/s}$ . (b)  $-10,9 \text{ rad/s}^2$ . (c) 113 m.
21. Um corpo move-se no plano  $xOy$ , de tal modo que  $x = R \cos \omega t$  e  $y = R \sin \omega t$ . Nestas equações,  $x$  e  $y$  representam as coordenadas do corpo,  $t$  é o tempo e  $R$  e  $\omega$  são constantes. (a) Elimine  $t$  entre essas equações para determinar a equação da curva que o corpo descreve. Qual é esta curva? Qual é o significado da constante  $\omega$ ? (b) Derive, em relação ao tempo, as equações para  $x$  e  $y$ , a fim de obter os componentes  $v_x$  e  $v_y$  da

velocidade do corpo. Combine  $v_x$  e  $v_y$  para obter o módulo e a direção de  $v$ . Descreva o movimento do corpo. (c) Derive  $v_x$  e  $v_y$ , em relação ao tempo, para obter o módulo e a direção da aceleração resultante.

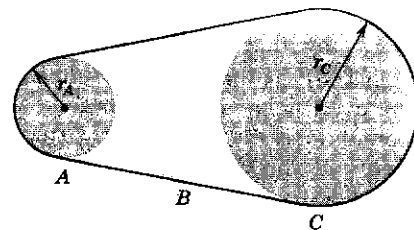


figura 11-13

22. A roda A, de raio  $r_A = 10$  cm, é acoplada por uma correia, B, à roda C, de raio  $r_C = 25$  cm, como mostra a Fig. 11-13. A roda A desenvolve, a partir do repouso, uma velocidade angular à taxa uniforme de  $\pi/2$  rad/s<sup>2</sup>. Determine o tempo para a roda C atingir a velocidade angular de 100 r.p.m., supondo que a correia não deslize.

Resposta: 17 s.

## SEÇÃO 11-5

23. (a) Qual é a velocidade angular, em torno do eixo polar, de um ponto da superfície da Terra a  $45^\circ$  de latitude norte? (b) Qual é a sua velocidade linear? (c) Como estes resultados se comparam com os valores correspondentes para um ponto no equador?
24. A órbita da Terra em torno do Sol é quase circular. (a) Qual é a velocidade angular da Terra (considerada como partícula) em torno do Sol e (b) sua velocidade linear média na órbita? (c) Qual é a aceleração da Terra em relação ao Sol?  
Resposta: (a)  $2,0 \times 10^{-7}$  rad/s. (b)  $3,0 \times 10^4$  m/s. (c)  $6,0 \times 10^{-3}$  m/s<sup>2</sup>.
25. Calcule a velocidade angular do centro de massa de um automóvel que se desloca a 60 km/h numa pista circular de 135 m de raio.
26. Calcule a aceleração de um ponto na extremidade de uma hélice de raio igual a 1,5 m, quando a hélice gira a 1 500 r.p.m.  
Resposta:  $3,7 \times 10^4$  m/s<sup>2</sup>.
27. Calcule a razão  $a_R/a_T$ , onde  $a_R$  é a aceleração centrípeta de um ponto associado ao equador da Terra e  $a_T$  é a aceleração centrípeta associada ao centro da Terra em seu movimento de rotação em torno do Sol. Suponha que a órbita da Terra seja circular e que o raio do equador terrestre seja igual a 6 400 km. Considere o período de rotação da Terra em torno do eixo como sendo o dia sideral médio (ver o Probl. 12). Considere o período de rotação em torno do Sol como sendo o ano solar médio.
28. O volante de uma máquina a vapor desenvolve uma aceleração angular nula e uma aceleração centrípeta constante ao longo da sua periferia. A frequência angular é constante e igual a 200 r.p.m. Quando o motor é desligado, o atrito nos mancais e a resistência do ar fazem com que a roda pare em 0,55 h. (a) Calcule a aceleração angular média da roda depois que o motor é desligado. (b) Ache a aceleração centrípeta inicial na periferia do volante, sabendo que o seu raio vale  $R = 1,2$  m. (c) Encontre a aceleração centrípeta de uma partícula situada a uma distância  $R/2$  do centro da roda. (d) Obtenha a aceleração linear tangencial da mesma partícula mencionada no item anterior. Suponha no item (c) e no item (d) que a velocidade angular da roda seja igual a 10 rad/s. (e) Encontre a aceleração linear total da referida partícula.  
Resposta: (a)  $-1,06 \times 10^{-2}$  rad/s<sup>2</sup>. (b) 526 m/s<sup>2</sup>. (c) 60 m/s<sup>2</sup>.  
(d)  $-6,36 \times 10^{-3}$  m/s<sup>2</sup>. (e) 60 m/s<sup>2</sup>.
29. Um corpo rígido, partindo do repouso, gira em torno de um eixo fixo com aceleração angular constante,  $\alpha$ . Considere uma partícula a uma distância  $r$  do eixo. Expresse (a) a aceleração radial e (b) a aceleração tangencial desta partícula do corpo em termos de  $\alpha$ ,  $r$  e do tempo  $t$ . (c) Se a aceleração resultante da partícula em um certo instante forma um ângulo de  $60^\circ$  com a aceleração tangencial, determine o ângulo total descrito pelo corpo até aquele instante.

## SEÇÃO 11-6

30. Derivando a Eq. 11-19, deduza a Eq. 11-20.
- 31.<sup>3</sup> Um inseto, cuja massa é de  $8,0 \times 10^{-2}$  g, desloca-se radialmente para fora, com velocidade constante de 1,6 cm/s, ao longo de uma linha traçada no prato de uma eletrola, que gira à velocidade angular constante de  $33\frac{1}{3}$  r.p.m. Determine: (a) a velocidade e (b) a aceleração do inseto em relação a um observador na sala, no instante em que o inseto está a 12 cm do eixo de rotação. (c) Qual deve ser o coeficiente de atrito mínimo para que o inseto possa se deslocar até a extremidade do prato (raio = 16 cm) sem deslizar?
- 32.<sup>3</sup> Um pequeno vírus, massa  $1,0 \times 10^{-7}$  g, em solução no interior de uma centrifugadora, está, em um certo instante, a uma distância de 6,5 cm do eixo de rotação, e desloca-se radialmente, para fora, com velocidade aproximadamente constante de cerca de 2,0 mm/s. A centrifugadora está girando a 55 000 r.p.m. Discuta quantitativamente o movimento, determinando o módulo de todas as forças e acelerações em relação a um referencial (a) girando com a centrifugadora e (b) fixo no laboratório.

<sup>3</sup> Veja o Tópico Suplementar I.

# 12

## *dinâmica*

### *da rotação-1*

No Cap. 11 tratamos da cinemática da rotação. Neste capítulo, seguindo o modelo de nosso estudo do movimento de translação, estudaremos as causas da rotação, isto é, estudaremos a *dinâmica da rotação*. Os sistemas em rotação são constituídos de partículas e já sabemos como aplicar as leis da Mecânica Clássica ao movimento de partículas. Por isto, a dinâmica da rotação não nos apresentará aspectos que sejam fundamentalmente novos. Do mesmo modo, a cinemática da rotação não nos apresentou novos fatos básicos, estando os parâmetros da rotação —  $\theta$ ,  $\omega$  e  $\alpha$  — relacionados aos correspondentes parâmetros da translação —  $x$ ,  $v$  e  $a$  — das partículas que constituem o sistema em rotação. Entretanto, como no Cap. 11, será de grande utilidade reformular os conceitos do movimento de translação sob novo aspecto, especialmente escolhido por sua conveniência na descrição de sistemas em rotação.

No Cap. 11, restringimos nossos estudos de cinemática a um único e importante caso particular: a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo no referencial em que fazemos nossas medidas. Ao estudarmos a dinâmica de rotação, partiremos de um ponto de vista mais fundamental, a saber, o de uma única partícula observada de um referencial inercial. Mais tarde, generalizaremos para o caso de sistemas de partículas, incluindo o caso particular de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo. No Cap. 13 trataremos da rotação de corpos rígidos em torno de eixos que *não* são fixos em um referencial inercial.

12-1

INTRODUÇÃO

No movimento de translação, associamos uma *força* com a *aceleração linear* de um corpo. No movimento de rotação, que grandeza associaremos com a *aceleração angular* de um corpo? Não pode ser simplesmente uma força, porque, como nos mostra a experiência com uma porta pesada, uma dada força (vetor) pode produzir diferentes acelerações angulares da porta, dependendo do ponto em que a força é aplicada e de sua orientação; uma força aplicada à linha das dobradiças não produz aceleração angular, enquanto que uma força, de determinado valor, produzirá uma aceleração máxima se for aplicada perpendicularmente à porta em sua extremidade exterior.

Denominaremos *torque* ou *momento de uma força* ao análogo rotacional da força e o definiremos, por enquanto, para o caso especial de uma única partícula, observada de um referencial inercial. Posteriormente, estenderemos o conceito de torque a sistemas de partículas (inclusive corpos rígidos) e mostraremos que tal conceito está intimamente relacionado com a aceleração angular.

Se uma força  $F$  atua em uma única partícula, situada em um ponto  $P$ , e cuja posição em relação à origem  $O$  de um referencial inercial é dada pelo vetor  $r$  (Fig. 12-1), o *torque* ou o *momento da força*  $\tau$  que atua na partícula em relação à origem  $O$ , é definido como

$$\tau = r \times F. \quad (12-1)$$

O torque é uma grandeza vetorial, cujo módulo é dado pela relação

$$\tau = rF \sin \theta, \quad (12-2a)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $r$  e  $F$ ; sua direção é normal ao plano determinado por  $r$  e  $F$ . O sentido é dado pela regra da mão direita para o produto vetorial de dois vetores, isto é, com os dedos da mão direita curvados, giramos  $r$  para  $F$  ao longo do menor ângulo entre eles; o polegar estendido apontará no sentido de  $\tau$ .

O torque tem as dimensões do produto força  $\times$  distância ou, em termos de nossas dimensões supostas fundamentais,  $M$ ,  $L$  e  $T$ , têm dimensões  $ML^2T^{-2}$ . Estas são as mesmas dimensões de trabalho. Entretanto, torque e trabalho são grandezas físicas bem diferentes. Por exemplo, o torque é um vetor e trabalho é um escalar. A unidade de torque pode ser metro-Newton (símbolo: mN) ou pé-libra (ft-lb), dentre outras possibilidades.

Observe (Eq. 12-1) que o torque depende não só do módulo e da direção da força mas, também, da posição de seu ponto de aplicação em relação à origem, isto é, do vetor  $r$ . Em particular, quando a partícula  $P$  está situada na origem e, então, a linha de ação de  $F$  passa por este ponto,  $r$  é zero e o torque  $\tau$ , em relação à origem, é nulo.

Podemos, também, expressar o módulo de  $\tau$  (Eq. 12-2a) como

$$\tau = (r \sin \theta) F = Fr_{\perp} \quad (12-2b)$$

ou como

$$\tau = r(F \sin \theta) = rF_{\perp}, \quad (12-2c)$$

em que, como se mostra na Fig. 12-2a,  $r_{\perp} (= r \sin \theta)$  é o componente de  $r$  perpendicular à linha de ação de  $F$ , e  $F_{\perp} (= F \sin \theta)$  é o componente de  $F$  perpendicular a  $r$ . A distância  $r_{\perp}$  da força ao eixo

## 12-2

### TORQUE SOBRE UMA PARTÍCULA

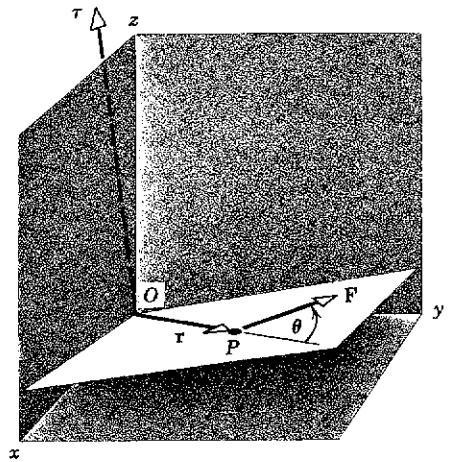
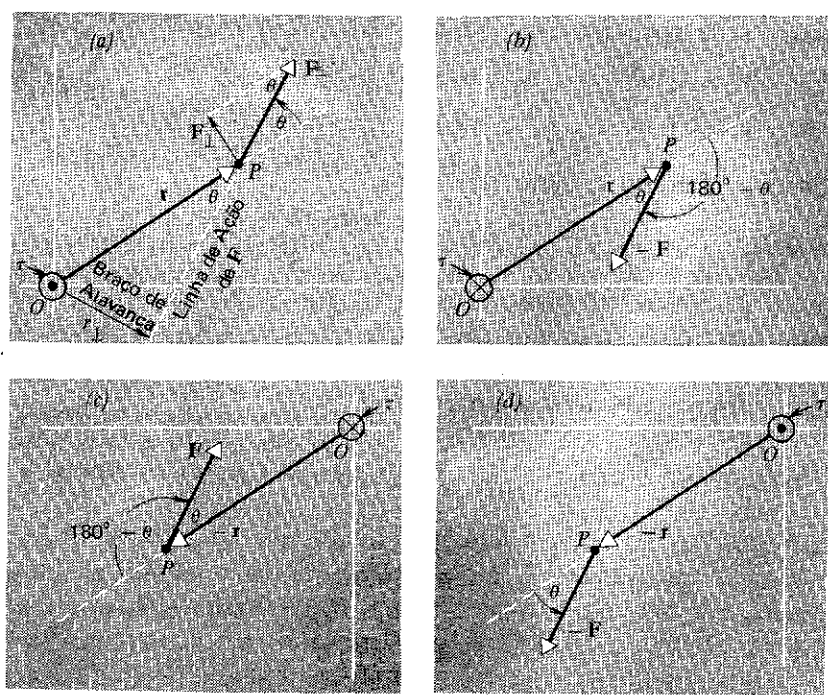


figura 12-1

Uma força  $F$  é aplicada a uma partícula  $P$ , cujo vetor posição é  $r$ , em relação à origem  $O$ . O vetor força forma um ângulo  $\theta$  com o vetor  $r$ . Mostra-se o torque  $\tau$  em relação a  $O$ . Sua direção é perpendicular ao plano determinado por  $r$  e  $F$  e o seu sentido é dado pela regra da mão direita.

é freqüentemente denominada *braço de alavanca*. A Eq. 12-2c mostra que apenas o componente de  $F$  perpendicular a  $r$  contribui para o torque. Em particular, quando  $\theta$  é igual a  $0^\circ$  ou  $180^\circ$  esta componente perpendicular não existe ( $F_{\perp} = F \sin \theta = 0$ ); então, a linha de ação da força passa pela origem e o braço de alavanca  $r_{\perp}$ , em relação à origem, é nulo também. Neste caso, tanto a Eq. 12-2b quanto a Eq. 12-2c mostram que o torque é nulo.



**figura 12-2**  
 O plano mostrado é aquele definido por  $r$  e  $F$  na Fig. 12-1. (a) O módulo de  $\tau$  é dado por  $F r_{\perp}$  (Eq. 12-2b) ou por  $r F_{\perp}$  (Eq. 12-2c). (b) Invertendo  $F$ , inverte-se o sentido de  $\tau$ . (c) Invertendo  $r$ , inverte-se o sentido de  $\tau$ . (d) Invertendo  $F$  e  $r$ , deixa-se inalterado o sentido de  $\tau$ . Os sentidos de  $\tau$  estão representados por  $\odot$  (perpendicularmente à figura e saindo da página; este símbolo representa a ponta de uma flecha) e por  $\otimes$  (perpendicularmente à figura e entrando na página; este símbolo representa a extremidade posterior de uma flecha).

Se, como na Fig. 12-2b, invertermos o sentido de  $F$ , o módulo de  $\tau$  permanece invariável, mas o seu sentido se inverte. Do mesmo modo, se, como mostra a Fig. 12-2c, invertermos  $r$ , mudando, portanto, o ponto de aplicação de  $F$ , o módulo de  $\tau$  continua o mesmo, mas o seu sentido inverte-se novamente.

Invertendo, como na Fig. 12-2d, tanto  $r$  quanto  $F$ , então o módulo e o sentido de  $\tau$  permanecem invariáveis. Estes resultados decorrem formalmente dos seguintes fatos: (1)  $\sin \theta = \sin(180^\circ - \theta)$ , de modo que a Eq. 12-2a, que fornece o módulo de  $\tau$ , não se altera; (2) invertendo-se o sentido de *um* dos vetores em um produto vetorial (ou  $r$ , ou  $F$ ) teremos a inversão no sentido do produto; e (3) invertendo-se os sentidos de *ambos* os vetores no produto vetorial (tanto  $r$  quanto  $F$ ), permanece invariável o sentido do produto. O estudante deverá verificar os sentidos de  $\tau$ , mostrados na Fig. 12-2, usando a regra da mão direita.

Verificamos que o momento linear é útil para o estudo do movimento de translação de uma partícula ou de um sistema de partículas (incluindo corpos rígidos). Por exemplo, o momento conserva-se durante as colisões. Para uma partícula, o momento é  $p = mv$  (Eq. 9-11); para um sistema de partículas e dado por  $P = M v_{cm}$  (Eq. 9-15), onde  $M$  é a massa total do sistema e  $v_{cm}$  é a velocidade do seu centro de massa. No movimento de rotação, qual será o análogo do momento linear? Nós o denominaremos

**12-3**  
**MOMENTO ANGULAR DE**  
**UMA PARTÍCULA**



momento angular e o definiremos, a seguir, para o caso especial de uma só partícula. Mais tarde, ampliaremos a definição para incluir sistemas de partículas e mostraremos que o momento angular, da maneira como o definiremos, é um conceito tão útil no estudo do movimento de rotação quanto o momento linear o é para o movimento de translação.

Consideremos uma partícula de massa  $m$  e momento  $\mathbf{p}$ , em uma posição  $\mathbf{r}$  relativa à origem  $O$  de um referencial inercial (Fig. 12-3). Definimos o *momento angular*  $\mathbf{l}$  da partícula, em relação à origem  $O$ , como sendo

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (12-3)$$

O momento angular é um vetor cujo módulo é dado por

$$l = rp \sin \theta, \quad (12-4a)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$ ; sua direção é normal ao plano determinado por  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$ . O sentido é dado pela regra da mão direita, isto é, com os dedos da mão direita curvados, giramos  $\mathbf{r}$  para  $\mathbf{p}$  através do menor ângulo entre eles; o polegar direito estendido apontará no sentido de  $\mathbf{l}$ .

Podemos, também, expressar o módulo de  $\mathbf{l}$  como

$$l = (r \sin \theta) p = pr_{\perp}, \quad (12-4b)$$

ou como

$$l = r(p \sin \theta) = rp_{\perp}, \quad (12-4c)$$

em que  $r_{\perp} (= r \sin \theta)$  é o componente de  $\mathbf{r}$  perpendicular à linha de ação de  $\mathbf{p}$ , e  $p_{\perp} (= p \sin \theta)$  é o componente de  $\mathbf{p}$  perpendicular a  $\mathbf{r}$ . O momento angular é denominado, às vezes, *momento do momento linear* ou *momento da quantidade de movimento*; a distância  $r_{\perp}$  da Eq. 12-4b é denominada, também aqui, *braço de alavanca*. A Eq. 12-4c mostra que apenas o componente de  $\mathbf{p}$  perpendicular a  $\mathbf{r}$  contribui para o momento angular. Quando o ângulo  $\theta$  entre  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$  é  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ , este componente é nulo ( $p_{\perp} = p \sin \theta = 0$ ); então, a linha de ação de  $\mathbf{p}$  passa pela origem e  $r_{\perp}$  é nulo também. Neste caso, as Eqs. 12-4b e 12-4c mostram que o momento angular,  $l$ , é nulo.

Deduziremos, agora, uma relação importante entre o momento de uma força e o momento angular. Vimos que, para uma partícula, tem-se  $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt = d\mathbf{p}/dt$ . Multipliquemos vetorialmente por  $\mathbf{r}$  os dois membros desta equação, obtendo

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Mas  $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$  é o momento da força  $\mathbf{F}$  em relação a  $O$ . Podemos, então, escrever

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (12-5)$$

Em seguida, derivamos a Eq. 12-3 e obtemos

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}).$$

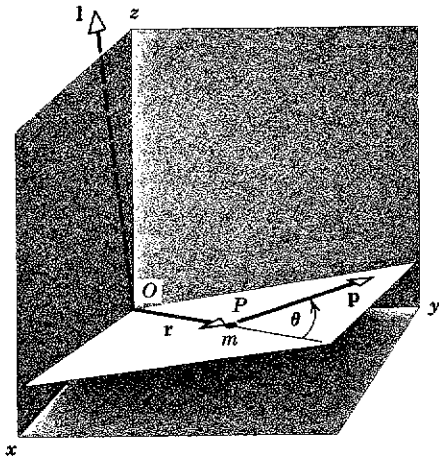


figura 12-3

Uma partícula de massa  $m$ , no ponto  $P$ , na posição  $\mathbf{r}$  em relação à origem, tem um momento linear  $\mathbf{p}$ . O vetor  $\mathbf{p}$  forma um ângulo  $\theta$  com o vetor  $\mathbf{r}$ . Mostra-se o momento angular  $\mathbf{l}$  da partícula em relação à origem  $O$ . Sua direção é perpendicular ao plano determinado por  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$  e seu sentido é dado pela regra da mão direita.

Mas a derivada de um produto vetorial é calculada da mesma maneira que a derivada de um produto comum, exceto que não podemos alterar a ordem dos fatores. Teremos

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Mas  $d\mathbf{r}$  é o vetor deslocamento da partícula durante o tempo  $dt$  de modo que  $d\mathbf{r}/dt$  é a velocidade instantânea,  $\mathbf{v}$ , da partícula. Além disso,  $\mathbf{p}$  é igual a  $m\mathbf{v}$  e, então, a equação pode ser reescrita como

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = (\mathbf{v} \times m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Ora,  $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$ , porque o produto vetorial de dois vetores paralelos é nulo. Portanto,

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{12-6}$$

Comparando as Eqs. 12-5 e 12-6, vemos que

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt, \tag{12-7}$$

da qual concluímos que a taxa de variação no tempo do momento angular de uma partícula é igual ao torque que nela atua. Este resultado é o análogo, para o movimento de rotação, da Eq. 9-12, a qual estabelece que a taxa de variação no tempo do momento de uma partícula é igual à força que atua sobre ela, isto é,  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ .

A Eq. 12-7, como todas as equações vetoriais, é equivalente a três equações escalares, ou seja,

$$\tau_x = (dl_x/dt)_x, \quad \tau_y = (dl_y/dt)_y, \quad \tau_z = (dl_z/dt)_z. \tag{12-8}$$

Portanto, o componente segundo  $Ox$  do torque aplicado é dado pelo componente, segundo  $Ox$ , da derivada em relação ao tempo do momento angular. Resultados semelhantes são válidos para as direções  $Oy$  e  $Oz$ .

Uma partícula de massa  $m$ , partindo do repouso, cai do ponto  $a$  (Fig. 12-4), paralelamente ao eixo (vertical)  $Oy$ . (a) Calcular o momento da força que atua sobre  $m$ , em relação à origem  $O$ , em um instante  $t$  qualquer. (b) Calcular o momento angular de  $m$  em um instante  $t$  qualquer, em relação à mesma origem. (c) Mostrar que a relação  $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$  (Eq. 12-7) conduz a um resultado correto quando aplicada a este conhecido problema.

(a) O torque é dado pela Eq. 12-1, isto é,  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  e seu módulo vale

$$\tau = rF \sin \theta.$$

Neste exemplo,  $r \sin \theta = b$  e  $F = mg$ , de modo que

$$\tau = mgb = \text{constante.}$$

Observe-se que o torque é simplesmente o produto da força ( $mg$ ) pelo braço de alavanca  $b$ . A regra da mão direita nos mostra que  $\boldsymbol{\tau}$  está orientado perpendicularmente para dentro da figura.

(b) O momento angular é dado pela Eq. 12-3, isto é,  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , e seu módulo é

$$l = rp \sin \theta.$$

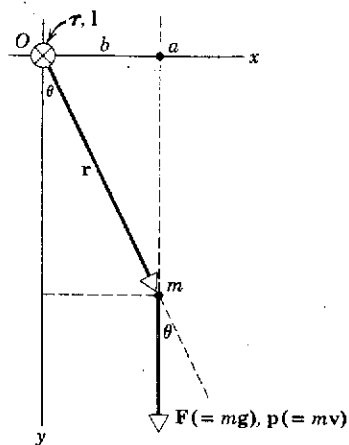


figura 12-4  
Uma partícula de massa  $m$  cai verticalmente a partir do ponto  $a$ . O torque e o momento angular, em relação a  $O$ , estão dirigidos perpendicularmente para dentro da figura, como se indica pelo símbolo  $\otimes$  em  $O$ .

### EXEMPLO 1

Neste exemplo,  $r \sin \theta = b$  e  $p = mv = m(gt)$ , de modo que

$$l = mgbt.$$

A regra da mão direita nos mostra que  $\mathbf{l}$  está orientado perpendicularmente ao plano da figura do leitor para o papel, o que significa que  $\mathbf{l}$  e  $\boldsymbol{\tau}$  são vetores paralelos. Apenas o módulo do vetor  $\mathbf{l}$  varia com o tempo, permanecendo fixa a sua direção, neste caso.

(c) Como  $d\mathbf{l}$  (a variação em  $\mathbf{l}$ ) e  $\boldsymbol{\tau}$  são paralelos, podemos substituir a relação vetorial  $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$  pela relação escalar

$$\tau = dl/dt.$$

Usando as expressões para  $\tau$  e  $l$ , obtidas em (a) e (b), temos

$$mgb = \frac{d}{dt} (mgbt) = mgb,$$

que é uma identidade. Assim, a relação  $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$  nos conduz a um resultado correto para este caso simples. Aliás, se cancelarmos a constante  $b$  nos dois primeiros termos acima e substituirmos  $gt$  pela grandeza equivalente,  $v$ , obtém-se

$$mg = \frac{d}{dt} (mv).$$

Como  $mg = F$  e  $mv = p$ , este é o resultado conhecido,  $F = dp/dt$ . Então, como havíamos dito antes, relações tais como  $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$ , ainda que freqüentemente sejam muito úteis, não são novos postulados básicos da Mecânica Clássica, constituindo apenas uma reformulação das leis de Newton apropriada ao movimento de rotação.

Observe-se que os valores de  $\tau$  e  $l$  dependem da escolha da origem, isto é, dependem de  $b$ . Em particular, se  $b = 0$ , então  $\tau = 0$  e  $l = 0$ .

Até aqui tratamos, apenas, do caso de uma só partícula. Consideremos, agora, um sistema de várias partículas. Para calcularmos o momento angular total,  $\mathbf{L}$ , de um sistema de partículas, em relação a um dado ponto, devemos adicionar vetorialmente os momentos angulares de todas as partículas do sistema em relação ao mesmo ponto. Para um sistema de  $n$  partículas, temos, então,

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \dots + \mathbf{l}_n = \sum_{i=1}^{i=n} \mathbf{l}_i,$$

em que a soma (vetorial) se estende a todas as partículas do sistema.

O momento angular total  $\mathbf{L}$  do sistema, em relação a um ponto de referência fixo (que escolhermos, como em nossa definição básica de  $\mathbf{l}$  da Eq. 12-3, como sendo a origem de um referencial inercial) pode variar com o tempo. Esta variação,  $d\mathbf{L}/dt$ , pode ser devida a duas causas: (1) torques exercidos nas partículas do sistema por forças internas entre elas; (2) torques exercidos nas partículas do sistema por forças externas.

Se a terceira lei de Newton for válida sob a forma denominada "forte", isto é, se as forças entre duas partículas quaisquer não apenas são iguais e opostas mas também situam-se sobre a reta que passa por elas, então a soma de todos os momentos das forças internas será nula, pois o torque devido a cada par interno de ação e reação é nulo.

Assim, a primeira causa em nada contribui. Em relação ao nosso ponto de referência apenas permanece, portanto, a segunda causa e podemos escrever

## 12-4 SISTEMAS DE PARTÍCULAS

$$\tau_{\text{ext}} = d\mathbf{L}/dt, \quad (12-9)$$

onde  $\tau_{\text{ext}}$  representa a soma de todos os torques externos que atuam no sistema. Em palavras: a derivada em relação ao tempo do momento angular total de um sistema de partículas, em relação à origem de um referencial inercial, é igual à soma dos torques externos que atuam no sistema. Mais tarde, por comodidade, deixaremos de usar o índice em  $\tau_{\text{ext}}$ , quando não houver possibilidade de enganos.

A Eq. 12-9 é a generalização, para várias partículas, da Eq. 12-7. Quando houver apenas uma partícula, não há forças ou torques internos. A Eq. 12-9 é válida quer as partículas que constituem o sistema estejam em movimento umas em relação às outras, quer elas mantenham relações espaciais fixas, como em um corpo rígido.

A Eq. 12-9 é análoga, para o movimento de rotação, à Eq. 9-17

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = d\mathbf{P}/dt, \quad (9-17)$$

a qual nos diz que, para um sistema de partículas (corpo rígido ou não) a força externa resultante que atua no sistema é igual à taxa de variação no tempo do momento do sistema.

Tal como foi deduzida, a Eq. 12-9 é válida quando  $\tau$  e  $\mathbf{L}$  são medidos em relação à origem de um referencial inercial. Poderíamos indagar se ela permanece válida se medirmos estes dois vetores em relação a um ponto arbitrário (digamos, uma determinada partícula) do sistema em movimento. Em geral, tal ponto estaria se movendo de maneira complexa enquanto o corpo ou o sistema de partículas transladasse, girasse ou mudasse sua configuração, e a Eq. 12-9 não se aplicaria a este ponto de referência. Entretanto, se o ponto de referência for escolhido no centro de massa do sistema, a Eq. 12-9 continuará válida, mesmo que este ponto não esteja fixo em nosso referencial.<sup>1</sup> Esta é outra propriedade importantíssima do centro de massa. Podemos, então, separar o movimento geral de um sistema de partículas em um movimento de translação do seu centro de massa (Eq. 9-17) e um movimento de rotação em torno do seu centro de massa (Eq. 12-9).

Concentraremos, agora, nossa atenção em um caso particular e importante de um sistema de partículas: o corpo rígido. Em um corpo rígido, as partículas do sistema mantêm sempre as mesmas posições umas em relação às outras. Ao estudarmos a rotação de um corpo rígido, consideraremos, inicialmente, o caso particular, freqüentemente encontrado, no qual o eixo de rotação permanece fixo<sup>2</sup> e em um referencial inercial. Mais tarde, examinaremos sistemas e movimentos mais gerais.

Imaginemos um corpo rígido girando com velocidade angular  $\omega$  em torno de um eixo fixo, em um certo referencial inercial, como na Fig. 11-1. Cada partícula deste corpo em rotação tem determinada

## 12-5

### ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO E MOMENTO DE INÉRCIA

<sup>1</sup> Veja o Probl. 10 deste capítulo e K. R. Symon *Mechanics*, 3.<sup>a</sup> edição. Addison-Wesley, 1972. Seção 4.2.

<sup>2</sup> Conforme foi estabelecido na Sec. 12-4, podemos separar o movimento mais geral de um sistema de partículas em um movimento de translação do seu centro de massa e um movimento de rotação em torno do centro de massa. Portanto, as considerações deste capítulo aplicam-se também a rotações em torno de um eixo que não esteja fixo em um referencial inercial, contanto que (1) o eixo passe pelo centro de massa e (2) o eixo em movimento mantenha sempre a mesma direção no espaço, isto é, o eixo, em um dado instante, seja paralelo à sua própria posição em outro instante qualquer. Embora, no que se segue, façamos referência muitas vezes a um "eixo fixo", estaremos sempre considerando incluído este caso particular do eixo em movimento.

energia cinética. Uma partícula de massa  $m$ , à distância  $r$  do eixo de rotação, descreve uma circunferência de raio  $r$ , com velocidade angular  $\omega$  em torno deste eixo e tem velocidade linear  $v = \omega r$ . Portanto, sua energia cinética será  $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$ . A energia cinética do corpo será a soma das energias cinéticas de suas partículas.

Se o corpo for rígido, como estamos supondo nesta seção,  $\omega$  tem o mesmo valor para todas as partículas; o raio  $r$  pode ser diferente para diferentes partículas. Então, a energia cinética total do corpo em rotação,  $K$ , pode ser escrita como

$$K = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \dots)\omega^2 = \frac{1}{2}(\Sigma m_i r_i^2)\omega^2.$$

O termo  $\Sigma m_i r_i^2$  é a soma dos produtos das massas das partículas pelo quadrado de suas respectivas distâncias do eixo de rotação. Se representamos esta grandeza por  $I$ , então:

$$I = \Sigma m_i r_i^2 \quad (12-10)$$

denomina-se *momento de inércia*<sup>3</sup> ou *inércia rotacional* do corpo, em relação ao eixo de rotação considerado. Observe-se que o *momento de inércia de um corpo depende do eixo em torno do qual ele está girando* e, também, da forma do corpo e da maneira como sua massa está distribuída. O momento de inércia tem as dimensões  $ML^2$ , sendo usualmente expresso em  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$  ou  $\text{g} \cdot \text{cm}^2$ .

Em termos do momento de inércia, pode-se expressar a energia cinética do corpo rígido em rotação como

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (12-11)$$

Este resultado é análogo à expressão para a energia cinética de translação de um corpo,  $K = \frac{1}{2}Mv^2$ . Já havíamos visto que a velocidade angular  $\omega$  é análoga à velocidade linear  $v$ . Estamos vendo agora que o momento de inércia, ou inércia rotacional  $I$  é análogo à massa, ou inércia de translação,  $M$ . Apesar da massa de um corpo não depender de sua localização, o momento de inércia de um corpo depende do eixo em torno do qual ele está girando.

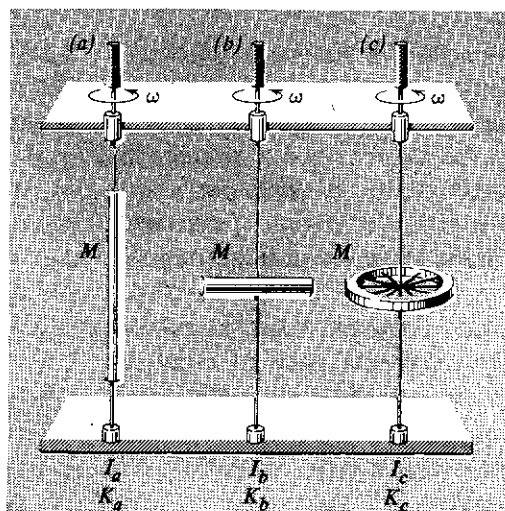


figura 12-5

Experiência para mostrar que  $I_a < I_b < I_c$ . Os três corpos de chumbo têm a mesma massa  $M$ , mas esta se distribui diferentemente em torno do eixo de rotação.

<sup>3</sup> O termo *momento de inércia* é usado amplamente para designar este segundo momento da massa, mesmo existindo o primeiro, segundo, terceiro e outros momentos de massa. O termo *inércia rotacional* parece, entretanto, mais apropriado, principalmente, porque  $I$  (inércia rotacional) desempenha o mesmo papel, conforme veremos, no movimento de rotação que  $M$  (massa ou inércia translacional) desempenha no movimento de translação.

Deve-se deixar claro que a energia cinética de rotação, dada pela Eq. 12-11, não é uma nova espécie de energia mas, simplesmente, a soma das energias cinéticas já conhecida do estudo da translação de cada parte do corpo. A equação que define a energia cinética de rotação é, simplesmente, uma maneira cômoda de expressar a energia cinética de um corpo rígido em rotação.

As Eqs. 12-10 e 12-11 mostram que a energia de rotação de um corpo, para um dado valor da velocidade angular,  $\omega$ , depende não apenas da massa do corpo mas, também, da maneira como esta massa está distribuída em volta do eixo de rotação. A experiência representada na Fig. 12-5 demonstra isto claramente. A figura mostra três eixos idênticos, de alumínio, a cada um dos quais está ligado um corpo de chumbo, de massa  $M$ . Em (a), a massa se distribui bem próxima do eixo, de modo que as quantidades  $r_i$  da Eq. 12-10, para as partículas que constituem o corpo, são relativamente pequenas; em (b), as partículas estão, em média, mais afastadas do eixo do que antes e, em (c), onde o corpo é um volante, elas estão ainda mais afastadas, correspondendo a valores ainda maiores de  $r_i$ .

Agora, giremos cada um dos sistemas até que todos os eixos, partindo do repouso, estejam em rotação com a mesma velocidade angular  $\omega$ . A experiência ensina que, no caso (a), teremos de realizar um trabalho relativamente pequeno sobre o eixo, um trabalho um pouco maior no caso (b) e um trabalho maior ainda sobre o eixo na hipótese (c). Aliás, se não soubéssemos qual corpo se encontrava ligado a cada eixo, poderíamos descobrir isto, com segurança, usando esta técnica. Como o trabalho feito sobre cada eixo é igual à energia cinética,  $\frac{1}{2}I\omega^2$ , que cada corpo adquire, o resultado experimental de que  $K_a < K_b < K_c$ , quando os eixos têm a mesma velocidade angular  $\omega$ , leva-nos à conclusão de que  $I_a < I_b < I_c$ . Este é exatamente o resultado esperado a partir da equação que define  $I$  (Eq. 12-10). Veremos, na Sec. 12 6, que, assim como a massa  $M$ , que pode denominar-se inércia da translação, é uma medida da resistência que um corpo oferece às variações de seu movimento de translação, também  $I$ , a inércia rotacional é uma medida da resistência que um corpo oferece a uma mudança em seu movimento de rotação em torno de um dado eixo.

Suponhamos um corpo constituído de duas massas esféricas, com 5,0 kg cada uma, ligadas por uma barra rígida, leve, de 1,0 m de comprimento (Fig. 12-6). Consideremos as esferas como partículas e desprezemos a massa da barra. Determinar o momento de inércia do corpo (a) em relação a um eixo perpendicular à barra e que passe pelo centro  $C$  e (b) em relação a um eixo perpendicular à barra e que passe por uma das esferas.

(a) Se o eixo for perpendicular à página e passar por  $C$ , teremos

$$I_C = \Sigma m_i r_i^2 = m_a r_a^2 + m_b r_b^2 = 5,0 \text{ kg} \cdot (0,50 \text{ m})^2 + 5,0 \text{ kg} \cdot (0,50 \text{ m})^2 = 2,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

(b) Se o eixo for perpendicular à página e passar por  $A$  ou  $B$ , temos

$$I_A = m_a r_a^2 + m_b r_b^2 = 5,0 \text{ kg} (0 \text{ m})^2 + 5,0 \text{ kg} (1,0 \text{ m})^2 = 5,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_B = m_a r_a^2 + m_b r_b^2 = 5,0 \text{ kg} (1,0 \text{ m})^2 + 5,0 \text{ kg} (0 \text{ m})^2 = 5,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Portanto, para este modelo de haltere rígido, a inércia rotacional ou momento de inércia, em relação a um eixo que passe por uma das extremidades será duas vezes maior do que em relação a um eixo que passa pelo centro.

## EXEMPLO 2



figura 12-6  
Exemplo 2. Cálculo da inércia rotacional ou momento de inércia, de um haltere.

Para um corpo não constituído de massas puntuais discretas, mas de uma distribuição contínua de massa, a soma  $I = \sum m_i r_i^2$  torna-se uma integral. Imaginemos o corpo subdividido em elementos infinitesimais, cada um de massa  $dm$ , e designemos por  $r$  a distância de um destes elementos ao eixo de rotação. Então, a inércia rotacional, ou momento de inércia, é obtida pela equação

$$I = \int r^2 dm, \quad (12-12)$$

onde a integral abrange todo o corpo. O procedimento pelo qual a soma,  $\Sigma$ , de uma distribuição discreta é substituída pela integral,  $\int$ , para uma distribuição contínua, é o mesmo discutido para o centro de massa na Seç. 9-1.

Para corpos de forma irregular, o cálculo das integrais pode se tornar muito difícil. Para corpos de forma geométrica simples, as integrais tornam-se relativamente fáceis quando um eixo de simetria é escolhido como eixo de rotação.

Ilustremos o procedimento para o caso de uma *camada cilíndrica* (ou anel) em torno do eixo do cilindro (Fig. 12-7). O elemento de massa mais conveniente é uma casca cilíndrica, infinitesimalmente delgada, de raio  $r$ , espessura  $dr$  e comprimento  $L$ . Se a densidade do material, isto é, sua massa por unidade de volume, for designada por  $\rho$ , então

$$dm = \rho dV,$$

onde  $dV$  é o volume da casca cilíndrica de massa  $dm$ . Temos

$$dV = (2\pi r dr) L,$$

de modo que

$$dm = 2\pi L \rho r dr.$$

Então, a inércia rotacional em relação ao eixo do cilindro é

$$I = \int r^2 dm = 2\pi L \int_{R_1}^{R_2} \rho r^3 dr.$$

Aqui,  $R_1$  é o raio da parede interna do cilindro e  $R_2$  é o da parede externa.

Se a densidade deste corpo não fosse uniforme, teríamos que conhecer como  $\rho$  depende de  $r$ , para que pudéssemos efetuar a integração. Suponhamos, para simplificar, que a densidade seja constante. Então

$$I = 2\pi L \rho \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi L \rho \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} = \rho \pi (R_2^2 - R_1^2) L \frac{R_2^2 + R_1^2}{2}.$$

A massa  $M$  do cilindro anular é o produto de sua densidade,  $\rho$ , por seu volume,  $\pi(R_2^2 - R_1^2)L$ , ou seja,

$$M = \rho \pi (R_2^2 - R_1^2) L.$$

Portanto, a inércia rotacional da *camada cilíndrica* (ou anel) de massa  $M$ , raio interno  $R_1$  e raio externo  $R_2$  é

$$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2),$$

em relação ao eixo do cilindro.

Se o raio interno é nulo,  $R_1$  é igual a zero, e temos um cilindro maciço (ou disco). Neste caso

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

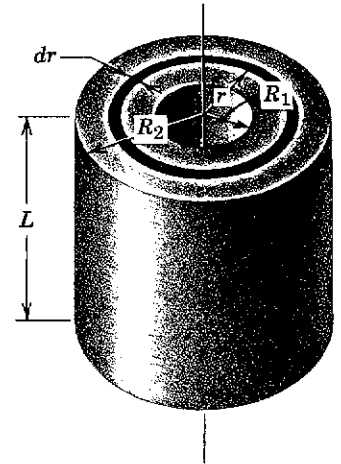


figura 12-7  
Cálculo do momento de inércia de uma camada cilíndrica.

em relação ao eixo do cilindro, onde  $R$  é o raio do cilindro maciço de massa  $M$ .

Um aro pode ser considerado como um cilindro oco de parede muito fina. Para este caso,

$$R_1 \cong R_2 \cong R,$$

e

$$I = MR^2$$

é a inércia rotacional de um aro de massa  $M$  e raio  $R$  em relação ao eixo do cilindro.

O resultado obtido para um aro é evidente, pois todos os elementos de massa do aro estão à mesma distância  $R$  do eixo central. Um cilindro maciço (ou disco), que tenha a mesma massa que o aro, terá um momento de inércia menor do que o do aro, porque a maior parte do cilindro (ou disco) encontra-se a uma distância do eixo menor do que  $R$ .

Os momentos de inércia de alguns sólidos comuns (de densidades uniformes), em relação a determinados eixos, estão relacionados na Tab. 12-1. Cada um destes resultados pode ser obtido, por integração, de modo semelhante ao do nosso exemplo. Em cada equação,  $M$  designa a massa total do corpo.

Existe uma relação simples e muito útil entre a inércia rotacional  $I$  de um corpo, em relação a um eixo qualquer, e seu momento de inércia  $I_{cm}$  em relação a um eixo, paralelo ao primeiro, que passe pelo centro de massa. Sendo  $M$  a massa total do corpo e  $h$  a distância entre os dois eixos, a relação é

$$I = I_{cm} + Mh^2. \tag{12-13}$$

A demonstração desta relação (teorema dos eixos paralelos) é apresentada a seguir. Seja  $C$  o centro de massa de um corpo de forma arbitrária, cuja seção transversal está mostrada na Fig. 12-8. As coordenadas do centro de massa são  $x_{cm}$  e  $y_{cm}$ . Escolhemos o plano  $xOy$  passando por  $C$ , de modo que  $z_{cm}$  seja igual a zero. Consideremos um eixo que passe por  $C$ , perpendicularmente ao plano do papel, e um outro, paralelo ao primeiro, passando por  $P$ , situado em  $(x_{cm} + a)$  e  $(y_{cm} + b)$ . A distância entre os eixos é  $h = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Então, o quadrado da distância de uma partícula ao eixo passando por  $C$  é  $x_i^2 + y_i^2$ , onde  $x_i$  e  $y_i$  são as coordenadas do elemento de massa  $m_i$  em relação ao eixo que passa por  $C$ . O quadrado de sua distância ao eixo que passa por  $P$  é  $(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2$ . Portanto, a inércia rotacional em relação ao eixo que passa por  $P$  é

$$\begin{aligned} I &= \Sigma m_i [(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2] \\ &= \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2a \Sigma m_i x_i - 2b \Sigma m_i y_i + (a^2 + b^2) \Sigma m_i. \end{aligned}$$

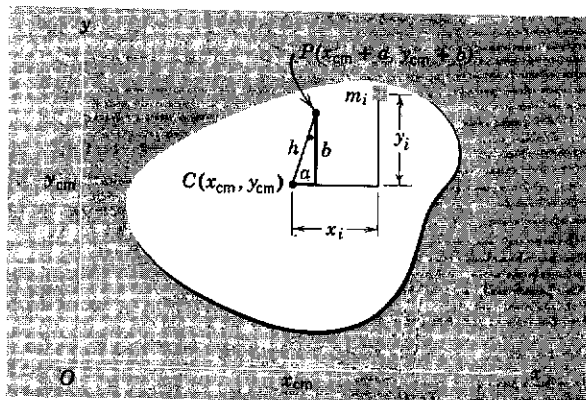


figura 12-8

Dedução do teorema dos eixos paralelos. Conhecendo a inércia rotacional em relação a um eixo que passa por  $C$ , podemos calcular o seu valor em relação a um eixo paralelo que passe por  $P$ .

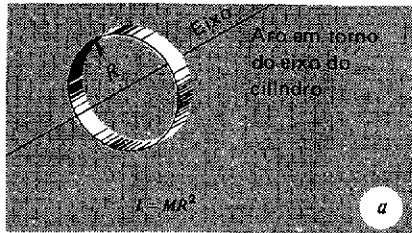
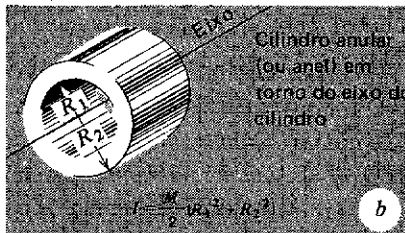
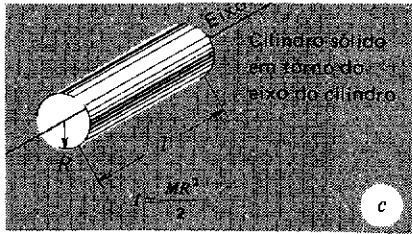
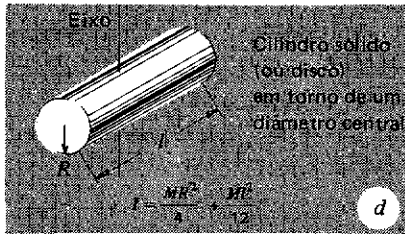
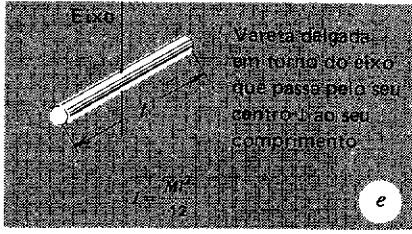
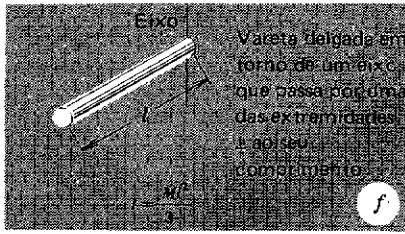
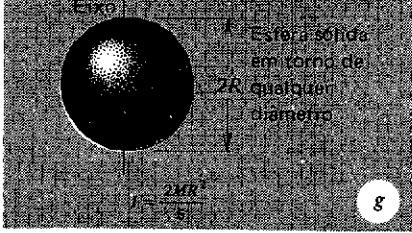
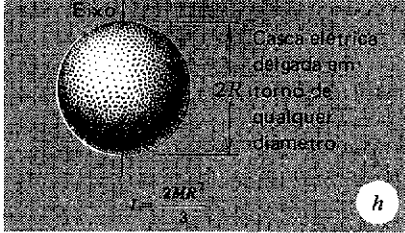
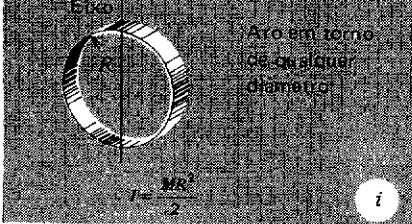
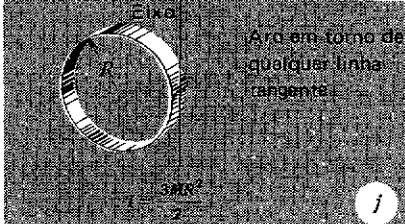


Da definição de centro de massa,

$$\sum m_i x_i = \sum m_i y_i = 0,$$

de modo que os dois termos centrais são nulos. O primeiro termo é, simplesmente, a inércia rotacional,  $I_{cm}$ , em relação ao eixo que passa pelo centro de massa e o último termo é  $Mh^2$ . Assim, concluímos que  $I = I_{cm} + Mh^2$ .

Tabela 12-1

 <p>Aro em torno do eixo do cilindro</p> <p><math>I = MR^2</math></p> <p>a</p>	 <p>Cilindro anelar (ou anel) em torno do eixo do cilindro</p> <p><math>I = \frac{M}{2}(R_1^2 + R_2^2)</math></p> <p>b</p>
 <p>Cilindro sólido em torno do eixo do cilindro</p> <p><math>I = \frac{MR^2}{2}</math></p> <p>c</p>	 <p>Cilindro sólido (ou disco) em torno de um diâmetro central</p> <p><math>I = \frac{MR^2}{4} + \frac{ML^2}{12}</math></p> <p>d</p>
 <p>Vareta delgada em torno do eixo que passa pelo seu centro ao seu comprimento</p> <p><math>I = \frac{ML^2}{12}</math></p> <p>e</p>	 <p>Vareta delgada em torno de um eixo que passa por uma das extremidades ao seu comprimento</p> <p><math>I = \frac{ML^2}{3}</math></p> <p>f</p>
 <p>Esfera sólida em torno de qualquer diâmetro</p> <p><math>I = \frac{2MR^2}{5}</math></p> <p>g</p>	 <p>Casca esférica delgada em torno de qualquer diâmetro</p> <p><math>I = \frac{2MR^2}{3}</math></p> <p>h</p>
 <p>Aro em torno de qualquer diâmetro</p> <p><math>I = \frac{MR^2}{2}</math></p> <p>i</p>	 <p>Aro em torno de qualquer linha tangente</p> <p><math>I = \frac{3MR^2}{2}</math></p> <p>j</p>

Com o auxílio desta fórmula, vários resultados da Tab. 12-1 podem ser deduzidos de resultados anteriores. Por exemplo, usando a Eq. 12-13, obtemos (f) a partir de (e) e (j) a partir de (i). A fórmula se mostrará particularmente útil nos problemas em que se combinem os movimentos de translação e de rotação.

Nesta seção continuaremos a estudar o caso particular de um corpo rígido, que apresente apenas movimento de rotação em torno de um eixo fixo,<sup>4</sup> em um referencial inercial. Inicialmente, faremos uma revisão do conceito de torque aplicado a um corpo rígido nestas condições; em seguida, mostraremos como ele se relaciona com a aceleração angular do corpo em torno do eixo.

Suponhamos aplicado um torque  $\tau$  a uma das partículas de um corpo rígido. Como todas as partículas de um corpo realmente rígido mantêm uma relação espacial fixa, relativamente às demais partículas que constituem o corpo, pode-se admitir que o torque atue no corpo rígido como um todo. Em geral, o vetor  $\tau$  não estará dirigido ao longo do eixo em torno do qual o corpo pode girar livremente. Nesta seção, não nos interessam os torques realmente aplicados ao corpo, mas apenas os componentes destes torques situados ao longo do eixo.<sup>5</sup> Apenas, estes componentes podem ocasionar rotação do corpo em torno do eixo. Os componentes do torque perpendiculares ao eixo tendem a fazê-lo girar, saindo de sua posição fixa. Entretanto, já fizemos a hipótese específica de que o eixo mantém-se fixo. O corpo pode, por exemplo, estar ligado a um eixo mantido em posição fixa por meio de mancais em suas extremidades, se o torque aplicado tiver um componente normal ao eixo, tendendo a fazê-lo virar, os mancais automaticamente aplicam no eixo um torque igual e contrário, anulando o efeito daquele componente.

Na Fig. 12-9 (compare com a Fig. 11-3) mostra-se uma seção de um corpo rígido que pode girar livremente em torno do eixo  $Oz$  de um referencial inercial. Uma força  $F$ , considerada, por comodidade, como situada no plano  $xOy$  da seção (ou paralela a ele), atua sobre a partícula no ponto  $P$  do corpo, estando a posição de  $P$ , em relação ao eixo de rotação (o eixo  $Oz$ ), determinada pelo vetor  $r$ . Pode-se dizer que o torque que atua na partícula em  $P$ , atua no corpo rígido como um todo, sendo dado pela Eq. 12-1, ou seja,

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Como  $r$  e  $F$  situam-se no plano  $xOy$ , o torque  $\tau$  estará dirigido ao longo do eixo  $Oz$ . A regra da mão direita mostra que ele aponta perpendicularmente *para fora* do plano da Fig. 12-9. Se  $r$  e  $F$  não estivessem situados no plano da figura,  $\tau$  não seria paralelo ao eixo  $Oz$  e nos interessaríamos, apenas, pela componente de  $\tau$  ao longo deste eixo. O módulo de  $\tau$  é dado pela Eq. 12-2, ou

$$\tau = rF \sin \theta$$

que, como vimos, pode também ser escrita como  $\tau = rF \perp$  ou  $\tau = Fr \perp$ .

Uma roda de carroça pode girar livremente em torno de um eixo horizontal que passa por  $O$ . Uma força de 100 N é aplicada em um dos raios, no ponto  $P$ , a 1,0 m do centro.  $OP$  forma um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal (eixo  $Ox$ ) e a força situa-se no plano da roda, formando um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal (eixo  $Ox$ ). Qual o torque aplicado à roda?

<sup>4</sup> Veja a nota de rodapé 2 da Sec. 12-5.

<sup>5</sup> Do mesmo modo que para qualquer vetor, podemos falar em componente vetorial de um torque segundo qualquer direção, como por exemplo, segundo um dado eixo. Para o torque — e para outras grandezas angulares — também nos referimos freqüentemente ao componente *em torno* de um dado eixo ou de uma dada direção. Em ambos os casos, o significado é o mesmo.

## 12-6

### DINÂMICA DA ROTAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO

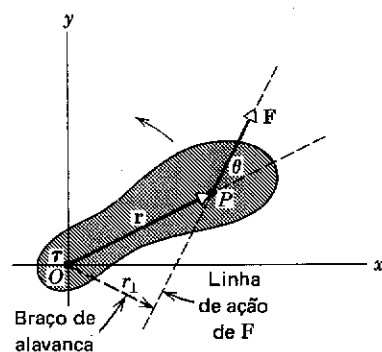


figura 12-9

Uma força  $F$  atua na partícula  $P$  de um corpo rígido, exercendo um torque  $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$  sobre o corpo, em relação a um eixo que passa por  $O$  e é perpendicular ao plano da figura. O braço da alavanca e o torque  $\tau$  estão mostrados na figura, sendo este um vetor que emerge da página perpendicularmente à figura.

### EXEMPLO 3

O ângulo entre o vetor  $r = OP$  e a força  $F$  aplicada (Fig. 12-10) é  $\theta$ , sendo

$$\theta = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ.$$

Então, o valor do torque será

$$\begin{aligned} \tau &= rF \sin \theta \\ &= 1,0 \text{ m} \times 100 \text{ N} \times \sin 15^\circ = 26 \text{ N} \cdot \text{m}. \end{aligned}$$

É evidente que podemos obter este mesmo resultado a partir de  $\tau = rF_{\perp}$  ou de  $\tau = Fr_{\perp}$  (veja a Eq. 12-2). O torque ( $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ) é um vetor dirigido para fora  $\odot$  ao longo do eixo que passa por  $O$  e com módulo de  $26 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

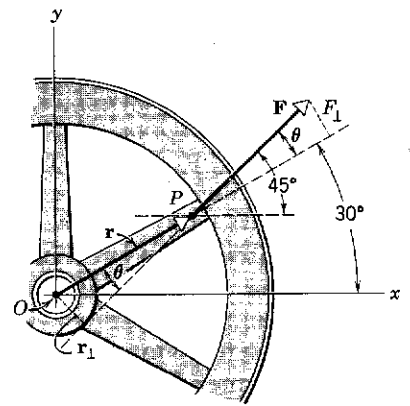


figura 12-10  
Exemplo 3

Investigaremos, agora, a relação entre o torque aplicado ao corpo rígido da Fig. 12-9 e a aceleração angular deste corpo. Observemos o corpo rígido durante um intervalo de tempo infinitesimal  $dt$  em que ele gira de um ângulo infinitesimal  $d\theta$ . Vimos, anteriormente, que podemos descrever a rotação de um corpo rígido, em torno de um eixo fixo, pela análise do movimento de um ponto qualquer fixo no corpo, tal como  $P$  na Fig. 12-9. Então, por comodidade, fazemos abstração do próprio corpo na Fig. 12-11 e focalizamos nossa atenção no ponto  $P$  e no vetor  $r$  que localiza  $P$  em relação ao eixo de rotação.

Durante o tempo  $dt$ , o ponto  $P$  percorre uma distância infinitesimal  $ds$  ao longo de uma trajetória circular de raio  $r$ , enquanto o corpo gira de um ângulo infinitesimal  $d\theta$ , sendo

$$ds = r d\theta.$$

O trabalho  $dW$  realizado pela força, durante esta pequena rotação, é

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F \cos \phi ds = (F \cos \phi) \cdot (r d\theta),$$

onde  $F \cos \phi$  é o componente de  $F$  na direção  $ds$ .

O termo  $(F \cos \phi)r$ , porém, é o módulo do torque instantâneo, aplicado por  $F$  no corpo rígido, em relação ao eixo perpendicular à página e passando por  $O$ , de modo que

$$dW = \tau d\theta. \tag{12-14}$$

Esta expressão diferencial para o trabalho realizado na rotação (em torno de um eixo fixo) é equivalente à expressão  $dW = F dx$  para o trabalho realizado na translação (ao longo de uma reta).

Para obtermos a taxa com que se realiza trabalho no movimento de rotação (em torno de um eixo fixo), dividimos ambos os membros da Eq. 12-14 pelo intervalo de tempo infinitesimal  $dt$  durante o qual o corpo gira do ângulo  $d\theta$ , obtendo-se

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

ou

$$P = \tau \omega$$

que fornece a potência instantânea  $P$ . Esta última expressão é análoga, para o movimento rotacional, de  $P = Fv$  obtida para o movimento de translação (ao longo de uma linha reta).

Ora, se várias forças  $F_1, F_2$  etc., estão aplicadas ao corpo, em um plano perpendicular ao seu eixo de rotação, o trabalho reali-

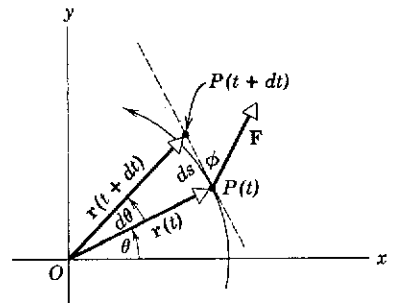


figura 12-11

Durante o tempo  $dt$ , o ponto  $P$  do corpo rígido da Fig. 12-9 desloca-se uma distância  $ds$  ao longo do arco de circunferência de raio  $r$ . O corpo rígido (que não está mostrado) e o vetor  $r$ , que localiza o ponto  $P$  do corpo, giram de um ângulo  $d\theta$  durante este mesmo tempo.

zado por estas forças sobre o corpo em uma pequena rotação  $d\theta$ , será

$$\begin{aligned} dW &= F_1 \cos \phi_1 r_1 d\theta + F_2 \cos \phi_2 r_2 d\theta + \dots, \\ &= (\tau_1 + \tau_2 + \dots) d\theta = \tau d\theta, \end{aligned}$$

onde  $r_1 d\theta$  é igual a  $ds_1$ , o deslocamento do ponto onde  $F_1$  está aplicada, e  $\phi_1$  é o ângulo entre  $F_1$  e  $ds_1$  etc.;  $\tau$  representa, agora, o valor do componente do torque *resultante* ao longo do eixo que passa por  $O$ . Ao calcular esta soma, cada torque deverá ser considerado positivo ou negativo, conforme o sentido em que ele, sozinho, tenderia a girar o corpo em torno do eixo. Podemos, arbitrariamente, designar como positivo o torque associado a uma força se o efeito desta força, atuando sozinha, é de produzir uma rotação anti-horária; então, o torque será negativo se o efeito for de produzir uma rotação horária.

Não há movimento interno das partículas de um corpo realmente rígido. As partículas mantêm sempre uma posição fixa umas em relação às outras e deslocam-se apenas com o corpo como um todo. Assim, não pode haver dissipação de energia no interior de um corpo realmente rígido. Podemos, então, igualar a taxa com que se realiza trabalho sobre o corpo à taxa com que sua energia cinética está aumentando. A taxa com que se realiza trabalho no corpo rígido é

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau \omega. \quad (12-15)$$

A taxa com que aumenta a energia cinética do corpo rígido é

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I \omega^2 \right).$$

Mas  $I$  é constante, porque o corpo é rígido e o eixo é fixo. Portanto,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I \omega^2 \right) = \frac{1}{2} I \frac{d}{dt} (\omega^2) = I \omega \frac{d\omega}{dt} = I \omega \alpha. \quad (12-16)$$

Igualando os seguintes membros das Eqs. 12-15 e 12-16, obtemos

$$\tau \omega = I \alpha \omega,$$

ou

$$\tau = I \alpha. \quad (12-17)$$

A Eq. 12-17 refere-se ao movimento de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo. O torque  $\tau$ , a velocidade angular  $\omega$  e a aceleração angular  $\alpha$  estão sempre orientados ao longo deste eixo, em um ou outro sentido. A situação equivalente, na translação, é aquela em que a força  $F$  que atua no corpo, sua velocidade  $v$  e sua aceleração  $a$  estão todas ao longo de uma dada linha reta, em um ou em outro sentido.

As seis grandezas acima são vetoriais mas, quando elas estão orientadas ao longo de uma reta fixa, elas podem ter apenas dois sentidos. Considerando um destes sentidos como positivo e o outro como negativo, podemos tratar algebricamente, estes vetores e trabalhar apenas com seus módulos. Assim, ao deduzirmos a Eq. 12-17

( $\tau = I\alpha$ ), nós simplesmente transformamos a segunda lei de Newton ( $F = Ma$ ), expressa em forma escalar adequada à descrição do movimento retilíneo, em termos de rotação. Isto sugere que, do mesmo modo que associamos uma força à aceleração linear de um corpo, podemos associar um torque à aceleração angular de um corpo em torno de um dado eixo. A inércia rotacional, ou momento de inércia,  $I$ , é uma medida da resistência que o corpo oferece a uma mudança em seu movimento de rotação, devido à ação de um dado torque, do mesmo modo que a inércia translacional, ou massa  $M$ , é uma medida da resistência que um corpo oferece a uma mudança em seu movimento de translação por ação de uma dada força.

Na Tab. 12-2 comparamos o movimento de translação de um corpo rígido, ao longo de uma linha reta, com o movimento de rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo.

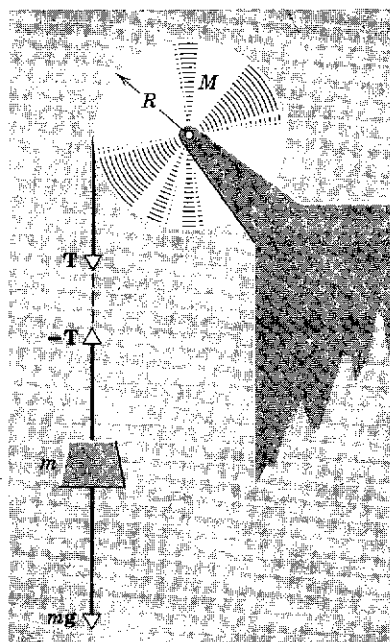


figura 12-12  
Exemplo 4. Uma força constante  $T$ , dirigida para baixo, produz rotação do disco. Exemplo 5. Aqui,  $T$  aparece em virtude do peso do corpo suspenso.

Tabela 12-2

Movimento Retilíneo		Rotação em torno de um Eixo Fixo	
Deslocamento	$x$	Deslocamento angular	$\theta$
Velocidade	$v = \frac{dx}{dt}$	Velocidade angular	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Aceleração	$a = \frac{dv}{dt}$	Aceleração angular	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Massa	$M$	Inércia rotacional	$I$
Força	$F = Ma$	Momento da força (torque)	$\tau = I\alpha$
Trabalho	$W = \int F dx$	Trabalho	$W = \int \tau d\theta$
Energia cinética	$\frac{1}{2} Mv^2$	Energia cinética	$\frac{1}{2} I\omega^2$
Potência	$P = Fv$	Potência	$P = \tau\omega$
Momento linear	$Mv$	Momento angular	$I\omega$

A rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo (ao qual se aplica a equação  $\tau = I\alpha$ ) não é o tipo mais geral de movimento rotacional, pois o corpo pode não ser rígido e o eixo pode não ser fixo em um referencial inercial. Para este caso geral, é válida a Eq. 12-9,  $\tau_{\text{ext}} = dL/dt$ . Como já dissemos, ela equivale à segunda lei de Newton para o movimento mais geral de translação de um sistema de partículas, ou seja, a Eq. 9-17,  $F_{\text{ext}} = dP/dt$ .

No restante deste capítulo, vamos limitar-nos ao estudo da rotação de corpos rígidos em torno de eixos fixos. No Cap. 13 consideraremos alguns tipos mais gerais de movimento rotacional.

### EXEMPLO 4

Um disco uniforme, de raio  $R$  e massa  $M$ , está montado em um eixo suportado por mancais fixos e sem atrito, como na Fig. 12-12. Enrola-se uma corda leve em torno da borda da roda e aplica-se à corda uma força constante,  $T$ , dirigida para baixo. Calcular a aceleração angular da roda e a aceleração tangencial de um ponto de sua periferia.

O torque em relação ao eixo central é  $\tau = TR$  e o momento de inércia do disco, em relação ao mesmo eixo, é  $I = \frac{1}{2} MR^2$ . Da equação

$$\tau = I\alpha,$$

obtemos

$$TR = \left(\frac{1}{2} MR^2\right)\alpha,$$

ou

$$\alpha = \frac{2T}{MR}$$

Se a massa do disco for  $M = 2,50$  kg, o raio  $R = 0,20$  m e a força  $T = 5,0$  N, então

$$\alpha = \frac{2 \times 5,0 \text{ N}}{2,50 \text{ kg} \times 0,20 \text{ m}} = 20 \text{ rad/s}^2.$$

A aceleração tangencial de um ponto da periferia do disco é dada por

$$a = R\alpha = 20 \text{ rad/s}^2 \times 0,20 \text{ m} = 4,0 \text{ m/s}^2.$$

Suponhamos que um corpo de massa  $m$  fosse suspenso na corda do problema anterior. Determinar a aceleração angular do disco e a aceleração tangencial de um ponto da periferia.

Agora,  $T$  representa a tensão na corda. Como o corpo suspenso será acelerado para baixo, o valor da força gravitacional sobre ele,  $mg$ , deve ser maior do que o valor da força  $T$  com que a corda o puxa para cima. A aceleração  $a$  do corpo suspenso é igual à aceleração tangencial de um ponto da periferia do disco. Da segunda lei de Newton deduzimos

$$mg - T = ma.$$

O torque resultante que atua no disco é  $TR$  e o seu momento de inércia é  $\frac{1}{2} MR^2$ , e então, de

$$\tau = I\alpha,$$

vem

$$TR = \frac{1}{2} MR^2\alpha.$$

Usando a relação  $a = R\alpha$ , podemos escrever esta última equação como

$$2T = Ma.$$

Resolvendo o sistema constituído pela primeira e pela última equações, obtemos

$$a = \left( \frac{2m}{M + 2m} \right) g,$$

e

$$T = \left( \frac{Mm}{M + 2m} \right) g.$$

Se consideramos que o disco tem massa  $M = 2,50$  kg e raio  $R = 0,20$  m, como anteriormente, e supondo que o corpo suspenso pesa 5,0 N, temos

$$a = \frac{2mg}{M + 2m} = \frac{2 \times 5,0 \text{ N}}{2,50 \text{ kg} + 2 \times \frac{5}{9,8} \text{ kg}} = 2,85 \text{ m/s}^2,$$

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{2,85 \text{ m/s}^2}{0,20 \text{ m}} = 14,3 \text{ rad/s}^2.$$

Observe que as acelerações, quando suspendemos um corpo de 5,0 N, são menores do que quando exercemos uma força constante de 5,0 N na corda (Ex. 4). Isto se deve ao fato de que a tensão na corda, a qual proporciona o torque, é agora menor do que 5,0 N, ou seja,

$$T = \frac{Mmg}{M + 2m} = \frac{2,50 \text{ kg} \times 5,0 \text{ N}}{(2,50 + 1,0) \text{ kg}} = 3,6 \text{ N}.$$

A tensão na corda tem que ser menor do que o peso do corpo suspenso, para que ele adquira uma aceleração para baixo.

## EXEMPLO 6

Supondo que o disco do Ex. 5 partiu do repouso, calcular o trabalho realizado pelo torque aplicado a ele em 2,0 s. Calcular também o aumento da energia cinética de rotação do disco.

Como o torque aplicado é constante, a aceleração angular que ele ocasiona é constante também. O deslocamento angular, quando a aceleração angular é constante, obtém-se da Eq. 11-5,

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2,$$

onde

$$\omega_0 = 0, \quad \alpha = 14,3 \text{ rad/s}^2, \quad t = 2,0 \text{ s},$$

de modo que

$$\theta = 0 + \frac{1}{2} \times 14,3 \text{ rad/s}^2 \times (2,0 \text{ s})^2 = 28,6 \text{ rad}.$$

Quando o torque é constante, o trabalho realizado em um deslocamento angular finito é dado por

$$W = \tau (\theta_2 - \theta_1),$$

em que

$$\tau = TR = 3,6 \text{ N} \times 0,20 \text{ m} = 0,72 \text{ N} \cdot \text{m}$$

e

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta = 28,6 \text{ rad}.$$

Portanto,

$$W = 0,72 \text{ N} \cdot \text{m} \times 28,6 \text{ rad} = 20,5 \text{ J}.$$

Este trabalho deve acarretar um aumento da energia cinética de rotação do disco que, partindo do repouso, adquire uma velocidade angular  $\omega$ .

A energia de rotação é  $\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} MR^2) \omega^2$ . Para obtermos  $\omega$ , usamos a Eq. 11-3,

$$\omega = \omega_0 + \alpha t.$$

onde

$$\omega_0 = 0, \quad t = 2,0 \text{ s}, \quad \alpha = 14,3 \text{ rad/s}^2,$$

e, então,

$$\omega = 0 + 14,3 \text{ rad/s}^2 \times 2,0 \text{ s} = 28,6 \text{ rad/s}.$$

Assim,

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{4} \times 2,50 \text{ kg} \times (0,20 \text{ m})^2 (28,6 \text{ rad/s})^2 = 20,5 \text{ J},$$

como antes. Portanto, o aumento da energia cinética do disco é igual ao trabalho realizado pela força resultante que atua nele, como tem de ser.

## EXEMPLO 7

Mostre que a conservação da energia mecânica é válida para o sistema do Ex. 5.

A força resultante que atua no sistema é a força gravitacional sobre o corpo suspenso. Esta força é conservativa. Considerando o sistema como um todo, vemos que o corpo suspenso perde energia potencial  $U$  enquanto vai descendo.

$$U = mgy,$$

onde  $y$  é a distância vertical de que o corpo baixou. Ao mesmo tempo, o corpo suspenso ganha energia cinética de translação e o disco ganha energia cinética de rotação. O aumento total na energia cinética é

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

onde  $v$  é a velocidade linear da massa suspensa. Devemos, então, mostrar que

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

Para o movimento linear, a partir do repouso, temos  $v^2 = 2ay$ . Do Ex. 5 obtemos  $a = 2mg/(M + 2m)$ . Então

$$mgy = \frac{mgv^2}{2a} = \frac{1}{2}mv^2 \left( \frac{g}{a} \right) = \frac{1}{2}mv^2 \left( \frac{M + 2m}{2m} \right) = \frac{1}{4}(M + 2m)v^2.$$

Sabemos, também, que  $\omega = v/R$  e  $I = \frac{1}{2}MR^2$ . Substituindo estas relações no segundo membro da equação da conservação, obtemos

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}MR^2 \right) (v^2/R^2) = \frac{1}{4}(M + 2m)v^2.$$

Portanto, a energia mecânica se conserva.

Deduzir a relação  $L = I\omega$ , mostrada na Tab. 12-2, para o momento angular de um corpo rígido que está apenas em rotação em torno de um eixo fixo.

Partindo da relação escalar  $\tau = I\alpha$  e da definição de  $\alpha (= d\omega/dt)$ , podemos escrever

$$\tau = I\alpha = I(d\omega/dt) = d(I\omega)/dt,$$

em que a última passagem é justificada pelo fato de que  $I$  é constante para um dado corpo rígido e um eixo de rotação (fixo) especificado.

Em seguida, usamos a relação vetorial  $\tau_{\text{ext.}} = d\mathbf{L}/dt$  (Eq. 12-9) e escrevemos a relação correspondente para os componentes escalares,  $\tau$  e  $dL$ , do  $\tau_{\text{ext.}}$  e de  $d\mathbf{L}$ , segundo o eixo fixo de rotação, obtendo

$$\tau = dL/dt.$$

Mediante uma simples comparação das duas equações anteriores obtemos a relação procurada, isto é,

$$L = I\omega. \quad (12-18)$$

Do mesmo modo que a Eq. 12-17 ( $\tau = I\alpha$ ), esta é uma relação escalar, válida para a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo.  $L$  é o componente, segundo o eixo de rotação, do vetor momento angular,  $\mathbf{L}$ , do corpo rígido e  $I$  deve se referir a este mesmo eixo.

A Eq. 12-18 é o análogo rotacional da expressão  $P = Mv$  para o momento linear de um corpo rígido de massa  $M$  em translação pura, com velocidade linear  $v$ . Ela nos fornece o momento angular, em relação a um eixo fixo, de um corpo rígido cujo momento de inércia é  $I$  em relação a este eixo, e que gira com uma velocidade angular  $\omega$  em torno deste mesmo eixo.

Até agora, consideramos apenas corpos em rotação em torno de um eixo fixo. Mas, um corpo que rola está em rotação em torno de um eixo e também movendo-se em translação. Portanto, devemos esperar que o movimento de corpos que rolam deva ser tratado como uma combinação de movimentos de translação e de rotação. Entretanto, é também possível tratar um corpo que rola como se o seu movimento fosse uma rotação pura. Queremos ilustrar a equivalência destes dois pontos de vista.

## EXEMPLO 8

### 12-7 MOVIMENTO COMBINADO DE TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO



Consideremos, por exemplo, um cilindro que rola ao longo de uma superfície horizontal, como na Fig. 12-13. Em qualquer instante, o ponto de contato do cilindro com a superfície está em repouso, pois o cilindro não escorrega. O eixo perpendicular ao diagrama e que passa pelo ponto de contato  $P$ , é denominado *eixo instantâneo de rotação*. Naquele instante, a velocidade linear de cada partícula do cilindro será perpendicular à linha que une a partícula ao ponto  $P$  e o seu valor será proporcional a esta distância. Isto é equivalente a dizer que, *naquele instante*, o cilindro está girando em torno de um eixo fixo que passa por  $P$ , com certa velocidade angular  $\omega$ . Portanto, em um dado instante, o movimento do corpo é equivalente a uma rotação pura. A energia cinética total pode, então, ser expressa por

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2, \quad (12-19)$$

onde  $I_P$  é a inércia rotacional, ou momento de inércia, em relação ao eixo que passa por  $P$ .

Apliquemos, agora, o teorema dos eixos paralelos, segundo o qual temos

$$I_P = I_{cm} + MR^2$$

onde  $I_{cm}$  é a inércia rotacional, ou momento de inércia, do cilindro de massa  $M$  e raio  $R$  em relação a um eixo paralelo que passa pelo centro de massa. A Eq. 12-19, transforma-se, então, em

$$K = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2. \quad (12-20)$$

A quantidade  $R\omega$  é a velocidade com que o centro de massa do cilindro está se movendo em relação ao ponto fixo  $P$ . Seja  $R\omega = v_{cm}$ . A Eq. 12-20 transforma-se, então, em

$$K = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2. \quad (12-21)$$

Observe, agora, que a velocidade do centro de massa em relação a  $P$  é igual à velocidade de  $P$  em relação ao centro de massa. Portanto, a velocidade angular  $\omega$  do centro de massa, em torno de  $P$ , observada por alguém em  $P$ , é igual à velocidade angular de uma partícula em  $P$  que girasse em torno de  $C$ , observada por alguém em  $C$  (movendo-se junto com o cilindro). Isto é equivalente a dizer que qualquer reta de referência no cilindro gira do mesmo ângulo, em um dado intervalo de tempo, quer seja observada de um referencial fixo na superfície sobre a qual o cilindro está rolando, quer seja observada de um referencial em movimento de translação em relação a esse referencial fixo. Podemos, portanto, interpretar a Eq. 12-21, cuja dedução foi baseada em um movimento de rotação pura, de maneira diferente; isto é, a primeira parcela,  $\frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$ , é a energia cinética que o cilindro teria se estivesse simplesmente girando em torno de um eixo que passasse por seu centro de massa, sem movimento de translação, e a segunda parcela,  $\frac{1}{2} M v_{cm}^2$ , é a energia cinética que o cilindro teria se estivesse em translação, com a velocidade de seu centro de massa, sem girar. Observe-se que, agora, não há referência alguma ao eixo instantâneo de rotação. Na realidade, a Eq. 12-21 aplica-se a qualquer corpo que esteja se movendo e girando em torno de um eixo perpendicular à direção do seu movimento, quer ele esteja ou não rolando sobre uma superfície.

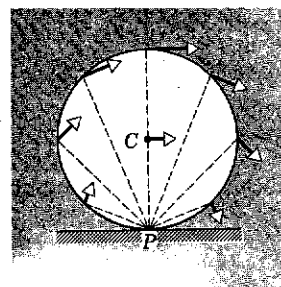


figura 12-13

Um corpo que rola pode, em qualquer instante, ser tratado como se estivesse girando em torno de um eixo perpendicular que passe pelo ponto de contato  $P$ .

Os efeitos combinados de translação do centro de massa e de rotação em torno de um eixo que passa pelo centro de massa são equivalentes a uma rotação pura, com a mesma velocidade angular, em torno de um eixo que passe pelo ponto de contato de um corpo que rola.

Para ilustrar de modo simples este resultado, consideremos as velocidades instantâneas de vários pontos do cilindro que rola. Se a velocidade do centro de massa (medida por um observador fixo na superfície) é  $v_{cm}$ , a velocidade angular instantânea, em torno de um eixo que passa por  $P$ , é  $\omega = v_{cm}/R$ . Um ponto  $Q$ , na parte superior do cilindro, terá, portanto, uma velocidade  $\omega 2R = 2v_{cm}$  naquele instante. O ponto de contato,  $P$ , está instantaneamente em repouso. Assim, do ponto de vista de uma rotação pura em torno de  $P$ , a situação é aquela mostrada na Fig. 12-14.

Consideremos, agora, o rolamento como uma combinação da translação do centro de massa e da rotação em torno do eixo do cilindro que passa por  $C$ . Considerando-se, apenas, a translação, todos os pontos do cilindro têm a mesma velocidade  $v_{cm}$  do centro de massa. Isto está mostrado na Fig. 12-15a. Considerando-se, apenas, a rotação, o centro de massa está em repouso, enquanto o ponto  $Q$ , na parte superior, tem uma velocidade  $+\omega R$  na direção  $Ox$  e o ponto  $P$ , na parte inferior do cilindro, tem velocidade  $-\omega R$  na mesma direção, mas em sentido contrário. Isto está mostrado na Fig. 12-15b. Combinemos, agora, estes dois resultados. Lembrando que  $\omega = v_{cm}/R$ , obtemos

para o ponto  $Q$   $v = v_{cm} + \omega R = v_{cm} + \frac{v_{cm}}{R} R = 2v_{cm}$ ,

para o ponto  $C$   $v = v_{cm} + 0 = v_{cm}$ ,

para o ponto  $P$   $v = v_{cm} - \omega R = v_{cm} - \frac{v_{cm}}{R} R = 0$ .

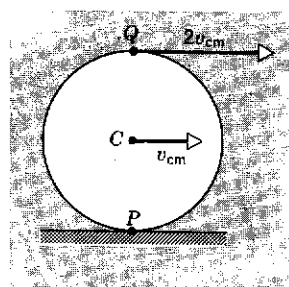


figura 12-14

Como  $Q$  e  $C$  têm a mesma velocidade angular em torno de  $P$ , a velocidade linear de  $Q$  será duas vezes maior do que a de  $C$ , pois  $Q$  encontra-se duas vezes mais distante de  $P$ .

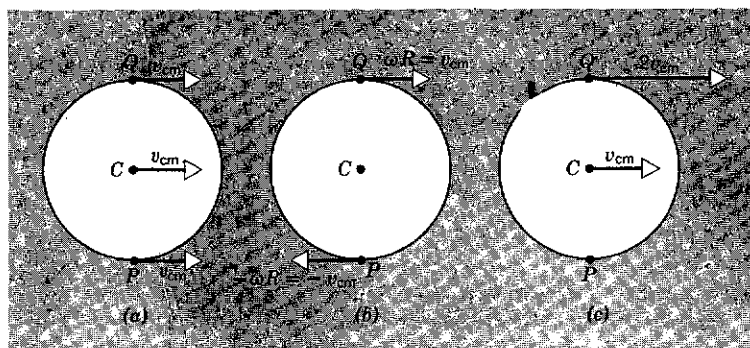


figura 12-15

(a) Na translação pura, todos os pontos movem-se com a mesma velocidade. (b) Na rotação pura em torno de  $C$ , pontos opostos movem-se com velocidades opostas. (c) A combinação de translação e rotação é obtida por adição dos vetores correspondentes em (a) e (b).

Este resultado, mostrado na Fig. 12-15c, é exatamente o mesmo que foi obtido adotando o ponto de vista de uma rotação pura na Fig. 12-14.

Consideremos um cilindro maciço, de massa  $M$  e raio  $R$ , rolando para baixo, sem deslizar, em um plano inclinado. Determinar a velocidade do seu centro de massa quando o cilindro chegar à base do plano.

A situação está ilustrada na Fig. 12-16. Podemos usar a conservação da energia para resolver este problema. O cilindro está inicialmente em repouso e, ao rolar sobre o plano inclinado, ele perde uma quantidade  $Mgh$  de energia potencial, sendo  $h$  a altura do plano. A energia cinética que ele adquire é dada por

$$\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2,$$

### EXEMPLO 9

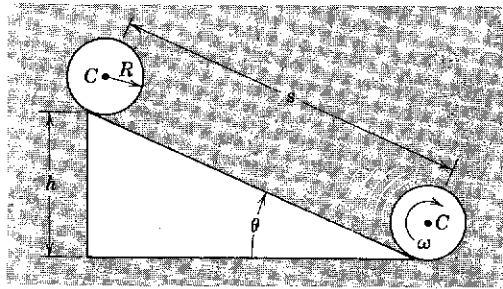


figura 12-16  
Exemplo 9. Um cilindro desce, rolando, um plano inclinado.

onde  $v$  é a velocidade linear do centro de massa e  $\omega$  é a velocidade angular em torno do centro de massa, no instante em que o cilindro chega à base do plano.

Temos, portanto, a relação

$$Mgh = \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2,$$

em que

$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2 \quad \text{e} \quad \omega = \frac{v}{R}.$$

Então,

$$Mgh = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)Mv^2,$$

$$v^2 = \frac{4}{3}gh \quad \text{ou} \quad v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

A velocidade do centro de massa seria  $v = \sqrt{2gh}$  se o cilindro *deslizasse* em um plano inclinado *sem atrito*. A velocidade do cilindro que rola é, portanto, menor do que a velocidade do cilindro que desliza, porque, para o cilindro que rola, parte da energia potencial perdida se transforma em energia cinética de rotação, restando menos energia disponível para a parte translacional da energia cinética. Ainda que o cilindro que rola chegue à base do plano depois de um cilindro idêntico, que parte no mesmo instante e desliza ao longo de um plano inclinado idêntico mas sem atrito, ambos chegam às bases dos planos com a mesma quantidade de energia; ocorre que o cilindro que rola gira enquanto se move, ao passo que o cilindro que desliza desloca-se sem girar.

Deve-se observar que é necessário haver atrito estático para ocasionar a rotação do cilindro. Lembrando que a força de atrito é dissipativa, como você justificaria o uso da conservação da energia mecânica neste problema?

O resultado anterior foi obtido através de considerações de energia. Resolver o mesmo problema usando apenas métodos dinâmicos.

O diagrama de forças está mostrado na Fig. 12-17.  $Mg$  é o peso do cilindro, atuando verticalmente para baixo sobre o centro de massa,<sup>6</sup>  $N$  é a força normal, exercida pelo plano inclinado sobre o cilindro e  $f$  é a força de atrito estático que atua paralelamente ao plano, no ponto de contato.

O movimento de *translação* de um corpo é analisado admitindo-se que todas as forças externas atuem no seu centro de massa. Usando a segunda lei de Newton, obtemos

$$N - Mg \cos \theta = 0 \quad \text{para o movimento normal ao plano,}$$

e

$$Mg \sin \theta - f = Ma \quad \text{para o movimento ao longo do plano.}$$

<sup>6</sup> Ao desenhar o diagrama vetorial para este problema, estamos admitindo tacitamente que o peso total do corpo pode ser suposto aplicado no centro de massa. Vimos, na Sec. 9-2, que isto é verdadeiro no movimento de translação. Entretanto, neste problema, estamos usando este resultado para analisar o movimento de rotação. Este procedimento será justificado na Sec. 14-3, onde será mostrado que o peso de um corpo pode ser considerado como agindo no seu centro de massa, tanto no movimento de translação quanto no de rotação.

## EXEMPLO 10

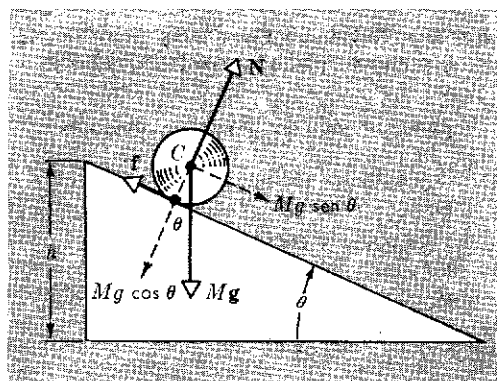


figura 12-17

Exemplo 10. Solução dinâmica do movimento de um cilindro que desce, rolando, em um plano inclinado.

O movimento de *rotação* em torno do centro de massa é analisado a partir da equação

$$\tau = I_{cm}\alpha.$$

Nem  $N$ , nem  $Mg$ , podem produzir rotação em torno de  $C$  porque suas linhas de ação passam por  $C$  e seus braços de alavanca são nulos. O braço de alavanca da força de atrito, em relação a  $C$ , vale  $R$  e, então,

$$fR = I_{cm}\alpha.$$

Mas

$$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2 \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{a}{R},$$

de modo que

$$f = I_{cm}\alpha/R = Ma/2.$$

Substituindo este resultado na segunda equação da translação, encontramos

$$a = \frac{2}{3}g \text{ sen } \theta.$$

Então, a aceleração do centro de massa do cilindro que rola ( $\frac{2}{3}g \text{ sen } \theta$ ) é menor do que a aceleração do centro de massa do cilindro que desliza para baixo ao longo do plano inclinado ( $g \text{ sen } \theta$ ).

Este resultado é válido em qualquer instante, independentemente da posição do cilindro ao longo do plano. O centro de massa move-se com aceleração linear constante. Para obtermos a velocidade do centro de massa, a partir do repouso, usamos a relação

$$v^2 = 2as,$$

de modo que

$$v^2 = 2\left(\frac{2}{3}g \text{ sen } \theta\right)s = \frac{4}{3}g \frac{h}{s} s = \frac{4}{3}gh$$

ou

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}.$$

Este resultado é o mesmo obtido anteriormente por considerações de energia. O "método da energia" é, sem dúvida, mais simples e mais direto. Entretanto, se estivermos interessados em conhecer as forças que atuam no corpo, como  $N$  e  $f$ , devemos usar o método dinâmico.

Este método permite determinar o valor mínimo da força de atrito estático necessário para o rolamento:

$$f = Ma/2 = M/2 \times \frac{2}{3}g \text{ sen } \theta = \frac{1}{3}Mg \text{ sen } \theta.$$

O que aconteceria se a força de atrito estático entre as superfícies fosse menor do que este valor?

Uma esfera e um cilindro, tendo ambos a mesma massa e o mesmo raio, partem do repouso e rolam para baixo em um mesmo plano inclinado. Qual dos dois corpos chega primeiro à base do plano?

Para a esfera,  $I_{cm}$  é igual a  $\frac{2}{5}MR^2$ . Usando o método dinâmico, obtemos

$$Mg \sin \theta - f = Ma, \quad \text{translação do cm,}$$

$$fR = I_{cm}\alpha = \left(\frac{2}{5}MR^2\right)(a/R), \quad \text{rotação em torno do cm,}$$

ou

$$f = \frac{2}{5}Ma \quad \text{e} \quad a = \frac{5}{7}g \sin \theta, \quad (\text{esfera}).$$

Para o cilindro (Ex. 10)

$$a = \frac{2}{3}g \sin \theta, \quad (\text{cilindro}).$$

Portanto, a aceleração do centro de massa da esfera é, em qualquer instante, maior do que a aceleração do centro de massa do cilindro. Como os dois corpos partem do repouso no mesmo instante, a esfera chegará primeiro à base do plano.

Qual dos corpos tem maior energia de rotação na base do plano? Qual dos corpos tem maior energia de translação na base do plano?

O estudante deve observar com atenção que nem a massa nem o raio dos objetos que rolam aparecem nos resultados anteriores. Como, então, se comparam os comportamentos de cilindros de massas e raios diferentes? E de esferas de massas e raios diferentes? Como se comparam os comportamentos de um cilindro e de uma esfera de massas e raios diferentes?

### EXEMPLO 11

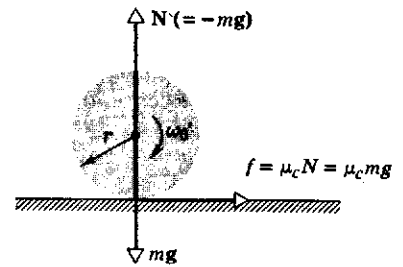


figura 12-18  
Exemplo 12

Um cilindro sólido uniforme, de raio  $r$  e massa  $m$ , se desloca numa superfície plana horizontal com velocidade angular inicial  $\omega_0$ . O coeficiente de atrito cinético entre a superfície e o cilindro é  $\mu_c$ . Inicialmente o cilindro desliza mas após certo tempo inicia o rolamento. (a) Qual é a velocidade  $V$  do centro de massa no tempo  $t$ ? (b) Qual é o valor de  $t$ ?

(a) A Fig. 12.18 mostra as forças que atuam sobre o cilindro.

A aceleração  $a$  do centro de massa é constante, visto que todas as forças são constantes, de modo que para o movimento de translação podemos escrever

$$F = ma = m \left( \frac{V_f - V_i}{t - 0} \right).$$

Aqui,  $V_i = 0$  e  $V_f = V$ , a velocidade em  $t$  quando inicia o rolamento puro. Da mesma forma, a força resultante  $F$  vale  $\mu_c mg$ , de modo que

$$\mu_c mg = mV/t. \quad (12-22)$$

A aceleração angular  $\alpha$  em torno de um eixo que passa através do centro de massa é também constante (por quê?) de modo que para o movimento de rotação podemos escrever

$$\tau = I\alpha = I \left( \frac{\omega_f - \omega_i}{t - 0} \right).$$

Aqui,  $\omega_f = \omega = V/r$ , velocidade angular no tempo  $t$ , e  $\omega_i = \omega_0$ . Da mesma forma o módulo do torque resultante  $\tau$  vale  $\mu_c mgr$ . O torque ocasiona uma desaceleração angular de modo que

$$\mu_c mgr = \left(\frac{1}{2}mr^2\right) \left( \frac{\omega_0 - V/r}{t} \right). \quad (12-23)$$

Se eliminamos  $t$  de nossas duas equações (e.g., dividir Eq. 12-23 pela Eq. 12-22) e resolvemos para  $V$  (por favor faça o algebrismo), obtemos

$$V = \frac{1}{3}\omega_0 r.$$

### EXEMPLO 12

Notem que  $V$  não depende do valor de  $m$ ,  $g$  ou  $\mu_c$ . O que acontece, todavia, se qualquer uma dessas grandezas for nula?

(b) Pela eliminação de  $V$  das Eqs. 12-22 e 12-23 podemos resolver para  $t$  (por favor faça o algebrismo) e achar

$$t = \frac{\omega_0 r}{3\mu_c g}$$

É interessante notar que neste problema nem energia mecânica, momento linear, nem momento angular são conservados, mas que *as variações* no momento linear e momento angular estão diretamente relacionadas porque a força de atrito é responsável por ambas.

## questões

1. Quais são as dimensões do momento angular? Haverá algum significado no fato de serem elas as mesmas que as de energia multiplicada por tempo?
2. O produto vetorial de dois vetores é, necessariamente, um vetor axial?
3. Para calcular a inércia rotacional (momento de inércia) de um corpo podemos considerar sua massa concentrada em seu centro de massa?
4. Em relação a qual eixo um cubo uniforme teria momento de inércia mínimo?
5. Se dois discos circulares, de mesmo peso e de mesma espessura, são feitos de metais de densidades diferentes, qual deles terá o maior momento de inércia em relação ao eixo central?
6. Deseja-se determinar a inércia rotacional (momento de inércia) de um corpo de forma bastante irregular. Por isso, o cálculo matemático de  $\int r^2 dm$  torna-se extremamente difícil. Sugira maneiras de determinar experimentalmente a inércia rotacional.
7. As seções retas de cinco sólidos estão mostradas na Fig. 12-19. Estas seções têm a mesma altura e a mesma largura máxima. Os eixos de rotação são perpendiculares às seções e passam pelos pontos mostrados. Os sólidos têm a mesma massa. Qual deles tem o maior momento de inércia em relação a um eixo perpendicular que passe pelo centro de massa? Qual tem o menor momento de inércia?

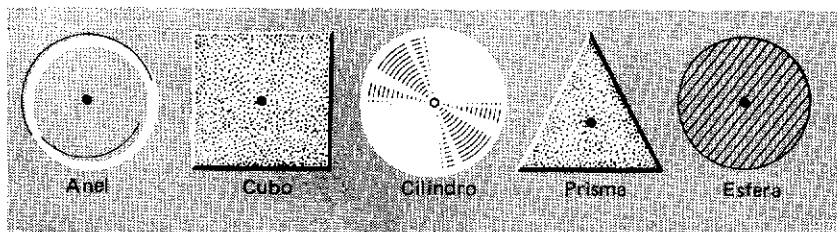


figura 12-19  
Questão 7

8. A Fig. 12-20a mostra uma barra, de 1 m de comprimento, metade da qual é de madeira, e a outra metade é de aço, articulada por meio de um pino, em  $O$ , na extremidade da parte de madeira. Uma força é aplicada em  $a$ , na extremidade da parte de aço. Na Fig. 12-20b, a barra é articulada por um pino em  $O'$ , na extremidade da parte de aço, e a mesma força é aplicada, em  $a'$ , na extremidade da parte de madeira. Em ambos os casos a barra adquirirá a mesma aceleração angular? Explique.

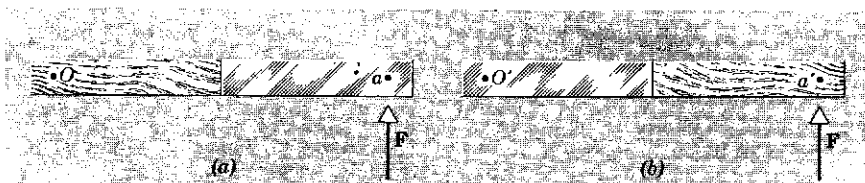


figura 12-20  
Questão 8

9. Uma pessoa pode distinguir um ovo cru de um ovo cozido fazendo-os girar sobre uma mesa. Explique como isto é possível. Se você segurar um ovo cru que está girando e soltá-lo imediatamente, ele continuará girando? Por quê?
10. Torque tem as mesmas dimensões que o trabalho ou energia. Conseqüentemente, o torque é um trabalho ou uma energia?
11. Comente cada uma das seguintes afirmações concernentes à prática do esqui: (a) Em uma pista em declive, deseja-se esquis que não façam curvas facilmente. (b) Em uma pista em zigue-zague, deseja-se esquis que façam volteios facilmente. (c) Então no primeiro caso deseja-se esquis com momento de inércia maior do que no segundo caso. (Veja: "The Physics of Ski Turns" de J. I. Shonie e D. L. Nordick em "The Physics Teacher", dezembro, 1972.)
12. Considerando que o atrito entre os esquis e a neve é pequeno e que o centro de massa do esquiador está quase sobre o centro da massa dos esquis, como um esquiador pode exercer torques para iniciar uma curva ou parar uma volta? (Veja "The Physics Turns", de J. I. Shonie e D. L. Nordick em "The Physics Teacher", dezembro, 1972.)
13. As expressões do Ex. 5 para  $a$  e  $T$  fornecem soluções razoáveis para os casos especiais em que  $g = 0$ ,  $M = 0$ ,  $M \rightarrow \infty$ ,  $m = 0$  e  $m \rightarrow \infty$ ?
14. O momento total de um sistema de partículas não depende do movimento das partículas em relação ao centro de massa do sistema. Pode-se fazer afirmação semelhante para a energia cinética total de um sistema de partículas?
15. Um tambor cilíndrico é empurrado, por meio de uma tábua, a partir da posição inicial mostrada na Fig. 12-21. Ele rola para frente, sobre o solo, percorrendo a distância  $l/2$ , igual à metade do comprimento da tábua. Não há deslizamento em nenhum dos pontos de contato. Qual é a posição final da tábua? Qual a distância percorrida pelo homem?
16. O emprego de volantes tem sido proposto como meio de armazenar a energia do vento ou a energia solar. A quantidade de energia que pode ser armazenada em um volante depende da densidade e da resistência à tração do material de que é feito o volante e para um determinado peso deseja-se o material mais forte e de mais baixa densidade disponível. (Veja "Flywheels" de R. F. Post e S. F. Post, *Scientific American*, dezembro, 1973.) Você pode dar uma explicação razoável para este fato?
17. Uma esfera maciça, de madeira, rola para baixo sobre dois planos inclinados de mesma altura mas de inclinações diferentes. Chegará a esfera à base do plano com a mesma velocidade em ambos os casos? Levará mais tempo para descer em um dos planos do que no outro? Em caso afirmativo, qual deles e por quê?
18. Dois discos pesados são ligados por um pequeno eixo de raio bem menor que os dos discos. O sistema é colocado sobre um plano inclinado estreito, de modo que os discos fiquem pendentes lateralmente e o sistema rola para baixo sobre o eixo sem deslizar (Fig. 12-22). Próximo à base do plano, os discos tocam o topo da mesa horizontal e o sistema desloca-se com velocidade translacional muito maior. Explique o fato cuidadosamente.
19. Quando um lenhador corta uma árvore, ele faz um corte ao lado da árvore voltado para onde ele deseja que ela caia. Explique por que. Estaria ele em segurança se ficasse atrás da árvore, no lado diretamente oposto ao da queda?
20. Considere um bastão reto apoiado verticalmente (sem atrito) sobre um pedaço de gelo. Qual seria a trajetória do seu centro de massa se ele caísse?
21. Um ioiô está em repouso sobre uma mesa horizontal e pode rolar livremente (Fig. 12-23). Se o fio do ioiô for puxado por uma força horizontal, como  $F_1$ , de que maneira irá o ioiô rolar? O que acontece quando se aplica uma força como  $F_2$ ? (sua linha de ação passa pelo ponto de contato do ioiô com a mesa). Que acontecerá se o fio for puxado verticalmente pela força  $F_3$ ?
22. Você está olhando para uma roda de um automóvel que viaja à velocidade constante. Alguém diz a você: "O topo da roda está se movendo duas vezes mais rápido que o eixo, mas a base absolutamente não se move". Você aceitaria esta afirmação? Discuta-a.
23. Enuncie as três leis de Newton para o movimento, em termos adequados a corpos em rotação.

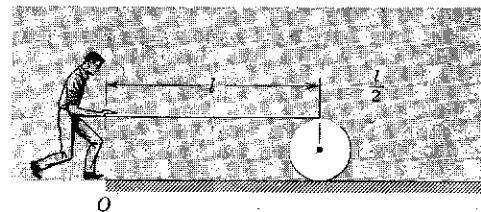


figura 12-21  
Questão 15

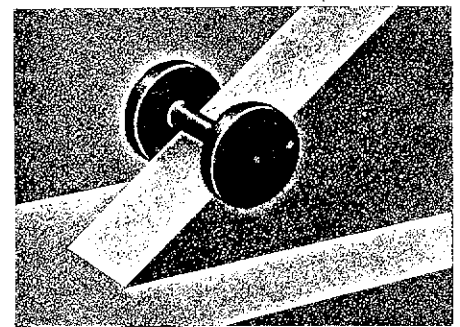


figura 12-22  
Questão 18

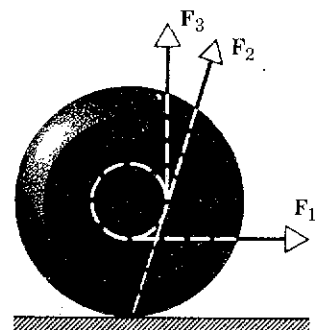


figura 12-23  
Questão 21

# problemas

## SEÇÃO 12-2

- (a) Sabendo que  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  e  $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$  determine o torque  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ .  
(b) Obtenha os componentes do torque, sabendo que  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{F}$  estão contidos no plano  $xOy$ .
- Um binário (ou conjugado) representa um sistema de duas forças de mesmo módulo, com direções iguais, porém com sentidos contrários. Determine o torque de um binário em relação a um ponto qualquer do Universo, em função da distância  $d_0$  entre as duas forças e do módulo  $F$  comum às forças mencionadas.  
Resposta:  $\tau = d_0 F$ .

## SEÇÃO 12-3

- Demonstre que o momento angular, em relação a um ponto qualquer, de uma partícula que se move com velocidade constante, permanece constante durante o movimento.
- Uma partícula  $P$  com massa igual a 3,0 kg tem posição  $\mathbf{r}$  conforme indica a Fig. 12-24. A força  $\mathbf{F}$  está contida no plano da página. Todos os três vetores situam-se em um plano comum. Presuma que  $r = 3,0$  m,  $v = 4,0$  m/s e  $F = 2,0$  N. Calcule: (a) o momento angular da partícula, (b) o torque atuando sobre a partícula. Determine também o sentido desses dois vetores.  
Resposta: (a)  $18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ , para fora da página. (b)  $3,0 \text{ N} \cdot \text{m}$ , para fora da página.
- Se  $r$ ,  $p$  e  $\theta$  são dados, podemos calcular o momento angular de uma partícula usando a Eq. 12-4a. Entretanto, ocorre que, em alguns casos, são dados os componentes  $(x, y, z)$  de  $\mathbf{r}$  e  $(p_x, p_y, p_z)$  de  $\mathbf{p}$ . (a) Mostre, então, que os componentes de  $l$  segundo os eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$  serão dados por:

$$\begin{aligned} l_x &= yp_z - zp_y \\ l_y &= zp_x - xp_z \\ l_z &= xp_y - yp_x \end{aligned}$$

(b) Mostre que, se a partícula estiver se movendo apenas no plano  $xOy$ , o vetor momento angular resultante terá somente o componente segundo  $Oz$ .

- (a) No exemplo 1, expresse  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{r}$  em termos de vetores unitários e calcule  $\boldsymbol{\tau}$ . Faça o mesmo no exemplo 3. (b) No exemplo 1, expresse  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{r}$  em termos de vetores unitários e calcule  $l$ .  
Resposta: (a)  $\boldsymbol{\tau} = mgb\mathbf{k}$ ,  $26\mathbf{k} \text{ N} \cdot \text{m}$ . (b)  $l = mgb\mathbf{k}$

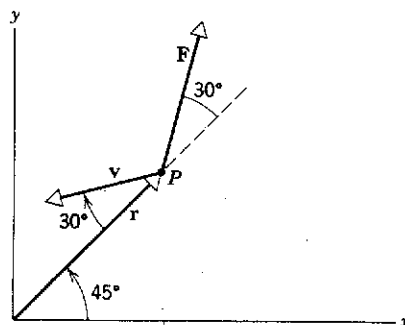


figura 12-24

## SEÇÃO 12-4

- Na Fig. 12-25 são mostradas as linhas de ação e os braços de alavancas dos torques de duas forças em relação à origem  $O$ . Suponha que essas duas forças estejam atuando sobre um corpo rígido articulado por um pino em  $O$ . Todos os vetores mostrados estão no plano da figura. Determine o módulo e o sentido do torque resultante que atua no corpo.
- Duas partículas, cada uma de massa  $m$  e velocidade  $v$ , deslocam-se em sentidos opostos ao longo de linhas paralelas separadas de uma distância  $d$ . Mostre que o vetor momento angular do sistema de partículas é o mesmo qualquer que seja o ponto considerado como origem. Determine o módulo do vetor momento angular.  
Resposta:  $dmv$
- Três partículas, cada qual de massa  $m$ , estão ligadas uma a outra e a um eixo de rotação por três fios leves cada um com um comprimento  $l$  como mostra a Fig. 12-26. O sistema gira em torno do eixo de rotação com velocidade angular  $\omega$  de tal modo que as partículas permanecem em linha reta. Calcule: (a) o momento de inércia do sistema em relação a  $O$ , (b) o momento angular da partícula do meio, (c) o momento angular total das três partículas. Expresse suas respostas em termos de  $m$ ,  $l$  e  $\omega$ .
- Use a Terceira Lei de Newton e calcule o torque interno resultante para um sistema de partículas.  
Resposta: Zero.

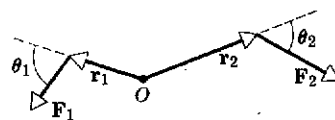


figura 12-25

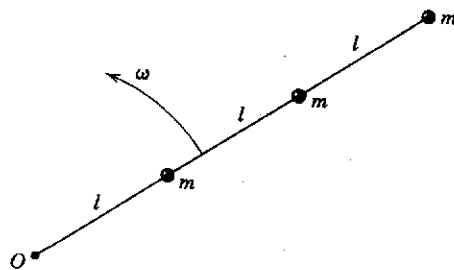


figura 12-26

- Relação entre o Torque Externo Resultante e o Momento Angular de um Sistema de Partículas Relativos ao Centro de Massa do Sistema. Seja  $\mathbf{r}_{\text{cm}}$  o vetor posição do centro de massa,  $C$ , de um sistema de partículas em relação à origem  $O$  de um referencial inercial e seja  $\mathbf{r}_i'$  o vetor posição da  $i$ -ésima partícula, de massa  $m_i$ , em relação ao centro de massa  $C$ . Então,  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{\text{cm}} + \mathbf{r}_i'$  (veja a Fig. 12-27). Agora, defina o momento angular total do sistema de partículas, em relação ao centro de massa  $C$ , como sendo  $\mathbf{L}' = \sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{p}_i'$ , onde  $\mathbf{p}_i' = m_i d\mathbf{r}_i'/dt$ .



(a) Mostre que  $\sum_i \mathbf{p}'_i = m_i d\mathbf{r}_i/dt - m_i d\mathbf{r}_{cm}/dt = \mathbf{p}'_i - m_i \mathbf{v}_{cm}$ . (b) Mostre, em seguida, que  $d\mathbf{L}'/dt = \sum_i \mathbf{r}'_i \times d\mathbf{p}'_i/dt$ . (c) Combine os resultados de (a) e (b) e, usando a definição de centro de massa e a terceira Lei de Newton, mostre que  $\tau'_{ext}$  é a soma de todos os torques externos que atuam no sistema em relação ao seu centro de massa.

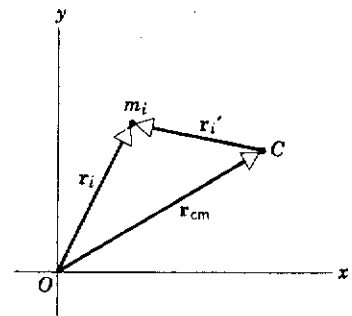


figura 12-27

## SEÇÃO 12-5

12. Suponha que a Terra seja uma esfera de densidade uniforme, com raio igual a  $6,4 \times 10^3$  km e massa igual a  $6,0 \times 10^{24}$  kg. (a) Calcule a energia cinética da rotação da Terra. (b) Suponha que esta energia pudesse ser aproveitada. Durante quanto tempo a Terra poderia fornecer 10 kW de potência a cada um dos seus  $4 \times 10^9$  habitantes?  
Resposta: (a)  $2,6 \times 10^{29}$  J. (b)  $2,06 \times 10^8$  anos.
13. A molécula de oxigênio tem massa total de  $5,3 \times 10^{-26}$  kg e inércia rotacional (momento de inércia) de  $1,94 \times 10^{-46}$  kg · m<sup>2</sup> em relação a um eixo que passa pelo seu centro, perpendicularmente à linha que une os átomos. Suponha que o valor médio da velocidade desta molécula, em um gás, seja de 500 m/s e que a sua energia cinética de rotação seja igual a dois terços de sua energia cinética de translação. Calcule o valor médio de sua velocidade angular.
14. Suponha que os fios de que trata o Probl. 9 sejam todos substituídos por hastes uniformes, cada qual de massa  $M$ . (a) Calcule o momento de inércia total do sistema em relação a  $O$ . (b) Calcule a energia cinética rotacional do sistema.  
Resposta: (a)  $14 ml^2 + 9 Ml^2$ . (b)  $(7m + 9M/2)l^2 \omega^2$ .
15. (a) Mostre que, para rotação em torno de um eixo central, um cilindro maciço de massa  $M$ , e raio  $R$  é equivalente a um aro delgado de massa  $M$  e raio  $R/\sqrt{2}$ . (b) A distância radial, a um dado eixo, na qual a massa de um corpo poderia ser concentrada, sem alterar a sua inércia rotacional em relação ao eixo dado, denomina-se *raio de giração*. Represente por  $k$  o raio de giração e mostre que

$$k = \sqrt{I/M}$$

Esta equação fornece o raio do "aro equivalente" no caso geral.

16. Uma barra fina possui comprimento  $L$  e massa  $m$ . Ela é suspensa livremente por meio de um eixo horizontal que passa numa de suas extremidades. A barra é deslocada lateralmente e, após abandonada, passa a oscilar em torno do eixo horizontal, a velocidade angular na posição mais baixa do centro de gravidade da barra é igual a  $\omega$ . Determine a altura máxima atingida pelo centro de massa da barra em relação à posição mais baixa. Despreze o atrito e a resistência do ar.  
Resposta:  $L^2 \omega^2 / 6g$ .
17. (a) Demonstre que o momento de inércia de uma barra fina, de comprimento  $l$ , em relação a um eixo que passe por seu centro, perpendicularmente ao seu comprimento, é  $I = Ml^2/12$  (veja a Tab. 12-1). (b) Use o teorema dos eixos paralelos para mostrar que, quando o eixo de rotação passa pela extremidade da barra, perpendicularmente ao seu comprimento, tem-se  $I = \frac{1}{3} Ml^2$ .
18. (a) Demonstre que a soma dos momentos de inércia de uma lâmina plana, relativos a dois eixos perpendiculares quaisquer situados no plano da lâmina, é igual ao momento de inércia da lâmina em relação a um eixo perpendicular ao seu plano e que passe pelo ponto de interseção dos outros dois eixos. (b) Aplique este resultado a um disco circular, para determinar o seu momento de inércia em relação a um dos seus diâmetros.  
Resposta: (b)  $MR^2/4$ .
19. Mostre que o momento de inércia de uma placa retangular, de lados  $a$  e  $b$ , em relação a um eixo perpendicular a ela e que passe pelo seu centro, é  $\frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$ .
20. Uma régua de 1 m de comprimento possui espessura desprezível; a largura da régua também é muito menor do que seu comprimento e pode ser desprezada. (a) Obtenha uma expressão para o momento de inércia da régua em relação a um eixo ortogonal ao plano da régua e passando pelo centro de massa da régua; dê a resposta em função da massa  $M$  da régua de comprimento  $L$  da régua. (b) Determine a expressão do momento de inércia da régua em relação a um eixo paralelo ao eixo mencionado no item (a) e situado a uma distância  $d$  do referido eixo. (c) Sendo  $M = 300$  g, calcule o momento de inércia da régua em relação a um eixo paralelo ao eixo mencionado no item (a), passando pela extremidade da régua.  
Resposta: (a)  $ML^2/12$ . (b)  $Md^2 + ML^2/12$ . (c)  $ML^2/3 = 0,03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .
21. Usando a definição de momento de inércia e a relação (12-12) obtenha os *momentos de inércia* apresentados na Tab. 12-1. Obtenha também o *raio de giração* dos sólidos mencionados na Tab. 12-1 (ver definição de raio de giração no Probl. 15).

22. Um motor de automóvel desenvolve um torque igual a  $450 \text{ N} \cdot \text{m}$ . A frequência angular do motor vale  $2\,000 \text{ r.p.m.}$  (a) Calcule a potência em W. (b) Calcule a potência em CV ( $1 \text{ CV} = 745,7 \text{ W}$ ). (c) Supondo que a potência se mantenha constante, qual seria a energia gasta durante uma hora?

Resposta: (a)  $9,4 \times 10^4 \text{ W}$ . (b)  $126,4 \text{ CV}$ . (c)  $8,1 \times 10^9 \text{ J}$ .

23. Um motor de automóvel parte do repouso e é acelerado uniformemente até atingir uma frequência angular de  $2\,500 \text{ r.p.m.}$  Ao atingir este valor, a velocidade angular torna-se constante. O tempo necessário para atingir esta velocidade angular é de  $1,2 \text{ minutos}$ , determine: (a) a aceleração angular, (b) a energia gasta desde o instante inicial até o momento em que a velocidade angular atinge seu valor máximo. (c) Sabendo que a potência máxima do motor vale  $140 \text{ CV}$  calcule o torque máximo. (d) Calcule a energia total gasta desde o instante inicial até o instante  $t = 900 \text{ s}$ .

24. Uma roldana possui raio  $r = 15 \text{ cm}$  e momento de inércia  $I$  em relação ao eixo de rotação central, igual a  $1,0 \times 10^5 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$ . Sobre a periferia da roldana, aplica-se uma força tangencial que varia com o tempo de acordo com a relação  $F = 2t + t^2$ , onde  $F$  está expresso em N e  $t$  em segundos. Sabendo-se que a roldana está inicialmente em repouso, determine: (a) o módulo do torque para  $t = 5,0 \text{ s}$ , (b) a aceleração angular para  $t = 5,0 \text{ s}$ , (c) a expressão da velocidade angular em função do tempo, (d) a velocidade angular para  $t = 5,0 \text{ s}$ , (e) o valor da energia cinética da rotação para  $t = 5,0 \text{ s}$ .

Resposta: (a)  $5,25 \text{ N} \cdot \text{m}$ . (b)  $525 \text{ rad/s}^2$ . (c)  $(r/I)(t^2 + t^3/3)$ .  
(d)  $10^3 \text{ rad/s}$ . (e)  $5,0 \text{ kJ}$ .

25. Uma roda de massa  $M$  e raio de giração  $k$  (veja Probl. 15) gira em torno de um eixo horizontal fixo, que passa pelo seu centro. A roda atrita o eixo cujo raio é  $a$  em um único ponto, sendo  $\mu_c$  o coeficiente de atrito cinético. A velocidade angular inicial da roda é  $\omega_0$ . Suponha uma desaceleração uniforme e determine: (a) o tempo decorrido, (b) o número de rotações efetuadas até que a roda pare.

26. Uma barra uniforme de aço com  $1,50 \text{ m}$  de comprimento e  $7,00 \text{ kg}$  de massa tem fixada em cada extremidade uma pequena esfera de  $1,10 \text{ kg}$  de massa. A barra gira em um plano horizontal, em torno de um eixo vertical que passa por seu ponto médio. Em um dado instante, observa-se que ela está realizando  $40 \text{ rotações/s}$ . Em virtude do atrito com o eixo, ela chega ao repouso  $35 \text{ s}$  mais tarde. Supondo constante o torque do atrito no eixo, calcule: (a) a aceleração angular, (b) o torque retardador devido ao atrito no eixo, (c) o trabalho total realizado pelo atrito no eixo, (d) o número de rotações efetuadas durante os  $35 \text{ s}$ .

Resposta: (a)  $-7,18 \text{ rad/s}^2$ . (b)  $-18,3 \text{ N} \cdot \text{m}$ . (c)  $8,05 \times 10^4 \text{ J}$ .  
(d)  $700 \text{ rotações}$ .

27. O momento angular de um volante, cuja inércia rotacional é igual a  $0,200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  decresce de  $4,0$  até  $3,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$  em um período de  $2,0 \text{ s}$ . Determine: (a) o torque médio que atua sobre o volante durante este período, (b) as rotações efetuadas pelo volante, para uma aceleração angular uniforme, (c) o trabalho realizado, (d) a potência média fornecida pelo volante.

28. Considere a máquina de Atwood (ver Fig. 5-8). Um dos blocos possui massa de  $1,0 \text{ kg}$  e o outro bloco possui massa de  $0,8 \text{ kg}$ . A polia, montada em mancais horizontais, sem atrito, possui raio de  $5,0 \text{ cm}$ . Quando abandonamos o bloco mais pesado, observamos que ele cai  $1,0 \text{ m}$  em  $4,0 \text{ s}$ . Determine: (a) o módulo da aceleração do bloco de  $1,0 \text{ kg}$ , (b) o módulo da aceleração do bloco de  $0,8 \text{ kg}$ , (c) a aceleração angular da polia, (d) o momento de inércia da polia, (e) as tensões na corda.

Resposta: (a)  $0,125 \text{ m/s}^2$ . (b)  $0,125 \text{ m/s}^2$ . (c)  $2,5 \text{ rad/s}^2$ .  
(d)  $0,035 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . (e)  $9,68 \text{ N}$  e  $7,95 \text{ N}$ .

29. Uma esfera uniforme gira em torno de um eixo vertical sem atrito (Fig. 12-28). Uma corda leve, que passa em torno do equador da esfera e por uma polia tem, pendente à outra extremidade, um pequeno objeto pendurado. Qual é a velocidade do objeto, inicialmente em repouso, após ele ter descido uma distância  $h$ ?

30. O momento angular de uma partícula é dado em função do tempo pelo vetor:

$$\mathbf{L} = b\mathbf{i} + ct^3\mathbf{j}$$

onde o módulo  $L$  é dado em  $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ,  $b = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ ,  $c = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^4$  e o tempo  $t$  é dado em segundos. (a) Obtenha a expressão do torque que atua sobre a partícula. (b) Calcule o módulo do torque para  $t = 1 \text{ s}$ .

Resposta: (a)  $\boldsymbol{\tau} = b\mathbf{i} + 3ct^2\mathbf{j}$ . (b)  $\tau = 3,6 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

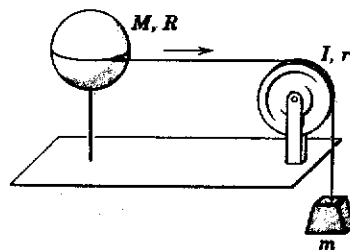


figura 12-28

SEÇÃO 12-7

31. Um aro possui massa igual a  $400 \text{ g}$  e raio de  $30 \text{ cm}$ . O aro está rolando sobre um plano horizontal. A velocidade do centro de massa do aro é igual a  $0,50 \text{ m/s}$ . Calcule: (a) a

velocidade angular do aro, supondo que não haja deslizamento, (b) o trabalho que deve ser realizado para fazê-lo parar.

32. Um automóvel tem massa total igual a duas toneladas. Acelera, a partir do repouso, até atingir uma velocidade de 45 km/h em 8 s. Cada roda possui massa de 35 kg e raio de giração igual a 0,40 m. Determine no final do intervalo de 8 s: (a) a energia cinética de rotação de cada roda, (b) a energia cinética de translação de cada roda, (c) a energia cinética total de cada roda, (d) a energia cinética total do automóvel. Considere a roda como um cilindro maciço (ver Probl. 14).

Resposta: (a)  $1,39 \times 10^3$  J. (b)  $2,73 \times 10^3$  J. (c)  $4,12 \times 10^3$  J. (d)  $1,6 \times 10^6$  J.

33. Mostre que um cilindro deslizará sobre um plano inclinado, cujo ângulo de inclinação é  $\theta$ , quando o coeficiente de atrito estático entre o plano e o cilindro é menor que  $(\frac{1}{3}) \operatorname{tg} \theta$ .

34. Uma escada de 3 m de comprimento encostada a uma parede forma com o solo horizontal um ângulo de  $60^\circ$ . Se ele começar a deslizar, onde estará o eixo instantâneo de rotação?

Resposta: 1,5 m horizontalmente da parede e  $1,5 \sqrt{3}$  m verticalmente acima do solo.

35. Uma esfera sobe, rolando em um plano inclinado de  $45^\circ$ . Na base do plano, o centro de massa da esfera tem velocidade de translação de 5,0 m/s. Calcule: (a) a distância que a esfera percorre ao subir o plano, (b) o tempo decorrido até que a esfera retorne à base do plano, (c) a energia cinética de rotação da esfera, sabendo que  $I = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  e que o raio da esfera é de 15 cm.

36. Um corpo, de raio  $R$  e massa  $m$ , está rolando horizontalmente, sem deslizar, com velocidade  $v$ . Encontrando uma rampa, ele continua a rolar e sobe até à altura  $h$ . Se  $h = 3v^2/4g$ , (a) qual é a inércia rotacional do corpo? (b) Qual deve ser a forma deste corpo?

Resposta: (a)  $\frac{1}{2} mR^2$ . (b) Um cilindro circular maciço.

37. Uma pequena esfera rola, sem deslizar, no interior de um grande hemisfério cujo eixo de simetria é vertical. Ela parte do repouso, no topo. (a) Qual é sua energia cinética na parte mais baixa? Que fração desta energia é de rotação? Que fração é de translação? (b) Qual a força normal que a pequena esfera exerce na parte mais baixa do hemisfério? Seja  $r$  o raio da esfera pequena,  $R$  o do hemisfério e  $m$  a massa da esfera.

38. Um disco uniforme, de massa  $M$  e raio  $R$ , inicialmente em repouso, está apoiado sobre um dos seus lados, sobre uma superfície horizontal sem atrito. Uma força constante  $F$  é, então, aplicada tangencialmente à periferia do disco por meio de um fio que está enrolado nele. Descreva o movimento (rotacional e translacional) subsequente do disco.

Resposta:  $\alpha = 2F/MR$ ;  $a = F/M$ .

39. Uma fita de massa desprezível, é enrolada em volta de um cilindro de massa  $M$  e raio  $R$ . A fita é puxada verticalmente para cima a uma velocidade que evita que o centro de massa se desloque enquanto o cilindro está sendo desenrolado. (a) Qual é a tensão na fita? (b) Qual o trabalho realizado sobre o cilindro quando ele atinge uma velocidade angular  $\omega$ ? (c) Qual o comprimento da fita desenrolada durante este período?

40. Um cilindro de comprimento  $L$  e raio  $R$  tem peso  $W$ . Dois cordões são enrolados em volta de um cilindro, cada qual próximo da extremidade, e suas pontas presas a ganchos fixos no teto. O cilindro é mantido horizontalmente com os dois cordões exatamente na vertical e, em seguida, é abandonado (Fig. 12-29). Determine: (a) a tensão de cada cordão enquanto eles estão se desenrolando e (b) a aceleração linear do cilindro durante a queda.

Resposta: (a)  $W/6$ . (b)  $2g/3$ .

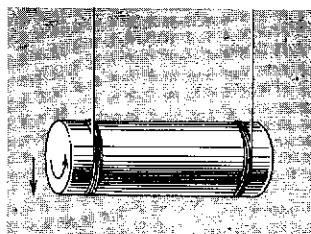


figura 12-29

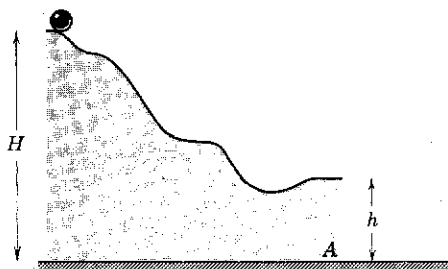


figura 12-30

41. Uma esfera homogênea parte, do repouso, no ponto mais alto do trilho mostrado na Fig. 12-30 e rola, sem deslizar, até abandonar a superfície na parte inferior à direita. Se  $H = 50$  m,  $h = 15$  m e o trilho é horizontal na extremidade direita, determine a distância, à direita do ponto A, em que a bola atinge a linha horizontal da base.

42. Um pedaço de uma fita flexível de comprimento  $l$  é firmemente enrolado. Permite-se, em seguida, que ele se desenrole enquanto desce um declive que forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal, sendo que a parte superior da fita fica presa por um prego (Fig. 12-31). Mostre que a fita se desenrola completamente em um tempo  $T = \sqrt{3l/g \sin \theta}$ .



figura 12-31

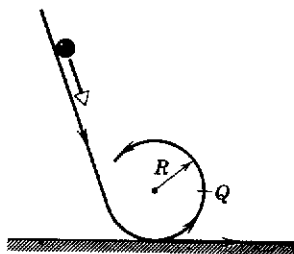


figura 12-32

43. Uma bola de gude, de massa  $m$  e raio  $r$  rola sem deslizar ao longo do trilho curvo mostrado na Fig. 12-32, tendo sido abandonada do repouso em algum lugar sobre a seção reta do trilho. (a) De que altura mínima acima da base do trilho deve a bola ser abandonada a fim de que se mantenha no trilho no topo da circunferência? (O raio é  $R$ ; suponha que  $R \gg r$ ). (b) Se a bola é abandonada da altura  $6R$  acima da base do trilho, qual será o componente horizontal da força atuante sobre ela no ponto  $Q$ ?
44. Um ioiô é formado por dois discos uniformes de raio  $R$  e massa combinada  $m$ . O pequeno eixo que comunica os discos tem raio  $r$  muito pequeno. Um barbante, de comprimento  $(L + R)$  é enrolado em torno do eixo várias vezes por um exímio jogador, que solta o ioiô com velocidade zero. Suponha que o barbante esteja na vertical todas as vezes em que o ioiô desce e sobe. (a) Qual é a tensão no barbante durante a descida e a subsequente subida do ioiô? (b) Qual o tempo que leva para que o ioiô retorne às mãos do jogador?

Resposta: (a)  $mgR^2/(R^2 + 2r^2)$ , subida e descida. (b)  $\frac{2}{r} \sqrt{L(2r^2 + R^2)}/g$ .

45. Um cilindro maciço, uniforme e de raio  $R$  é posto a girar com velocidade angular  $\omega_0$  em torno de seu eixo  $e$ , em seguida, cai verticalmente sobre uma mesa plana e horizontal. A mesa tem atrito, por conseguinte o cilindro começa a se deslocar. Qual é a velocidade do centro de massa do cilindro quando ele passa a rolar sem deslizar?
46. Considere a Fig. 12-33. Um cilindro maciço de raio  $R = 15$  cm e massa  $m = 2,0$  kg, possui uma fita leve e fina enrolada em sua periferia. A fita passa por uma polia de massa desprezível e sem atrito na outra extremidade da fita está preso um corpo de peso igual a 150 N que pende verticalmente. O plano sobre o qual o cilindro se desloca possui uma inclinação de  $30^\circ$ . Supondo que não haja deslizamento, determine: (a) a aceleração linear do centro de massa do cilindro, (b) a aceleração angular do cilindro, (c) qual é a relação entre a aceleração do centro de massa do cilindro e a aceleração do bloco? (d) Calcule a tensão na fita. (e) Qual seria a resposta do item (a) supondo que a massa do cilindro fosse de 8 kg e a massa do bloco fosse igual a 1 kg?

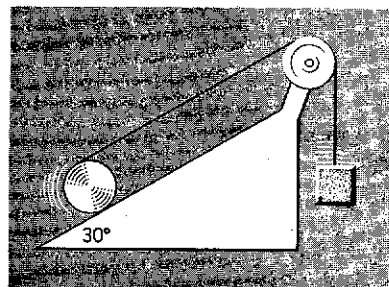


figura 12-33

Resposta: (a)  $a_{cm} = 4,5$  m/s<sup>2</sup>. (b)  $0,67$  rad/s<sup>2</sup>. (c)  $a = 2a_{cm}$ .  
(d)  $T = 12,4$  N. (e)  $a_{cm} = 1,2$  m/s<sup>2</sup>.

47. Uma bola de bilhar é atingida por um taco tal como mostra a Fig. 12-34. A linha de ação do impulso aplicado é horizontal e passa através do centro da bola. A velocidade inicial  $v_0$  desta, seu raio  $R$ , sua massa  $M$  e o coeficiente de atrito  $\mu$  entre a bola e a mesa são todos conhecidos. A que distância a bola se deslocará até que cesse de deslizar sobre a mesa?
48. Suponha que no Probl. 46 em vez da fita do cilindro estar amarrada a um bloco, imagine que o cilindro seja puxado diretamente para cima por uma força  $T$  paralela ao plano. Obtenha uma expressão para o módulo da aceleração do centro de massa do cilindro em função do peso  $p$  e da massa  $m$  do cilindro.



figura 12-34

Resposta:  $a_{cm} = (4T - 2p \sin \theta)/3m$ .

# 13

## *dinâmica da rotação-II e conservação do momento angular*

No Cap. 12 discutiu-se a dinâmica da rotação de um corpo rígido em relação a um eixo fixo num referencial inercial. Mostrou-se que a relação escalar  $\tau = I\alpha$  (Eq. 12-17), na qual aparecem apenas os componentes do torque paralelos ao eixo de rotação, era suficiente para resolver os problemas de dinâmica neste caso especial.

Neste capítulo, consideraremos, primeiramente, a rotação de um corpo rígido em relação a um eixo *móvel* num referencial inercial. Na solução de problemas dinâmicos, neste caso mais geral, utilizaremos a relação vetorial, isto é,

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (12-9)$$

onde o índice em  $\tau_{\text{ext}}$  foi omitido por conveniência.

Posteriormente, voltaremos uma vez mais à rotação de partículas e corpos rígidos em relação a eixos fixos. Desta vez, entretanto, examinaremos especificamente a ação de torques que têm componentes perpendiculares ao eixo de rotação. Nosso ponto de partida, neste caso, não será a Eq. 12-17 ( $\tau = I\alpha$ ), mas a equação mais geral, Eq. 12-9 ( $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ ).

Finalmente, consideraremos sistemas que não estejam sob a ação de torques externos e introduziremos o importante princípio de *conservação do momento angular*.

13-1

INTRODUÇÃO

A Fig. 13-1a mostra um pião que gira em torno do seu eixo de simetria com a ponta fixa na origem  $O$  de um referencial inercial.

13-2

O PIÃO

Sabe-se da experiência que o eixo do pião girante move-se em torno do eixo vertical, descrevendo deste modo um cone. A este movimento chama-se *precessão*. Verifiquemos se os princípios da Mecânica Clássica nos permitem prever este tipo de movimento e em particular, se estes princípios nos fornecem meios de calcular a velocidade angular do movimento de precessão,  $\omega_p$ .

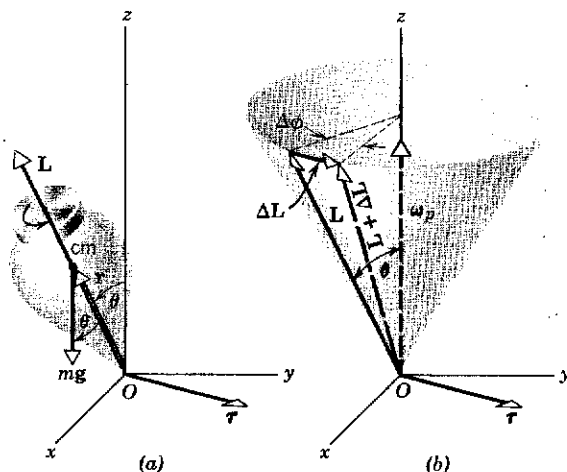


figura 13-1

(a) Precessão de um pião, mostrando o momento angular  $L$ , o peso  $mg$  e o vetor  $r$  que localiza o centro de massa. (b) Cone gerado pelo eixo de precessão do pião. A velocidade angular de precessão é o vetor  $\omega_p$ , desenhado ao longo de  $Oz$  no sentido de  $O$  para  $Z$ .

No instante representado na Fig. 13-1a a velocidade angular do pião, em relação a seu próprio eixo, é  $\omega$ . Seu momento angular, em relação a este mesmo eixo,<sup>1</sup>  $L$ , faz um ângulo  $\theta$  com a vertical.

Duas forças atuam sobre o pião, uma para cima no pivô  $O$ , e a atração gravitacional, ou peso, dirigida para baixo, aplicada no seu centro de massa. O torque da força que passa por  $O$ , em relação a este ponto, é nulo, porque seu braço de alavanca é zero. O peso  $mg$ , entretanto, exerce um torque em relação a  $O$ , dado por:

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times mg,$$

onde  $r$  localiza o centro de massa em relação ao pivô. Esta equação exige que  $\tau$  seja perpendicular ao plano formado por  $r$  e  $mg$ ; a aplicação da regra da mão direita mostra que o sentido de  $\tau$  é o representado na Fig. 13-1a. Convém notar que tanto  $\tau$  quanto  $L$  e  $r$  giram em relação ao eixo, com a velocidade angular de precessão do pião,  $\omega_p$ .

O momento angular de um corpo rígido, sob a ação de um torque, varia de acordo com a relação fundamental (Eq. 12-9)

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (12-9)$$

Sendo  $L$  um vetor, sua variação tanto pode ser em módulo como em direção ou em sentido, ou em todas estas três características simultaneamente.

<sup>1</sup> A direção do vetor  $\omega$  é sempre a mesma do eixo fixo de rotação de um corpo girante, mas a de  $L$  nem sempre (veja Sec. 13-3). Entretanto, para corpos que giram em torno de seu eixo de simetria, as direções de  $\omega$  e de  $L$  são paralelas a esse eixo, se este for fixo. Podemos supor  $\omega$  e  $L$  coaxiais para o pião da Fig. 13-1a se  $\omega \gg \omega_p$ , isto é, se a taxa de precessão for relativamente baixa, tal que o eixo, apesar de não ser fixo, mude de direção lentamente.

A Eq. 12-9 mostra que a variação de  $L$  (isto é,  $dL$ ) deve ter a mesma direção de  $\tau$ . A Fig. 13-1a mostra que  $\tau$  é perpendicular a  $L$ ; deste modo a variação de  $L$ , produzida pela ação do torque, deve também ser perpendicular a  $L$ .

Para examinar este assunto quantitativamente, observemos o pião durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ . Durante este intervalo uma variação de  $L$ ,

$$\Delta L = \tau \cdot \Delta t \quad (13-1)$$

é prevista pela Eq. 12-9 (se  $\Delta t$  for bastante pequeno). Esta variação  $\Delta L$ , que, analogamente a  $\tau$ , é perpendicular a  $L$ , está representada na Fig. 13-1b, onde vemos o cone descrito pelo eixo do pião em precessão; o pião é omitido na figura, para maior clareza do desenho.

O momento angular do pião no fim do intervalo de tempo  $\Delta t$  é a soma vetorial de  $L$  mais  $\Delta L$ . Desde que  $\Delta L$  é perpendicular a  $L$  e supõe-se que seu módulo é muito menor que o módulo de  $L$ , o novo momento angular tem o mesmo módulo que o antigo, mas direção diferente. Assim, a extremidade do vetor momento angular percorre uma circunferência (Fig. 13-1b). Uma vez que este vetor está sempre dirigido ao longo do eixo de rotação do pião, fica explicada qualitativamente a precessão deste corpo.

A velocidade angular de precessão,  $\omega_p$ , pode ser obtida da Fig. 13-1b:

$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}; \quad (13-2)$$

mas, como  $\Delta L \ll L$ , temos (ver Eq. 13-1),

$$\Delta\phi \cong \frac{\Delta L}{L \operatorname{sen} \theta} = \frac{\tau \Delta t}{L \operatorname{sen} \theta}$$

ou

$$\omega_p = \Delta\phi/\Delta t = \tau/L \operatorname{sen} \theta. \quad (13-2a)$$

Da Fig. 13-1a tem-se

$$\tau = rmg \operatorname{sen}(180^\circ - \theta) = rmg \operatorname{sen} \theta$$

e, finalmente,

$$\omega_p = \frac{mgr}{L}. \quad (13-2b)$$

Note que a velocidade angular de precessão independe de  $\theta$  e varia inversamente com o módulo do momento angular. Se o momento angular for grande, a velocidade de precessão angular será pequena.

Podemos exprimir a Eq. 13-2b em forma vetorial. Começemos por reescrever a Eq. 13-2a como

$$\tau = \omega_p L \operatorname{sen} \theta.$$

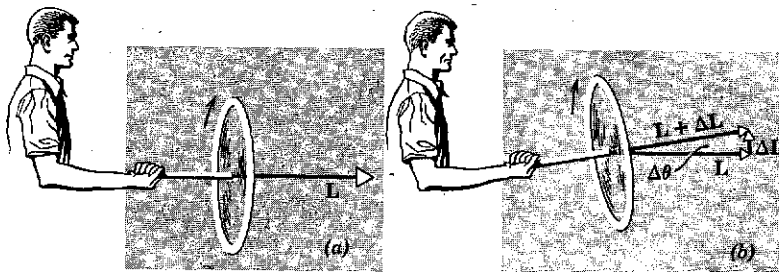
Ora,  $\omega_p$  é um vetor que aponta verticalmente para cima na Fig. 13-1b, e  $\theta$ , na figura, é o ângulo entre  $\omega_p$  e  $L$ . O segundo membro da equação acima pode ser identificado como o módulo do produto vetorial

$$\omega_p \times L,$$

$$\tau = \omega_p \times L. \quad (13-3)$$

Esta é a expressão vetorial geral que relaciona a velocidade angular de precessão com  $\tau$  e  $L$ ; o estudante deve mostrar que a Eq. 13-2b pode ser imediatamente obtida de 13-3. A aplicação da regra da mão direita à Fig. 13-1b mostrará que a ordem dos fatores no segundo membro da Eq. 13-3 é correta, isto é,  $\omega_p \times L$  dá o sentido, a direção e o módulo corretos de  $\tau$ .

Um estudante segura uma roda de bicicleta, que gira com velocidade angular  $\omega$  relativamente grande, com seu eixo na horizontal, como na Fig. 13-2a. Seu instrutor pede-lhe para girar o eixo rapidamente (por um intervalo de tempo  $\Delta t$ ), de modo que este passe a formar um ângulo  $\Delta\theta$  com a horizontal, como mostra a Fig. 13-2b. Ele pede também ao estudante que mantenha o eixo da roda de bicicleta sempre no mesmo plano vertical. Que torque o estudante deve aplicar ao eixo, a fim de poder seguir estas instruções?



## EXEMPLO 1

figura 13-2

(a) Um estudante segura uma roda de bicicleta, pesada, de aro maciço, que gira rapidamente, e (b) inclina o eixo para cima, em relação à horizontal, de um pequeno ângulo.

O estudante saberá, através do esforço em seus pulsos, que ele deve exercer um torque no eixo, a fim de mantê-lo na posição horizontal. Este torque, que é necessário para contrabalançar o efeito da força de gravidade que age no centro de massa, é paralelo ao eixo horizontal e perpendicular ao plano da Fig. 13-2. O estudante terá de aplicar este torque, esteja a roda girando ou não.

Se o estudante deslocar o eixo da roda para cima, verificará que ela sofrerá uma guinada para a sua direita, talvez tão violentamente que ele não conseguirá manter o eixo no plano vertical. Para manter o eixo neste plano, enquanto desloca o eixo para cima, ele deverá aplicar um torque ao eixo (em torno de um eixo quase vertical) que tende a rodá-lo para sua esquerda, a fim de contrabalançar este efeito. Vejamos por que isso acontece.

Inclinando o eixo para cima, muda-se seu momento angular  $L$ , no intervalo de tempo  $\Delta t$ , de um valor  $\Delta L$ , como mostra a Fig. 13-2b. Então, durante este intervalo de tempo, o estudante deve aplicar um torque médio sobre a roda, dado pela Eq. 12-9.

$$\bar{\tau} = \frac{\Delta L}{\Delta t};$$

o módulo de  $\bar{\tau}$  é dado por:

$$|\bar{\tau}| = \frac{\Delta L}{\Delta t} = L \operatorname{sen} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Este torque médio tem a mesma direção e sentido de  $\Delta L$ , isto é, ele é aproximadamente vertical e dirigido para cima, se o ângulo  $\Delta\theta$  da Fig. 13-2b não for muito grande. Vê-se que tal torque tende a girar o eixo para a esquerda, se a roda não estiver girando. Este torque *deve* ser fornecido pelo estudante quando ele deslocar o eixo da roda girante para cima; se ele não o fizer o eixo não permanecerá no plano vertical.

O estudante deve realizar essas experiências, quando estiver manipulando as relações entre os vetores  $L$ ,  $\Delta L$  e  $\bar{\tau}$ . Se uma roda não for disponível, utilize um giroscópio de brinquedo, apesar de este último não proporcionar tão boa sensação cinestésica de  $\tau = dL/dt$  como uma roda rápida de aro maciço.



A experiência da Fig. 13-2 é análoga a uma outra experiência, na qual pede-se ao estudante para movimentar um objeto pesado (amarrado a uma corda), em um círculo horizontal, com movimento circular uniforme. Nesta última experiência o estudante deve variar a direção e o sentido do *momento linear*  $\mathbf{p}$ , durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ , sem alterar o seu módulo. Para poder fazer isso, ele deverá aplicar uma *força* sempre perpendicular a  $\mathbf{p}$  (no sentido de  $\Delta \mathbf{p}$ ), isto é, orientada radialmente para o centro. Na experiência da Fig. 13-2 o estudante deve alterar, durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a direção e o sentido do *momento angular*  $\mathbf{L}$  da roda, mantendo constante seu módulo. Para poder fazer isso, ele deve aplicar um *torque* perpendicular a  $\mathbf{L}$  (paralelo a  $\Delta \mathbf{L}$ ), isto é, vertical e dirigido para cima.<sup>2</sup>

Nesta seção, nosso propósito é examinar a relação entre o momento angular e a velocidade angular de partículas e corpos rígidos que giram em relação a um eixo fixo, em um referencial inercial.

Consideremos, inicialmente, uma partícula de massa  $m$ , que descreve, com velocidade escalar  $v$ , um círculo em torno do eixo  $Oz$  do referencial inercial representado na Fig. 13-3. Sua velocidade angular  $\omega$  é paralela ao eixo  $Oz$  e aponta para cima. Seu momento angular  $\mathbf{l}$ , em relação à origem  $O$  do referencial, é dado pela Fig. 12-3, ou seja,

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

onde  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$  ( $= m\mathbf{v}$ ) são mostrados na figura. O vetor  $\mathbf{l}$  é perpendicular ao plano formado por  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$ , o que significa que  $\mathbf{l}$  não é paralelo a  $\omega$ . Note que  $\mathbf{l}$  tem um componente  $l_z$  (vetorial) paralelo a  $\omega$ , mas tem, também, um outro componente (vetorial)  $l_\perp$  perpendicular a  $\omega$ . Note ainda, que, se escolhermos nossa origem no plano da trajetória da partícula,  $\mathbf{l}$  será paralelo a  $\omega$ .

O resultado, talvez inesperado, de  $\mathbf{l}$  e  $\omega$  não serem paralelos neste caso simples, pode causar certo espanto no estudante. Entretanto, este resultado está perfeitamente de acordo com a relação

### 13-3 MOMENTO ANGULAR E VELOCIDADE ANGULAR

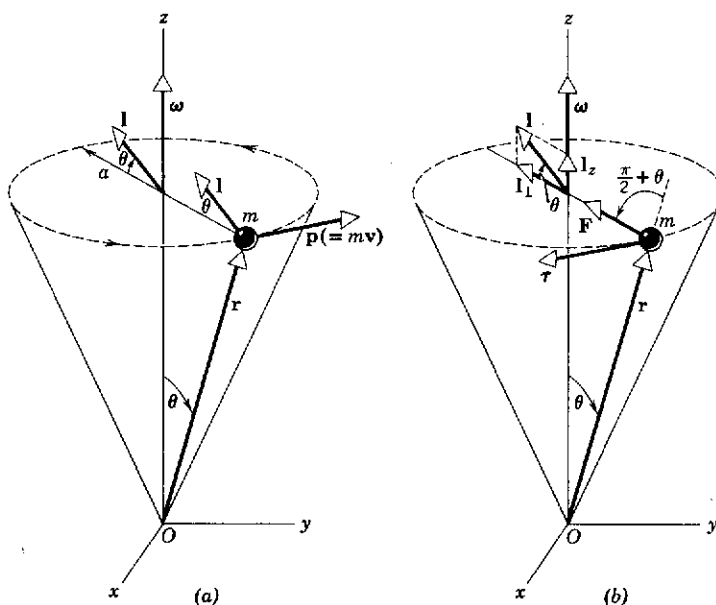


figura 13-3  
(a) Uma partícula de massa  $m$  gira com velocidade  $v$  em torno do eixo  $Oz$  de um referencial inercial, descrevendo um círculo de raio  $a$ . Indica-se o momento angular em relação a  $O$ ,  $\mathbf{l}$  ( $= \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ); por comodidade, este vetor é também desenhado com origem no centro do círculo. (b) A mesma configuração, indicando  $\mathbf{l}$  e seus componentes, bem como a força centrípeta  $\mathbf{F}$  e o torque  $\tau$  em relação a  $O$ .

<sup>2</sup> Esta analogia é explorada por A. E. Benfield, *American Journal of Physics*, setembro, 1958. Veja também o Probl. 5.

$\tau = d\mathbf{L}/dt$  para o torque que atua sobre uma partícula. O vetor  $\mathbf{l}$  varia com o tempo, enquanto a partícula se move, a variação sendo em direção e não em módulo, como foi visto no caso do pião da seção anterior. Como o segundo membro da relação precedente ( $= d\mathbf{l}/dt$ ) é diferente de zero, o primeiro membro ( $= \tau$ ) também o é, ou seja, um torque em relação a  $O$  deve atuar na partícula.

Realmente, tal torque existe. Para que a partícula se mova numa circunferência, uma força centrípeta  $\mathbf{F}$  deve atuar sobre ela, como mostra a Fig. 13-3b. Podemos imaginar que  $\mathbf{F}$  seja fornecida pela tensão de uma corda amarrada à partícula, fazendo-a rodar em torno de  $Oz$ . O torque em relação a  $O$  é fornecido por  $\mathbf{F}$ , sendo dado pela Eq. 12-1, ou seja,

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

O torque  $\tau$  é tangente à circunferência (perpendicular ao plano formado por  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{F}$ ). Sua direção e sentido são mostrados na Fig. 13-3b, o que o estudante pode verificar, aplicando a regra da mão direita.

**EXEMPLO 2**

Mostre que, no movimento da partícula da Fig. 13-3, a relação  $\tau = d\mathbf{l}/dt$  é quantitativamente verificada.

A prova neste caso segue a mesma linha de raciocínio da Seq. 13-2 para o pião porque, do ponto de vista vetorial, os dois problemas são idênticos. Em ambos os casos temos a precessão de um momento angular ( $\mathbf{L}$  para o pião e  $\mathbf{l}$  para a partícula da Fig. 13-3) em relação a um eixo vertical, a uma taxa que chamaremos  $\omega_p$  para o pião e  $\omega$  para a partícula. Em ambos os casos o torque é sempre perpendicular ao plano formado por  $\mathbf{L}$  (ou  $\mathbf{l}$ ) e  $\omega_p$  (ou  $\omega$ ). Deste modo, como os dois problemas são formalmente idênticos, basta perguntar se a partícula da Fig. 13-3 obedece à equação vetorial da precessão ( $\tau = \omega_p \times \mathbf{L}$ ; Eq. 13-3). Esta equação foi obtida, no caso do pião, diretamente da relação  $\tau = d\mathbf{L}/dt$  (Eq. 12-9), sendo equivalente a esta. Tomando-se o módulo da relação  $\tau = \omega_p \times \mathbf{L}$ , temos:

$$\tau = \omega l \sin(90^\circ - \theta) = \omega l \cos \theta, \tag{13-3}$$

na qual substituímos  $\omega_p$  por  $\omega$  e  $L$  por  $l$ , notando que, na Fig. 13-3a, o ângulo entre  $\omega$  e  $\mathbf{l}$  é  $90^\circ - \theta$ .

Usando ainda a notação da Fig. 13-3a temos, para  $\tau$  e  $l$ :

$$\tau = Fr \sin(90^\circ + \theta) = m\omega^2(r \sin \theta) r \cos \theta$$

e

$$l = rp \sin 90^\circ = rmv = r m(\omega r \sin \theta),$$

onde  $r \sin \theta$  é o raio  $a$  da circunferência descrita pela partícula,  $(90^\circ + \theta)$  o ângulo entre  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{F}$ , e  $90^\circ$  o ângulo entre  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$ . Substituindo na Eq. 13-3 temos:

$$m\omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta = \omega(m\omega r^2 \sin \theta) \cos \theta,$$

que é uma identidade. Em termos de *módulo* provamos nossa afirmativa inicial. O estudante deverá examinar a Fig. 13-3 para certificar-se que a *direção* e o *sentido* de  $\tau$  são os de  $d\mathbf{l}/dt$  (Eq. 12-7) ou, alternativamente, de  $\omega \times \mathbf{l}$  (Eq. 13-2b).

Agora, investiguemos a relação entre  $\mathbf{l}$  e  $\omega$  para a partícula da Fig. 13-3. Do Ex. 2, temos:

$$l = mr^2 \omega \sin \theta.$$

Da Fig. 13-3b, vemos que  $l_z = l \sin \theta = m\omega r^2 \sin^2 \theta$ .

Ora,  $r \sin \theta = a$ , raio da circunferência descrita pela partícula.

Isto leva a

$$l_z = ma^2\omega, \quad (13-4)$$

na qual  $ma^2$  é a inércia rotacional, ou momento de inércia,  $I$ , da partícula em relação ao eixo  $Oz$ . Assim,

$$l_z = I\omega, \quad (13-5)$$

que deve ser comparada com a Eq. 12-18 ( $L = I\omega$ ) para a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo. Note que a relação vetorial  $\mathbf{l} = I\boldsymbol{\omega}$  não é correta neste caso, porque  $\mathbf{l}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  não são paralelos. Entretanto,  $l_z$  e  $\omega$  o são, portanto, poderíamos escrever a Eq. 13-5 sob forma vetorial, como

$$l_z = I\omega$$

Adicionemos uma outra partícula, de massa  $m$ , ao sistema da Fig. 13-3. Consideremos o caso especial em que esta segunda partícula seja colocada na mesma órbita que a anterior e que ela se mova com a mesma velocidade escalar, mas sempre em um ponto diametralmente oposto à primeira, em relação ao eixo de rotação. O momento angular  $\mathbf{l}_2$ , em relação a  $O$ , para esta segunda partícula, terá o mesmo módulo de  $\mathbf{l}_1$  e fará um ângulo  $(90^\circ - \theta)$  com o eixo  $Oz$ , mas terá orientação diferente em relação a este eixo. Como indica a Fig. 13-4a,  $\mathbf{l}_2$  estará em um plano formado por  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{l}_1$ , mas em lado oposto ao de  $\mathbf{l}_1$ , relativamente ao eixo  $Oz$ . Os vetores  $\mathbf{l}_1$  e  $\mathbf{l}_2$  formam um ângulo de  $180^\circ - 2\theta$ .

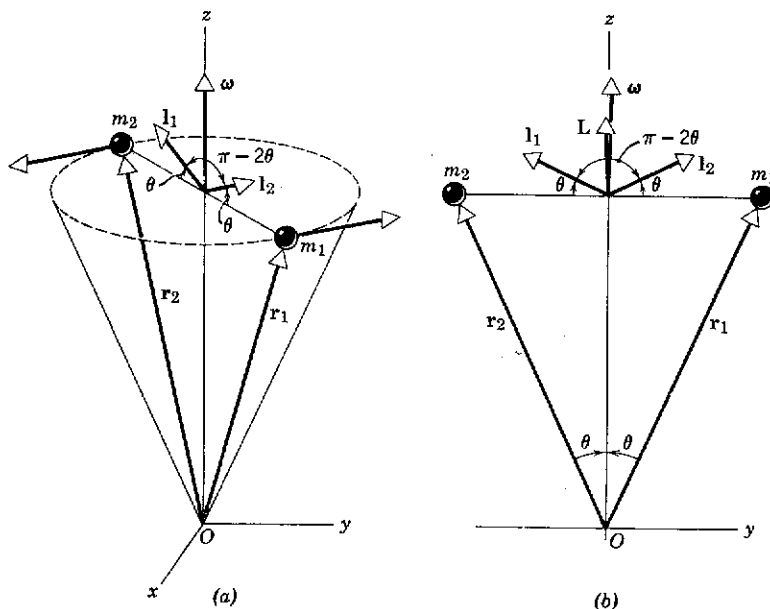


figura 13-4

(a) Duas partículas de massa  $m$  giram como na Fig. 13-3, mantendo-se porém em posições diametralmente opostas. (b) Corte transversal através dos centros das partículas e da origem do referencial, mostrando que o momento angular total  $\mathbf{L} (= \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2)$  do sistema de duas partículas tem a direção do eixo de rotação e o mesmo sentido que  $\boldsymbol{\omega}$ .

O momento angular total  $\mathbf{L}$  do sistema de duas partículas é a soma vetorial dos momentos angulares das partículas separadas, isto é,  $\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$ . O vetor resultante  $\mathbf{L}$ , como mostra a Fig. 13-4b, é paralelo ao eixo  $Oz$  (direção e sentido de  $\boldsymbol{\omega}$  e tem módulo constante. Note que esta afirmação é verdadeira, qualquer que seja a localização da origem  $O$  ao longo do eixo de rotação.

A constância (módulo, direção e sentido) do vetor  $\mathbf{L}$  do sistema de duas partículas acarreta na anulação de sua derivada em relação ao tempo, ou seja,  $d\mathbf{L}/dt = 0$ , que, por sua vez (Eq. 12-9), implica que  $\tau = 0$  para este sistema. O estudante deve procurar se convencer disto, analisando a Fig. 13-3b; os torques que atuam nas duas partículas, em relação a  $O$ , são iguais em módulo mas têm sentidos opostos, acarretando deste modo num torque resultante nulo.

Os vetores  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{L}$  do sistema são paralelos, apesar de esse não ser o caso para as partículas consideradas individualmente; isso se explica pelo fato de as duas partículas terem a mesma massa, serem diametralmente opostas e estarem à mesma distância do eixo de rotação.

Podemos agora passar a um corpo rígido, que nada mais é do que um sistema de muitas partículas rigidamente ligadas. Se o corpo for simétrico em relação ao eixo de rotação, isto é, se, para todo elemento de massa do corpo, existir um outro elemento diametralmente oposto e à mesma distância do eixo de rotação, neste caso o corpo pode ser considerado como um conjunto de pares de partículas do tipo que acabamos de estudar. Como  $\mathbf{L}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  são paralelos para tais pares, concluímos que o serão para um corpo rígido que possua este tipo de simetria. Observe que na Tab. 12-1, todos os sistemas, exceto  $f$  e  $j$ , satisfazem a este critério.

Para tais corpos rígidos e simétricos  $\mathbf{L}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  são paralelos. Podemos, então, escrever a Eq. 12-18 ( $|\mathbf{L}| = I|\boldsymbol{\omega}|$ ) sob forma vetorial,

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \quad (13-6)$$

O estudante, entretanto, não deve nunca esquecer, que, se  $\mathbf{L}$  for o momento angular *total*, a Eq. 13-6 se aplica *apenas* a corpos rígidos que tiverem simetria<sup>3</sup> em relação ao eixo (fixo) de rotação. Se  $\mathbf{L}$  representar o componente vetorial do momento angular paralelo ao eixo de rotação, isto é, se  $\mathbf{L}$  representar  $\mathbf{L}_z$ , a Eq. 13-6 será equivalente à Eq. 12-8 e será válida para qualquer corpo rígido, simétrico ou não, que gire em torno de um eixo fixo.

### EXEMPLO 3

Resolva o problema do Ex. 5 do Cap. 12 aplicando diretamente a Eq. 12-9 ( $\tau = d\mathbf{L}/dt$ ).

Sobre o sistema representado pela Fig. 12-12, que consiste da roda  $M$  e da massa  $m$ , agem duas forças externas, a atração da gravidade  $mg$  sobre a massa  $m$ , dirigida para baixo, e a força, dirigida para cima, exercida pelos rolamentos no eixo do cilindro, que tomaremos como nossa origem. A tração na corda é uma força interna. Apenas a primeira dessas forças externas exerce um torque em relação à origem e seu módulo é  $(mg)R$ .

O momento angular do sistema, em relação à origem, em qualquer instante, é

$$|\mathbf{L}| = I\omega + (mv)R,$$

onde  $I\omega$  é o momento angular do disco (simétrico) e  $mvR$  o momento angular (= momento linear  $\times$  braço de alavanca) do corpo que cai, em relação à origem.

<sup>3</sup> Aqui os requisitos de simetria foram simplificados. Cada corpo rígido, qualquer que seja sua forma, tem três eixos perpendiculares que passam pelo seu centro de massa e em relação aos quais  $\mathbf{L}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  são paralelos, sendo relacionados portanto, por  $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ . Esses eixos são chamados *eixos principais*. O eixo de um sólido de revolução, assim como os eixos perpendiculares àquele e que passem pelo centro de massa do corpo, são sempre eixos principais. Entretanto, para eixos de rotação que não são eixos principais do corpo, em geral  $\mathbf{L}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  não são paralelos. Veja Arnold Sommerfeld, *Mechanics*, Cap. IV, Academic Press, New York (1964).

Ambas as parcelas de  $L$  têm mesmo sentido, isto é, para fora, e mesma direção, perpendicular ao plano da Fig. 12-12.

Aplicando a relação  $\tau = dL/dt$  (em forma escalar) temos:

$$\begin{aligned} (mg)R &= \frac{d}{dt}(I\omega + mvr) \\ &= I\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + mR\left(\frac{dv}{dt}\right) \\ &= I\alpha + mRa. \end{aligned}$$

Como  $a = \alpha R$  e  $I = \frac{1}{2}MR^2$ , teremos:

$$mgR = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{a}{R}\right) + mRa$$

ou, finalmente,

$$a = \frac{2mg}{M + 2m}.$$

### EXEMPLO 4

Um exemplo simples de corpo rígido assimétrico girante é o de um haltere cujo eixo forma um ângulo  $\theta$  com o eixo de rotação, o qual passa pelo seu centro de massa. O sistema gira com velocidade angular constante  $\omega$  em torno deste eixo, o vetor  $\omega$  sendo pois paralelo a esse eixo e tendo o sentido indicado na Fig. 13-5. A experiência mostra que tal sistema é "desequilibrado" e que, se não fosse rigidamente ligado ao eixo vertical no ponto  $C$ , o corpo se afastaria deste, quando as velocidades angulares fossem elevadas. O sistema tenderia a mover-se até que o ângulo  $\theta$  se tornasse igual a  $90^\circ$ ; nesta posição limite ele se tornaria simétrico em relação ao eixo vertical.

(a) Mostre que, no caso assimétrico mostrado na Fig. 13-5,  $L$  e  $\omega$  não são paralelos.

Cada partícula de massa  $m$  tem um momento angular em relação a  $C$  dado por  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . No instante representado, a partícula de cima está entrando perpendicularmente na página, enquanto a de baixo está saindo perpendicularmente (da página). Os vetores momentos das duas massas são, portanto, iguais e têm sentidos opostos, o mesmo acontecendo com seus vetores de posição em relação a  $C$ . Logo, pela aplicação da regra da mão direita a  $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , verificamos que os vetores  $\mathbf{l}$  das duas partículas são iguais e que sua soma, vetor momento angular total  $\mathbf{L}$  do haltere, é o vetor representado na figura, perpendicular à barra e está contido no plano da página. Logo,  $\mathbf{L}$  e  $\omega$ , naquele instante, não eram paralelos. Vê-se claramente que, à medida que o haltere gira, o vetor momento angular também gira com velocidade angular constante em torno do eixo de rotação.

(b) O fato de  $\mathbf{L}$  e  $\omega$  não serem paralelos é perfeitamente consistente com a relação fundamental  $\tau = d\mathbf{L}/dt$ . Vimos, anteriormente (veja Seq. 13-2 e Ex. 1), que ao vetor momento angular de módulo constante, que gira em torno de um eixo fixo, deve estar associado um torque  $\tau$ , perpendicular ao plano formado por  $\mathbf{L}$  e  $\omega$ . No instante representado na Fig. 13-5, este plano é o da figura. Existe tal torque neste problema? Qual é sua origem?

Tal torque realmente existe e decorre das forças desequilibradas laterais, exercidas pela suspensão no eixo e transmitidas do eixo ao haltere. No instante mostrado na figura a parte superior do haltere tende a se afastar do eixo fixo para a direita. O eixo é puxado para a direita, pressionando o rolamento que, por sua vez, exerce uma força  $F$  sobre o eixo e dirigida para a esquerda. De modo semelhante, a parte inferior do haltere tende a mover-se para a esquerda. O eixo é então puxado para a esquerda contra o rolamento inferior, que exerce sobre aquele uma força  $-F$  dirigida para a direita. O torque  $\tau$  em relação a  $C$ , que resulta da ação destas forças, tem direção perpendicular à página, e aponta no sentido que sai do livro; é, portanto, normal ao plano formado por  $\mathbf{L}$  e  $\omega$ , quer dizer,  $\tau$  está na direção exata que explica o movimento giratório de  $\mathbf{L}$  (o estudante deve verificar esta afirmação).

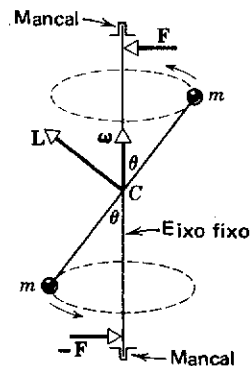


figura 13-5  
Exemplo 4.

As forças  $F$  e  $-F$  estão no plano da Fig. 13-5, no instante mostrado. À medida que o haltere gira, as forças, e portanto o torque  $\tau$ , giram também, de modo que  $\tau$  permaneça sempre perpendicular ao plano formado por  $L$  e  $\omega$  (compare com a Fig. 13-1). As forças  $F$  e  $-F$ , que giram, ocasionam o aparecimento de trepidações nos rolamentos superior e inferior. Os rolamentos devem ser suficientemente fortes para resistirem a essas trepidações, que não ocorreriam se o corpo fosse simétrico, caso em que ele se moveria suavemente.

As trepidações nos rolamentos e as deformações internas podem originar sérios problemas práticos em peças móveis de máquinas, tais como rotores de turbinas que giram a altas velocidades. Apesar de projetados para serem simétricos, tais rotores, devido a pequenos erros na colocação de pás, por exemplo, podem ser ligeiramente assimétricos. A simetria pode ser restaurada pela remoção ou adição de metal em pontos apropriados; isto é feito em balanças dinâmicas, que permitem determinar quantitativamente as trepidações e indicam automaticamente as correções adequadas. São bastante conhecidas as pequenas peças de chumbo que se colocam nas bordas das rodas de automóveis, a fim de reduzir as trepidações a altas velocidades.

Vimos, no Cap. 12, que a taxa de variação em relação ao tempo do momento angular de um sistema de partículas, em relação a um ponto fixo em um referencial inercial (ou em relação ao centro de massa), é igual à soma dos torques externos que atuam sobre o sistema, isto é,

$$\tau_{\text{ext.}} = \frac{dL}{dt} \quad (12-9)$$

Suponhamos que  $\tau_{\text{ext.}} = 0$ ; então  $dL/dt = 0$  e logo  $L =$  vetor constante.

*Quando o torque externo resultante atuando sobre um sistema é nulo, o vetor momento angular total do sistema permanece constante. Este princípio é chamado princípio de conservação do momento angular.*

Para um sistema de  $n$  partículas, o momento angular total  $L$ , em relação a um dado ponto, é:

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_n.$$

Quando o torque externo resultante é nulo, temos:

$$L = \text{uma constante} = L_0, \quad (13-7)$$

sendo  $L_0$  o momento angular total constante. Os momentos angulares das partículas podem variar, porém sua soma vetorial  $L_0$  permanece constante, quando o torque externo resultante é nulo.

O momento angular é uma grandeza vetorial, logo a Eq. 13-7 equivale a três equações escalares, uma para cada eixo de coordenadas que passam pelo ponto de referência. A conservação do momento angular fornece-nos, portanto, três condições para o movimento de um sistema ao qual ela se aplica.

Para um sistema que consiste de um corpo rígido que gira em relação a um eixo fixo em um referencial inercial (o eixo  $Oz$ , por exemplo), temos:

$$L_z = I\omega \quad (13-6)$$

### 13-4 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

onde  $L_z$  é o componente vetorial do momento angular paralelo ao eixo de rotação e  $I$  é a inércia rotacional em relação ao mesmo eixo. A inércia rotacional  $I$  de um corpo em rotação pode variar devido ao rearranjo de suas partes. Entretanto, se o torque externo for nulo,  $L_z$  permanecerá constante; logo, deverá ocorrer uma variação compensadora em  $\omega$ . O princípio de conservação do momento angular é expresso neste caso por:

$$I\omega = I_0\omega_0 = \text{constante.} \quad (13-8)$$

A Eq. 13-8 tanto é válida para a rotação em torno de um eixo fixo, quanto para a rotação em torno de um eixo que passe pelo centro de massa do sistema e que se mova de modo a ficar sempre paralelo a si mesmo. (Veja nota do rodapé da Sec. 12-5.)

Acrobatas, bailarinos, saltadores e patinadores aplicam este princípio constantemente. Como  $I$  varia com o quadrado da distância das partes do corpo ao eixo de rotação, é possível produzir grandes variações desta grandeza esticando ou dobrando braços e pernas. Consideremos, por exemplo, o mergulhador<sup>4</sup> representado na Fig. 13-6. Suponhamos que ele tenha uma dada velocidade angular  $\omega_0$ , em relação a um eixo horizontal que passe por seu centro de massa, no instante em que ele se desloca da borda do trampolim. Suponhamos, ainda, que  $\omega_0$  seja tal que ele daria meia-volta imediatamente antes de atingir a água. Se, no mesmo tempo, ele desejar dar um salto mortal de uma volta e meia, em vez de um de meia-volta, deverá triplicar sua velocidade angular. A força de atração gravitacional é a única força externa sobre o saltador e esta não exerce torque em relação ao seu centro de massa. Logo, seu momento angular é conservado. Então,  $I_0\omega_0 = I\omega$ ; mas  $\omega = 3\omega_0$ , isto é, o saltador deverá variar sua inércia rotacional, em relação ao eixo

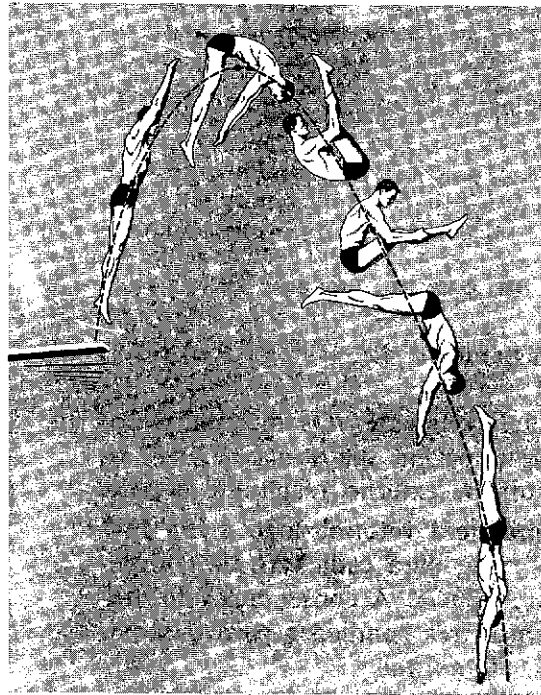


figura 13-6

Um mergulhador deixa o trampolim, com os braços e as pernas esticados e com pequena velocidade angular inicial. Como não há torques aplicados em relação ao seu centro de massa,  $L (= I\omega)$  é constante enquanto ele está no ar. Ao juntar braços e pernas,  $I$  diminui e, portanto,  $\omega$  aumenta. Quando ele novamente estende os membros, sua velocidade volta a assumir o valor inicial. Observe o movimento parabólico do seu centro de massa, que é comum a todo movimento bidimensional sob a ação da gravidade.

<sup>4</sup> Ver "The Mechanics of Swimming and Diving" por R. L. Page em *The Physics Teacher*, fevereiro, 1976, para uma análise biomecânica interessante.

horizontal que passa pelo seu centro de massa, de  $I_0$  para  $I$ , de modo que  $I$  seja igual a  $\frac{1}{3}I_0$ . Ele consegue produzir esta variação encolhendo os braços e as pernas, de modo a aproximá-los do centro de seu corpo. Quanto maior for sua velocidade angular inicial e quanto maior for sua capacidade de reduzir seu momento de inércia, maior será o número de revoluções que ele poderá efetuar em dado intervalo de tempo.

Convém notar que a energia cinética de rotação do saltador não é constante. De fato, no nosso exemplo, desde que

$$I\omega = I_0\omega_0$$

e

$$I < I_0$$

segue-se que

$$\frac{1}{2}I\omega^2 > \frac{1}{2}I_0\omega_0^2,$$

ou seja, a energia cinética do saltador *aumentou*. Este aumento de energia é fornecido pelo trabalho realizado pelo saltador, ao encolher seus membros.

De maneira semelhante, um patinador ou bailarino pode aumentar ou diminuir sua velocidade angular de rotação em relação a um eixo vertical. O que um gato faz para cair sempre em pé é aplicar o mesmo princípio, seu rabo sendo um apêndice útil, mas não indispensável.

Um objeto pequeno, de massa  $m$ , está amarrado a um cordão leve que passa por um tubo oco. Segura-se o tubo com uma das mãos e com a outra o cordão. Põe-se o objeto a girar numa circunferência de raio  $r_1$ , com velocidade escalar  $v_1$ . Puxando para baixo o cordão, o raio é encurtado para  $r_2$  (Fig. 13-7). Determine a nova velocidade linear  $v_2$  e a nova velocidade angular  $\omega_2$  do objeto em função dos valores iniciais  $v_1$ ,  $\omega_1$  e dos dois raios.

O puxão aplicado para baixo no cordão é transmitido ao objeto como força radial. Em relação ao centro de rotação, o torque exercido por essa força é nulo. Como não há torque agindo no objeto, em relação ao eixo de rotação, seu momento angular na direção do eixo é constante. Logo, momento angular inicial = momento angular final, ou seja,

$$mv_1r_1 = mv_2r_2$$

e

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{r_1}{r_2}.$$

Mas, como  $r_1 > r_2$ , a velocidade do objeto aumenta com a aplicação da força para o centro.

Desde que  $v_1$  é igual a  $\omega_1 r_1$  e  $v_2$  igual a  $\omega_2 r_2$ , a relação, em termos da velocidade angular, será:

$$mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2$$

e

$$\omega_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \omega_1,$$

portanto o aumento de velocidade angular é ainda maior (veja Probl. 31). Qual é o efeito da força gravitacional (peso do objeto) nesta análise?

## EXEMPLO 5

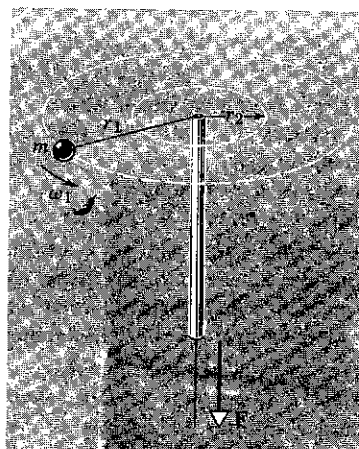


figura 13-7

Exemplo 5. Uma massa presa à extremidade de um fio descreve um círculo de raio  $r_1$  com velocidade angular  $\omega_1$ . O fio passa por um tubo.  $F$  se transmite à esfera através do fio, agindo nela como força centrípeta.



## EXEMPLO 6

Um estudante está sentado em uma cadeira que pode girar em torno de um eixo vertical. De braços estendidos, ele segura em cada mão um peso de 4,0 kgf. O instrutor faz rodar a cadeira com velocidade angular escalar de 0,50 rev/s. Suponha o atrito desprezível e que ele não exerça nenhum torque em relação ao eixo de rotação. Suponha que a inércia rotacional do estudante permaneça constante,  $I_e = 5,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , quando ele aproximar as mãos de seu corpo, e que as variações da inércia rotacional do sistema sejam devidas, portanto, apenas aos movimentos dos pesos. Suponha que a distância original de cada peso ao eixo de rotação seja de 1,0 m e que a distância final seja 0,20 m. Determine a velocidade angular final do estudante.

A única força externa do sistema é a atração gravitacional que passa por seu centro de massa, e que não exerce torque em relação ao eixo de rotação. Logo, o momento angular do sistema, em relação a esse eixo, é conservado, então

momento angular inicial = momento angular final,

$$I_0 \omega_0 = I \omega.$$

Temos

$$I = I_{\text{estudante}} + I_{\text{pesos}},$$

$$I_0 = 5,0 + 2 \cdot 4,0 \cdot (1,0)^2 = 13,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I = 5,0 + 2 \cdot 4,0 \cdot (0,20)^2 = 5,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$\omega_0 = 0,50 \text{ rev/s} = \pi \text{ rad/s}.$$

Logo,

$$\omega = \frac{I_0}{I} \omega_0 = \frac{13,0}{5,3} \cdot \pi \text{ rad/s} = 7,7 \text{ rad/s} \cong 1,2 \text{ rev/s}.$$

A velocidade final é maior do que o dobro da velocidade inicial.

Se tivéssemos considerado a redução produzida na inércia rotacional  $I$  pela aproximação dos braços, a velocidade final teria sido muito maior.

Qual seria a variação produzida pelo atrito? A energia cinética é conservada quando o estudante encolhe e depois estica seus braços, supondo que não haja atrito? Explique.

## EXEMPLO 7

A situação descrita abaixo é freqüentemente usada em aulas de demonstração, a fim de ilustrar a natureza vetorial da lei de conservação do momento angular.

Um estudante fica em pé sobre uma plataforma que só pode girar em torno do eixo vertical. Ele segura na mão o eixo de uma roda de bicicleta, cujo eixo é mantido na direção vertical. A roda gira em torno de seu eixo com velocidade angular  $\omega_0$ , mas o estudante e a plataforma estão em repouso. O estudante tenta, então, mudar a direção do eixo de rotação da roda. O que acontecerá?

Escolhamos como sistema o estudante mais a plataforma e a roda. O momento angular inicial total do sistema, devido ao movimento da roda, é  $I_0 \omega_0$ , onde  $I_0$  é o momento de inércia da roda em relação a seu eixo e  $\omega_0$  um vetor paralelo ao eixo vertical. A Fig. 13-8a mostra essa condição inicial.

Em seguida o estudante inclina o eixo da roda de um ângulo  $\theta$  em relação à vertical (para fazer isso ele deve exercer um torque; veja Ex. 1. Este torque, entretanto, é interno ao sistema acima definido). Uma vez que não há torque externo em relação ao eixo vertical, o componente vertical do momento angular deve ser conservado. A roda, no entanto, agora está girando em relação a um eixo que faz um ângulo  $\theta$  com a vertical, logo sua contribuição para o momento angular vertical do sistema é de apenas  $I_0 \omega_0 \cos \theta$ . Portanto o estudante e a plataforma devem fornecer o momento angular adicional em relação ao eixo vertical e ambos começam a girar em torno desse eixo. O momento angular vertical extra,  $I_p \omega_p$ , quando somado a  $I_0 \omega_0 \cos \theta$  deve igualar ao momento angular vertical inicial do sistema,  $I_0 \omega_0$ , isto é,

$$I_p \omega_p = I_0 \omega_0 (1 - \cos \theta).$$

Isto é mostrado na Fig. 13-8b.  $I_p$  é a inércia rotacional do estudante mais a plataforma em relação ao eixo vertical e  $\omega_p$  sua velocidade angular escalar em relação a esse eixo.

Se o estudante girar o eixo da roda de um ângulo  $\theta = 180^\circ$ , ele e a plataforma adquirirão um momento angular vertical igual a  $2I_0\omega_0$ . O momento angular total do sistema ainda será conservado com seu valor inicial  $I_0\omega_0$ , como mostra a Fig. 13-8c.

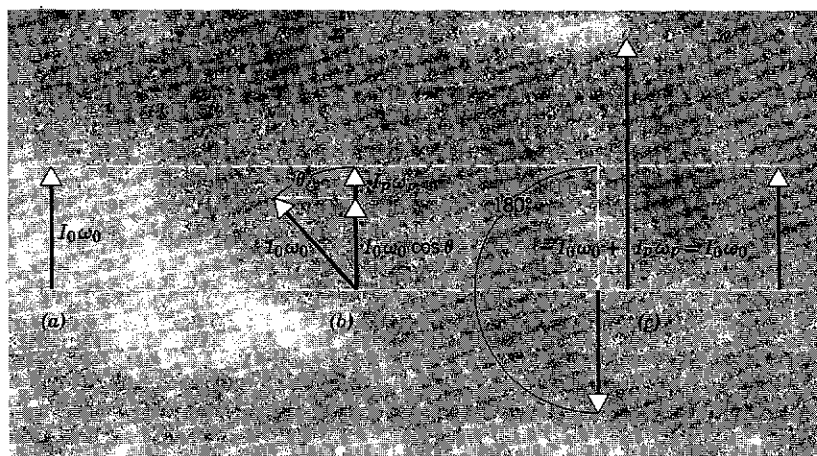


figura 13-8

Exemplo 7. (a) Momento angular inicial do sistema. Em (b) a roda inclinou-se de um ângulo  $\theta$ . Como não foi aplicado ao sistema nenhum torque vertical, o momento angular nessa direção deve conservar-se. O déficit  $(1 - \cos \theta) I_0\omega_0$  é compensado pela rotação do estudante e da plataforma. Em (c), a roda inclinou-se de  $180^\circ$ . O déficit agora é  $2I_0\omega_0$ , que deve ser compensado, como antes, pela rotação do estudante e da plataforma.

Consideremos agora o momento angular apenas da roda. Ao girar o eixo da roda de um ângulo  $\theta$ , o estudante exerce sobre ele um torque que dura o intervalo de tempo  $\Delta t$  necessário para reorientar o eixo.

O componente vertical da reação a este “torque-impulso” age sobre o estudante, comunicando-lhe e à plataforma o momento angular vertical por eles adquirido. O eixo da roda, mantido em um ângulo  $\theta$  com a vertical, precessa em relação a este eixo vertical, do mesmo modo que o pião da Fig. 13-1. Tal como no caso do pião, o estudante deve fornecer um torque horizontal sempre ortogonal ao plano definido pelo eixo vertical e pelo eixo da roda. A análise precisa do movimento deste sistema depende apenas da aplicação da equação  $\tau = dL/dt$  e da natureza vetorial das quantidades nela envolvidas. Isto será deixado como exercício para o estudante interessado.

O princípio de conservação do momento angular tanto é válido na Física Atômica e Nuclear quanto na mecânica celeste. Como a mecânica newtoniana falha no domínio atômico e nuclear, aquela lei de conservação deve ser mais fundamental do que os princípios de Newton. Para introduzir esse princípio de conservação fizemos suposições mais rígidas do que necessário. Isto é verdade mesmo no âmbito da mecânica clássica. Deve-se notar o papel preponderante desempenhado pela terceira lei de Newton na formulação desse princípio de conservação, utilizada para justificar a suposição de ser nula a soma dos torques internos. Foi preciso não só afirmar que as forças de ação e reação são iguais e opostas (forma “fraca” da terceira lei) como também que essas forças têm a mesma linha de ação, que é o segmento de reta que liga as duas partículas (forma “forte” da terceira lei). Sabe-se que a forma “forte” da terceira lei é violada no caso de algumas interações eletromagnéticas. Entretanto, a suposição de que a soma dos torques internos de um sistema é nula pode ser provada com base em exigências muito menos restritivas do que as exigidas pela terceira lei.<sup>5</sup>

A lei de conservação do momento angular, sob a forma em que a formulamos, é válida para um sistema de corpos, desde que estes possam considerar-se como partículas, isto é, toda vez que os efeitos de rotação dos corpos envolvidos no problema possam ser negligenciados. Quando os corpos estiverem girando, o

## 13-5

### ALGUNS OUTROS ASPECTOS DA CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

<sup>5</sup> See E. Gerjuoy, *American Journal of Physics*, Vol. 17, 477 (1949).

princípio de conservação do momento angular será ainda válido, se incluímos o momento angular associado a essa rotação. No entanto, os corpos não poderão mais ser considerados como partículas, cujo movimento possa ser descrito pela dinâmica da partícula.

Na Física Atômica e Nuclear verifica-se que as "partículas elementares", tais como elétrons, prótons, mésons e nêutrons, etc. (ver apêndice I), têm momento angular associado a um movimento de rotação intrínseco, e ao movimento orbital em relação a um ponto externo. O momento angular intrínseco é chamado de momento angular de *spin* ou simplesmente de *spin*. Quando empregamos a lei de conservação do momento angular total é necessário incluir também este momento angular de *spin*. Uma característica fundamental de sistemas atômicos, moleculares e nucleares é que seus momentos angulares podem tomar apenas certos valores definidos e discretos, em vez de valores contínuos. Neste caso o

### Tabela 13-1

#### Sumário das Equações do Movimento de Rotação

N.º da Equação	Equação	Comentários
<u>I. Equações de Definição</u>		
12-1	$\tau = r \times F$	Torque que atua sobre uma partícula em relação a um ponto $O$ , devido a uma força resultante $F$ .
	$\tau_{\text{ext.}} = \Sigma \tau_i = \Sigma (r_i \times F_i)$	Torque externo resultante que atua sobre um sistema de partículas, em relação a um ponto $O$ .
12-3	$l = r \times p$	Momento angular de uma partícula em relação a um ponto $O$ .
	$L = \Sigma l_i = \Sigma (r_i \times p_i)$	Momento angular resultante de um sistema de partículas em relação a um ponto $O$ .
<u>II. Relações Gerais</u>		
12-7	$\tau = \frac{dl}{dt}$	Lei do movimento para uma partícula sujeita à ação de um torque. É a análoga, para a rotação, de $F = dp/dt$ (Eq. 9-12). A Eq. 12-7 é válida somente se $\tau$ e $l$ forem medidos em relação a um ponto fixo num referencial inercial.
12-9	$\tau_{\text{ext.}} = \frac{dL}{dt}$	Lei do movimento para um sistema de partículas sujeito à ação de um torque externo resultante $\tau_{\text{ext.}}$ . É análoga, para movimento rotacional, de $F = dP/dt$ (Eq. 9-7). A Eq. 12-9 é válida somente se $\tau_{\text{ext.}}$ e $L$ forem medidos em relação (a) a qualquer ponto $O$ fixo em um referencial inercial ou (b) ao centro de massa do sistema.
<u>III. Caso Especial em que um Corpo Rígido Gira em Torno de um Eixo Fixo em um Referencial Inercial (veja nota de rodapé da Sec. 12-5).</u>		
12-17	$\tau = I\alpha$	$\alpha$ mantém-se paralela ao eixo de rotação; $I$ deve referir-se também a esse eixo e $\tau$ deve ser a componente escalar de $\tau_{\text{ext.}}$ segundo o mesmo eixo. Esta relação é análoga, para rotação, de $F = Ma$ no movimento retilíneo.
12-18	$L = I\omega$	$\omega$ mantém-se paralela ao eixo de rotação. $I$ deve referir-se a esse eixo e $L$ deve ser a componente escalar, segundo esse eixo, do momento angular total. Se o eixo de rotação tiver simetria especial (isto é, se ele for um eixo principal; veja nota de rodapé 3, Sec. 13-3), então $L$ e $\omega$ serão paralelos. Esta relação é análoga, para rotação, a $P = Mv$ no movimento retilíneo.

**momento angular** é dito *quantizado*. Logo, o momento angular desempenha um **papel** central na descrição do comportamento de tais sistemas (veja os Probs. 9 e 10). Essas idéias serão desenvolvidas em capítulos posteriores.

Se considerarmos o Sol, os planetas e os satélites como partículas que não possuem movimento de rotação intrínseco, o momento angular do sistema solar não seria constante. Estes corpos na realidade têm rotações em torno de seus eixos; forças originárias da não homogeneidade dos campos gravitacionais sobre planetas e satélites convertem parte deste momento angular de *spin* em momento angular orbital. Quando aplicamos a lei da conservação do momento angular devemos incluir o momento angular de *spin* no momento angular total. A conservação do momento angular desempenha um papel importante na verificação das teorias sobre a origem do sistema solar, da contração das estrelas gigantes e em outros problemas de astronomia. Algumas aplicações astronômicas serão consideradas no Cap. 16.

O fundamento deste método simples de análise do momento angular total de sistemas atômicos ou astronômicos é o teorema (veja Probl. 15) seguinte: O momento angular *total*  $L$  de um sistema, em relação à origem de um referencial inercial, pode ser calculado pela adição do momento angular em relação ao centro de massa (momento angular de *spin*) com o momento angular decorrente do movimento do centro de massa em relação à origem (momento angular *orbital*).

As leis de conservação da energia total, do momento linear e do momento angular têm fundamental importância na Física, e são válidas em todas as teorias físicas modernas. Teremos ocasião de empregá-las freqüentemente em capítulos posteriores.

O movimento de rotação de partículas e de corpos rígidos é um assunto complicado, e o tratamento completo e geral ultrapassa o escopo deste livro. Parece-nos aconselhável reunir num mesmo lugar todas as equações relacionadas com a dinâmica da rotação e comentar as condições em que estas podem ser aplicadas. Isto é feito na Tab. 13-1.

## 13-6

### DINÂMICA DA ROTAÇÃO — REVISÃO

## questões

- Até aqui, temos estudado muitas grandezas vetoriais, incluindo posição, deslocamento, velocidade, aceleração, força, momento linear e momento angular. Quais dessas grandezas são definidas independentemente da escolha da origem no referencial?
- (a) No Ex. 1, por que basta virar para cima o eixo para que a roda seja lançada à direita do estudante? (b) Se o estudante estiver fixado ao piso de uma grande nave espacial que se desloca em uma região onde não exista gravidade, de que modo isto afetaria a realização da experiência, caso afete?
- Se o pião da Fig. 13-1 não estivesse girando, ele tombaria. Se o seu momento angular em relação ao centro de massa for grande, comparado à variação causada pela aplicação do torque, ele entrará em precessão. Que acontecerá na situação intermediária, em que o pião gira lentamente?
- Um pião tem uma de suas extremidades formada por uma superfície esférica, de grande raio, e uma ponteira na extremidade oposta. Ele pode repousar, quando não está girando, sobre a extremidade esférica, mas inverterá sua posição, passando a apoiar-se sobre a ponteira quando o pião gira. Explique. (Veja "The Tippy-Top", de George D. Frier, *The Physics Teacher*, janeiro, 1967.) Se você não encontrar um pião, use um ovo cozido; o comportamento de "girar sobre a ponta" é o melhor observado quando se marcar a sua extremidade "pontuda".
- Um físico famoso (R. W. Wood), apaixonado em pregar peças nos outros, montou um volante de alta rotação em uma valise que entregou a um carregador, com instruções para segui-lo. Que acontece quando o carregador tiver de virar rapidamente uma esquina? Explique em termos da equação  $\tau = dL/dt$ .
- Para que um avião monomotor voe horizontalmente, uma de suas aletas deve ficar levantada e a oposta abaixada. Por que isto é necessário? Isto é necessário a um bimotor em circunstâncias normais?
- A hélice de um avião gira no sentido horário quando vista por trás. Quando o piloto sai de um mergulho, verifica que é necessário usar o leme esquerdo no ponto mais baixo do mergulho, para manter a direção. Explique.

8. Por que uma vara longa ajuda o equilibrista, em uma corda esticada, a manter o equilíbrio?
9. Você está caminhando ao longo de um estreito trilho ferroviário e começa a perder o equilíbrio. Se você começar a cair para a direita, para que lado você gira o corpo a fim de readquirir o equilíbrio? Explique.
10. Descreva, em termos de  $\tau = dL/dt$ , a dinâmica rotacional das rodas de um trem, que em alta velocidade, percorre uma curva.
11. Você pode sugerir uma teoria simples para explicar a estabilidade de uma bicicleta em movimento? (Veja "The Stability of the Bicycle", de David E. H. Jones, *Physics Today*, abril, 1970.)
12. Explique, em termos de momento angular e de inércia rotacional (momento de inércia), exatamente como se pode impulsionar para cima, com o próprio corpo. (Veja "Pumping on a Swing", de P. L. Tea e H. Falk, *American Journal of Physics*, dezembro, 1968; "The Child's Swing", de B. F. Gore, *American Journal of Physics*, março, 1970; "On Initiating the Motion in a Swing", de J. T. McMullan, *American Journal of Physics*, maio, 1972 e "How Children Swing", de S. M. Curry, *American Journal of Physics*, outubro, 1976.)
13. Para que uma bola de bilhar role sem deslizar, desde o início, o taco não deve atingi-la no centro (isto é, a uma altura acima da mesa igual ao raio  $R$  da bola), mas exatamente à altura  $\frac{2}{5}R$  acima do centro. Explique. (Veja Arnold Sommerfeld, *Mechanics, Volume I of Lectures on Theoretical Physics*, Academic Press, New York (edição 1964, brochura), págs. 158-161, para um suplemento sobre a mecânica das bolas de bilhar. Veja também "Some Pitfalls in Demonstrating Conservation of Momentum", de H. L. Armstrong, *American Journal of Physics*, janeiro, 1968.)
14. Existem pontos num bastão onde, se a bola é rebatida, suas mãos sentirão sensação de dor e o bastão pode quebrar. Explique. (Ver "Batting the Ball", por P. Kirkpatrick, *American Journal of Physics*, agosto, 1963.)
15. Suponha que uma barra repouse em uma posição vertical sobre uma superfície de atrito desprezível. Dá-se-lhe, então, um impulso na sua extremidade inferior. Descreva o movimento do centro de massa da barra e de sua extremidade superior.
16. Um cilindro gira com velocidade angular  $\omega$  em torno de um eixo que passa por uma de suas extremidades como se pode ver na Fig. 13-9. Escolha uma origem adequada e faça um desenho qualitativo dos vetores  $L$  e  $\omega$ . Esses vetores são paralelos? Entram aqui considerações de simetria?
17. Considere o movimento de uma bola de futebol americano girando quando lançada no ar. O momento angular em relação ao centro de massa da bola é conservado durante o movimento? O módulo ou o sentido da velocidade angular varia em relação a eixos fixos no espaço ou no corpo? Lembre-se que a bola de futebol americano não é esférica.
18. No Cap. 1, a fusão das calotas polares foi citado como uma possível causa da variação do período de rotação da Terra. Explique.
19. Muitos dos grandes rios correm para o equador. Que efeito tem, sobre a rotação da Terra, os sedimentos que eles transportam para o mar?
20. Um homem está sobre uma mesa girante que gira com velocidade  $\omega$ . Ele segura duas massas iguais com os braços estirados. Sem movimentar os braços, ele as deixa cair. Se houver, qual será a variação de sua velocidade angular? O momento angular é conservado? Explique.
21. No Ex. 5, se o fio é afrouxado repentinamente de volta a sua posição original (quando o objeto percorria um círculo de raio  $r_1$ ), o objeto retornará à sua velocidade inicial  $v_1$ ? Que acontecerá se puxarmos repetidamente para baixo e de repente afrouxarmos a corda? Explique o comportamento mediante considerações de trabalho-energia e de torque-momento angular.
22. Uma plataforma circular gira à velocidade angular constante em torno de um eixo vertical. Não há atrito nem torque motor. Um recipiente circular está sobre a plataforma e gira com ela: veja Fig. 13-10. O fundo do recipiente está coberto por uma camada de gelo de espessura uniforme, que, obviamente, está em rotação com o recipiente. O gelo funde, mas nenhuma água escapa do recipiente. A velocidade angular é agora maior, a mesma ou menor que a velocidade original? Apresente razões que justifiquem sua resposta.

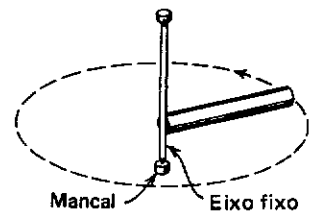


figura 13-9  
Questão 16

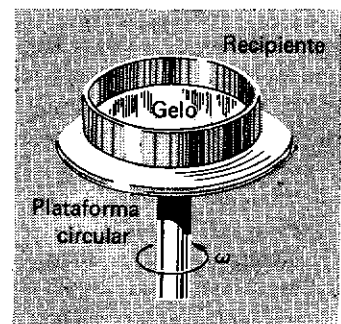


figura 13-10  
Questão 22

1. A integral do torque, em relação ao tempo, é denominada *impulso angular*. Partindo da equação  $\tau = dL/dt$ , mostrar que o impulso angular resultante é igual à variação do momento angular. Essa relação constitui o análogo, para o movimento de rotação, do teorema do momento-impulso para o movimento retilíneo.
2. O momento angular de uma partícula é dado pela expressão:  $L = at^3 \mathbf{k}$ , onde  $t$  é dado em segundos e  $a = 2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^4$ . Determine o torque que atua sobre a partícula no instante  $t = 1 \text{ s}$ .  
*Resposta:*  $\tau = 6\mathbf{k}$  (em  $\text{N} \cdot \text{m}$ ).
3. Uma partícula se move ao longo de uma circunferência de raio  $R$  com uma velocidade linear cujo módulo é dado por:  $v = bt^2$ , onde  $t$  é dado em segundos e  $b = 0,4 \text{ m/s}^3$ . Determine expressões literais para: (a) o módulo do momento angular da partícula, (b) o módulo do torque que atua sobre a partícula.
4. Considere o problema anterior com os seguintes dados adicionais: a massa da partícula vale  $m = 10 \text{ g}$  e o raio da circunferência vale  $R = 0,8 \text{ m}$ . Calcule o módulo do torque que atua sobre a partícula no instante  $t = 1 \text{ s}$ .  
*Resposta:*  $6,4 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ .
5. Seja  $J$  o impulso angular definido no Probl. 1. O torque que atua sobre uma certa partícula é dado por:  $\tau = bt^2 \mathbf{k}$ , onde  $t$  é dado em segundos e  $b = 2 \text{ N} \cdot \text{m/s}$ . (a) Determine o impulso angular fornecido à partícula desde  $t = 0 \text{ s}$  até  $t = 2 \text{ s}$ . (b) Calcule o módulo do torque médio exercido sobre a partícula durante o intervalo de tempo mencionado no item anterior.
6. O impulso angular que atua sobre uma partícula é dado por:  $J = bt^4 \mathbf{k}$ , onde  $t$  é dado em segundos e  $b = 0,25 \text{ N} \cdot \text{m/s}^3$ . Calcule o módulo do torque que atua sobre a partícula no instante  $t = 0,20 \text{ s}$ .  
*Resposta:*  $0,008 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

## SEÇÃO 13-2

7. Um pião gira a  $40 \text{ Hz}$  (ciclos/s) em torno de um eixo inclinado de  $20^\circ$  com a vertical. Sua massa é de  $0,45 \text{ kg}$  e sua inércia rotacional (momento de inércia) é de  $5,0 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . O centro de massa está a  $3,5 \text{ cm}$  da ponteira. Se a rotação é no sentido do movimento dos ponteiros do relógio, quando observada de cima, qual é o módulo e o sentido da velocidade angular de precessão?
8. Um giroscópio consiste num disco de raio  $R$  e massa  $M$  montado no centro de um eixo de comprimento  $2x$ . Determine uma expressão para a velocidade angular de precessão quando o eixo fica apoiado numa de suas extremidades e na horizontal. Despreze a massa do eixo.  
*Resposta:*  $\omega_p = 2gx/\omega R^2$
9. O giroscópio apresentado no Probl. 8 é modificado ao lhe ser afixado um pequeno peso à extremidade do eixo que se encontra mais afastada. Ache a nova taxa de precessão (em rpm) em função da razão  $r$  (massa do peso adicionado)/(massa do disco do giroscópio).

## SEÇÃO 13-3

10. Derivando a equação (13-6) em relação ao tempo mostre que:  $\tau = I\alpha$ , onde  $\alpha$  é a aceleração angular paralela ao eixo do torque.
11. O módulo do torque que atua sobre uma esfera de raio  $R = 0,02 \text{ m}$  e massa  $m = 0,004 \text{ kg}$  vale  $2 \text{ N} \cdot \text{m}$ . Calcule a aceleração angular da esfera.
12. Partir da Eq. 11-20b,  $a_R = \omega \times v$ , para uma partícula em movimento circular, e mostrar que a força exigida pelo movimento circular uniforme é  $F = \omega \times p$ . Comparar este resultado com a Eq. 13-2b,  $\tau = \omega_p \times L$ , e explicar como um pião que gira com precessão pode ser interpretado como o análogo rotacional do movimento circular uniforme.
13. Duas rodas,  $A$  e  $B$ , comunicam-se através de uma correia como se pode ver na Fig. 13-11. O raio de  $B$  é três vezes o raio de  $A$ . Qual seria a relação entre as inércias rotacionais (momentos de inércia)  $I_A/I_B$  se (a) ambas as rodas tiverem os mesmos momentos angulares? (b) ambas as rodas tiverem a mesma energia cinética rotacional?
14. Mostrar que  $L = I\omega$  para o sistema de duas partículas representado na Fig. 13-4.
15. A Fig. 13-12 representa um corpo rígido simétrico que gira em torno de um eixo fixo. A origem do sistema de coordenadas está fixada, por conveniência, no centro de massa. Provar, somando as contribuições para o momento angular de todos os elemen-

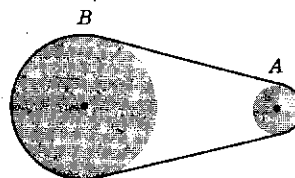


figura 13-11

tos de massa  $m_i$  em que o corpo pode subdividir-se, que  $L = I\omega$ , sendo  $L$  o momento angular total.

16. (a) Suponha que, em um átomo de hidrogênio, o elétron descreva uma órbita circular em torno do próton. Se a força centrípeta exercida no elétron é fornecida pela força elétrica  $e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$ , sendo  $e$  o valor absoluto da carga de um elétron ou de um próton,  $r$  o raio da órbita e  $\epsilon_0$  uma constante, mostrar que o raio da órbita é

$$r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2},$$

sendo  $m$  a massa do elétron e  $v$  sua velocidade. (b) Suponha agora que os valores do momento angular do elétron em torno do núcleo só possam ser múltiplos inteiros  $n$  de  $h/2\pi$ , sendo  $h$  uma constante denominada *constante de Planck*. Demonstrar que as únicas órbitas eletrônicas possíveis são as que possuam raio

$$r = \frac{nh}{2\pi m v}.$$

(c) Combinar esses resultados para eliminar  $v$  e mostrar que as únicas órbitas consistentes com ambas as condições têm raios

$$r = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2}.$$

Portanto, os raios permitidos são proporcionais ao quadrado dos inteiros  $n = 1, 2, 3$  etc. Quando  $n = 1$ ,  $r$  é mínimo e tem o valor  $0,528 \times 10^{-10}$  m.

17. Em 1913, Niels Bohr postulou que qualquer sistema mecânico em rotação, cuja inércia rotacional (momento de inércia) seja  $I$ , só pode ter momento angular com valores múltiplos inteiros de um número determinado  $h/2\pi = 1,054 \times 10^{-34}$  J · s. Em outras palavras:

$$L = I\omega = n(h/2\pi),$$

sendo  $n$  um inteiro positivo qualquer ou zero. Dizemos que  $L$  está quantizado, desde que não pode mais assumir qualquer valor. (a) Mostre que este postulado restringe a energia cinética que o sistema em rotação pode ter, a um conjunto de valores discretos, isto é, a energia é quantizada. (b) Considere o assim chamado *rotor rígido*, que consiste em uma massa  $m$  obrigada a girar em um círculo de raio  $R$ . Quais seriam as velocidades angulares que poderia ter a massa se o postulado fosse correto? Que valores de energia cinética a massa pode alcançar? (c) Desenhe um diagrama de níveis de energia, de qualquer tipo, que indique como varia o espaçamento entre níveis de energia quando  $n$  aumenta, podendo ser semelhante ao da Fig. 13-13. Certas moléculas diatômicas de baixa energia comportam-se como um rotor rígido.

18. Usando os dados fornecidos no apêndice, ache (a) o momento angular da rotação da Terra em relação ao seu próprio eixo, (b) o momento angular do movimento orbital da Terra em torno do Sol.

Resposta: (a)  $7,1 \times 10^{33}$  kg · m<sup>2</sup>/s. (b)  $2,7 \times 10^{40}$  kg · m<sup>2</sup>/s.

19. Um bastão tem massa de 4,4 kg e comprimento de 1,2 m. Está inicialmente em repouso em um plano horizontal, sem atrito, e é atingido perpendicularmente por uma força impulsiva horizontal, cujo impulso vale 13 N · s, à distância  $l = 0,46$  m do centro. Determinar o movimento subsequente.

20. A Lua gira em torno da Terra, de modo que vemos sempre a mesma face dela. (a) Qual a relação entre o momento angular orbital da Lua em relação à Terra e o momento angular de spin da Lua (momento angular em relação ao seu centro de massa)? (b) De quanto deveria variar o momento angular orbital da Lua para que pudéssemos ver toda a sua superfície no transcurso de um mês?

Resposta: (a)  $L_{\text{spin}}/L_{\text{orbital}} = 2/5(R_L/R_T - L)^2$  em que  $R_L$  é o raio lunar e  $R_T - L$ , a distância Terra-Lua. (b) Acréscimo ou decréscimo de  $\frac{1}{2}$  do valor atual.

21. Um cilindro desce, rolando, um plano inclinado de ângulo  $\theta$ . Mostrar, por aplicação direta da Eq. 12-9 ( $\tau = dL/dt$ ), que a aceleração de seu centro de massa é  $\frac{2}{3}g \sin \theta$ . Comparar este método com o que foi adotado no Ex. 10 do Cap. 12.

22. *Relação entre o momento angular total de um sistema de partículas e os momentos angulares orbital e de spin.* O momento angular total de um sistema de partículas, em relação à origem  $O$  de um referencial inercial, é expresso por  $L = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ , sendo  $\mathbf{r}_i$  e  $\mathbf{p}_i$  medidos em relação a  $O$ . (a) Usar as relações  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{\text{cm}} + \mathbf{r}'_i$  e  $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{p}'_i$ , do Probl. 10, Cap. 12, para exprimir  $L$  em função dos vetores posição  $\mathbf{r}'_i$  e dos momentos

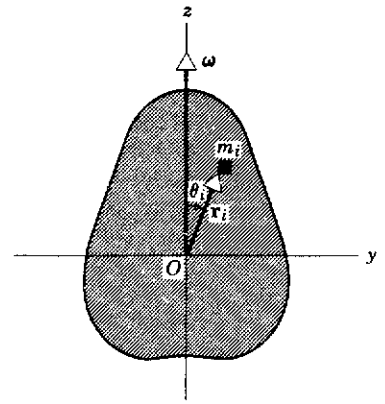


figura 13-12

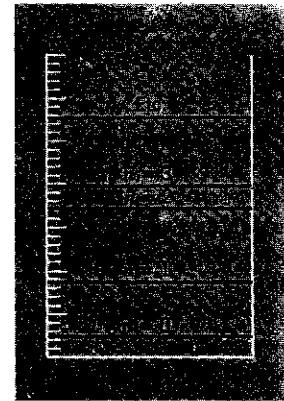


figura 13-13

lineares  $p'_i$  relativos ao centro de massa  $C$ . (b) Usar a definição de centro de massa e a de momento angular  $L'$  em relação ao centro de massa (Probl. 8 Cap. 12) para obter a equação  $L = L' + r_{cm} \times Mv_{cm}$ . (c) Mostrar que este resultado pode ser interpretado como significando que o momento angular total é a soma do momento angular de spin (momento angular em relação ao centro de massa) e do momento angular orbital (momento angular do movimento do centro de massa em relação a  $O$ , se toda a massa do sistema estivesse concentrada em  $C$ ).

23. Uma lâmina retangular fina, de comprimento  $a$  e largura  $b$ , gira em torno de uma de suas diagonais com velocidade angular constante  $\omega$ , estando o eixo fixo em um referencial inercial. Determinar o sentido e o módulo do momento angular  $L$  em relação à origem localizada no centro de massa.
24. O eixo do cilindro da Fig. 13-14 é fixo, e o cilindro está inicialmente em repouso. O bloco de massa  $M$  move-se inicialmente para a direita, com velocidade  $v_1$ , não havendo atrito. O bloco passa sobre o cilindro, alcançando a posição indicada em traço interrompido. Ao tocar o cilindro, ele escorrega sobre este, mas o atrito é suficiente para anular o deslizamento antes de  $M$  perder contato com o cilindro. O raio do cilindro é  $R$  e seu momento de inércia é  $I$ . Determinar a velocidade final  $v_2$  em função de  $v_1$ ,  $M$ ,  $I$  e  $R$ . O cálculo poderá ser facilitado utilizando a relação entre impulso e variação de momento.  
Resposta:  $v_1 / (1 + I/MR^2)$ .

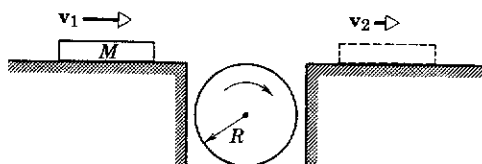


figura 13-14

25. Uma haste de comprimento  $l$  está sobre uma mesa horizontal, sem atrito. Sua massa é  $M$  e ela pode mover-se livremente. Um disco de hóquei  $m$ , que se move como indica a Fig. 13-15, com velocidade  $v$ , colide elasticamente com a haste. (a) Que grandezas são conservadas na colisão? (b) Qual deve ser a massa  $m$  do disco de modo que ele permaneça em repouso imediatamente após a colisão?
26. Uma barra uniforme, de comprimento  $2L$ , está suspensa, verticalmente, por uma de suas extremidades. A que distância do ponto de suspensão você deve atingir a barra, para que ela inicie seu movimento oscilatório sem comunicar-lhe uma força de reação horizontal inicial no ponto de suspensão?  
Resposta:  $4L/3$ .

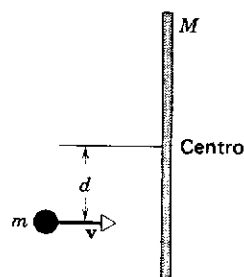


figura 13-15

27. Dois cilindros, de raios  $R_1$  e  $R_2$ , respectivamente, têm inércias rotacionais (momentos de inércia)  $I_1$  e  $I_2$ , respectivamente. Os cilindros podem girar em torno de eixos fixos, perpendiculares ao plano da Fig. 13-16. O cilindro de maior diâmetro está inicialmente girando com velocidade angular  $\omega_0$ . O cilindro de menor diâmetro é deslocado para a direita, até tocar o maior, passando a girar devido à força de atrito entre ambos. Eventualmente, cessa o escorregamento e os dois cilindros giram a velocidades constantes em sentidos opostos. (a) Determinar a velocidade angular final  $\omega_2$  do cilindro de menor diâmetro, em função de  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  e  $\omega_0$ . (b) O momento angular total é conservado neste caso?
28. Uma bola de bilhar, inicialmente em repouso, recebe um impulso instantâneo de um taco. Este é mantido horizontalmente à distância  $h$  acima da linha centro, como indica a Fig. 13-17. A bola sai com velocidade  $v_0$  e, devido ao "efeito para a frente", ela adquire, eventualmente, a velocidade final  $\frac{2}{3} v_0$ . Mostrar que

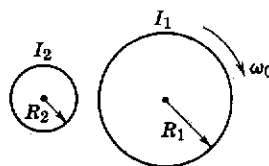


figura 13-16

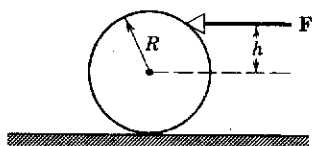


figura 13-17

$$h = \frac{4}{3} R,$$

sendo  $R$  o raio da bola.

29. No Probl. 28, imagine que  $F$  seja aplicada abaixo da linha do centro. (a) Mostre que é impossível, dando esse "efeito para trás" reduzir a zero a velocidade para frente adquirida pela bola, enquanto o rolamento puro não tiver sido iniciado, a menos que  $h = R$ . (b) Mostre que é impossível dar à bola velocidade para trás, a menos que  $F$  tenha um componente vertical para baixo.

#### SEÇÃO 13-4

30. Uma plataforma gira, sem atrito, com velocidade angular de 7 rad/s. Um homem se encontra de pé sobre o centro da plataforma. Inicialmente seus braços estão estendidos



e ele segura um peso em cada mão. Nesta posição, o momento de inércia total do homem, dos pesos e da plataforma, em relação ao eixo de rotação, vale  $10,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Ao trazer as mãos para junto do corpo o momento de inércia total do sistema se reduz para  $7,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Calcule: (a) a nova velocidade angular da plataforma, (b) a energia cinética inicial do sistema, (c) a energia cinética final do sistema, (d) o trabalho realizado pelos braços do homem neste processo.

Resposta: (a)  $9,8 \text{ rad/s}$ . (b)  $257,25 \text{ J}$ . (c)  $360,15 \text{ J}$ . (d)  $102,90 \text{ J}$ .

31. Dois patinadores, cada um com massa de  $60 \text{ kg}$ , aproximam-se um do outro ao longo de trajetórias paralelas, separadas de  $5,0 \text{ m}$ . Eles têm velocidades iguais e opostas de  $12 \text{ m/s}$ . O primeiro patinador possui uma vara longa e leve de  $3,0 \text{ m}$  de comprimento, e o segundo se agarra à extremidade da vara quando a alcança (suponha que o gelo não tenha atrito). (a) Descrever quantitativamente o movimento dos patinadores depois de ligados pelo bastão. (b) Puxando a vara, os dois patinadores aproximam-se até  $1,0 \text{ m}$ . Qual será então o movimento deles? (c) Comparar a energia cinética do sistema nas partes (a) e (b). De onde provém a diferença?

32. Uma roda gira com frequência angular de  $700 \text{ r.p.m.}$ , em torno de um eixo que possui momento de inércia desprezível. Uma segunda roda, inicialmente em repouso, cujo momento de inércia é igual ao dobro do momento de inércia da primeira, é repentinamente encaixada no mesmo eixo. (a) Calcule a velocidade angular da combinação resultante do eixo com as duas rodas. (b) Avalie a variação da energia cinética rotacional experimentada pelo sistema.

Resposta: (a)  $24,4 \text{ rad/s}$ . (b) O sistema perde dois terços da sua energia cinética inicial.

33. Uma roda de bicicleta, cujo eixo e raios têm massas desprezíveis, possui um aro delgado cujo raio é de  $36,0 \text{ cm}$  e massa de  $3,80 \text{ kg}$ , ela pode girar em torno de seu eixo com atrito mínimo. Um homem, em pé sobre uma mesa giratória, segura a roda acima de sua cabeça, mantendo vertical o eixo; a mesa pode girar sem atrito. A roda gira no sentido horário, vista de cima, com velocidade angular de  $60 \text{ rad/s}$ , a mesa está inicialmente em repouso. O momento de inércia do conjunto roda-homem-mesa, em torno do eixo comum de rotação, é de  $2,50 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . (a) Com a mão, o homem repentinamente pára a roda (em relação à mesa). Determinar o módulo e o sentido da velocidade angular resultante da mesa. (b) A experiência é repetida com notável atrito, introduzido no eixo da roda, que, partindo da mesma velocidade angular inicial ( $60 \text{ rad/s}$ ), gradualmente diminui sua rotação e pára (em relação à mesa) enquanto o homem segura a roda como foi descrito antes. (A mesa ainda pode girar sem atrito.) Descrever o que ocorre ao sistema, fornecendo tanta informação quantitativa quanto seja possível a partir dos dados.

34. Uma garota de massa  $m$  pula com velocidade  $v_0$  no ponto inferior de uma roda-gigante. Antes do pulo, a roda-gigante possui momento de inércia  $I_0$  em relação ao eixo de rotação. O raio da roda-gigante vale  $R$  e o atrito no eixo de rotação é desprezível. Despreze também o atrito com o ar. No início, a roda-gigante estava parada. Obtenha uma expressão para a velocidade angular da roda-gigante adquirida imediatamente após o pulo.

Resposta:  $\omega = mvR/(I_0 + mR^2)$ .

35. Em uma demonstração, durante uma aula, foi utilizada uma miniatura de um trilho ferroviário montada sobre uma grande roda que podia girar livremente, com atrito desprezível, em torno de um eixo vertical. Um trem elétrico de brinquedo, com massa  $m$  foi colocado sobre os trilhos e, com o sistema inicialmente em repouso, foi ligado à energia elétrica. O trem atinge uma velocidade estacionária  $v$  em relação ao trilho. Qual é a velocidade angular  $\omega$  da roda, se sua massa é  $M$  e seu raio  $R$ ? (Despreze a massa dos raios da roda.)

36. Uma moça (massa  $M$ ) está em pé na borda de um carrossel (massa  $10M$ , raio  $R$ , inércia rotacional  $I$ ) sem atrito e em repouso. Ela joga uma pedra (massa  $m$ ) em uma direção horizontal que é tangente à borda externa do carrossel. A velocidade da pedra, em relação ao solo, é  $v$ . Quais são (a) a velocidade angular do carrossel e (b) a velocidade linear da moça depois que a pedra foi jogada?

Resposta: (a)  $mvR/(I + MR^2)$ . (b)  $vmR^2/(I + MR^2)$ .

37. Em um parque de diversões há um pequeno carrossel cujo raio é de  $1,4 \text{ metros}$  e massa de  $200 \text{ kg}$ . O raio de giração (ver Probl. 15, Cap. 12) é de  $0,90 \text{ m}$ . Uma criança de  $45 \text{ kg}$  corre à velocidade de  $3 \text{ m/s}$ , tangencialmente à borda do carrossel, quando este está parado, e depois pula sobre ele. Despreze o atrito e calcule a velocidade angular do carrossel e da criança.

38. Um disco delgado uniforme, de raio  $R$  e massa  $M$ , gira com velocidade angular  $\omega_0$  em torno de um eixo horizontal que passa pelo seu centro. (a) Qual sua energia cinética? E seu momento angular? (b) Um fragmento de massa  $m$  destaca-se da borda do disco em um instante tal que ele é lançado verticalmente acima do ponto em que se destacou (Fig. 13-18). Que altura acima deste ponto ele alcança antes de começar a cair? (c) Qual a velocidade angular final do disco quebrado? E o momento angular e a energia finais?

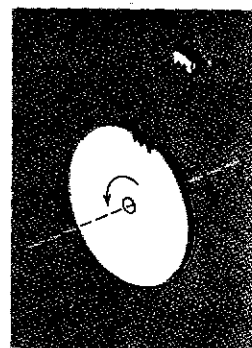


figura 13-18

Resposta: (a)  $MR^2\omega_0^2/4$ ;  $MR^2\omega_0/2$ . (b)  $R^2\omega_0^2/2g$ . (c)  $\omega_0$ ;  $(M/2 - m)R^2\omega_0$ ;  $(M/2 - m)R^2\omega_0^2/2$ .

39. Uma barata, de massa  $m$ , corre no sentido anti-horário na borda de um disco montado em um eixo vertical; o disco tem raio  $R$ , momento de inércia  $I$  e está montado em rolamentos sem atrito. A velocidade (escalar) da barata, em relação à Terra, é  $v$ , e o disco gira no sentido horário com velocidade angular  $\omega_0$ . A barata encontra um farelo de pão na borda do disco e pára. Qual o módulo da velocidade angular do disco depois que a barata pára? A energia é conservada?
40. No Ex. 5, compare as energias cinéticas do objeto em duas órbitas diferentes. Use o teorema do trabalho-energia para explicar a diferença quantitativamente.
41. Uma partícula é projetada horizontalmente no interior de um vaso hemisférico, liso, de raio  $r$  que é mantido em repouso (Fig. 13-19). Deseja-se saber a velocidade inicial  $v_0$  necessária para que a partícula consiga alcançar o topo do vaso. Determine  $v_0$  em função de  $\theta_0$ , a posição angular inicial da partícula. (Sugestão: Use princípios de conservação.)
42. Um projétil de massa  $m = 0,3$  kg penetra numa caixa de areia presa por um fio ao teto. A massa da caixa de areia vale  $M = 10$  kg. A velocidade com que o projétil atinge a caixa vale 200 m/s. O projétil fica retido no interior da caixa. Calcule a velocidade da caixa de areia imediatamente após o impacto.

Resposta: 5,8 m/s.

43. Um planeta possui momento angular  $L_0 = mv_0r_0$  no seu *periélio* (ponto mais próximo do Sol). Calcule a velocidade do planeta quando sua distância  $r$  ao Sol for a maior possível (no *afélio*).

44. Em um grande trilho circular horizontal, sem atrito, de raio  $R$ , estão duas pequenas massas  $m$  e  $M$ , que podem deslizar no trilho. Entre as duas massas está comprimida uma mola, que, entretanto, não está presa a  $m$  ou  $M$ . As duas massas são mantidas unidas por um fio. (a) Se o fio rompe, a mola comprimida (cuja massa pode ser desprezada) lança as duas massas em sentidos opostos, enquanto que ela mesma não se desloca. As bolas colidem quando se encontram novamente no trilho (Fig. 13-20). Onde ocorre esta colisão? (Pode ser conveniente exprimir a resposta em termos do ângulo descrito pelo raio que localiza  $M$ ). (b) Sendo  $U_0$  a energia potencial inicialmente armazenada na mola, que tempo decorre desde que o fio se rompe até que a colisão ocorra? (c) Supondo que a colisão seja perfeitamente elástica e frontal, em que ponto as bolas se chocarão novamente após a primeira colisão?

Resposta: (a)  $2\pi m/(m+M)$  rad. (b)  $[2\pi^2 mMR^2/(m+M)U_0]^{1/2}$ .  
(c) No ponto de origem.

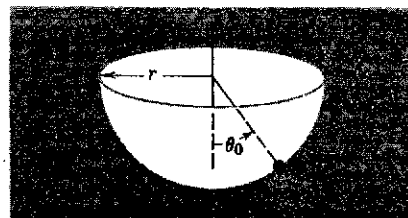


figura 13-19

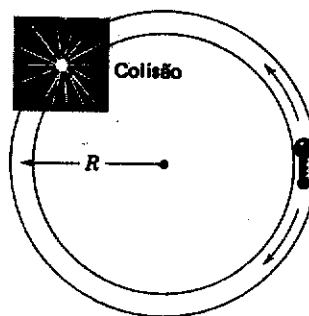


figura 13-20

# 14

## equilíbrio de corpos rígidos

Os pilares que sustentam uma ponte pênsil devem ser suficientemente fortes para não desmoronar sob o peso da ponte e do tráfego sobre ela; o trem de aterrissagem de um avião não deve ceder, se o piloto fizer uma aterrissagem infeliz; os dentes de um garfo não devem envergar quando usado em um bife duro. Em todos esses problemas, o engenheiro está interessado em que essas estruturas presumidamente rígidas, assim permaneçam sob a ação das forças que nelas atuam e dos torques correspondentes.

Em tais problemas, o engenheiro deve fazer duas perguntas: (1.<sup>a</sup>) Que forças e torques atuam no corpo supostamente rígido? (2.<sup>a</sup>) Considerando o projeto e os materiais usados, o corpo permanecerá rígido sob a ação dessas forças e torques? Neste capítulo estamos interessados apenas na primeira dessas perguntas; o estudante de engenharia tratará minuciosamente da segunda em cursos posteriores.

Notemos que os corpos presumidamente rígidos da seção anterior (isto é, pilares de pontes, trem de aterrissagem, garfo) estão em *equilíbrio mecânico*. Visto de um referencial inercial, um corpo rígido estará em equilíbrio mecânico se: (1) a aceleração linear  $a_{cm}$  de seu centro de massa for nula, e (2) sua aceleração angular  $\alpha$ , em torno de qualquer eixo fixo naquele referencial, for também nula.

Esta definição não exige que o corpo esteja em repouso relativamente ao observador, mas apenas que não esteja acelerado. Seu centro de massa, por exemplo, pode estar se movendo com velocidade constante  $v_{cm}$  e o corpo pode estar girando em torno de um

14-1

*CORPÔS RÍGIDOS*

14-2

*EQUILÍBRIO DE UM  
CORPO RÍGIDO*

eixo fixo com velocidade angular constante  $\omega$ . Se o corpo estiver realmente em repouso (portanto  $\mathbf{v}_{cm} = 0$  e  $\omega = 0$ ), diz-se que existe *equilíbrio estático*. No entanto, como veremos, as restrições impostas às forças e aos torques são as mesmas, quer o equilíbrio seja estático ou não. Além disso, pode-se transformar qualquer caso de equilíbrio (não-estático) em situação de equilíbrio estático, mediante a escolha apropriada do referencial.

O movimento de translação de um corpo rígido de massa  $M$  é governado pela Eq. 9-10, isto é,

$$\mathbf{F}_{ext.} = M\mathbf{a}_{cm},$$

sendo  $\mathbf{F}_{ext.}$  a soma vetorial de todas as forças externas que atuam no corpo. Como  $\mathbf{a}_{cm}$  deve anular-se para haver equilíbrio, a primeira condição de equilíbrio (estático ou não) é, portanto: *a soma vetorial de todas as forças externas que atuam no corpo em equilíbrio deve ser nula.*

Pode-se escrever a condição (1) sob a forma

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = 0, \quad (14-1)$$

tendo sido suprimido, por comodidade, o índice de  $\mathbf{F}_{ext.}$ . Esta equação vetorial equivale às três equações escalares

$$\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0, \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0, \\ F_z &= F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0, \end{aligned} \quad (14-2)$$

significando que é nula a soma dos componentes das forças segundo uma qualquer de três direções perpendiculares entre si.

A segunda condição de equilíbrio é que  $\alpha = 0$  para qualquer eixo. Desde que a aceleração angular de um corpo rígido está associada com o torque (lembre que, para um eixo fixo,  $\tau = I\alpha$ ), pode-se enunciar a segunda condição de equilíbrio (estático ou não) sob a forma: *A soma vetorial de todos os torques externos que atuam em um corpo em equilíbrio deve ser nula.*

Pode-se escrever a condição (2) sob a forma

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \dots + \boldsymbol{\tau}_n = 0, \quad (14-3)$$

Esta equação vetorial equivale às três equações escalares

$$\begin{aligned} \tau_x &= \tau_{1x} + \tau_{2x} + \dots + \tau_{nx} = 0, \\ \tau_y &= \tau_{1y} + \tau_{2y} + \dots + \tau_{ny} = 0, \\ \tau_z &= \tau_{1z} + \tau_{2z} + \dots + \tau_{nz} = 0, \end{aligned} \quad (14-4)$$

que dizem, que, havendo equilíbrio é nula a soma dos componentes dos torques que agem no corpo, na direção de um qualquer de três eixos perpendiculares entre si.

O torque resultante  $\boldsymbol{\tau}$  da Eq. 14-3, que deve ser nulo para haver equilíbrio mecânico, é definido em relação a uma determinada origem  $O$ . Os componentes  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  e  $\tau_z$  na Eq. 14-4 são os componentes escalares de  $\boldsymbol{\tau}$ , e referem-se a qualquer sistema de eixos perpendiculares entre si cuja origem seja  $O$ , não importando como estes eixos estão orientados no espaço. Com efeito, quando um vetor é nulo, seus componentes (escalares) devem anular-se também, pouco importa a maneira como o referencial esteja orientado. O estudante

poderá indagar se a escolha de uma origem é essencial; a resposta, como veremos em seguida, é negativa, porque, para um corpo em equilíbrio translacional, se  $\tau = 0$  para qualquer origem  $O$ , será nulo também para qualquer outra origem no referencial. O importante do presente parágrafo, portanto, é que a condição 2 estará satisfeita para um corpo em equilíbrio translacional, se pudermos evidenciar ou que (a)  $\tau = 0$  em relação a *qualquer* ponto (Eq. 14-3) ou que (b) os componentes do torque segundo um *qualquer* de três eixos perpendiculares entre si são nulos (Eq. 14-4).

Suponhamos agora que temos um corpo rígido em equilíbrio de translação, de forma que  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = 0$  (Eq. 14-1). Queremos agora provar que o torque em relação a *qualquer* ponto (tal como  $P$  na Fig. 14-1) será nulo se o torque em relação a determinado ponto (tal como  $O$  na Fig. 14-1) o for. A figura indica três das  $n$  forças  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$  aplicadas em vários pontos de um corpo rígido, suas direções sendo quaisquer. Os pontos de aplicação dessas forças são identificados, em relação a  $O$ , pelos vetores de posição  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  etc.; o ponto arbitrário  $P$  é identificado pelo vetor  $\mathbf{r}_p$ . O vetor  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_p$  localiza o ponto de aplicação de  $\mathbf{F}_1$  em relação a  $P$ .

Podemos escrever para o torque resultante em torno de  $O$  (veja Eq. 12-1):

$$\tau_o = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n$$

e, em relação a  $P$ , o torque será

$$\tau_p = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_2 + \dots + (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_n,$$

equação equivalente a esta outra:

$$\tau_p = [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n] - [\mathbf{r}_p \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n)].$$

Ora, se a primeira condição de equilíbrio for satisfeita, como supomos, então  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = 0$  e o segundo termo entre colchetes, na equação anterior, se anula. O primeiro termo entre colchetes é simplesmente  $\tau_o$  (veja acima), portanto, nessas condições.

$$\tau_p = \tau_o.$$

Portanto, para um corpo em equilíbrio translacional, se  $\tau = 0$  então  $\tau_p = 0$ , sendo  $P$  um ponto arbitrário.

Temos, portanto, *seis condições independentes* que devem ser satisfeitas pelas forças para que o corpo rígido esteja em equilíbrio; são as relações algébricas das Eqs. 14-2 e 14-4. Essas seis condições correspondem a cada um dos seis graus de liberdade de um corpo rígido, três de translação e três de rotação.

Freqüentemente, trataremos com problemas em que todas as forças se encontram no mesmo plano; então as condições de equilíbrio reduzem-se a somente três: a soma de suas componentes, segundo os dois eixos perpendiculares, deve ser nula, e a soma de seus torques em relação a qualquer eixo perpendicular ao plano deve ser nula. Essas condições correspondem aos três graus de liberdade do movimento plano, dois de translação e um de rotação.

Daqui em diante, nos limitaremos principalmente, a movimentos planos, a fim de simplificar os cálculos. Isto não impõe qualquer restrição fundamental aos princípios gerais. Além disso, por comodidade, consideraremos apenas o caso de equilíbrio estático, em que os corpos encontram-se efetivamente em repouso.

Uma das forças que ocorrem nos movimentos de corpos rígidos é a da gravidade. Em realidade, para um corpo extenso, seu peso

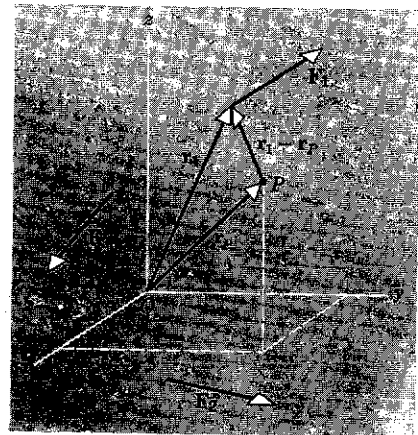


figura 14-1

Três das  $n$  forças,  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots, \mathbf{F}_n$ , que atuam sobre um corpo rígido (não mostrado). No texto prova-se que, se  $\tau = 0$  em relação ao ponto  $O$ , também é nulo em relação a qualquer outro ponto, como  $P$ , admitindo-se que o corpo esteja em equilíbrio de translação.

é a resultante de grande número de forças, pois cada partícula que constitui o corpo está sob o efeito de uma força gravitacional. Se imaginarmos um corpo de massa  $M$  subdividido em grande número de partículas,  $n$  por exemplo, a atração gravitacional exercida pela Terra sobre a  $i$ -ésima partícula de massa  $m_i$  será  $m_i g$ , dirigida para o centro da Terra. Se a aceleração da gravidade  $g$  for a mesma em todos os pontos de uma região, dizemos que existe aí um campo gravitacional uniforme, isto é,  $g$  tem o mesmo módulo, direção e sentido em todos os pontos da região. Se um corpo rígido está em um campo gravitacional uniforme,  $g$  deve ser a mesma para cada partícula do corpo e a força-peso de cada uma é paralela à das demais. Supondo uniforme o campo gravitacional terrestre, pôde-se mostrar que todas as forças-peso individuais que atuam em um corpo podem ser substituídas por uma única força  $Mg$  aplicada no centro de massa do corpo e dirigida para baixo. Isto equivale a dizer que o efeito acelerador das forças-peso individuais, dirigidas para baixo, pode ser contrabalançado por uma força única  $F (= -Mg)$  dirigida para cima, desde que esta força seja aplicada ao centro de massa do corpo.

A Fig. 14-2 mostra duas partículas típicas ou elementos de massa  $m_1$  e  $m_2$ , escolhidas dentre os  $n$  elementos semelhantes em que foi dividido o corpo rígido. Uma força  $F (= -Mg)$ , dirigida para cima, está aplicada em certo ponto  $O$ . Resta mostrar que o corpo encontra-se em equilíbrio mecânico se, e somente se, o ponto  $O$  for o centro de massa. A condição 1 de equilíbrio (Eq. 14-1) já foi atendida, ao escolhermos o módulo e o sentido da força  $F$ , isto é,

$$F + m_1 g + m_2 g + \dots + m_n g = 0,$$

ou, ainda,

$$F = -(m_1 + m_2 + \dots + m_n) g = -Mg,$$

que corresponde à nossa hipótese.

Resta provar que  $\tau = 0$  para qualquer dos pontos do corpo, tal como  $O$ ; esta é a segunda condição de equilíbrio. Escolhendo  $O$  como origem, asseguramos que o torque de  $F$  em relação a esse ponto seja nulo, pois o braço de alavanca correspondente é nulo. O torque em relação a  $O$ , devido à atração gravitacional sobre os elementos de massa, é, pois,

$$\tau = \mathbf{r}_1 \times m_1 \mathbf{g} + \mathbf{r}_2 \times m_2 \mathbf{g} + \dots + \mathbf{r}_n \times m_n \mathbf{g},$$

que pode ser escrito ainda, por serem  $m_1, m_2, \dots, m_n$  grandezas escalares, como

$$\begin{aligned} \tau &= m_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{g} + m_2 \mathbf{r}_2 \times \mathbf{g} + \dots + m_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{g} \\ &= (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_n \mathbf{r}_n) \times \mathbf{g} \\ &= \left( \sum_1^n m_i \mathbf{r}_i \right) \times \mathbf{g}, \end{aligned}$$

a soma estendendo-se a todos os elementos de massa que constituem o corpo.

Ora, se o ponto  $O$  for o centro de massa do corpo, a soma anterior é nula. Segue-se isso da definição de centro de massa (veja Eq. 9-5b e a discussão que a acompanha). Conclui-se, portanto, que, se, e somente se, o ponto  $O$  for o centro de massa, então  $\tau = 0$  e a segunda condição de equilíbrio mecânico está satisfeita.

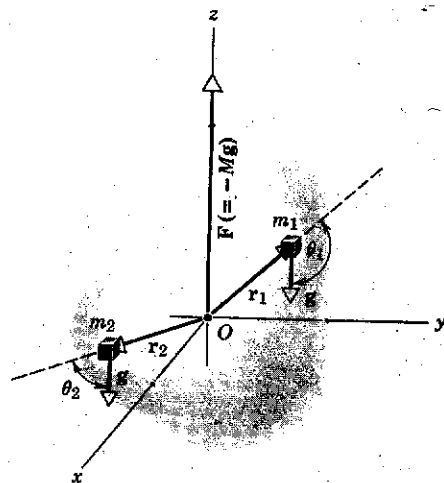


figura 14-2

Um corpo irregular é dividido em  $n$  elementos de massa, dois dos quais,  $m_1$  e  $m_2$ , estão representados. No texto prova-se que o corpo pode ser mantido em equilíbrio de translação e de rotação por uma única força  $F (= -Mg)$ , dirigida para cima e aplicada no centro de massa do corpo.

Portanto, as forças gravitacionais que atuam nos elementos de massa que formam um corpo rígido equivalem, quanto a seus efeitos de translação e rotação, a uma única força igual a  $Mg$ , o peso total do corpo, aplicada ao centro de massa. Pode-se obter o mesmo resultado se o corpo for contínuo e dividido em um número infinito de partículas. O estudante pode chegar a este resultado utilizando o cálculo integral (veja Seç. 9-1). O ponto de aplicação da força gravitacional resultante equivalente é freqüentemente denominado *centro de gravidade*.

A coincidência do centro de gravidade com o centro de massa ocorre devido à suposição de que o campo gravitacional terrestre é uniforme. De fato, tal suposição não é inteiramente verdadeira, pois o módulo de  $g$  varia com a distância ao centro da Terra; além disso,  $g$  tem a direção do raio terrestre e está orientada para o centro da Terra (Cap.16). Para apreciar o efeito dessas características, consideremos uma barra uniforme cujo comprimento fosse de muitos quilômetros, inclinada em relação à vertical, no campo gravitacional terrestre, como na Fig. 14-3. O centro de gravidade do corpo é o ponto em que a força gravitacional resultante equivalente está aplicada. Este ponto deve coincidir com o ponto onde poderia ser aplicada uma força de mesmo módulo e sentido oposto, para manter o corpo em equilíbrio. Se o campo fosse uniforme, uma única força de módulo  $Mg$ , dirigida para cima e aplicada no centro de massa, manteria a barra em equilíbrio, quer de translação, quer de rotação. Porém o campo não é uniforme, e o valor de  $g$  em  $m_1$  é menor que seu valor em  $m_2$ . O ponto em que deveria ser aplicada uma única força, para manter o corpo em equilíbrio, é portanto o ponto  $P$  um pouco abaixo do centro de massa. Além disso, se mudar a orientação do corpo, a posição de  $P$ , onde seria aplicada a força equilibrante, mudará também. Portanto, o centro de gravidade tem realmente menor utilidade em tal caso: ele não apenas difere do centro de massa, como ainda sua posição varia no corpo, quando este se move.

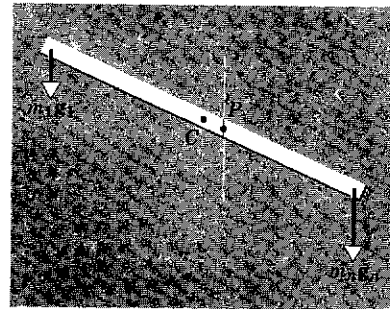


figura 14-3

O centro de massa  $C$  e o centro de gravidade  $P$  na realidade não coincidem, visto que o campo gravitacional da Terra, não é uniforme.

Uma vez que quase todos os problemas de mecânica envolvem objetos cujas dimensões em geral são pequenas, comparadas com as distâncias que ocasionam variação apreciável de  $g$ , pode-se supor que  $g$  seja uniforme em todo o corpo. O centro de massa e o centro de gravidade, podem, então, ser considerados como um só ponto. Com efeito, usa-se esta coincidência para determinar experimentalmente o centro de massa de objetos cuja forma é irregular. Por exemplo, seja determinar o centro de massa de uma lâmina delgada de forma irregular (Fig. 14-4). Suspende-se o corpo por um fio, por um ponto qualquer  $A$  de sua borda. Quando o corpo estiver em repouso, o centro de gravidade deve encontrar-se diretamente abaixo do ponto de suspensão, em algum ponto da linha  $Aa$ , pois somente nesse caso o torque resultante (soma dos torques do fio e do peso) será nulo. Suspende-se, em seguida, o corpo de outro ponto  $B$  de sua borda; de novo, pela mesma razão, o centro de gravidade estará na linha  $Bb$ . O único ponto comum às linhas  $Aa$  e  $Bb$  é sua interseção  $O$ , que deve ser, portanto, o centro de gravidade. Se agora o

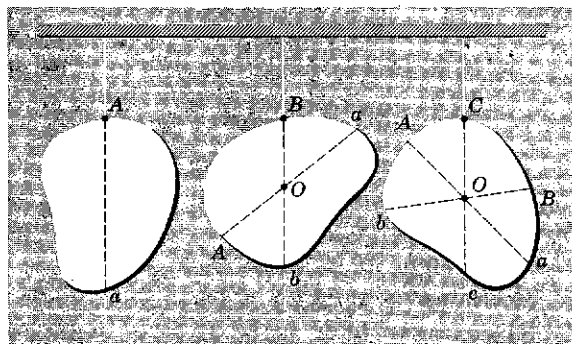


figura 14-4

Desde que o centro de massa  $O$  se situa sempre diretamente abaixo do ponto de suspensão, suspendendo uma placa por dois pontos diferentes, determina-se  $O$ .

corpo for suspenso por um terceiro ponto  $C$ , a linha vertical  $Cc$  passará por  $O$ . Como foi suposto que o campo fosse uniforme, conclui-se que o centro de gravidade coincide com o centro de massa, estando portanto, localizado em  $O$ .

Ao aplicar as condições de equilíbrio (força resultante nula e torque resultante nulo em relação a qualquer eixo), pode-se elucidar e simplificar o procedimento sob vários aspectos.

Em primeiro lugar, desenha-se uma linha imaginária de contorno, em redor do sistema que se considera; isto assegura a clara identificação do corpo ou sistema de corpos a que devem aplicar-se as leis de equilíbrio. Tal processo denomina-se isolar o sistema.

Em segundo lugar, desenharam-se vetores que representem o módulo, direção, sentido e ponto de aplicação de todas as *forças externas*. Uma força externa é a que provém de fora da linha de contorno desenhada antes. Exemplos de forças externas encontradas freqüentemente são as forças gravitacionais e as forças transmitidas por fios, cordas, barras e vigas que cruzam o contorno. Às vezes, há dúvidas quanto ao sentido de uma força. Em tais casos, faz-se um corte imaginário pelo elemento que transmite a força, no ponto em que ele cruza o contorno; se os extremos desse corte tendem a afastar-se, a força age para fora. Se a dúvida permanecer, atribua arbitrariamente um sentido à força; um valor negativo para ela, na solução, significará que o sentido da força é oposto ao que foi escolhido. Note que é necessário considerar apenas as forças externas que atuam no sistema; todas as forças internas cancelam-se aos pares.

Em terceiro lugar, escolhe-se um referencial conveniente, ao longo de cujos eixos as forças externas são decompostas antes de aplicar a primeira condição de equilíbrio (Eq. 14-2); o objetivo é simplificar os cálculos. O melhor referencial em geral é óbvio.

Em quarto lugar, escolhe-se um referencial adequado, ao longo de cujos eixos decompõem-se os torques das forças externas, antes de aplicar a segunda condição de equilíbrio (Eq. 14-4). O objetivo é novamente simplificar os cálculos ao aplicar as duas condições de equilíbrio estático, se isto mostrar-se conveniente. Suponha que um eixo passe pelo ponto em que duas forças concorrem e que ele é perpendicular ao plano formado por essas forças; essas forças automaticamente não terão componentes ao longo deste eixo (ou em torno dele). Os componentes do torque que resultam de todas as forças externas devem ser nulos em relação a qualquer eixo, para haver equilíbrio. Os torques internos se cancelarão aos pares e não precisam ser considerados.

(a) Uma barra metálica uniforme, de 1 m. tem seus extremos apoiados em duas balanças (Fig. 14-5). A barra pesa 2,0 kgf. Determinar a leitura das balanças.

O sistema de interesse é a barra. As forças atuantes nela são  $W$ , a atração gravitacional da Terra, aplicada em seu centro de gravidade, e  $F_1$  e  $F_2$ , as forças exercidas nas extremidades da barra pelas balanças. Todas essas forças estão indicadas na Fig. 14-5a. De acordo com a terceira lei de Newton, cada balança exerce sobre a barra uma força igual e oposta à que a barra exerce sobre a balança. Portanto, a fim de obter a leitura das balanças devemos determinar os módulos de  $F_1$  e  $F_2$ .

A condição para haver equilíbrio de translação (Eq. 14-1) é

$$F_1 + F_2 + W = 0.$$

## 14-4 EXEMPLOS DE EQUILÍBRIO

### EXEMPLO 1



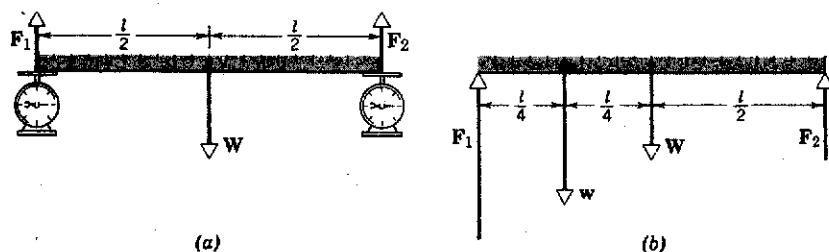


figura 14-5

(a) Exemplo 1a. Uma barra homogênea de aço repousa sobre duas balanças de mola. (b) Exemplo 1b. Um peso é pendurado a um quarto do seu comprimento, a partir de uma das extremidades.

Todas as forças têm direção vertical, por isso o eixo  $Oy$  terá essa direção também, sendo desnecessário considerar outros eixos. Obtém-se, então, a equação escalar

$$F_1 + F_2 - 2,0 \text{ kgf} = 0.$$

Para haver equilíbrio rotacional, deve ser nulo o componente do torque resultante que age na barra em relação a *qualquer* eixo. Vimos que é suficiente mostrar que os componentes do torque são nulos, ao longo de três eixos perpendiculares entre si. Esses componentes certamente são nulos para dois eixos perpendiculares localizados no plano da Fig. 14-5a (por quê?). Resta impor que o torque resultante seja nulo em relação a qualquer eixo perpendicular ao eixo da figura. Escolhamos um eixo que passe pelo centro de gravidade. Então, considerando positiva a rotação no sentido horário e negativa no sentido anti-horário, a condição de equilíbrio rotacional (Eq. 14-4) será

$$F_1 \left( \frac{l}{2} \right) - F_2 \left( \frac{l}{2} \right) + W(0) = 0,$$

ou seja,

$$F_1 - F_2 = 0.$$

Combinando as duas equações, obtém-se

$$F_1 + F_2 = 2F_1 = 2F_2 = 2,0 \text{ kgf},$$

$$F_1 = F_2 = 1,0 \text{ kgf}.$$

Portanto, como era de esperar, a leitura de cada balança é 1,0 kgf.

Se houvéssemos escolhido um eixo que passasse por um dos extremos da barra o resultado seria o mesmo. Suponhamos que o extremo escolhido fosse o da direita; então

$$F_1(l) - W \left( \frac{l}{2} \right) + F_2(0) = 0,$$

e

$$F_1 = \frac{W}{2} = \frac{2,0 \text{ kgf}}{2} = 1,0 \text{ kgf}.$$

Combinando com a condição  $F_1 + F_2 = 2,0 \text{ kgf}$  obtém-se  $F_2 = 1,0 \text{ kgf}$ , como antes.

(b) Suponhamos agora que um bloco de 3,0 kg seja colocado a 25 cm da extremidade esquerda da barra. Qual será a leitura das balanças?

As forças externas que atuam na barra estão indicadas na Fig. 14 5b, sendo  $w$  a força exercida sobre a barra pelo bloco. A primeira condição de equilíbrio é

$$F_1 + F_2 - W - w = 0.$$

Sendo  $W = 2,0 \text{ kgf}$  e  $w = 3,0 \text{ kgf}$  resulta

$$F_1 + F_2 = 5,0 \text{ kgf} = 49 \text{ N}.$$

Se considerarmos um eixo que passe pela extremidade esquerda da barra, a segunda condição de equilíbrio é

$$w \left( \frac{l}{4} \right) + W \left( \frac{l}{2} \right) - F_2(l) = 0;$$

substituindo os valores obtêm-se

$$F_2 = 1,75 \text{ kgf} = 17 \text{ N},$$

levando à primeira equação resulta:

$$F_1 + 1,75 \text{ kgf} = 5 \text{ kgf} = 49 \text{ N}$$

$$F_1 = 3,25 \text{ kgf} = 32 \text{ N}.$$

Portanto, em equilíbrio a balança da esquerda indicará 32 N e a da direita 17 N.

Por que, neste problema, obtêm-se apenas duas condições de equilíbrio para as forças, e não as três que deveríamos esperar em um problema em que as forças são coplanares?

(a) Uma escada de 20 m, pesando 50 kgf, está encostada em uma parede; o ponto de apoio encontra-se a 16 m acima do solo. O centro de gravidade da escada está a um terço de seu comprimento, medindo de baixo. Um homem de 80 kg está apoiado no meio da escada. Supondo que não haja atrito entre a escada e a parede, determinar as forças exercidas pelo sistema no solo e na parede.

As forças atuantes na escada estão indicadas na Fig. 14-6.  $W$  é o peso do homem e  $w$  o da própria escada. O solo exerce na escada a força  $F_1$ , cujos componentes vertical e horizontal são  $F_{1v}$  e  $F_{1h}$ , respectivamente; esta última é a força de atrito. Como a parede não tem atrito, a força que ela exerce na escada deve ser perpendicular à sua superfície; é a força  $F_2$ . Os dados fornecidos são os seguintes:

$$W = 80 \text{ kgf} = 784 \text{ N}, \quad a = 16 \text{ m},$$

$$w = 50 \text{ kgf} = 490 \text{ N}, \quad c = 20 \text{ m}.$$

É fácil verificar (da geometria) que  $b = 12 \text{ m}$ . A linha de ação de  $W$  intercepta o solo à distância  $b/2$  da parede e a de  $w$  encontra o solo a  $2b/3$  da parede.

Tomemos o eixo  $Ox$  paralelo ao solo e o eixo  $Oy$  ao longo da parede. Portanto, as condições que as forças devem satisfazer para que haja equilíbrio de translação (Eq. 14-2) são as seguintes:

$$F_2 - F_{1h} = 0,$$

$$F_{1v} - W - w = 0.$$

Para haver equilíbrio de rotação (Eq. 14-4) considere-se um eixo que passe pelo ponto de contato com o solo. Os momentos das forças devem ser

$$F_2(a) - W\left(\frac{b}{2}\right) - w\left(\frac{b}{3}\right) = 0.$$

Substituindo os dados fornecidos:

$$F_2(16 \text{ m}) - (784 \text{ N})(6 \text{ m}) - (490 \text{ N})(4 \text{ m}) = 0,$$

logo

$$F_2 = 417 \text{ N}, \quad F_{1h} = F_2 = 417 \text{ N},$$

$$F_{1v} = 784 \text{ N} + 490 \text{ N} \cong 1270 \text{ N}.$$

De acordo com a terceira lei de Newton, as forças exercidas pelo solo e pela parede sobre a escada são respectivamente iguais e opostas às forças exercidas pela escada sobre aqueles corpos. Portanto, a força normal aplicada na parede será de 417 N; a força que age no solo tem componentes de 1270 N (vertical e para baixo) e 417 N (horizontal e para a direita).

(b) Suponhamos que o coeficiente de atrito estático entre o solo e a escada seja  $\mu_s = 0,40$ . Até que altura o homem poderá subir na escada, antes que ela comece a escorregar?

Chamemos  $x$  a fração do comprimento total da escada que o homem pode subir antes de começar o escorregamento. As condições de equilíbrio são

## EXEMPLO 2

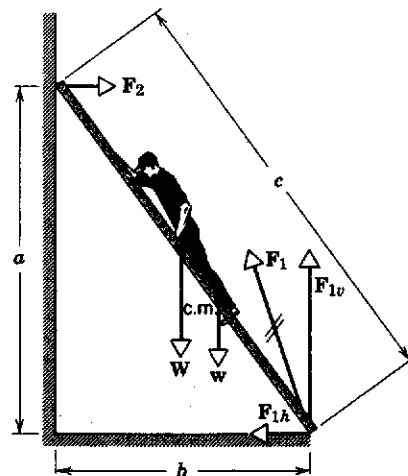


figura 14-6  
Exemplo 2.

$$F_2 - F_{1h} = 0,$$

$$F_{1v} - W - w = 0,$$

e

$$F_2 a - W b x - w \left( \frac{b}{3} \right) = 0.$$

Resultará

$$F_2 (16 \text{ m}) = (784 \text{ N}) (12 \text{ m}) x + (490 \text{ N}) (4 \text{ m}),$$

$$F_2 = (588x + 122) \text{ N}$$

$$F_{1h} = (588x + 122) \text{ N}$$

e como antes,

$$F_{1v} = 1270 \text{ N}.$$

A força máxima de atrito estático é dada por

$$F_{1h} = \mu_e F_{1v} = (0,40) (1270 \text{ N}) = 508 \text{ N}$$

logo

$$F_{1h} = 508 \text{ N} = (588x + 122) \text{ N}$$

e

$$x = \frac{386}{588}$$

assim sendo, o homem pode subir a escada até a altura

$$(20x) \text{ m} = 13 \text{ m},$$

antes de iniciar-se o escorregamento.

Neste exemplo a escada é considerada um objeto unidimensional, tendo um só ponto de contato com a parede e com o solo. O estudante deve refletir como isto limita a consideração do caso menos artificial de haver dois pontos de contato em cada extremidade.

A razão para supor que a parede não possui atrito será apresentada posteriormente. Você desconfia qual seja?

Uma barra uniforme está presa por uma dobradiça a uma parede. Um fio liga a extremidade da barra à parede, em um ponto à distância  $d$  acima da dobradiça. A barra forma um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal, quando um peso  $w$  é suspenso por uma corda da sua extremidade. Sendo  $W$  o peso da barra e  $l$  seu comprimento, determinar a tensão no fio e as forças exercidas na barra pela dobradiça.

A situação está representada na Fig. 14-7, em que são mostradas todas as forças atuantes na barra. O fio que puxa a barra forma um ângulo  $\alpha$  com a horizontal, de forma que a tensão  $T$  no fio terá componentes horizontal e vertical  $T_h$  e  $T_v$ , respectivamente. A força  $F$  exercida pela dobradiça sobre a barra também possui componentes horizontal e vertical,  $F_h$  e  $F_v$ , respectivamente. O peso  $W$  da barra atua em seu centro de gravidade;  $w$  é a tensão na corda que transmite à barra o peso do corpo suspenso.

Adotando eixos horizontal e vertical, obtém-se como condição para o equilíbrio de translação:

$$F_v + T_v - W - w = 0,$$

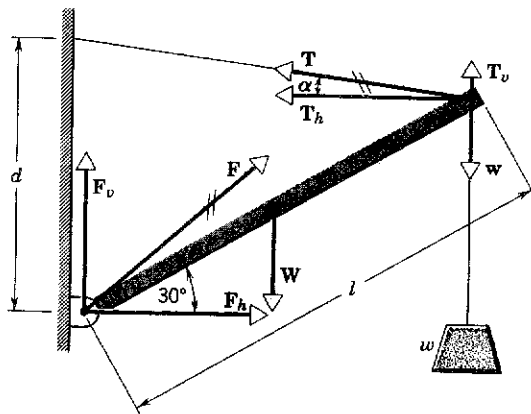
e

$$F_h - T_h = 0.$$

Escolhamos, para obter a condição de equilíbrio rotacional, um eixo que passe pelo ponto de interseção de  $T$  e  $w$  (por quê?). Então

$$F_v(l \cos 30^\circ) - F_h(l \sin 30^\circ) - \frac{W(l \cos 30^\circ)}{2} = 0.$$

### EXEMPLO 3

figura 14-7  
Exemplo 3

As incógnitas são  $T_h$ ,  $T_v$ ,  $F_h$  e  $F_v$ . Suponhamos que as demais grandezas possuam os seguintes valores:

$$W = 150 \text{ kgf}, \quad w = 100 \text{ kgf}, \quad l = 3,0 \text{ m}, \quad d = 20 \text{ m}.$$

Portanto,

$$(1) \quad F_v + T_v = 250 \text{ kgf} = 2,45 \times 10^3 \text{ N},$$

$$(2) \quad F_h = T_h,$$

e

$$F_v(3 \text{ m})(0,866) = F_h(3 \text{ m})(0,5) + (150 \text{ kgf})(3 \text{ m})(0,5)(0,866),$$

ou seja,

$$(3) \quad F_v = F_h(5,0/8,66) + 75 \text{ kgf}.$$

Lembremos que são quatro as incógnitas,  $F_v$ ,  $F_h$ ,  $T_v$  e  $T_h$ . É necessária mais uma relação entre essas grandezas, para que possamos resolver o problema. Tal relação segue-se do fato de  $T_v$  e  $T_h$  terem por resultante a força  $T$ , dirigida ao longo do fio, que não pode suportar uma força transversal à sua direção (o que, entretanto, não é verdadeiro para a barra). Portanto, a quarta relação será:

$$T_v = T_h \operatorname{tg} \alpha,$$

sendo

$$\operatorname{tg} \alpha = (d - l \operatorname{sen} 30^\circ) / l \cos 30^\circ = 1,0/8,66$$

portanto,

$$(4) \quad T_v = T_h/8,66.$$

Combinando (1) e (4) obtém-se

$$F_v = 250 \text{ kgf} - T_h/8,66,$$

e de (2) e (3) resulta

$$F_v = T_h \cdot 5,0/8,66 + 75 \text{ kgf}.$$

A solução simultânea dessas equações fornece

$$T_h = 251 \text{ kgf} = 2,46 \times 10^3 \text{ N},$$

$$F_v = 220 \text{ kgf} = 2,16 \times 10^3 \text{ N}.$$

Das relações (2) e (1) obtém-se, respectivamente,

$$F_h = 251 \text{ kgf} = 2,46 \times 10^3 \text{ N},$$

$$T_v = 30 \text{ kgf} = 3,0 \times 10^2 \text{ N}.$$

A tensão no fio será, portanto,

$$T = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = 255 \text{ kgf} = 2,5 \times 10^3 \text{ N};$$

a dobradiça exercerá, pois, uma força horizontal de 251 kgf e uma força vertical de 220 kgf.

Nos exemplos precedentes tivemos o cuidado de limitar o número de forças desconhecidas ao número de equações independentes que relacionam as forças. Quando todas as forças atuam no mesmo plano, só podemos ter três equações independentes para equilíbrio, uma para o equilíbrio de rotação em torno de qualquer eixo normal ao plano, e duas outras relativas ao equilíbrio de translação no plano. No entanto, freqüentemente são mais de três as forças incógnitas. Por exemplo, no problema da escada (Ex. 2a), se abandonarmos a suposição artificial de que a parede não tem atrito, haverá quatro grandezas escalares desconhecidas, ou seja, componentes horizontal e vertical da força atuante na extremidade da escada apoiada na parede, e os componentes horizontal e vertical da força atuante na extremidade da escada apoiada no solo. Como só possuímos três equações escalares, tais forças não podem ser determinadas. Para qualquer valor atribuído a uma das forças desconhecidas as outras três forças podem ser determinadas. Porém, se não tivermos base para atribuir determinado valor a uma das forças desconhecidas, haverá um número infinito de soluções matematicamente possíveis. Devemos, portanto, conseguir uma outra relação independente entre as forças incógnitas se quisermos ter esperança de resolver univocamente o problema.

Outro exemplo simples de tais estruturas indeterminadas é o automóvel. Neste caso deseja-se determinar as forças exercidas pelo solo sobre cada um dos quatro pneus, quando o carro encontra-se em repouso em uma superfície horizontal. Supondo que essas forças sejam normais ao solo, resultarão quatro grandezas escalares desconhecidas. Todas as outras forças, tal como o peso do carro com os passageiros, atuam normalmente ao solo. Teremos, portanto, apenas três equações independentes que fornecem as condições de equilíbrio, uma para equilíbrio de translação na direção comum a todas as forças e duas para equilíbrio de rotação em torno de dois eixos perpendiculares entre si, em um plano horizontal. Ainda aqui a solução do problema é indeterminada matematicamente. Uma mesa de quatro pernas sobre o solo é outro exemplo semelhante.

Está claro que, pelo fato de existir uma solução única para qualquer problema físico real, devemos encontrar uma base física para a relação independente adicional entre as forças, a fim de podermos resolver o problema. A dificuldade fica superada quando se verifica que as estruturas nunca são perfeitamente rígidas, como vem sendo sempre suposto: as estruturas são de fato deformadas até certo ponto. Por exemplo, os pneus do automóvel e o solo se deformam, assim como a parede e a escada. As leis da elasticidade e as propriedades elásticas da estrutura determinam a natureza da deformação, fornecendo a relação adicional necessária entre as quatro forças. Uma análise completa exige não apenas as leis da mecânica do corpo rígido como também as da elasticidade. Em cursos de engenharia civil e mecânica muitos desses problemas são encontrados e analisados desse modo. Tais questões não mais serão estudadas neste livro.

No Cap. 8 vimos que a força gravitacional é conservativa. Sabemos que, para uma força conservativa pode-se definir uma função energia potencial,  $U(x, y, z)$ , estando  $U$  relacionada com  $F$  pelas equações

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Nos pontos em que  $\partial U/\partial x$  se anula, uma partícula submetida a esta força conservativa estará em equilíbrio translacional na direção  $Ox$ , pois então  $F_x$  é nula. Analogamente, para  $\partial U/\partial y$  e  $\partial U/\partial z$  nulos, uma partícula estará em equilíbrio translacional segundo  $Oy$  e  $Oz$ , respectivamente. A derivada de  $U$  será nula em um ponto em que esta função tenha um valor extremo (máximo ou mínimo) ou quando  $U$  seja constante em relação à respectiva variável.

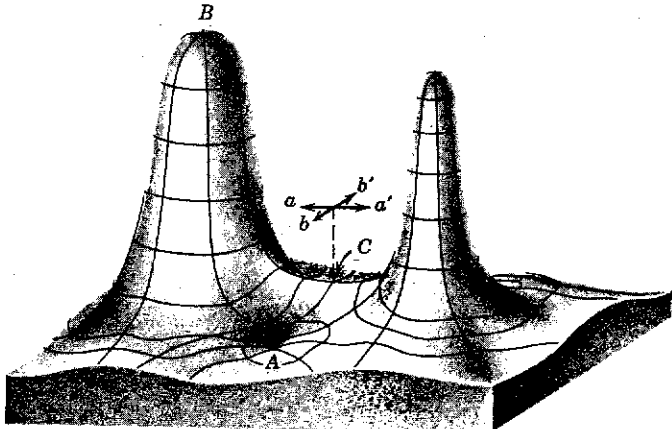
Quando  $U$  for mínima, a partícula encontra-se em equilíbrio *estável*; qualquer deslocamento em relação a essa posição resultará em uma força restauradora que tende a fazer voltar a partícula para a posição de equilíbrio. Outro modo de enunciar, isto é, dizer que se um corpo está em equilíbrio estável, deve ser realizado algum trabalho sobre ele por um agente externo, a fim de alterar sua posição, o que resultará em um aumento de sua energia potencial.

Quando  $U$  for máxima, a partícula encontra-se em equilíbrio *instável*; qualquer deslocamento em relação a essa posição implicará em uma força que tende a afastar a partícula ainda mais da posição de equilíbrio. Nesse caso não é necessário que nenhum agente externo realize trabalho sobre a partícula, para alterar sua posição; o trabalho realizado para deslocar o corpo é fornecido internamente pela força conservativa, resultando em um decréscimo de energia potencial.

Quando  $U$  for constante, a partícula estará em equilíbrio indiferente. Nesse caso a partícula poderá ter um pequeno deslocamento, sem ficar sujeita quer a uma força restauradora, quer a uma força de repulsão.

Note que uma partícula pode estar em equilíbrio em relação a uma das coordenadas, sem estar necessariamente em equilíbrio relativamente às demais, como é o caso de um corpo que cai. Além disso, uma partícula pode estar em

**14-5**  
**EQUILÍBRIO ESTÁVEL,**  
**INSTÁVEL E INDIFERENTE**  
**DOS CORPOS RÍGIDOS**  
**EM UM CAMPO**  
**GRAVITACIONAL**



**figura 14-8**  
Superfície potencial gravitacional, que pode ser considerada como uma superfície real. Uma partícula colocada em A, B e C permanece em repouso; um plano tangente a qualquer um desses pontos é horizontal. Diz-se que nesses pontos a partícula encontra-se em equilíbrio. Se colocada em A e levemente deslocada, a partícula tende a voltar a esse ponto. A representa um ponto de equilíbrio estável. Se colocada em B e levemente deslocada, a partícula tende a afastar-se. Portanto B representa um ponto de equilíbrio instável. Se colocada em C e levemente deslocada, na direção  $aa'$ , a partícula tende a retornar a esse ponto, enquanto que, se deslocada ao longo de  $bb'$ , a partícula tende a afastar-se. C é chamado de ponto sela, devido à semelhança da superfície com uma sela. Não está ilustrado o equilíbrio indiferente, que seria o equilíbrio de uma partícula colocada em um plano horizontal.

equilíbrio estável em relação a uma das coordenadas e em equilíbrio instável relativamente a outra, como, por exemplo, uma partícula em um ponto sela (Fig. 14-8).

Todas essas observações aplicam-se a partículas, isto é, ao movimento de translação. Suponhamos agora que se trate de um corpo rígido. Nesse caso devemos considerar não apenas o equilíbrio de translação como também o de rotação. O problema de um corpo rígido em um campo gravitacional é particularmente simples, porque *todas as forças gravitacionais que atuam nas partículas de um corpo rígido podem considerar-se aplicadas em um só ponto, quer em relação à translação como em relação à rotação*. Podemos substituir todo o corpo rígido, para avaliar o equilíbrio sob a ação de forças gravitacionais, por uma única partícula de massa equivalente, concentrada no centro de gravidade.

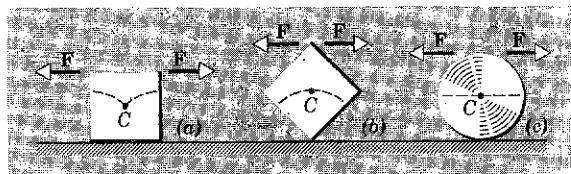


figura 14-9

Equilíbrio de um corpo. (a) Um cubo apoiado sobre uma de suas faces encontra-se em *equilíbrio estável*, pois seu centro de gravidade  $C$  eleva-se quando o bloco é inclinado por uma força horizontal  $F$ . (b) Se o cubo apoiar-se em uma de suas arestas o equilíbrio será *instável*, porque a aplicação de uma força  $F$  horizontal ocasiona o abaixamento do centro de gravidade ao inclinar o corpo. (c) Uma esfera ou um cilindro estará em *equilíbrio indiferente*, pois não se modifica a altura do centro de massa do corpo pela ação da força  $F$ . Compare esses critérios de equilíbrio com os da Fig. 14-8. Que relação existe entre eles?

Consideremos, por exemplo, um cubo em repouso sobre uma mesa horizontal. O centro de gravidade é o ponto  $C$  (Fig. 14-9a). Aplicando uma força ao cubo, façamo-lo girar, sem escorregar, em torno de um eixo que passe por uma das arestas inferiores. Observe que o centro de gravidade se eleva e se realiza algum trabalho sobre o cubo, o que aumenta sua energia potencial. Suprimida a força, o cubo tende a retornar à sua posição original, sua energia potencial adicional sendo transformada em energia cinética, quando ele cai. A posição inicial, portanto, é de *equilíbrio estável*. Em termos de uma partícula de massa equivalente no centro de gravidade o processo é descrito pela linha pontilhada que indica a trajetória seguida pelo centro de gravidade durante esse movimento. Vê-se que a partícula possui energia potencial mínima na posição de equilíbrio estável, como é de se esperar. Pode-se concluir que o corpo rígido estará em equilíbrio estável se a aplicação de qualquer força puder elevar o centro de gravidade do corpo, mas não abaixá-lo.

Se o cubo girar até equilibrar-se em uma das arestas, como na Fig. 14-9b, ainda uma vez ele estará em equilíbrio, neste caso instável. A aplicação de uma força horizontal mínima fará o cubo cair, resultando num decréscimo de sua energia potencial. A partícula de massa equivalente no centro de gravidade seguirá a linha pontilhada. Na posição de equilíbrio instável a partícula possui energia potencial máxima, como se vê. Concluímos que o corpo rígido estará em equilíbrio instável se a aplicação de qualquer força horizontal tender a abaixar o centro de gravidade do corpo.

O equilíbrio indiferente de um corpo é ilustrado por uma esfera apoiada em uma superfície horizontal (Fig. 14-9c). Se for aplicada uma força horizontal à esfera, o seu centro de gravidade não sobe nem desce, movendo-se ao longo da linha horizontal indicada. A energia potencial da esfera é constante durante o deslocamento, assim como a da partícula de massa equivalente no centro de gravidade. O sistema não tende a mover-se em qualquer sentido, ao ser suprimida a força aplicada. Um corpo rígido estará em equilíbrio indiferente se a aplicação de qualquer força horizontal não elevar nem abaixar o seu centro de gravidade.

Em que circunstâncias um corpo rígido *suspense* estaria em equilíbrio estável. Quando um corpo rígido *suspense* estaria em equilíbrio instável e em equilíbrio indiferente?

# questões

1. As Eqs. 14-1 e 14-3 são condições necessárias e suficientes para equilíbrio mecânico? E para equilíbrio estático?
2. Uma roda que gira à velocidade constante  $\omega$  em torno de um eixo fixo está em equilíbrio mecânico, pois nenhuma força ou torque externos atuam nela. No entanto, as partículas, que constituem a roda sofrem uma aceleração centrípeta  $a$ , dirigida para o eixo. Sendo  $a \neq 0$ , como a roda pode ser considerada em equilíbrio?
3. Dê vários exemplos de um corpo que não esteja em equilíbrio, mesmo se a resultante de todas as forças que agem neles seja nula.
4. Se um corpo não está em equilíbrio de translação, o torque em torno de qualquer ponto será nulo se for nulo o torque em relação a um ponto particular?
5. Qual é mais provável que arrebente com o uso: uma rede fortemente esticada entre duas árvores ou uma rede frouxa? Prove sua resposta.
6. Uma escada está em repouso, com sua extremidade superior encostada a uma parede e a inferior apoiada no solo. É mais provável que ela escorregue quando uma pessoa estiver em pé no topo da escada ou no degrau inferior? Explique.
7. No Ex. 2, se a parede fosse áspera, as leis empíricas do atrito nos forneceriam a condição adicional, necessária para determinar a força extra (vertical), exercida pela parede sobre a escada?
8. No Ex. 3, por que não é necessário considerar o atrito na dobradiça?
9. Um quadro está suspenso de uma parede por dois fios. Que orientação devem ter os fios para que a tração neles seja mínima? Explique como é possível o equilíbrio com qualquer número de orientações e trações, embora o quadro tenha massa definida.
10. Mostre como usar um dinamômetro para pesar objetos cujos pesos estejam bem além da leitura máxima da escala do instrumento.
11. O centro de massa e o centro de gravidade de um edifício coincidem? E de um lago? Sob que condições se torna importante a diferença entre o centro de massa e o centro de gravidade de um corpo?
12. Se um corpo rígido for lançado no ar sem girar, ele não gira durante o movimento, se a resistência do ar puder ser desprezada. Que conclusão relativa à localização do centro de gravidade pode extrair-se desse resultado simples?
13. Explique, usando forças e torques, como uma árvore pode manter o equilíbrio em uma ventania forte.
14. Existe, de fato, um corpo verdadeiramente rígido?
15. Você está sentado no banco do motorista de um carro estacionado. Dizem à você que as forças exercidas em cada um dos quatro pneus, pelo solo, no sentido para cima, são diferentes. Discuta os fatores que entram em consideração para provar que esta afirmação é falsa ou verdadeira.
16. Um bloco homogêneo, na forma de um paralelepípedo, com os lados na razão 1:2:3, repousa sobre uma superfície horizontal. Em que posição, isto é, sobre qual de suas três diferentes faces, ele terá mais estabilidade?
17. Uma partícula de vírus, em solução dentro de um líquido que enche um tubo de uma centrífuga, está em movimento circular (isto é, em movimento *acelerado*) quando vista por um observador no laboratório. Um observador girando com a centrífuga, entretanto, diria que a partícula *não está acelerada*. Explique como a partícula pode permanecer em equilíbrio para o segundo observador, mas não para o primeiro.
18. No Cap. 5, definimos força em termos de aceleração pela equação  $F = ma$ . Para um corpo em equilíbrio, todavia, não há aceleração. Como, então, podemos atribuir significado às forças que atuam em tal corpo?

## SEÇÃO 14-2

1. Prove que, quando apenas três forças agem em um corpo em equilíbrio, elas devem ser coplanares e suas linhas de ação devem interceptar-se em um ponto ou no infinito.
2. Um sistema está em equilíbrio sob a ação de três forças aplicadas no ponto (1, 1). O módulo de uma das forças é dado por:  $F_1 = 10 \text{ N}$  e uma segunda força possui módulo

# problemas



igual a 20 N. O ângulo entre estas duas forças vale  $60^\circ$ . Calcule o módulo da terceira força de modo que o sistema se mantenha em equilíbrio sob a ação das três forças.

Resposta: 26,45 N.

3. Considere as forças:  $F_1 = i + j$ ;  $F_2 = -i + j$ ;  $F_3 = 2i - 3j$ . A força  $F_1$  está aplicada no ponto (0, 0), a força  $F_2$  está aplicada no ponto (0, 2) e o ponto de aplicação da força  $F_3$  é o ponto de coordenadas  $x = y = 1$ . Determine a força  $F_4$  necessária para que o sistema permaneça em equilíbrio estático.
4. Uma esfera uniforme de peso  $W$  e raio  $r$  está segura por uma corda fixa a uma parede sem atrito a uma distância  $L$  acima do centro da esfera. Como se pode ver na Fig. 14-10. Determine (a) a tração na corda e (b) a força exercida pela parede sobre a esfera.

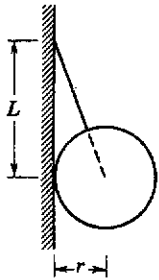


figura 14-10

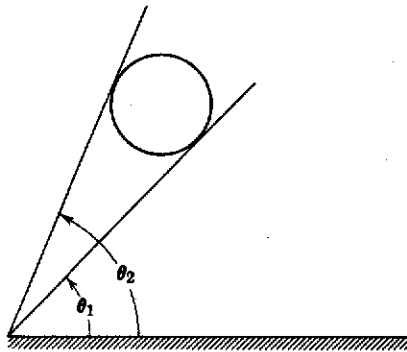


figura 14-11

5. Uma esfera de peso  $w$  está em repouso, presa entre dois planos inclinados de ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  (Fig. 14-11). (a) Suponha que não haja atrito e determine as forças (sentidos e módulo) que os planos exercem sobre a esfera. (b) Que mudança haveria, em princípio, se o atrito fosse levado em consideração?

Resposta: (a)  $F_1 = w \sin \theta_2 / \sin (\theta_2 - \theta_1)$ ;  $F_2 = w \sin \theta_1 / \sin (\theta_2 - \theta_1)$ ; normal aos planos.

6. Duas esferas lisas, idênticas e uniformes, cada uma de peso  $W$ , repousam, como mostra a Fig. 14-12, no fundo de um recipiente retangular, fixo. Determine, em termos de  $W$ , as forças atuantes sobre as esferas (a) pelas superfícies do recipiente e (b) por uma sobre a outra se a linha que une os centros das esferas forma um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal.

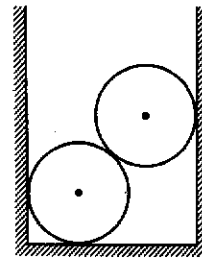


figura 14-12

7. Uma corrente flexível de peso  $W$  está suspensa entre dois pontos fixos  $A$  e  $B$ , de mesmo nível, conforme a Fig. 14-13. Determinar (a) a força (vetor) exercida pela corrente em cada ponto extremo e (b) a tração na corrente, no ponto mais baixo.

Resposta: (a)  $W/2 \sin \theta$ , tangencialmente à corrente. (b)  $\frac{1}{2} W \cot \theta$ .

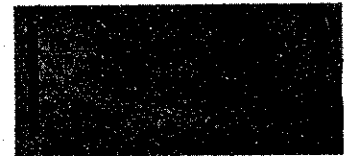


figura 14-13

SEÇÃO 14-3

8. Considere as relações (9-5a) e (9-5b), deduzidas no Cap. 9 para a determinação do centro de massa de um sistema de  $n$  partículas. Deduza expressões análogas para a denominação do centro de gravidade de um sistema de  $n$  partículas, supondo que os pesos sejam paralelos.

Resposta: O vetor posição do centro de gravidade é dado por:  $r_{CG} = (1/P) \sum p_i r_i$ , onde o somatório se estende para todas as  $n$  partículas e  $P$  é o módulo da resultante total da soma dos pesos.

9. Uma barra não uniforme de peso  $W$  está suspensa, em repouso, na posição horizontal, por duas cordas leves como indica a Fig. 14-14, o ângulo que uma das cordas forma com a vertical é  $\theta = 40^\circ$  e o que a outra corda forma com a vertical é  $50^\circ$ . Se o comprimento  $L$  da barra é 6,2 m, calcule a distância  $x$  de sua extremidade esquerda ao centro de gravidade.

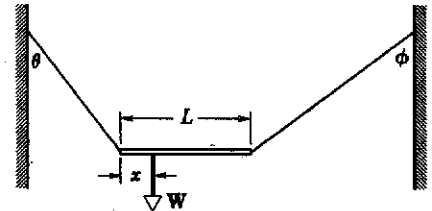


figura 14-14

10. Em um disco uniforme de raio  $R$ , faz-se uma seção circular de raio  $r$ , cujo centro está à distância  $R/2$  do centro do disco original. Localize o centro de gravidade do corpo resultante.

Resposta: Ao longo da reta que une o centro do buraco ao centro do disco, no ponto  $x_{cm} = -Rr^2/2(R^2 - r^2)$ .

SEÇÃO 14-4

11. Uma viga transportada por três homens, um deles segurando-a em uma extremidade e os outros dois suportando-a por uma peça transversal colocada de modo que a carga

esteja igualmente dividida entre as três pessoas. Determine em que ponto a peça transversal deve ser colocada. Despreze a massa da peça.

12. Na Fig. 14-15, um homem tenta retirar seu carro do atoleiro no acostamento de uma estrada. Ele prende firmemente a ponta de uma corda no pára-choque dianteiro e a outra ponta em um poste telefônico a 18 m de distância. Então, ele empurra transversalmente a corda, no seu ponto central com uma força de 700 N deslocando o centro da corda de 30 cm em relação a sua posição primitiva. O carro está prestes a se mover. Que força a corda exerce no carro? (A corda distende-se um pouco sob tensão).  
Resposta: 1,05 kN.

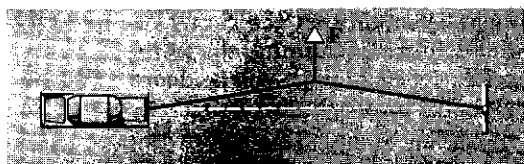


figura 14-15

13. As forças  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  agem na estrutura da Fig. 14-16, como está indicado. Deseja-se colocar a estrutura em equilíbrio, aplicando no ponto  $P$  uma força cujos componentes vetoriais são  $F_h$  e  $F_v$ . São fornecidos os valores  $a = 2,0$  m,  $b = 3,0$  m,  $c = 1,0$  m,  $F_1 = 20$  N,  $F_2 = 10$  N e  $F_3 = 5,0$  N. Determine (a)  $F_h$ , (b)  $F_v$  e (c)  $d$ .

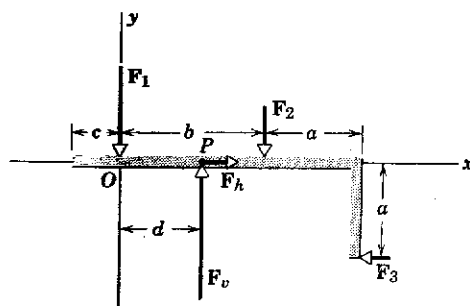


figura 14-16

14. Que força  $F$ , aplicada horizontalmente no eixo da roda, é necessária para que a roda suba um degrau de altura  $h$ ? Sendo  $W$  o peso da roda e  $r$  o seu raio. (ver Fig. 14-17)  
Resposta:  $F = W \sqrt{h(2r-h)}/(r-h)$

15. Um alçapão no teto tem área igual a  $1,5$  m<sup>2</sup>, massa igual a 8 kg, um lado preso por meio de dobradiças e um fecho do lado oposto. Se o centro de gravidade do alçapão está a 15 cm de seu centro e mais próximo do lado das dobradiças, que forças devem sustentar (a) o fecho e (b) as dobradiças?

16. Uma régua está apoiada sobre uma parede vertical sem atrito. A outra extremidade da régua está apoiada sobre um piso horizontal. O coeficiente de atrito estático entre a régua e o piso vale 0,5. Calcule o maior ângulo que a régua pode fazer com a parede sem que ocorra o escorregamento da régua.  
Resposta:  $\theta_{\text{máx.}} = 45^\circ$ .

17. Uma balança é constituída de um travessão que pode girar livremente em torno de um eixo que não passa pelo centro do travessão. Ela é equilibrada por massas desiguais, colocadas em cada um dos pratos, situados nas extremidades do travessão. Quando uma massa desconhecida  $m$  é colocada no prato esquerdo, obtém-se equilíbrio colocando uma massa  $m_1$  no prato direito; analogamente, quando se põe a massa  $m$  no prato direito, ela é equilibrada por uma massa  $m_2$ , colocada no prato esquerdo. Mostre que

$$m = \sqrt{m_1 m_2}$$

18. A massa de um automóvel vale duas toneladas e a distância entre os eixos é igual a 3,50 m. O centro de massa do automóvel está situado a 1,20 m atrás do eixo dianteiro. Suponha que todas as rodas do automóvel sejam idênticas. Determine a força exercida pelo solo sobre cada uma das rodas (a) dianteiras e (b) traseiras. Despreze a largura do automóvel.  
Resposta: (a) 6,44 kN. (b) 3,36 kN.

19. Um engradado com a forma de um cubo de 1,4 m contém uma peça de mecanismo cujo traçado é tal que o centro de gravidade do engradado mais o seu conteúdo está localizado a 0,4 m acima de seu centro geométrico. (a) Determine o ângulo máximo que uma rampa poderá fazer com a horizontal se o engradado deslizar para baixo sobre

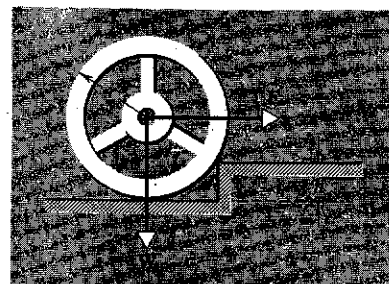


figura 14-17

ela sem se virar. (b) Para este ângulo, determine o valor máximo para o coeficiente de atrito estático entre o engradado e a rampa que permite o deslizamento do mesmo.

20. Uma porta tem 2,3 m de altura, 0,85 m de largura e massa igual a 25 kg. Duas dobradiças distantes 0,35 m, uma da parte superior e a outra da parte inferior, suportam, cada qual, a metade do peso da porta. Suponha que o centro de gravidade coincida com o centro geométrico da porta e determine os componentes horizontal e vertical das forças exercidas por cada dobradiça sobre ela.

Resposta: Componente vertical: 122,6 N. Componentes horizontais: 65,1 N (em sentidos contrários).

21. Quatro tijolos, cada um de comprimento  $l$ , estão empilhados um sobre o outro (veja Fig. 14-18), de forma que parte de cada um se projete além do tijolo de baixo. Mostre que, para haver equilíbrio, as duas maiores saliências possíveis são: (a) o tijolo de cima projetando-se além do de baixo de  $l/2$ , (b) o segundo tijolo, a partir do topo, projetando-se ao inferior de  $l/4$ .

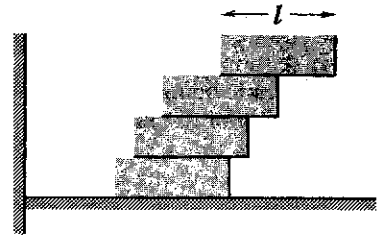


figura 14-18

22. O sistema ilustrado pela Fig. 14-19 está em equilíbrio. O corpo que pende da extremidade da escora  $S$  tem massa igual a 460 kg e a própria escora tem massa igual a 90 kg. Determine: (a) a tração  $T$  no cabo, (b) a força exercida sobre a escora pelo pivô  $P$ .

Resposta: (a) 13,6 kN. (b) componente horizontal = 11,8 kN, componente vertical = 12,2 kN.

figura 14-19

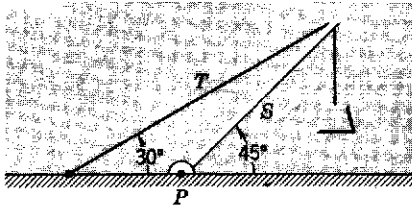
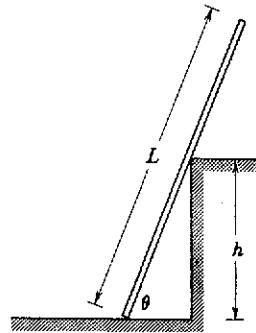


figura 14-20



23. Uma escada de 40 kg e de comprimento igual a 8 m repousa no solo e sobre um rolamento (não mostrado), sem atrito, no topo de um muro de altura  $h = 3$  m (veja Fig. 14-20). O centro de gravidade da escada coincide com o seu centro. Ela permanece em equilíbrio para qualquer valor do ângulo  $\theta \geq 70^\circ$ , mas escorrega se  $\theta < 70^\circ$ . (a) Desenhe um diagrama que mostre todas as forças que atuam na escada. (b) Ache o coeficiente de atrito estático entre a prancha e o solo.

24. Uma barra fina horizontal  $AB$ , de peso desprezível e comprimento  $l$ , está presa a uma parede vertical em  $A$  e sustentada em  $B$  por um delgado fio  $BC$  que forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal. Um peso  $W$  pode ser deslocado, ao longo da barra, de uma distância  $x$  a partir da parede (Fig. 14-21). (a) Determine a tensão  $T$  no fio em função de  $x$ . Determine os componentes (b) horizontal e (c) vertical da força exercida sobre a barra pelo pino  $A$ .

Resposta: (a)  $Wx/(l \sin \theta)$ . (b)  $Wx/(l \tan \theta)$ . (c)  $W(1 - x/l)$ .

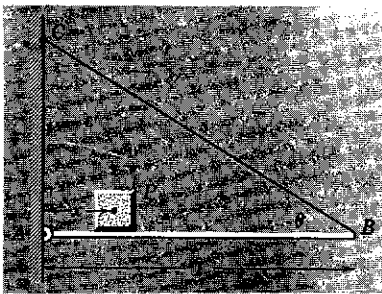
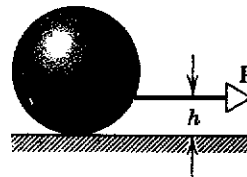


figura 14-21

figura 14-22



25. Uma esfera homogênea de raio  $r$  e peso  $W$  escorrega sobre o assoalho, sob a ação de uma força horizontal constante,  $P$ , aplicada como se mostra na Fig. 14-22. (a) Mostrar que, sendo  $\mu$  o coeficiente de atrito entre a esfera e o assoalho, a altura  $h$  é dada por  $h = r(1 - \mu w/P)$ . (b) Mostrar que a esfera não está em equilíbrio de translação nessas circunstâncias. Há algum ponto em torno do qual a esfera esteja em equilíbrio rotacional? (c) A esfera pode estar em equilíbrio tanto rotacional como translacional, mediante uma escolha diferente de  $h$ ? E variando a direção de  $P$ ? Explique.

26. Por meio de um esticador  $G$ , uma força de tração  $T$  é produzida na barra  $AB$  da estrutura quadrada  $ABCD$ , como indica a Fig. 14-24. Determinar as forças produzidas nas outras barras. As diagonais  $AC$  e  $BD$  cruzam-se em  $E$  sem tocar-se. Mostre que considerações de simetria podem levar a uma considerável simplificação nesse problema e em outros semelhantes.

Resposta: As barras  $AD$ ,  $BC$  e  $DC$  estão sob tração (força  $T$ ); as diagonais  $AC$  e  $BD$  estão sob compressão (força  $\sqrt{2}T$ ).

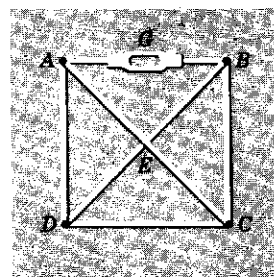


figura 14-23

27. Uma caixa cúbica está cheia de areia e pesa 900 N. Deseja-se que ela "role", pressionando-a horizontalmente por uma das arestas superiores. (a) Determine a força mínima necessária. (b) Calcule o coeficiente mínimo de atrito estático exigido. (c) Há um meio mais eficiente de fazer rolar a caixa? Em caso positivo, determine a menor força que deveria ser diretamente aplicada à caixa.
28. Uma escada está apoiada sobre uma parede vertical sem atrito. A outra extremidade da escada está apoiada sobre o piso horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o piso e a base da escada vale 0,45. Um homem, cuja massa é igual a 5 vezes a massa da escada deve chegar até a extremidade superior da escada sem que ela escorregue. (a) Obtenha uma expressão para o ângulo limite entre a escada e a parede para que isto seja possível. (b) Calcule o valor deste ângulo limite.

Resposta: (a)  $\theta_{\text{máx.}} = \arctg(2\mu/3)$ . (b)  $16,7^\circ$ .

29. Um problema bem conhecido é o seguinte (veja, por exemplo, *Scientific American*, novembro de 1964, pág. 128): Colocam-se, uns sobre os outros, vários tijolos uniformes, de tal modo que tenham a máxima saliência. Consegue-se isso, colocando o centro de gravidade do tijolo de cima diretamente acima da borda do tijolo abaixo dele, o centro de gravidade dos dois anteriores combinados diretamente acima da borda do terceiro, a contar do topo, e assim por diante. (a) Justifique este critério de saliência máxima. (b) Mostre que, se o processo for continuado para baixo, pode ser obtida uma saliência tão grande quanto quisermos. (Martin Gardner, no artigo acima referido, afirma: "Com 52 cartas de baralho, a primeira colocada de forma que sua extremidade fique alinhada com a borda da mesa, a saliência máxima é um pouco maior que  $2\frac{1}{2}$  comprimentos de carta...") (c) Suponha que, em lugar do processo acima, os tijolos uniformes sejam empilhados de forma que a extremidade de um deles fique saliente em relação à borda do que está embaixo, de uma fração constante,  $1/n$  do comprimento  $l$  de um tijolo. Qual o número  $N$  de tijolos que podem ser empilhados dessa maneira, antes da pilha cair? Comprove a plausibilidade de sua resposta para  $n = 1, n = 2, n = \infty$ .

30. Na escada da Fig. 14-24, as pernas  $AC$  e  $CE$  têm cada uma 2,4 m e estão unidas por dobradiças em  $C$ .  $BD$  é uma barra que une as duas pernas, tem 0,75 m de comprimento e está a meia altura do solo. Um homem de 72 kg sobe 1,8 m sobre a escada. Supondo que não haja atrito entre o pavimento e a escada, e desprezando o peso desta, determinar: (a) a tração na barra e (b) as forças exercidas na escada pelo pavimento.

Resposta: (a) 174 N. (b)  $F_A = 441$  N;  $F_E = 265$  N.

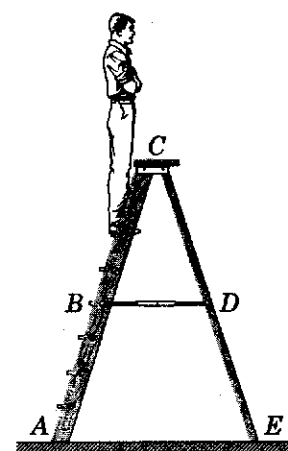


figura 14-24

SEÇÃO 14-5

31. Um vaso hemisférico, cujo raio é  $r$ , repousa sobre uma mesa horizontal irregular. Mostre que o vaso está em equilíbrio estável em relação ao ponto central de sua base, somente se o centro de massa do material nele empilhado não estiver a uma distância maior que  $r$  acima do centro do vaso.
32. Um cubo de densidade uniforme e aresta  $a$  é equilibrado sobre uma superfície cilíndrica, de raio  $r$ , como mostra a Fig. 14-25. Mostre que o critério para estabelecer o equilíbrio estável do cubo, supondo que o atrito seja suficiente para evitar o deslizamento, é  $r > a/2$ .
33. A energia potencial de uma partícula é dada pela expressão:

$$U = ay^3 - by$$

onde  $U$  é dado em J,  $y$  é dado em metros,  $a = 2 \text{ J/m}^3$  e  $b = 1 \text{ J/m}$ . Verifique em que pontos a partícula está em equilíbrio. Diga se o equilíbrio é estável, instável ou indiferente.

34. A energia potencial de uma partícula num campo conservativo é dada por:  $U = 2xy - x^2 - y^2 - z^2$ . Obtenha as expressões dos componentes da força que atua na partícula oriunda da ação do campo sobre a partícula.

Resposta:  $F_x = 2(x - y)$ ;  $F_y = 2(y - x)$ ;  $F_z = 2z$ .

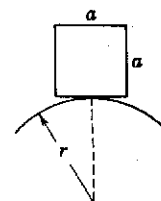


figura 14-25

# tópicos suplementares

Na Seção 11-6, foram discutidas as relações entre as variáveis cinemáticas lineares e angulares de uma partícula que se move em um plano, mas restrita ao movimento circular em torno de um eixo perpendicular ao plano. Qualquer partícula de um corpo rígido poderia descrever esse movimento. Tal restrição será relaxada aqui e será admitido que a partícula possa mover-se livremente no plano. Um exemplo dessa situação é o movimento de um planeta que descreve uma elipse em torno do Sol.

Parte-se da Eq. 11-11,  $\mathbf{r} = u_r \mathbf{r}$ , na qual, entretanto, consideram-se variáveis tanto  $u_r$ , como  $r$ ; a partícula, portanto, não está restrita a mover-se em uma circunferência de raio constante. Determina-se a velocidade por diferenciação:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}_r \frac{dr}{dt} + r \frac{d\mathbf{u}_r}{dt}$$

A Eq. 11-13 mostra que  $d\mathbf{u}_r/dt = \mathbf{u}_\theta \omega$ , portanto,

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_r \frac{dr}{dt} + \mathbf{u}_\theta \omega r, \quad (\text{I-1})$$

ou seja,  $\mathbf{v}$  tem dois componentes, um radial,  $v_r = dr/dt$ , e outro normal à primeira,  $v_\theta = \omega r$ . Mantendo  $r$  constante, resulta  $dr/dt = 0$ , e a Eq. I-1 reduz-se à Eq. 11-14a, como seria de esperar.

Para determinar a aceleração, diferencia-se a Eq. I-1, recordando que *todas as cinco grandezas do segundo membro são variáveis*. Obtém-se, desse modo,

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}_r \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{dr}{dt} \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} + \mathbf{u}_\theta \left( \omega \frac{dr}{dt} + r \frac{d\omega}{dt} \right) + \omega r \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt}$$

Ora,  $d\mathbf{u}_r/dt = \mathbf{u}_\theta \omega$ ,  $d\mathbf{u}_\theta/dt = -\mathbf{u}_r \omega$  (veja Eq. 11-16) e  $d\omega/dt = \alpha$ . Substituindo, e rearranjando os termos, resulta

## TÓPICO SUPLEMENTAR I RELAÇÃO ENTRE CINEMÁTICA LINEAR E CINEMÁTICA ANGULAR MOVIMENTO PLANO

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}_r \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - \omega^2 r \right) + \mathbf{u}_\theta \left( \alpha r + 2\omega \frac{dr}{dt} \right) \quad (\text{I-2})$$

Ainda uma vez, se  $r = \text{constante}$ , então  $dr/dt = d^2r/dt^2 = 0$ , e a Eq. I-2 reduz-se à Eq. 11-7, deduzida especialmente para esse caso.

Os dois novos termos da Eq. I-2, a saber  $\mathbf{u}_r d^2r/dt^2$  e  $\mathbf{u}_\theta 2\omega dr/dt$ , merecem atenção. O primeiro deles é simples e podemos compreendê-lo imaginando que a partícula se mova no plano *sem girar* em torno de um eixo. Fazendo  $\omega = \alpha = 0$ , na Eq. I-2, esta reduz-se a

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}_r \frac{d^2 r}{dt^2},$$

expressão familiar da aceleração de uma partícula que se move em linha reta. Portanto, esse termo, na Eq. I-2, exprime a aceleração radial devida à variação do módulo de  $r$ ; o outro termo da aceleração radial provém da *direção* variável de  $r$  quando a partícula gira.

Há ainda dois termos na expressão da aceleração que contêm  $\theta$ . O primeiro,  $\mathbf{u}_\theta \omega r$ , provém simplesmente da aceleração angular,  $\alpha$ , da partícula em movimento circular ( $r = \text{constante}$ ) e é a aceleração tangencial da Seç. 11-15. Para entender o segundo termo,  $\mathbf{u}_\theta 2\omega dr/dt$ , considere-se uma pessoa caminhando para fora, ao longo de uma linha radial desenhada no piso de um carrossel. Suponhamos que o carrossel esteja girando com velocidade angular constante,  $\omega$ , de modo que sua aceleração angular,  $\alpha$ , é nula. Se a pessoa simplesmente ficasse parada em pé no carrossel ( $d^2r/dt^2 = dr/dt = 0$  e  $r = \text{constante}$ ), sua aceleração, para um observador em um referencial do solo (veja Eq. I-2), seria simplesmente a aceleração centrípeta,  $-\mathbf{u}_r \omega^2 r$ , dirigida para o centro. No entanto, se a pessoa caminhar para fora,  $dr/dt \neq 0$  e, nesse caso, a Eq. I-2 prediz que o observador no solo também mediria uma aceleração dependente de  $\theta$ , dada por  $2\omega v_r \mathbf{u}_\theta$ , sendo  $v_r = dr/dt$ . Este termo denomina-se *aceleração de Coriolis* e provém do fato de que mesmo se a velocidade angular da pessoa for constante, sua velocidade aumenta quando  $r$  aumenta. Verifiquemos que este efeito realmente existe.<sup>1</sup>

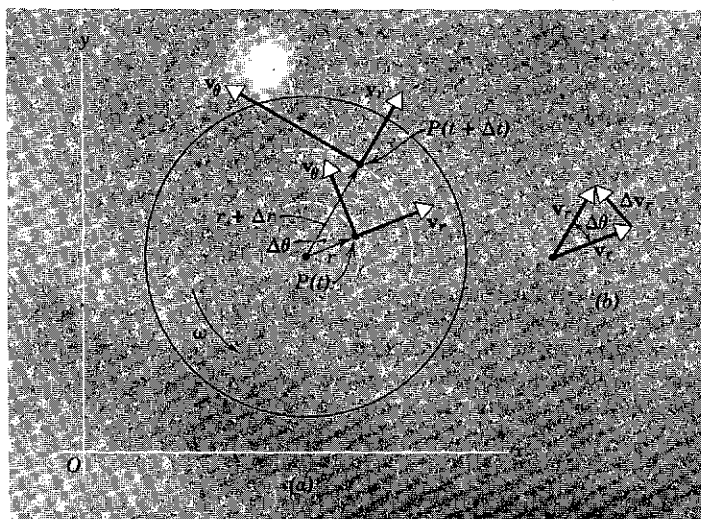


figura I-1

(a) Um carrossel, girando ao redor de um eixo fixo, é visto por um observador no sistema de referência de inercial  $xOy$ . Um homem caminha ao longo de uma linha radial, à velocidade constante  $v$ . Num intervalo de tempo  $\Delta t$ , essa linha, quando vista pelo observador no solo, descreve um ângulo  $\Delta \theta$  e o homem se desloca entre as posições indicadas. Suas velocidades, dirigidas nos sentidos de  $r$  e  $\theta$ , respectivamente, estão indicadas para cada uma das posições. (b) Variação,  $\Delta v_r$ , da velocidade do homem que caminha no sentido de  $r$ . Note-se que, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta v_r$  aponta na direção de  $\theta$  em  $P$ .

A Fig. I-1a mostra a pessoa caminhando (ponto  $P$ ), como parece ao observador que está no solo, nos instantes  $t$  e  $t + \Delta t$ . Na figura estão indicadas, para o instante  $t$ , a velocidade radial  $\mathbf{v}_r (= \mathbf{u}_r dr/dt)$  e a velocidade devida à rotação do carrossel, expressa por  $\mathbf{v}_\theta (= \omega r \mathbf{u}_\theta)$ . Após o intervalo  $\Delta t$ , ambas as velocidades mudaram: a radial mudou de direção, embora seu módulo continue sendo  $dr/dt$ ; a velocidade dependente de  $\theta$  não variou de direção (o que explicamos pela aceleração centrípeta), mas, como a pessoa alcançou um ponto em que o piso se move mais rapidamente, seu *módulo* variou de  $\omega r$  para  $\omega(r + \Delta r)$ .

Na Fig. I-1b indica-se a variação de velocidade devida à variação de direção da linha radial ao longo da qual caminha a pessoa. Se  $\Delta \theta$  for suficientemente pequeno, tem-se

<sup>1</sup> Ver "The Coriolis Effect", James E. McDonald, *Scientific American*, maio, 1952; também "The Case of the Coriolis Force", Malcolm Correll, *The Physics Teacher*, janeiro, 1976.

$$\Delta v_r = v_r \Delta \theta.$$

Dividindo por  $\Delta t$  e supondo  $\Delta t \rightarrow 0$ , resulta

$$a' = \frac{dv_r}{dt} = v_r \frac{d\theta}{dt} = \omega v_r.$$

Exatamente a metade do termo  $2\omega v_r$  na Eq. I-2. Todavia, consideramos somente a variação na velocidade *radial*; existe também uma variação na velocidade *tangencial*.

A variação da velocidade tangencial, devida ao fato de o homem mover-se radialmente para fora, é

$$\Delta v_\theta = \omega(r + \Delta r) - \omega r = \omega \Delta r$$

e novamente, dividindo por  $\Delta t$  e supondo  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$a'' = \frac{dv_\theta}{dt} = \omega \frac{dr}{dt} = \omega v_r.$$

Ora, tanto  $a'$  como  $a''$  são módulos de vetores de mesmo sentido, o de  $\theta$  crescente, no ponto  $P(t)$ . A aceleração total nesse sentido será, portanto,

$$a' + a'' = \omega v_r + v_r \omega = 2\omega v_r,$$

justamente o que desejávamos provar.

Se há realmente uma aceleração dependente de  $\theta$ , na Fig. I-1, deve haver também uma força que dependa desse ângulo. Para uma pessoa que caminhe para fora, ao longo de um raio, quando o carrossel estiver girando, tal força só pode ser devida ao atrito entre seus pés e o piso.

Lembremos que podemos interpretar a Mecânica Clássica com simplicidade, se os eventos forem observados de um referencial inercial. Se fizermos assim, podemos sempre associar as acelerações com forças exercidas por corpos da vizinhança, que podem ser identificados. No entanto, a Mecânica Clássica ainda pode ser aplicada se o referencial escolhido não for inercial, como no caso do referencial girar. O pequeno ônus decorrente disso será a necessidade de introduzir *forças fictícias* ou *inerciais*, isto é, forças que não podem ser atribuídas a corpos da vizinhança e que não podem ser observadas em um referencial inercial. Na Seq. 6-4, foi visto que a força centrífuga é uma força desse tipo.

Suponhamos que a pessoa que está caminhando ao longo de um raio, no carrossel girante, seja observada de um referencial ligado ao carrossel. A velocidade da pessoa é constante,  $v_r = dr/dt$ . O observador diria que a pessoa está em equilíbrio, pois não possui aceleração; contudo, o piso está exercendo uma força de atrito (muito real) nas solas dos pés da pessoa. Tal força tem um componente ( $\mathbf{u}_r F_r$ ) dirigido radialmente para o centro, e um outro ( $\mathbf{u}_\theta F_\theta$ ) dirigido segundo  $\theta$ , isto é, segundo o sentido de rotação. Do ponto de vista do observador no solo, estas forças são compreensíveis e inteiramente necessárias.  $F_r$  está associada com a aceleração centrípeta,  $\omega^2 r$ , e  $F_\theta$  com a aceleração de Coriolis,  $2\omega v_r$ . O observador no carrossel, entretanto, não vê nenhuma dessas acelerações; para ele, a pessoa que caminha está em equilíbrio. Como pode ser isso, em vista das forças de atrito que atuam nas solas dos sapatos da pessoa? A própria pessoa tem consciência dessas forças; se ela não se inclinar para compensar seus efeitos, tais forças poderão derrubá-lo!

O observador no carrossel salva a situação declarando que duas forças fictícias atuam na pessoa que caminha, equilibrando exatamente as forças de atrito (reais). Uma dessas forças fictícias, denominada *força centrífuga*, tem módulo  $F_r$  e atua radialmente para fora. A outra, chamada *força de Coriolis*, tem módulo  $F_\theta$  e atua no sentido negativo de  $\theta$ , isto é, no sentido *oposto* ao de rotação. Introduzindo essas forças, que lhe parecem completamente "reais", embora ele não possa identificar qualquer corpo da vizinhança que as origine, o observador que está no referencial girante (não-inercial) pode aplicar a Mecânica Clássica da maneira habitual. O observador no solo, que está em um referencial inercial, não pode detectar essas forças fictícias, das quais ele de fato não necessita — e não há lugar para elas — em suas aplicações da Mecânica Clássica.

As Eqs. I-1 e I-2 são descrições cinemáticas gerais do movimento de uma partícula em duas dimensões. Uma extensão óbvia, que não será feita aqui, é

deduzir expressões correspondentes para o movimento em três dimensões, o que requer a introdução de um terceiro vetor unitário para definir a terceira dimensão.<sup>2</sup>

Alguns vetores, denominados *vetores axiais*, tais como  $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $\tau$  e  $l$ , diferem em um aspecto muito importante de outros vetores denominados *vetores polares*, de que são exemplos os vetores  $r$ ,  $v$ ,  $a$ ,  $F$  e  $p$ . Embora não seja necessário ter em conta essa diferença neste livro, pode ser instrutivo e interessante para o estudante examinar rapidamente que diferença é essa.

Consideremos um vetor polar típico, tal como  $r$ . Se um estudante sai de casa e vai à sala de aulas, seu deslocamento é um vetor  $r$  orientado da casa para a sala de aulas; não há dúvida quanto à escolha do sentido. Tal sentido é não apenas "físico" como "natural". Observações semelhantes aplicam-se aos demais vetores polares indicados:  $v$ ,  $a$ ,  $F$  e  $p$ .

Se um estudante observa uma roda que gira em torno de um eixo fixo, ele pode atribuir uma velocidade angular,  $\omega$ , à roda e associar a este vetor um sentido, pela regra da mão direita (veja Sec. 11.4). Este sentido, entretanto, é apenas uma convenção, baseada em tal regra arbitrária. Uma regra da mão esquerda resultaria no sentido oposto. As coisas que são "físicas" e "naturais" com relação à roda são o eixo de rotação e seu sentido, isto é, ela gira como os ponteiros dos relógios ou ao contrário, quando o estudante olhá-la de uma das extremidades do eixo. Quer  $\omega$  seja escolhido em um sentido ou no outro, ao longo do eixo, realmente não importa, desde que sejamos coerentes. As mesmas observações aplicam-se à aceleração angular,  $\alpha$ , e aos outros vetores axiais indicados, isto é,  $\tau (= r \times F)$  e  $l (= r \times p)$ . É por esta razão que é muitas vezes mais cômodo dizer "torque em torno de um eixo" do que "torque ao longo de um eixo", embora ambas as expressões signifiquem a mesma coisa. Todos os vetores definidos como produto vetorial de dois vetores polares são vetores axiais, pois dependem, para determinação de seu sentido, da regra (arbitrária) da mão direita.

Tem sido salientado que as leis da Física permanecem inalteradas, não importando o referencial inercial em que sejam expressas. Na Sec. 2-5, este aspecto foi discutido para translações e rotações do referencial, notando-se que as leis expressas sob forma vetorial permanecem inalteradas (isto é, são *invariantes*) mediante essas

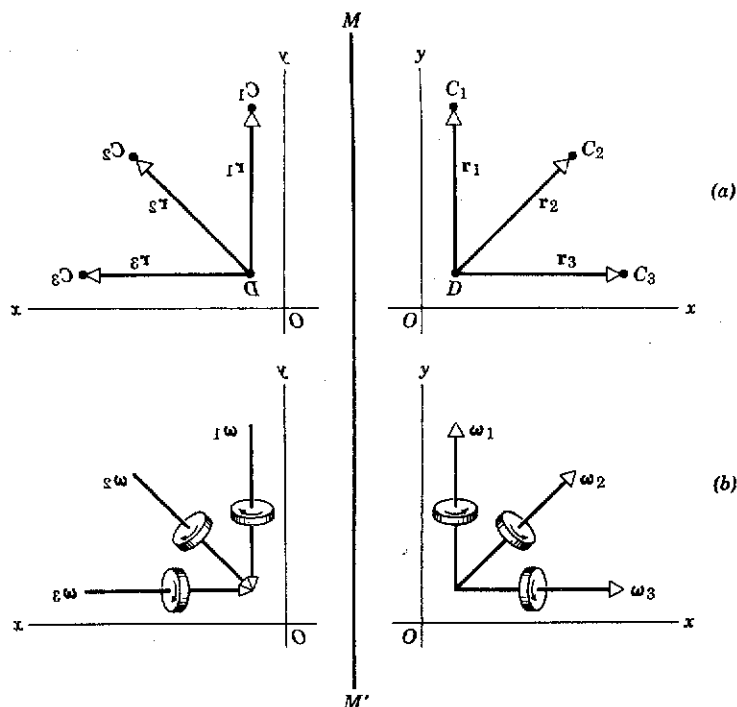


figura II-1

(a) *Vetores polares*, mostrando, à direita, os deslocamentos  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  entre um dormitório  $D$  e três salas de aulas  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ . À esquerda, temos as imagens de  $D$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  refletidas num espelho, juntamente com os respectivos deslocamentos. (b) *Vetores axiais*, mostrando, à direita, as velocidades angulares  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$  das três rodas que giram como se acha indicado. À esquerda, temos as imagens dessas rodas, refletidas num espelho, juntamente com as velocidades angulares atribuídas, utilizando-se a usual regra da mão direita.

<sup>2</sup> Ver, por exemplo, *Mechanics*, Sec. 3-5, por Keith R. Symon, Addison-Wesley Publishing Co., 3.<sup>a</sup> ed., 1971.



transformações. Foi também acentuado que algo especial pode ocorrer quando a mudança de referencial se processa de outro modo, ou seja, substituindo um referencial dextrógiro por um levógiro. Existe um meio simples de realizar tal transformação: constrói-se um referencial dextrógiro e observa-se sua imagem em um espelho; o referencial será transformado em levógiro (veja Fig. II-1) devido à propriedade bem conhecida que possui um espelho de inverter direita e esquerda.

A Fig. II-1a mostra o vetor deslocamento de uma pessoa do ponto  $D$  a três diferentes pontos  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ . No espelho, cada deslocamento *ainda* é do ponto  $D$  a um dos pontos  $C$ . Na Fig. II-1b, no entanto, representa-se uma roda que gira, em três diferentes orientações; se estabelecermos, pela regra da mão direita, os sentidos de  $\omega$  tanto para as rodas como para suas imagens especulares, veremos que os vetores-imagem estarão invertidos, em comparação com os vetores-imagem correspondentes da Fig. II-1a (apontando para a origem e não afastando-se dela). Os vetores polares e os vetores axiais comportam-se diferentemente quando os referenciais se transformam por reflexão especular! Não é difícil entender esse comportamento dos vetores axiais mediante tal reflexão. Imaginemo-nos aplicando fisicamente a regra da mão direita a uma roda real em rotação; no espelho, *pareceria* que estaríamos aplicando uma regra da mão esquerda, porque a imagem de nossa mão direita é uma mão esquerda. Naturalmente que uma regra da mão esquerda nos dará o sentido oposto para  $\omega$ .

Portanto, um vetor axial é aquele cujo sentido depende da natureza dextrógiro do referencial. Às vezes tal vetor é denominado *pseudovetor*. Um vetor polar é um vetor que tem o sentido independente do referencial. Esses fatos são mencionados (1) para acentuar o caráter arbitrário do sentido atribuído aos vetores axiais, e (2) para salientar a importância de verificar as experiências e leis físicas quanto à invariância por translação, rotação e reflexão especular do referencial inercial. Na Sec. 2-5 foi feita breve referência a algumas experiências que *não* são invariantes mediante uma transformação por reflexão. Tal fato, que constituía uma violação, sob certas circunstâncias, de uma lei física, que anteriormente supunha-se bem fundamentada (a lei de *conservação da paridade*), levantou alguns problemas provocantes e permite-nos entender o mundo físico em um nível mais profundo.<sup>1</sup>

Apresentar-se-ão aqui, num único lugar, simplesmente algumas conclusões decorrentes da Teoria da Relatividade Restrita (TRR), proposta por Einstein em 1905. Omitir-se-ão todas as demonstrações e far-se-á apenas uma modesta tentativa de tornar as conclusões aceitáveis em termos do "bom senso".

## TÓPICO SUPLEMENTAR III A RELATIVIDADE RESTRITA — UM SUMÁRIO DE CONCLUSÕES\*

### III-1

#### Introdução

### III-2

#### Os Postulados (RR, Sec. 1-9)

Einstein baseou a sua teoria em dois postulados, dos quais derivam *todas* as conclusões da TRR.

**a. O Primeiro Postulado.** Desde a época de Galileu que se sabia que as leis da Mecânica eram as mesmas em todos os referenciais inerciais (ver a Fig. III-1e pág. 66). Isto significa que todos os observadores inerciais em movimento relativo, embora possam medir diferentes valores para as velocidades, momentos, etc., das partículas envolvidas numa dada experiência (um jogo de sinuca, talvez) concordariam, apesar disso, quanto as Leis da Mecânica envolvidas (conservação de momento linear etc.) e quanto ao resultado da experiência (quem ganhou).

Einstein deu o ousado passo de estender esse princípio de invariância a *toda* a Física, e não apenas à Mecânica, incluindo especialmente o Eletromagnetismo. O primeiro postulado de Einstein é:

**As leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais. Não existe qualquer referencial inercial preferencial.**

**b. O Segundo Postulado.** Anteriormente à TRR, uma pergunta incômoda era a seguinte: Dado que a velocidade da luz é de  $2,988 \times 10^8$  m/s, em relação a que é essa velocidade medida? No caso de ondas sonoras deslocando-se no ar,

<sup>1</sup> Ver "The Overthrow of Parity", por Philip Morrison, *Scientific American*, abril, 1957.

\* Para um tratamento mais completo, ajustado ao nível deste livro, ver *Introduction to Special Relativity*, Robert Resnick, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1968. As referências a esse trabalho serão do tipo RR, pág. 187; RR, Sec. 1, 9, etc.

a resposta é simples: com respeito ao meio (ar) através do qual a onda sonora se desloca. A luz, contudo, desloca-se através do vácuo. Existirá, ainda assim, um meio tênue (o éter luminífero, ou transportador de luz) que desempenha o mesmo papel para a luz que o ar para o som? Alternativamente, deveria  $c$  ser medida com respeito à fonte que emite a luz?

Todas as tentativas de produzir verificações experimentais ao longo dessas linhas falharam por completo (ver a Seq. 45-8\* e RR, Seqs. 1-5 a 1-8). Einstein propôs um segundo audacioso postulado:

**A velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais.**

Observe-se que éter algum é necessário ou está envolvido. Este segundo postulado significa, por exemplo, que se se consideram três fontes luminosas (a) uma em repouso com respeito ao observador, (b) uma movendo-se em direção ao observador à velocidade de  $0,9c$ , digamos, e (c) uma movendo-se para longe do observador à velocidade de  $0,9c$ , medir-se-ia a *mesma* velocidade para a luz proveniente dessas três fontes.

Este segundo postulado foi testado diretamente (ver RR, pág. 34) utilizando-se como fonte de "luz" em movimento mésons  $\pi$ , gerados num sincrotron de prótons, com velocidades de  $0,99975c$ . Esses mésons desintegram-se emitindo raios- $\gamma$ , os quais, como a luz, têm caráter eletromagnético e deslocam-se à mesma velocidade. A velocidade medida para a radiação emitida por essas fontes deslocando-se muito rapidamente foi, dentro do erro experimental, igual a  $c$ , como predito pelo segundo postulado de Einstein.

Muitas das conclusões da TRR simplesmente não parecem razoáveis, tomando-se por base a experiência diária. Mesmo o segundo postulado de Einstein parece violar o bom senso. Se se agarra uma bola lançada por alguém (a) em repouso com respeito a quem agarra, (b) aproximando-se de quem agarra a  $50\text{ km/h}$  (digamos dentro de um carro) e (c) afastando-se de quem agarra, a essa mesma velocidade, é de se esperar uma velocidade diferente para a bola, com respeito a quem agarra, em cada um destes três casos. Mas se se estendesse esta experiência a uma fonte (o arremessador da bola) emitindo luz (fótons), poder-se-ia contradizer o segundo postulado de Einstein; contudo, a experiência mostra que a luz possui a mesma velocidade em todos os casos, de acordo com o postulado de Einstein.

A solução deste dilema surge quando se percebe que o suporte da nossa experiência baseada no "bom senso" é, de fato, muito limitado, restringindo-se a velocidades tais que  $v \ll c$ , sendo  $c$  a velocidade da luz. Assim, por exemplo, a velocidade de um satélite em órbita terrestre pode ser de cerca de  $13\,000\text{ m/s}$ , o que pode nos parecer rápido, mas que, em termos da velocidade da luz ( $3,0 \times 10^8\text{ m/s}$ ) é apenas  $0,000027c$ . Nós simplesmente não temos experiência pessoal em regiões de elevada velocidade relativa.

Como exemplo, para se acelerar uma pessoa mediana (para não falar de uma nave espacial) até  $0,90c$  seria necessário nada menos de  $13\%$  do consumo total de energia dos EUA em 1971. Contudo, as partículas da Física (elétrons, mésons, prótons etc.) podem ser facilmente acelerados até altas velocidades. Assim, por exemplo, os elétrons emergentes do acelerador linear com  $3\,200$  metros de comprimento da Universidade de Stanford têm velocidades de  $0,999c$ . No campo da Física das Partículas Elementares a TRR é absolutamente necessária para a solução de problemas de Mecânica.

Existe na Natureza uma certa velocidade finita que não pode ser ultrapassada e que é chamada de velocidade limite. Essa velocidade limite é a velocidade da luz,  $c$ , a maior velocidade com a qual se podem transmitir sinais. A Física Clássica supõe que se podem transmitir sinais com velocidade infinita, mas a Natureza contradiz essa suposição e, na realidade, parece bastante estranho que pudessem existir sinais desse tipo. A experiência confirma que  $c$  é a velocidade limite, de modo que, num certo sentido, a velocidade da luz desempenha o papel em Relatividade que a velocidade infinita desempenha em Física Clássica. Não é, pois, difícil compreender — de fato, torna-se muito plausível — que a velocidade finita da fonte de luz não possa afetar o valor medido da velocidade de um sinal emitido que já possua o valor limite.

O mundo em que vivemos e no qual desenvolvemos os nossos sentidos é um mundo da Mecânica Newtoniana, no qual  $v \ll c$ . A Mecânica Newtoniana revela-se como um caso particular da TRR no limite de baixas velocidades. De fato, um teste da TRR consiste em permitir  $c \rightarrow \infty$  (em cujo caso,  $v \ll c$  é sempre válido) e constatar que decorrem as fórmulas correspondentes da Mecânica Newtoniana.

### III-3

#### A Relatividade Restrita e a Mecânica Newtoniana (RR, Seq. 2-8)

A Mecânica Newtoniana embora constitua um caso particular, é um caso extremamente importante. Ela descreve os movimentos essenciais do nosso sistema solar, as marés, os nossos empreendimentos espaciais, o comportamento de bolas de futebol, de máquinas em geral etc., funcionando muito bem no importantíssimo domínio em que  $v \ll c$ , deixando, porém, de funcionar quando as velocidades se aproximam da da luz.

Poucas teorias foram submetidas a testes experimentais mais rigorosos do que a TRR, não sendo de modo algum o menos importante o fato dos aceleradores de partículas funcionarem. Estes últimos são projetados usando-se a TRR ao nível da Engenharia e da Tecnologia; um acelerador projetado com base na Mecânica Newtoniana simplesmente não funcionaria. Os reatores nucleares e, infelizmente, as bombas atômicas, constituem provas adicionais de que a TRR realmente funciona.

Einstein afirmou certa vez que número algum de experiências poderia provar que ele estava certo, mas que uma única experiência poderia provar que ele estava errado. Até hoje, essa única experiência não foi encontrada.

A observação básica que se faz na TRR (ou em Mecânica Newtoniana) é a seguinte. Considerem-se dois observadores em dois referenciais inerciais diferentes  $S$  e  $S'$  (Fig.III-1), cujos eixos sejam paralelos, que tenham os eixos  $x-x'$  em comum, cujas origens coincidam em  $t = t'$ , e tal que o observador  $S'$  se desloque para a direita com velocidade  $v$ , respectivamente a  $S$ . Ambos os observadores,  $S$  e  $S'$ , registram o mesmo evento — que pode ser o clarão de uma lâmpada para instantâneos — e atribuem coordenadas espaciais e temporais ao evento  $x, y, z, t$  e  $x', y', z', t'$ . Quais são as relações entre esses dois conjuntos de números assentados nos cadernos de apontamentos dos observadores?

Antes da TRR, as relações aceitas eram as seguintes:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt & y' &= y \\ t' &= t & z' &= z \end{aligned} \quad \text{(III-1)}$$

chamadas de *equações de transformação de Galileu* (RR, Seç. 1,2). Embora impressionantemente corretas na importante região  $v \ll c$ , elas falham quando  $v \rightarrow c$ . As equações correspondentes, usadas na TRR, chamadas de *equações de transformação de Lorentz*, são (RR, Tab. 2-1):

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} & y' &= y \\ t' &= \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} & z' &= z. \end{aligned} \quad \text{(III-2)}$$

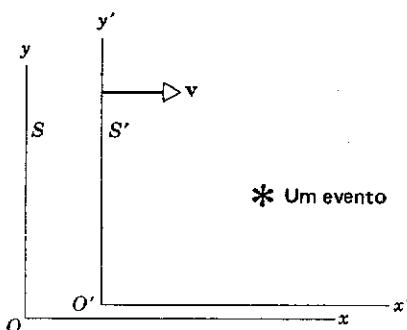
Observemos os seguintes aspectos com respeito a estas equações. (a) As coordenadas espaciais e temporais encontram-se intimamente entrelaçadas. Em particular, o tempo não é o mesmo para ambos os observadores;  $t'$  depende de  $x$ , bem como de  $t$ . (b) Fazendo-se  $c \rightarrow \infty$ , as equações de Lorentz reduzem-se às equações de Galileu, como prometido! Finalmente, (c) Deve-se ter  $v < c$ , pois, do contrário, as quantidades  $x'$  e  $t'$  tornam-se indeterminadas ( $v = c$ ), ou imaginárias ( $v > c$ ). A velocidade da luz constitui um limite superior para as velocidades dos objetos materiais.

As equações de Lorentz, como, aliás, qualquer outra coisa na TRR, podem ser derivadas a partir dos dois postulados de Einstein (RR, Seç. 2-2).

Suponhamos que  $S'$  observe dois eventos que ocorrem no mesmo lugar no seu referencial. os quais poderiam ser, por exemplo, duas posições sucessivas dos ponteiros de um relógio localizado numa dada posição fixa  $x'$ . Seja  $\Delta t'$  a medida, efetuada por  $S'$ , do intervalo de tempo entre esses dois eventos. O observador  $S$ , para quem o relógio parece estar se movendo, observa os mesmos dois eventos e mede um intervalo de tempo  $\Delta t$ , que é dado por

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \text{(III-3)}$$

### III-4 As Equações de Transformação (RR, Seç. 2-2)



**figura III-1**  
Dois referenciais inerciais, de eixos paralelos e com os eixos  $x-x'$  em comum.  $S'$  move-se para a direita com velocidade  $v$ , respectivamente a  $S$ . Em  $t = t' = 0$ , as duas origens  $O$  e  $O'$ , coincidem.

### III-5 Dilatação Temporal e Contração Espacial (RR, Seçs. 2-3 e 2-4)

Este fato, de que  $\Delta t > \Delta t'$ , é chamado *dilatação temporal*, e é comumente verbalizado como “relógios em movimentos atrasam-se”. O observador  $S$  registra um intervalo de tempo mais longo do que aquele que transpirou no relógio em movimento.

A Eq. V-3 foi testada experimentalmente, tendo-se verificado que ela é correta. Num dos testes, os “relógios em movimento” eram partículas rápidas, chamadas píons ( $\pi^+$ ). Essas partículas são radioativas, e a sua taxa de decaimento radioativo constitui uma medida da sua capacidade de medir o tempo. Ver RR, Ex. 3, pág. 79.

Consideremos, a seguir, um bastão paralelo ao eixo  $x-x'$ , em repouso no referencial  $S'$ . Este observador  $S'$  medirá um comprimento  $\Delta x'$  para esse bastão, enquanto que  $S$ , ao medir esse mesmo bastão, que se encontra em movimento, respectivamente a  $S$ , medirá um comprimento  $\Delta x$  dado por:

$$\Delta x = \sqrt{1 - (v/c)^2} \Delta x'. \quad (\text{III-4})$$

Este fato, de que  $\Delta x < \Delta x'$ , é chamado *contração espacial*.

A contração de comprimento foi verificada, no projeto, digamos, do acelerador linear de elétrons da Universidade de Stanford. Para uma velocidade de saída de  $v = 0,999975 c$ , cada metro do tubo acelerador parece ter 7,1 mm para um observador movendo-se com o elétron. Se essas considerações sobre a contração do comprimento não tivessem sido levadas em conta, essa máquina simplesmente não funcionaria.

A maneira mais simples de se entenderem estes resultados — a dilatação temporal e a contração espacial — consiste em observar que um dos observadores,  $S'$ , está em repouso com respeito aquilo que ele está medindo (relógio ou bastão), enquanto que, para o outro observador,  $S$ , os objetos encontram-se em movimento. A Relatividade assevera, portanto, que *o movimento afeta a medida*. Se se tivessem intercambiado os referenciais, fazendo com que o relógio e o bastão se encontrassem em repouso em  $S$ , por exemplo, ter-se-ia obtido os observadores mais uma vez discordando quanto aos valores medidos, só que, agora, ter-se-ia  $\Delta x' < \Delta x$  e  $\Delta t' > \Delta t$ , de modo que os resultados são recíprocos, nenhum dos observadores estando “absolutamente” certo ou errado.

No que ambos os observadores, todavia, *concordarão* é quanto ao *comprimento de repouso* de um dado bastão (ambos medirão o bastão como tendo o mesmo comprimento quando ele se encontra em repouso com respeito aos seus instrumentos de medida) e quanto ao *intervalo de tempo próprio* de um dado relógio (ambos medirão as sucessivas posições do ponteiro do relógio como tendo levado o mesmo tempo, quando o relógio se encontra em repouso com respeito aos seus instrumentos de medida).

O fato do movimento afetar a medida não é uma idéia tão estranha, mesmo em Física Clássica. Assim, por exemplo, a frequência medida do som ou da luz depende do movimento da fonte com respeito ao observador, o chamado efeito Doppler, com o qual todo o mundo está familiarizado. E, em Mecânica, os valores medidos da velocidade, do momento, ou da energia cinética de partículas em movimento são diferentes para observadores em repouso e para observadores sobre um trem em movimento. Entretanto, em Física Clássica, as medidas de intervalos espaciais e de intervalos temporais são absolutos, enquanto que na TRR tais medidas são relativas ao observador. Não só a experiência contraria a Física Clássica, como apenas adotando-se a relatividade do espaço e do tempo atinge-se a invariância (o absolutismo) das leis da Física para todos os observadores. Certamente, abandonar o absolutismo das leis da Física (seriam elas leis, nesse caso?), como as noções clássicas de tempo e comprimento exigem, deixar-nos-ia às voltas com um mundo arbitrário e complexo. Em comparação, a Teoria da Relatividade é absoluta e simples.

Suponhamos que  $S$  observa uma partícula deslocando-se com velocidade  $u'$ , paralelamente ao eixo  $x'$ . Qual será, nesse caso, a velocidade  $u$  medida por  $S'$ ? Das equações de transformação Galileanas (Eq. III-1) pode-se mostrar facilmente que

$$u = u' + v. \quad (\text{III-5})$$

### III-6

Adição Relativística de Velocidades e o Efeito Doppler  
(Seqs. 4-6, 6-5, 42-4 e 42-5; RR, Seqs. 2-6 e 2-7)

Esta relação que, para a maioria de nós, parece ser intuitivamente óbvia não é, infelizmente, verdadeira (exceto no caso particular muito importante em que  $v \ll c$ ). As equações de transformação de Lorentz levam-nos ao seguinte resultado

$$u = \frac{u' + v}{1 + (u'v/c^2)} \quad (\text{III-6})$$

Como é de se esperar, para  $c \rightarrow \infty$ , a Eq. III-6 reduz-se à Eq. III-5. Verifique que, se  $u' < c$  e  $v < c$ , é sempre verdade que  $u < c$ , ou seja, não é possível gerar velocidades  $\geq c$ , por meio da composição de velocidades.

Utilizando-se o resultado da adição de velocidades (Eq. III-6), pode-se deduzir o efeito Doppler da luz. Na Teoria da Relatividade, não existe qualquer diferença entre os dois casos, que são classicamente diversos (a saber, fonte em repouso — observador em movimento e observador em repouso — fonte em movimento); apenas o movimento relativo  $v$  entre fonte e observador é relevante. Tanto este fato como o resultado

$$v = v' \sqrt{\frac{c \pm v}{c \mp v}} \quad (\text{III-7})$$

estão de acordo com a experiência. Nesta expressão,  $v'$  é a frequência da fonte em repouso em  $S'$  e  $v$  é a frequência observada no referencial  $S$ , com respeito ao qual a fonte se desloca à velocidade  $v$ ; o sinal superior refere-se ao caso em que a fonte e o observador se *aproximam* um do outro, enquanto que o sinal inferior refere-se ao caso em que a fonte e o observador se *afastam* mutuamente. A Eq. III-7 é chamada de efeito Doppler *longitudinal* e  $v$  refere-se à velocidade relativa entre fonte e observador, ao longo da reta que os une.

Todavia, existe em Relatividade, um efeito que não é previsto pela Física Clássica: um efeito Doppler *transversal*; isto é, um efeito produzido quando a velocidade relativa  $v$  faz um ângulo de  $90^\circ$  com a reta que une a fonte ao observador. Obtém-se, neste caso,

$$v = v' \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (\text{III-8})$$

Este resultado, confirmado pela experiência, pode ser simplesmente interpretado com uma dilatação temporal, devido à qual os relógios em movimento parecem atrasar-se.

Vimos que as medidas de tempo e de espaço são funções da velocidade  $v$ . Deve a massa também depender de  $v$ ? A TRR afirma que a *massa relativística*,  $m$ , de uma partícula deslocando-se à velocidade  $v$  relativamente ao observador é dada por

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (\text{III-9})$$

onde  $m_0$  é a massa de repouso, isto é, a massa medida quando a partícula se encontra em repouso ( $v = 0$ ) relativamente ao observador.

É  $m$  e não  $m_0$  que deve ser levada em conta ao se projetarem imãs destinados a encurvar partículas em arcos de círculo, tendo a Eq. III-9 sido extensivamente testadas por meio dessas técnicas. Incidentalmente, a razão  $m/m_0$ , no caso dos elétrons provenientes do acelerador linear da Universidade de Stanford com  $K = 30 \text{ GeV}$ , é da ordem de 60 000.

A fim de se preservar a lei da conservação do momento linear na TRR, redefine-se o momento de uma partícula de massa de repouso  $m_0$  e velocidade  $v$  como

$$p = m v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Em consequência das considerações acima, na TRR, a energia cinética de uma partícula deixa de ser dada por  $\frac{1}{2} m_0 v^2$ , passando a sê-lo por

$$K = mc^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right) \quad (\text{III-10})$$

Será que você poderá mostrar que  $K \rightarrow \frac{1}{2} m_0 v^2$ , quando  $c \rightarrow \infty$ ?

### III-7

Massa, Momento e Energia Cinética (Seqs. 8-9 e 9-3; RR, Seqs. 3-3 e 3-5)

O resultado mais conhecido da TRR é a chamada equivalência entre massa e energia, ou seja, que a conservação da energia total é equivalente à conservação da massa relativística. Massa e energia são equivalentes, constituindo um único invariante, que pode ser chamado de massa-energia. A relação

$$E = mc^2 \quad (\text{III-11})$$

exprime o fato da massa-energia poder ser expressa em unidades de energia ( $E$ ) ou, equivalentemente, em unidades de massa ( $m = E/c^2$ ). De fato, tornou-se usual referirmo-nos a massas em termos de elétron volts, dizendo-se, por exemplo, que a massa de repouso de um elétron é de 0,51 MeV, o que é uma questão de conveniência nos cálculos da energia. Da mesma forma, as entidades de massa de repouso nula, tais como os fótons, podem-se associar uma massa efetiva, equivalente à sua energia. Associa-se massa a cada uma das várias formas de energia.

Tinham-se, em Física Clássica, dois princípios de conservação separados: (1) a conservação da massa (clássica), como nas reações químicas, e (2) a conservação da energia. Em Relatividade, esses dois princípios se fundem num único princípio de conservação, o princípio da conservação da massa-energia. As duas leis clássicas podem ser encaradas como casos particulares que se esperaria que concorridassem com a experiência apenas no caso das transferências, de energia para dentro ou para fora do sistema, serem tão pequenas, em comparação com a massa de repouso do sistema, que a variação fracional correspondente na massa de repouso do sistema seja pequena demais para ser medida. Por exemplo, a massa de repouso de um átomo de hidrogênio é de 1,00797 u (= 938,8 MeV). Adicionando-se suficiente energia (13,58 eV) para ionizar hidrogênio, isto é, para separá-lo em suas partes constituintes, um próton e um elétron, a variação fracional na massa de repouso do sistema é

$$\frac{13,58 \text{ eV}}{938,8 \times 10^6 \text{ eV}} = 1,45 \times 10^{-8}$$

ou seja,  $1,45 \times 10^{-6}$  por cento, uma medida pequena demais. Contudo, para um núcleo tal como o deuteron, cuja massa de repouso é de 2,01360 u (= 1 876,4 MeV), tem-se que adicionar uma energia de 2,22 MeV para separá-lo em suas partes constituintes, um próton e um nêutron. A variação fracional na massa de repouso do sistema é igual a

$$\frac{2,22 \text{ MeV}}{1 876,4 \text{ MeV}} = 1,18 \times 10^{-3}$$

isto é, 0,12%, que é facilmente mensurável. Este valor é característico das variações fracionais da massa de repouso em reações nucleares, de modo que se deve usar a lei relativística de conservação da massa-energia para se conseguir um acordo entre a teoria e a experiência em reações nucleares. A massa (de repouso) clássica não é conservada, mas a energia total (massa-energia) é.

### III-8

A Equivalência entre Massa e Energia (Seç. 8-9; RR, Seç. 3-6)

# apêndices

## Unidades SI Fundamentais<sup>a</sup>

Grandeza	Nome	Simbolo	Definição
Comprimento	metro	m	"... o comprimento igual a 1 650 763,73 comprimentos de onda no vácuo da radiação correspondente à transição entre os níveis $2p_{10}$ e $5d_5$ do átomo de Criptônio 86." (1960)
Massa	quilograma	kg	"... este protótipo [um certo cilindro de platina iridiada] será considerado a unidade de massa." (1889)
Tempo	segundo	s	"... a duração de ..... 9 192 631 770 períodos da radiação correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do Césio-133." (1967)

## APÊNDICE A O SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)\*

\* Adaptado do "The International System of Units (SI)", National Bureau of Standards Special Publication 330, edição de 1972.

<sup>a</sup> As definições destas unidades básicas foram adotadas pela "Conferência Geral de Pesos e Medidas", um organismo internacional, nas datas apresentadas. Neste livro não usaremos a candela.

## Unidades SI Fundamentais (Continuação)

Grandeza	Nome	Símbolo	Definição
Corrente elétrica	Ampère	A	"... a corrente constante que, se mantida em dois condutores retos paralelos de comprimento infinito, de seção transversal circular desprezível, e colocados a 1 metro de separação um do outro, no vácuo, produziria entre estes condutores uma força de $2 \times 10^{-7}$ N por metro de comprimento." (1946)
Temperatura termodinâmica	Kelvin	K	"... a fração $1/273,16$ da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água." (1967)
Quantidade de substância	mol		"... a quantidade de substância de um sistema que contém tantas entidades elementares quantos são os átomos presentes em 0,012 quilogramas de Carbono-12." (1971)
Intensidade luminosa	candela	cd	"... a intensidade luminosa, em direção perpendicular, de uma superfície de ..... $1/600.000$ m <sup>2</sup> de um corpo negro à temperatura de fusão da Platina, sob a pressão de $101\,325$ N/m <sup>2</sup> ." (1967)

## Algumas unidades SI derivadas com nomes especiais

Grandeza	Nome	Símbolo	Unidade SI	
			Expressão em função de outras unidades	Expressão em função das unidades SI fundamentais
Frequência	Hertz	Hz		s <sup>-1</sup>
Força	Newton	N		m · kg/s <sup>2</sup>
Pressão	Pascal	Pa	N/m <sup>2</sup>	kg/m · s <sup>2</sup>
Energia, trabalho, quantidade de calor	Joule	J	N · m	kg · m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>
Potência, fluxo radiante	Watt	W	J/s	kg · m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>
Quantidade de eletricidade, carga elétrica	Coulomb	C		A · s
Potencial elétrico, diferença de potencial, força eletromotriz	Volt	V	W/A	kg · m <sup>2</sup> /A · s <sup>3</sup>
Capacitância	Farad	F	C/V	A <sup>2</sup> · s <sup>4</sup> /kg · m <sup>2</sup>
Resistência elétrica	Ohm	Ω	V/A	kg · m <sup>2</sup> /A <sup>2</sup> · s <sup>3</sup>
Condutância	Siemens	S	A/V	A <sup>2</sup> · s <sup>3</sup> /kg · m <sup>2</sup>
Fluxo magnético	Weber	Wb	V · s	kg · m <sup>2</sup> /A · s <sup>2</sup>
Campo magnético	Tesla	T	Wb/m <sup>2</sup>	kg/A · s <sup>2</sup>
Indutância	Henry	H	Wb/A	kg · m <sup>2</sup> /A <sup>2</sup> · s <sup>2</sup>



**Alguns símbolos para unidades de grandezas físicas**

Símbolos SI		Outros símbolos não SI comumente usados	
Nome	Abreviatura	Nome	Abreviatura
Ampère	A	Angstrom	Å
Candela	cd	Unidade térmica britânica	Btu
Coulomb	C	Caloria	cal
Farad	F	Dia	d
Henry	H	Grau	°
Hertz	Hz	Dina	dyn
Joule	J	Elétron volt	Elétron-Volt
Kelvin	K	Pé	ft
Quilograma	kg	Gauss	G
Metro	m	Gramma	g
Mol	mol	Cavalo-vapor	hp
Newton	N	Hora	h
Ohm	Ω	Polegada	in
Pascal	Pa	Milha	mi
Radiano	rad	Minuto (de arco)	'
Segundo	s	Minuto (de tempo)	min
Siemens	S	Libra	lb
Esferorradiano	sr	Revolução	rev
Tesla	T	Segundo (de arco)	"
Volt	V	Atmosfera padrão	atm
Watt	W	Unidade de massa atômica	uma
Weber	Wb	Ano	a

**APÊNDICE B**  
**ALGUMAS CONSTANTES**  
**FUNDAMENTAIS DA**  
**FÍSICA\***

Durante anos, centenas de medidas de grandezas físicas fundamentais, sozinhas ou em combinação, foram feitas por centenas de cientistas em muitos países. Estas medidas tem precisões diferentes e são independentes. Por exemplo, as medidas diretas de  $e$ ,  $e/m$ ,  $h/e$ , etc., são obviamente inter-relacionadas. Escolher os melhores valores de  $e$ ,  $m$ ,  $h$ , etc., de uma extensa quantidade de dados superpostos não é simples.\*\*

Para a maior parte dos problemas deste livro, pode-se usar três algarismos significativos.

Constante	Símbolo	Valor calculado	Melhor valor (1973)	
			Valor <sup>a</sup>	Incerteza <sup>b</sup>
Velocidade da luz no vácuo	$c$	$3,00 \times 10^8$ m/s	2,99792458	0,004
Carga elementar	$e$	$1,60 \times 10^{-19}$ C	1,6021892	2,9
Massa de repouso do elétron	$m_e$	$9,11 \times 10^{-31}$ kg	9,109534	5,1
Constante de permissividade do vácuo	$\epsilon_0$	$8,85 \times 10^{-12}$ F/m	8,854187818	0,008
Constante de permeabilidade do vácuo	$\mu_0$	$1,26 \times 10^{-6}$ H/m	$4\pi$ (exatamente)	—
Razão carga/massa do elétron	$e/m_e$	$1,76 \times 10^{11}$ C/kg	1,7588047	2,8
Massa de repouso do próton	$m_p$	$1,67 \times 10^{-27}$ kg	1,6726485	5,1
Razão massa do próton massa do elétron	$m_p/m_e$	1840	1836,15152	0,38
Massa de repouso do nêutron	$m_n$	$1,68 \times 10^{-27}$ kg	1,6749543	5,1
Massa de repouso do muon	$m_\mu$	$1,88 \times 10^{-28}$ kg	1,883566	5,6
Constante de Planck	$h$	$6,63 \times 10^{-34}$ J · s	6,626176	5,4
Comprimento de onda Compton do elétron	$\lambda_C$	$2,43 \times 10^{-12}$ m	2,4263089	1,6
Constante molar dos gases	$R$	8,31 J/mol · K	8,31441	31
Constante de Avogadro	$N_A$	$6,02 \times 10^{23}$ /mol	6,022045	5,1
Constante de Boltzmann	$k$	$1,38 \times 10^{-23}$ J/K	1,380662	32
Volume molar do gás ideal nas CNTP <sup>c</sup>	$V_m$	$2,24 \times 10^{-2}$ m <sup>3</sup> /mol	2,241383	31
Constante de Faraday	$F$	$9,65 \times 10^4$ C/mol	9,648456	2,8
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma$	$5,67 \times 10^{-8}$ W/m <sup>2</sup> · K <sup>-4</sup>	5,67032	125
Constante de Rydberg	$R$	$1,10 \times 10^7$ /m	1,097373177	0,075
Constante gravitacional	$G$	$6,67 \times 10^{-11}$ m <sup>3</sup> /s <sup>2</sup> · kg	6,6726	75
Raio de Bohr	$a_0$	$5,29 \times 10^{-11}$ m	5,2917706	0,82
Momento magnético do elétron	$\mu_e$	$9,28 \times 10^{-24}$ J/T	9,284832	3,9
Momento magnético do próton	$\mu_p$	$1,41 \times 10^{-26}$ J/T	1,4106171	3,9
Magneton de Bohr	$\mu_B$	$9,27 \times 10^{-24}$ J/T	9,274078	3,9
Magneton nuclear	$\mu_N$	$5,05 \times 10^{-27}$ J/T	5,050824	3,9

<sup>a</sup> Mesma unidade e potência de dez que o valor calculado.

<sup>b</sup> Partes por milhão.

<sup>c</sup> Condições normais de temperatura e pressão = 0°C e 1,0 atm.

\* Os valores nesta tabela foram selecionados de uma extensa listagem desenvolvida por E. Richard Cohen e B. N. Taylor, *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, vol. 2, n.º 4 (1973).

\*\* Ver "A Pilgrim's Progress in Search of Fundamental Constants", por J. W. M. Du Mond, *Physics Today*, outubro 1965, e "The Fundamental Physical Constants" por Taylor, Langenberg, e Parker, *Scientific American*, outubro, 1970.

**O Sol**

Massa	$1,99 \times 10^{30}$ kg
Raio	$6,96 \times 10^5$ km
Massa específica média	$1\,410$ kg/m <sup>3</sup>
Gravidade superficial	$274$ m/s <sup>2</sup>
Temperatura superficial	$6\,000$ K
Taxa de radiação total	$3,92 \times 10^{26}$ W

**APÊNDICE C**  
**DADOS SOBRE A TERRA,**  
**A LUA E O SOL**

**A Terra**

Massa	$5,98 \times 10^{24}$ kg
Raio equatorial	$6,378 \times 10^6$ m
Raio polar	$6,357 \times 10^6$ m
Raio de uma esfera de mesmo volume	$6,371 \times 10^6$ m
Massa específica média	$5\,522$ kg/m <sup>3</sup>
Aceleração de gravidade <sup>a</sup>	$9,80665$ m/s <sup>2</sup> $32,1740$ ft/s <sup>2</sup>
Velocidade orbital média	$29\,770$ m/s
Velocidade angular	$7,29 \times 10^{-5}$ rad/s
Constante solar <sup>b</sup>	$1\,340$ W/m <sup>2</sup>
Campo magnético (em Washington, D.C.)	$5,7 \times 10^{-5}$ T
Momento de dipólo	$8,1 \times 10^{22}$ A · m <sup>2</sup>
Atmosfera padrão	$1,013 \times 10^5$ Pa $14,70$ lb/in <sup>2</sup> $760,0$ mm-Hg
Massa específica do ar seco nas CNTP <sup>c</sup>	$1,29$ kg/m <sup>3</sup>
Velocidade do som no ar seco nas CNTP	$331,4$ m/s

<sup>a</sup> Este valor, adotado pelo Comitê Geral de Pesos e Medidas, em 1901, aproxima o valor a 45° de latitude, ao nível do mar.

<sup>b</sup> Esta é a taxa por unidade de área segundo a qual a energia solar atinge a atmosfera terrestre, com incidência normal.

<sup>c</sup> CNTP = Condições normais de temperatura e pressão = 0°C e 1 atm.

**A Lua**

Massa	$7,36 \times 10^{22}$ kg
Raio	$1\,738$ km
Massa específica média	$3\,344$ kg/m <sup>3</sup>
Gravidade superficial	$1,67$ m/s <sup>2</sup>
Distância média Terra-Lua	$3,80 \times 10^5$ km

## APÊNDICE D O SISTEMA SOLAR\*

	MERCÚRIO	VÊNUS	TERRA	MARTE	JÚPITER	SATURNO	URANO	NETUNO	PLUTÃO
Distância máxima do Sol (10 <sup>6</sup> km)	69,7	109	152,1	249,1	815,7	1 507	3 004	4 537	7 375
Distância mínima do Sol (10 <sup>6</sup> km)	45,9	107,4	147,1	206,7	740,9	1 347	2 735	4 456	4 425
Distância média do Sol (10 <sup>6</sup> km)	57,9	108,2	149,6	227,9	778,3	1 427	2 869,6	4 496,6	5 900
Distância média do Sol (unidades astronômicas)	0,387	0,723	1	1,524	5,203	9,539	19,18	30,06	39,44
Período de revolução	88 d	224,7 d	365,26 d	687 d	11,86 a	29,46 a	84,01 a	164,8 a	247,7 a
Período de rotação	59 d	- 243 d retrogrado	23 h 56 min 4 s	24 h 37 min 23 s	9 h 50 min 30 s	10 h 14 min	- 11 h retrogrado	16 h	6 d 9 h
Velocidade orbital (km/s)	47,9	35	29,8	24,1	13,1	9,6	6,8	5,4	4,7
Inclinação do eixo	< 28°	3°	23°27'	23°59'	3°05'	26°44'	82°5'	28°48'	?
Incl. da órbita em relação à eclíptica	7°	3,4°	0°	1,9°	1,3°	2,5°	0,8°	1,8°	17,2°
Excentricidade da órbita	0,206	0,007	0,017	0,093	0,048	0,056	0,047	0,009	0,25
Diâmetro equatorial (km)	4 880	12 104	12 756	6 787	142 800	120 000	51 800	49 500	6 000 (?)
Massa (Terra = 1)	0,055	0,815	1	0,108	317,9	95,2	14,6	17,2	0,1 (?)
Volume (Terra = 1)	0,06	0,88	1	0,15	1 316	755	67	57	0,1 (?)
Densidade (água = 1)	5,4	5,2	5,5	4,0	1,3	0,7	1,2	1,7	(?)
Achatamento	0	0	0,003	0,009	0,06	0,1	0,06	0,02	?
Atmosfera (principais componentes)	nenhuma	CO <sub>2</sub>	N <sub>2</sub> , O <sub>2</sub>	CO <sub>2</sub> , Ar	H <sub>2</sub> , He	H <sub>2</sub> , He	H <sub>2</sub> , He, CH <sub>4</sub>	H <sub>2</sub> , He CH <sub>4</sub>	nenhum detectado
Temperatura média na superfície visível (°C) S = sólido, C = nuvens	350(S) d - 170(S) noite	- 33 (e) 480(S)	22(S)	- 23(S)	- 150(C)	- 180 (C)	- 210(C)	- 220(C)	- 230(?)
Pressão atmosférica na superfície (milibares)	10 <sup>-9</sup>	90 000	1 000	6	(?)	(?)	(?)	(?)	(?)
Gravidade na superfície (Terra = 1)	0,37	0,88	1	0,38	2,64	1,15	1,17	1,18	(?)
Diâmetro aparente médio do Sol visto do Planeta	1°22'40"	44'15"	31'59"	21'	6'09"	3'22"	1'41"	1'04"	49"
Satélites conhecidos	0	0	1	2	13	10	5	2	0

\* Reimpresso com permissão de "The Solar System", *Scientific American*, setembro, 1975.



APÊNDICE F  
AS PARTÍCULAS DA  
FÍSICA\*

Nome da família	Nome da partícula	Símbolo		Spin	Carga, e	Estranheza	Massa de repouso, Mev	Vida Média, segundos	Modo típico de decaimento	
		Partícula	Antipartícula							
—	Fóton	$\gamma$	$\gamma$	1	0	0	0	Estável	—	
LÉPTONS	Elétron	$e^-$	$e^+$	$\frac{1}{2}$	$\mp 1$	0	0,5110	Estável	—	
	Muon	$\mu^+$	$\mu^-$	$\frac{1}{2}$	$\pm 1$	0	105,7	$2,197 \times 10^{-6}$	$e + \nu + \bar{\nu}$	
	Neutrino do elétron	$\nu_e$	$\bar{\nu}_e$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	Estável	—	
	Neutrino do muon	$\nu_\mu$	$\bar{\nu}_\mu$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	Estável	—	
MESONS	Píon	$\pi^+$	$\pi^-$	0	$\pm 1$	0	139,6	$2,603 \times 10^{-8}$	$\mu + \nu$	
		$\pi^0$	$\pi^0$	0	0	0	135,0	$8,28 \times 10^{-17}$	$\gamma + \gamma$	
	Méson K	$K^+$	$K^-$	0	$\pm 1$	$\pm 1$	493,7	$1,237 \times 10^{-8}$	$\mu + \nu$	
		$K^0$	$\bar{K}^0$	0	0	$\pm 1$	497,7	$8,930 \times 10^{-11}$ $5,181 \times 10^{-8}$	$\pi^+ + \pi^-$ $\pi^0 + \pi^0 + \pi^0$	
Méson eta	$\eta^0$	$\eta^0$	0	0	0	548,8	?	$\gamma + \gamma$		
HÁDRONS	NÚCLEON	Próton	$p$	$\bar{p}$	$\frac{1}{2}$	$\pm 1$	0	938,3	Estável	—
		Néutron	$n$	$\bar{n}$	$\frac{1}{2}$	0	0	939,6	918	$p + e^- + \nu$
	Lambda	$\Lambda^0$	$\bar{\Lambda}^0$	$\frac{1}{2}$	0	$\mp 1$	1116	$2,578 \times 10^{-10}$	$p + \pi^-$	
	Sigma	$\Sigma^+$	$\bar{\Sigma}^+$	$\frac{1}{2}$	+1	$\mp 1$	1189	$8,00 \times 10^{-17}$	$p + \pi^0$	
		$\Sigma^0$	$\bar{\Sigma}^0$	$\frac{1}{2}$	0	$\mp 1$	1192	$< 1,0 \times 10^{-14}$	$\Lambda^0 + \gamma$	
		$\Sigma^-$	$\bar{\Sigma}^-$	$\frac{1}{2}$	-1	$\mp 1$	1197	$1,482 \times 10^{-10}$	$n + \pi^-$	
	Partícula Cascata	$\Xi^0$	$\bar{\Xi}^0$	$\frac{1}{2}$	0	$\mp 2$	1315	$2,96 \times 10^{-10}$	$\Lambda^0 + \pi^0$	
		$\Xi^-$	$\bar{\Xi}^-$	$\frac{1}{2}$	$\mp 1$	$\mp 2$	1321	$1,652 \times 10^{-10}$	$\Lambda^0 + \pi^-$	
Ômega	$\Omega^-$	$\bar{\Omega}^-$	$\frac{3}{2}$	$\mp 1$	$\mp 3$	1672	$1,3 \times 10^{-10}$	$\Xi^0 + \pi^-$		

\* Ver (1) "Review of Particle Properties", *Reviews of Modern Physics*, vol. 48, n.º 2. Parte II, abril (1976).

(2) "Quarks with Color and Flavor", por Sheldon Lee Glashow, *Scientific American*, outubro (1975).

(3) "The New Elementary Particles and Charm", por Lewis Ryder, *Physics Education*, janeiro (1976).

para maiores informações sobre Física de Partículas.

Fatores de conversão podem ser lidos diretamente das tabelas. Por exemplo, 1 grau =  $2,778 \times 10^{-3}$  rotações, de modo que  $16,7^\circ = 16,7 \times 2,778 \times 10^{-3}$  rotações. As unidades SI estão em letras maiúsculas. O prefixo "ab" se refere a unidades eletromagnéticas (emu); "stat" se refere a unidades eletrostáticas (esu). Adaptada de *Elements of Physics*, de G. Shortley e D. Williams, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.

**APÊNDICE G**  
**FATORES DE CONVERSÃO**

**Ângulo plano**

	°	'	"	RADIANO	rot
1 grau =	1	60	3600	$1,745 \times 10^{-2}$	$2,778 \times 10^{-3}$
1 minuto =	$1,667 \times 10^{-2}$	1	60	$2,909 \times 10^{-4}$	$4,630 \times 10^{-5}$
1 segundo =	$2,778 \times 10^{-4}$	$1,667 \times 10^{-2}$	1	$4,848 \times 10^{-6}$	$7,716 \times 10^{-7}$
1 RADIANO =	57,30	3438	$2,063 \times 10^5$	1	0,1592
1 rotação =	360	$2,16 \times 10^4$	$1,296 \times 10^6$	6,283	1

**Ângulo sólido**

**1 esfera =  $4\pi$  esferorradianos = 12,57 esferorradianos**

**Comprimento**

	cm	METRO	km	in	ft	mi
1 centímetro =	1	$10^{-2}$	$10^{-5}$	0,3937	3,281	6,214
1 METRO =	100	1	$10^{-3}$	39,3	3,281	$6,214 \times 10^{-6}$
1 quilômetro =	$10^5$	1000	1	3,937	3281	$0,6214 \times 10^{-4}$
1 polegada =	2,540	2,540	2,540	1	8,333	1,578
1 pé =	30,48	$0,3048 \times 10^{-2}$	$3,048 \times 10^{-5}$	12	1	$1,894 \times 10^{-5}$
1 milha terrestre =	$1,609 \times 10^5$	1609	$1,609 \times 10^{-4}$	6,336	5280	$1 \times 10^{-4}$

1 ângstrom (Å) =  $10^{-10}$  m      1 ano-luz =  $9,4600 \times 10^{12}$  km  
 1 parsec =  $3,084 \times 10^{13}$  km      1 jarda = 3 ft  
 1 milha marítima = 1 852 metros = 1,150 8 milhas terrestres = 6 076,10 ft

**Área**

	METRO <sup>2</sup>	cm <sup>2</sup>	ft <sup>2</sup>	in <sup>2</sup>
1 METRO QUADRADO =	1	$10^4$	10,76	1 550
1 centímetro quadrado =	$10^{-4}$	1	$1,076 \times 10^{-3}$	0,1550
1 pé quadrado =	$9,290 \times 10^{-2}$	929,0	1	144
1 polegada quadrada =	$6,452 \times 10^{-4}$	6,452	$6,944 \times 10^{-3}$	1

1 milha quadrada =  $2,788 \times 10^7$  ft<sup>2</sup> = 640 acres      1 acre = 43.560 ft<sup>2</sup>  
 1 barne =  $10^{-28}$  m<sup>2</sup>

## Volume

	METRO <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	l	ft <sup>3</sup>	in <sup>3</sup>
1 METRO CÚBICO =	1	10 <sup>6</sup>	1000	35,31	6,102 × 10 <sup>4</sup>
1 centímetro cúbico =	10 <sup>-6</sup>	1	1,000 × 10 <sup>-3</sup>	3,531 × 10 <sup>-5</sup>	6,102 × 10 <sup>-2</sup>
1 litro =	1,000 × 10 <sup>-3</sup>	1000	1	3,531 × 10 <sup>-2</sup>	61,02
1 pé cúbico =	2,832 × 10 <sup>-2</sup>	2,832 × 10 <sup>4</sup>	28,32	1	1728
1 polegada cúbica =	1,639 × 10 <sup>-5</sup>	16,39	1,639 × 10 <sup>-2</sup>	5,787 × 10 <sup>-4</sup>	1

1 galão americano = 4 quartos americanos = 8 pints americanos = 128 onças americanas = 231 in<sup>3</sup>.

1 galão britânico = volume de 10 libras de água a 62°F = 277,42 ft<sup>3</sup>

1 litro = volume de 1 kg de água no máximo de sua densidade = 10<sup>-3</sup> m<sup>3</sup>

## Massa

Nota: As unidades à direita e abaixo das linhas cheias não são unidades de massa, mas são, muitas vezes, utilizadas como tais. Quando se escreve, por exemplo:

$$1 \text{ kg} \text{ "=" } 2,205 \text{ libras}$$

quer significar que o quilograma é a *massa* que *pesa* 2,205 libras, sob condição de gravidade padrão ( $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ ).

	g	KG	slug	u.m.a	onça	lb	"ton"
1 grama =	1	0,001	6,852 × 10 <sup>-5</sup>	6,024 × 10 <sup>23</sup>	3,527 × 10 <sup>-7</sup>	2,205 × 10 <sup>-5</sup>	1,102 × 10 <sup>-6</sup>
1 QUILOGRAMA =	1000	1	6,852 × 10 <sup>-2</sup>	6,024 × 10 <sup>26</sup>	35,27	2,205	1,102 × 10 <sup>-3</sup>
1 "slug" =	1,459 × 10 <sup>4</sup>	14,59	1	8,789 × 10 <sup>27</sup>	514,8	32,17	1,609 × 10 <sup>-2</sup>
1 u.m.a. =	1,660 × 10 <sup>-24</sup>	1,660 × 10 <sup>-27</sup>	1,137 × 10 <sup>-28</sup>	1	5,855 × 10 <sup>-28</sup>	3,660 × 10 <sup>-27</sup>	1,829 × 10 <sup>-29</sup>
1 onça (avoirdupois) =	28,35	2,835 × 10 <sup>-2</sup>	1,943 × 10 <sup>-3</sup>	1,708 × 10 <sup>28</sup>	1	6,250 × 10 <sup>-2</sup>	3,125 × 10 <sup>-5</sup>
1 libra (avoirdupois) =	453,6	0,4536	3,108 × 10 <sup>-2</sup>	2,732 × 10 <sup>26</sup>	16	1	0,0005
1 "ton" =	9,072 × 10 <sup>6</sup>	907,2	62,16	5,465 × 10 <sup>29</sup>	3,2 × 10 <sup>4</sup>	2000	1

## Massa específica

Nota: As unidades à direita ou abaixo das linhas cheias são pesos específicos e, como tais, são dimensionalmente diferentes das massas específicas. Deve-se agir com cuidado. (Ver observação na tabela das massas.)

	slug/pé <sup>3</sup>	KG/M <sup>3</sup>	g/cm <sup>3</sup>	lb/ft <sup>3</sup>	lb/in <sup>3</sup>
1 slug por pé <sup>3</sup> =	1	515,4	0,5154	32,17	1,862 × 10 <sup>-3</sup>
1 QUILOGRAMA por METRO <sup>3</sup> =	1,940 × 10 <sup>-3</sup>	1	0,001	6,243 × 10 <sup>-3</sup>	3,613 × 10 <sup>-6</sup>
1 grama por cm <sup>3</sup> =	1,940	1000	1	62,43	3,613 × 10 <sup>-3</sup>
1 libra por pé <sup>3</sup> =	3,108 × 10 <sup>-3</sup>	16,02	1,602 × 10 <sup>-2</sup>	1	5,787 × 10 <sup>-4</sup>
1 libra por pol <sup>3</sup> =	53,71	2,768 × 10 <sup>4</sup>	27,68	1728	1



### Tempo

	ano	dia	hora	minuto	SEGUNDO
1 ano =	1	365,2	$8,766 \times 10^3$	$5,259 \times 10^5$	$3,156 \times 10^7$
1 dia =	$2,738 \times 10^{-3}$	1	24	1440	$8,640 \times 10^4$
1 hora =	$1,141 \times 10^{-4}$	$4,167 \times 10^{-2}$	1	60	3600
1 minuto =	$1,901 \times 10^{-6}$	$6,944 \times 10^{-4}$	$1,667 \times 10^{-2}$	1	60
1 SEGUNDO =	$3,169 \times 10^{-8}$	$1,157 \times 10^{-5}$	$2,778 \times 10^{-4}$	$1,667 \times 10^{-2}$	1

### Velocidade

	ft/s	km/h	METRO/ SEGUNDO	mi/h	cm/s	nó
1 pé por segundo =	1	1,097	0,3048	0,6818	30,48	0,5925
1 quilômetro por hora =	0,9113	1	0,2778	0,6214	27,78	0,5400
1 METRO por SEGUNDO =	3,281	3,6	1	2,237	100	1,944
1 milha por hora =	1,467	1,609	0,4470	1	44,70	0,8689
1 centímetro por segundo =	$3,281 \times 10^{-2}$	$3,6 \times 10^{-2}$	0,01	$2,237 \times 10^{-2}$	1	$1,944 \times 10^{-2}$
1 nó =	1,688	1,852	0,5144	1,151	51,44	1

1 nó = 1 milha marítima/hora

1 mi/min = 88 pés/s = 60 mi/h

### Força

Nota: As unidades à direita e abaixo da linha cheia não são unidades de força mas são, muitas vezes, usadas como tais, especialmente na Química. Por exemplo, se escrevemos:

1 grama-força "≈" 980,7 dinas

queremos dizer que a *massa* de um grama sofre a *força* de 980,7 dinas sob condição de gravidade padrão ( $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$ ).

	dyn	NEWTON	lb	pdl	gf	kgf
1 dina =	1	$10^{-5}$	$2,248 \times 10^{-6}$	$7,233 \times 10^{-5}$	$1,020 \times 10^{-3}$	$1,020 \times 10^{-4}$
1 NEWTON =	$10^5$	1	0,2248	7,233	102,0	0,1020
1 libra =	$4,448 \times 10^5$	4,448	1	32,17	453,6	0,4536
1 poundal =	$1,383 \times 10^4$	0,1383	$3,108 \times 10^{-2}$	1	14,10	$1,410 \times 10^{-2}$
1 grama-força =	980,7	$9,807 \times 10^{-2}$	$2,205 \times 10^{-3}$	$7,093 \times 10^{-2}$	1	0,001
1 quilograma-força =	$9,807 \times 10^3$	9,807	$2,205 \times 10^{-1}$	70,93	1000	1

### Pressão

	atm	dyn/cm <sup>2</sup>	pol d'água	cm Hg	NEWTON/METRO <sup>2</sup>	lb/in <sup>2</sup>	lb/ft <sup>2</sup>
1 atmosfera =	1	1,013 × 10 <sup>6</sup>	406,8	76	1,013 × 10 <sup>5</sup>	14,70	2116
1 dina por cm <sup>2</sup> =	9,869 × 10 <sup>-7</sup>	1	4,015 × 10 <sup>-4</sup>	7,501 × 10 <sup>-5</sup>	0,1	1,450 × 10 <sup>-5</sup>	2,089 × 10 <sup>-3</sup>
1 pol d'água a 4°C =	2,458 × 10 <sup>-3</sup>	2491	1	0,1868	249,1	3,613 × 10 <sup>-2</sup>	5,202
1 centímetro de Mercúrio a 0°C =	1,316 × 10 <sup>-2</sup>	1,333 × 10 <sup>4</sup>	5,353	1	1333	0,1934	27,85
1 NEWTON por METRO <sup>2</sup> =	9,869 × 10 <sup>-6</sup>	10	4,015 × 10 <sup>-3</sup>	7,501 × 10 <sup>-4</sup>	1	1,450 × 10 <sup>-4</sup>	2,089 × 10 <sup>-2</sup>
1 libra por pol <sup>2</sup> =	6,805 × 10 <sup>-2</sup>	6,895 × 10 <sup>4</sup>	27,68	5,171	6,895 × 10 <sup>3</sup>	1	144
1 libra por pé <sup>2</sup> =	4,725 × 10 <sup>-4</sup>	478,8	0,1922	3,591 × 10 <sup>-2</sup>	47,88	6,944 × 10 <sup>-3</sup>	1

\* Onde aceleração da gravidade = 9,806.65 m/s<sup>2</sup>

1 bar = 10<sup>6</sup> dyn/cm<sup>2</sup>

1 milibar = 10<sup>3</sup> dyn/cm<sup>2</sup> = 10<sup>2</sup> N/m<sup>2</sup>

### Energia, Trabalho, Calor

As duas últimas colunas e as duas linhas não são propriamente unidades de energia, mas foram incluídas por comodidade. Resultam da fórmula relativística de equivalência entre massa e energia,  $E = mc^2$ , e representam a energia liberada quando se destrói completamente a massa de um quilograma ou unidade de massa atômica (u).

Novamente deve-se ter cuidado ao empregar esta tabela.

	Btu	erg	ft-lb	cv-h	JOULE	cal	kWh	eV	MeV	kg	u. m. a.
1 unidade térmica inglesa =	1	1,055 × 10 <sup>10</sup>	777,9	3,929 × 10 <sup>-4</sup>	1055	252,0	2,930 × 10 <sup>-4</sup>	6,585 × 10 <sup>21</sup>	6,585 × 10 <sup>15</sup>	1,174 × 10 <sup>-16</sup>	7,074 × 10 <sup>11</sup>
1 erg =	9,481 × 10 <sup>-11</sup>	1	7,376 × 10 <sup>-8</sup>	3,725 × 10 <sup>-14</sup>	10 <sup>-7</sup>	2,389 × 10 <sup>-8</sup>	2,778 × 10 <sup>-14</sup>	6,242 × 10 <sup>11</sup>	6,242 × 10 <sup>5</sup>	1,113 × 10 <sup>-24</sup>	670,5
1 pé-libra =	1,285 × 10 <sup>-3</sup>	1,356 × 10 <sup>7</sup>	1	5,051 × 10 <sup>-7</sup>	1,356	0,3239	3,766 × 10 <sup>-7</sup>	8,464 × 10 <sup>18</sup>	8,464 × 10 <sup>12</sup>	1,509 × 10 <sup>-17</sup>	9,092 × 10 <sup>8</sup>
1 cv-hora =	2545	2,685 × 10 <sup>10</sup>	1,980 × 10 <sup>6</sup>	1	2,685 × 10 <sup>6</sup>	6,414 × 10 <sup>6</sup>	0,7457	1,676 × 10 <sup>25</sup>	1,676 × 10 <sup>19</sup>	2,988 × 10 <sup>-11</sup>	1,809 × 10 <sup>16</sup>
1 JOULE =	9,481 × 10 <sup>-4</sup>	10 <sup>7</sup>	0,7376	3,725 × 10 <sup>-7</sup>	1	0,2389	2,778 × 10 <sup>-7</sup>	6,242 × 10 <sup>18</sup>	6,242 × 10 <sup>12</sup>	1,113 × 10 <sup>-17</sup>	6,705 × 10 <sup>8</sup>
1 caloria =	3,968 × 10 <sup>-3</sup>	4,186 × 10 <sup>7</sup>	3,087	1,559 × 10 <sup>-6</sup>	4,186	1	1,163 × 10 <sup>-6</sup>	2,613 × 10 <sup>19</sup>	2,613 × 10 <sup>13</sup>	4,659 × 10 <sup>-17</sup>	2,807 × 10 <sup>10</sup>
1 quiloWatt-hora =	3413	3,6 × 10 <sup>13</sup>	2,655 × 10 <sup>6</sup>	1,341	3,6 × 10 <sup>6</sup>	8,601 × 10 <sup>6</sup>	1	2,247 × 10 <sup>25</sup>	2,247 × 10 <sup>19</sup>	4,007 × 10 <sup>-11</sup>	2,414 × 10 <sup>16</sup>
1 elétron-Volt =	1,519 × 10 <sup>-22</sup>	1,602 × 10 <sup>-12</sup>	1,182 × 10 <sup>-19</sup>	5,967 × 10 <sup>-26</sup>	1,602 × 10 <sup>-19</sup>	3,827 × 10 <sup>-20</sup>	4,450 × 10 <sup>-26</sup>	1	10 <sup>-6</sup>	1,783 × 10 <sup>-36</sup>	1,074 × 10 <sup>-9</sup>
1 milhão elétrons-Volt =	1,519 × 10 <sup>-16</sup>	1,602 × 10 <sup>-6</sup>	1,182 × 10 <sup>-13</sup>	5,967 × 10 <sup>-20</sup>	1,602 × 10 <sup>-13</sup>	3,827 × 10 <sup>-14</sup>	4,450 × 10 <sup>-20</sup>	10 <sup>6</sup>	1	1,783 × 10 <sup>-30</sup>	1,074 × 10 <sup>-3</sup>
1 quilograma =	8,521 × 10 <sup>14</sup>	8,987 × 10 <sup>22</sup>	6,629 × 10 <sup>16</sup>	3,348 × 10 <sup>10</sup>	8,987 × 10 <sup>16</sup>	2,147 × 10 <sup>14</sup>	2,497 × 10 <sup>16</sup>	5,610 × 10 <sup>35</sup>	5,610 × 10 <sup>29</sup>	1	6,025 × 10 <sup>26</sup>
1 unidade de massa atômica =	1,415 × 10 <sup>-28</sup>	1,492 × 10 <sup>-8</sup>	1,100 × 10 <sup>-18</sup>	5,558 × 10 <sup>-17</sup>	1,492 × 10 <sup>-10</sup>	3,564 × 10 <sup>-11</sup>	4,145 × 10 <sup>-17</sup>	9,31 × 10 <sup>8</sup>	931,0 × 10 <sup>6</sup>	1,660 × 10 <sup>-27</sup>	1

### Potência

	Btu/h	pé-lb/s	Cv (hp)	cal/s	kW	WATTS
1 unidade térmica inglesa por hora =	1	0,2161	3,929 $\times 10^{-4}$	7,000 $\times 10^{-2}$	2,930 $\times 10^{-4}$	0,2930
1 pé-libra por segundo =	4,628	1	1,818 $\times 10^{-3}$	0,3239	1,356 $\times 10^{-3}$	1,356
1 cavalo-vapor =	2545	550	1	178,2	0,7457	745,7
1 caloria por segundo =	14,29	3,087	5,613 $\times 10^{-3}$	1	4,186 $\times 10^{-3}$	4,186
1 quiloWatt =	3413	737,6	1,341	238,9	1	1000
1 WATT =	3,413	0,7376	1,341 $\times 10^{-3}$	0,2389	0,001	1

### Carga elétrica

	abC	A-h	COULOMB (C)	statC
1 abCoulomb (1 uem) =	1	$2,778 \times 10^{-3}$	10	$2,998 \times 10^{10}$
1 Ampère-hora =	360	1	3600	$1,079 \times 10^{13}$
1 COULOMB =	0,1	$2,778 \times 10^{-4}$	1	$2,998 \times 10^9$
1 statCoulomb (1 ues) =	$3,336 \times 10^{-11}$	$9,266 \times 10^{-14}$	$3,336 \times 10^{-10}$	1

carga de 1 elétron =  $1,602 \times 10^{-19}$  C

### Corrente elétrica

	abA	AMPÈRE (A)	statA
1 abAmpère (1 uem) =	1	10	$2,998 \times 10^{10}$
1 AMPÈRE =	0,1	1	$2,998 \times 10^9$
1 statAmpère (1 ues) =	$3,336 \times 10^{-11}$	$3,336 \times 10^{-10}$	1

### Potencial elétrico, força eletromotriz

	abV	VOLT (V)	statV
1 abVolt (1 uem) =	1	$10^{-8}$	$3,336 \times 10^{-11}$
1 VOLT =	$10^8$	1	$3,336 \times 10^{-3}$
1 statVolt (1 ues) =	$2,998 \times 10^{10}$	299,8	1

### Resistência elétrica

	abOhm	OHM	statOhm
1 abOhm (1 uem) =	1	$10^{-9}$	$1,113 \times 10^{-21}$
1 OHM =	$10^9$	1	$1,113 \times 10^{-12}$
1 statOhm (1 ues) =	$8,987 \times 10^{20}$	$8,987 \times 10^{11}$	1

**Capacitância**

	abF	FARAD (F)	$\mu\text{F}^1$	statF
1 abFarad (1 uem) =	1	$10^9$	$10^{15}$	$8,987 \times 10^{20}$
1 FARAD =	$10^{-9}$	1	$10^6$	$8,987 \times 10^{11}$
1 microFarad =	$10^{-15}$	$10^{-6}$	1	$8,987 \times 10^5$
1 statFarad (1 uem) =	$1,113 \times 10^{-21}$	$1,113 \times 10^{-12}$	$1,113 \times 10^{-6}$	1

<sup>1</sup> Frequentemente indicada por mF, nos livros americanos.

**Indutância**

	abHenry	HENRY	$\mu\text{H}$	mH	statHenry
1 abHenry (1 uem) =	1	$10^{-9}$	0,001	$10^{-6}$	$1,113 \times 10^{-21}$
1 HENRY =	$10^9$	1	$10^6$	1000	$1,113 \times 10^{-12}$
1 microHenry =	1000	$10^{-6}$	1	0,001	$1,113 \times 10^{-18}$
1 miliHenry =	$10^6$	0,001	1000	1	$1,113 \times 10^{-15}$
1 statHenry (1 ue $\dot{s}$ ) =	$8,987 \times 10^{20}$	$8,987 \times 10^{11}$	$8,987 \times 10^{17}$	$8,987 \times 10^{14}$	1

**Fluxo magnético**

	Maxwell	WEBER
1 Maxwell (1 linha ou 1 uen) =	1	$10^{-8}$
1 WEBER =	$10^8$	1

**Campo magnético**

	Gauss	TESLA	miliGauss
1 Gauss =	1	$10^{-4}$	1000
1 TESLA =	$10^4$	1	$10^7$
1 miliGauss =	0,001	$10^{-7}$	1

$$1 \text{ Tesla} = 1 \text{ Weber/metro}^2$$

**Sinais e símbolos matemáticos**

- = igual a
- $\approx$  aproximadamente igual a
- $\neq$  diferente de
- $\equiv$  idêntico a, definido como
- $>$  maior do que ( $\gg$  muito maior que)
- $<$  menor do que ( $\ll$  muito menor que)
- $\geq$  maior do que ou igual a (ou, não é menor que)
- $\leq$  menor do que ou igual a (ou, não é maior que)
- $\pm$  mais ou menos (p. ex.:  $\sqrt{4} = \pm 2$ )
- $\propto$  proporcional a (ex.: lei de Hooke:  $F \propto x$ , ou  $F = -kx$ )
- $\Sigma$  somatório de
- $\bar{x}$  valor médio de  $x$

**APÊNDICE H****SÍMBOLOS  
MATEMÁTICOS E  
ALFABETO GREGO**

**Alfabeto grego**

Alfa	A	$\alpha$	Nu	N	$\nu$
Beta	B	$\beta$	Ksi	$\Xi$	$\xi$
Gama	$\Gamma$	$\gamma$	Ômicron	O	$\omicron$
Delta	$\Delta$	$\delta$	Pi	$\Pi$	$\pi$
Êpsilon	E	$\epsilon$	Ro	P	$\rho$
Zeta	Z	$\zeta$	Sigma	$\Sigma$	$\sigma$
Eta	H	$\eta$	Tau	T	$\tau$
Teta	$\Theta$	$\theta, \upsilon$	Úpsilon	Y	$\upsilon$
Iota	I	$i$	Fi	$\Phi$	$\phi, \varphi$
Kapa	K	$\kappa$	Chi	X	$\chi$
Lambda	$\Lambda$	$\lambda$	Psi	$\Psi$	$\psi$
Mu	M	$\mu$	Ômega	$\Omega$	$\omega$

**Geometria**

Círculo de raio  $r$ : circunferência =  $2\pi r$ ; área =  $\pi r^2$ .

Esfera de raio  $r$ : área =  $4\pi r^2$ ; volume =  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .

Cilindro circular reto de raio  $r$  e altura  $h$ : área =  $2\pi r^2 + 2\pi rh$ ; volume =  $\pi r^2 h$ .

**APÊNDICE I  
FÓRMULAS  
MATEMÁTICAS**

**Fórmula quadrática**

Se  $ax^2 + bx + c = 0$ , então,  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

**Funções trigonométricas do ângulo  $\theta$**

$\text{sen } \theta = \frac{y}{r}$        $\text{cos } \theta = \frac{x}{r}$

$\text{tg } \theta = \frac{y}{x}$        $\text{cotg } \theta = \frac{x}{y}$

$\text{sec } \theta = \frac{r}{x}$        $\text{co-sec } \theta = \frac{r}{y}$

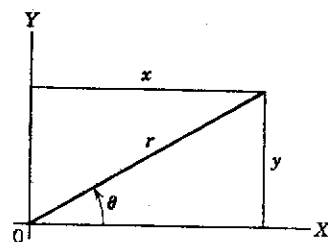


Fig. Ap. I

**Teorema de Pitágoras**

$x^2 + y^2 = r^2$

**Identidades trigonométricas**

$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$        $\text{sec}^2 \theta - \text{tg}^2 \theta = 1$        $\text{co-sec}^2 \theta - \text{cotg}^2 \theta = 1$

$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen } \alpha \text{ cos } \beta \pm \text{cos } \alpha \text{ sen } \beta$

$\text{cos}(\alpha \pm \beta) = \text{cos } \alpha \text{ cos } \beta \mp \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$

$\text{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg } \alpha \pm \text{tg } \beta}{1 \mp \text{tg } \alpha \text{ tg } \beta}$

$\text{sen } \alpha \pm \text{sen } \beta = 2 \text{ sen } \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \text{ cos } \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$

$\text{sen } 2\theta = 2 \text{ sen } \theta \text{ cos } \theta$

$\text{cos } 2\theta = \text{cos}^2 \theta - \text{sen}^2 \theta = 2 \text{ cos}^2 \theta - 1 = 1 - 2 \text{ sen}^2 \theta$

$\text{sen } \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$        $\text{cos } \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \operatorname{sen} \theta.$$

### Série de Taylor

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + f'(x_0)x + f''(x_0)\frac{x^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{x^3}{3!} + \dots$$

### Expansão binominal

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots$$

### Expansão exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

### Expansão logarítmica

$$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

### Expansões trigonométricas ( $\theta$ em radianos)

$$\operatorname{sen} \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

$$\operatorname{cos} \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

### Derivadas e Integrais indefinidas

No que se segue, as letras  $u$  e  $v$  valem para quaisquer funções de  $x$ , e  $a$  e  $m$  são constantes. Para cada uma das integrais, deve ser acrescentada uma constante arbitrária de integração. O *Handbook of Chemistry and Physics* (Chemical Rubber Publishing Co.) dá uma relação mais completa.

$$1. \frac{dx}{dx} = 1$$

$$2. \frac{d}{dx}(au) = a \frac{du}{dx}$$

$$3. \frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$4. \frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$$

$$5. \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$6. \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$1. \int dx = x$$

$$2. \int au \, dx = a \int u \, dx$$

$$3. \int (u + v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx$$

$$4. \int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1)$$

$$5. \int \frac{dx}{x} = \ln |x|$$

$$6. \int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx$$

- |   |   |
|---|---|
| 7. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$   | 7. $\int e^x dx = e^x$  |
| 8. $\frac{d}{dx} \text{sen } x = \text{cos } x$                       | 8. $\int \text{cos } x dx = \text{sen } x$                            |
| 9. $\frac{d}{dx} \text{cos } x = -\text{sen } x$                      | 9. $\int \text{sen } x dx = -\text{cos } x$                           |
| 10. $\frac{d}{dx} \text{tg } x = \text{sec}^2 x$                      | 10. $\int \text{tg } x dx = \ln \text{cos } x $                       |
| 11. $\frac{d}{dx} \text{cotg } x = -\text{cosec}^2 x$                 | 11. $\int \text{cotg } x dx = \ln \text{sen } x $                     |
| 12. $\frac{d}{dx} \text{sec } x = \text{tg } x \text{ sec } x$        | 12. $\int \text{sec } x dx = \ln \text{sec } x + \text{tg } x $       |
| 13. $\frac{d}{dx} \text{cosec } x = -\text{cotg } x \text{ cosec } x$ | 13. $\int \text{cosec } x dx = \ln \text{cosec } x - \text{cotg } x $ |
| 14. $\frac{d}{dx} \text{arctg } x = \frac{1}{1+x^2}$                  | 14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctg } x$                         |
| 15. $\frac{d}{dx} \text{arc sen } x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$         | 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen } x$                |
| 16. $\frac{d}{dx} \text{arc sec } x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$        | 16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc sec } x$               |

**Produtos vetoriais**

Sejam **i**, **j** e **k** vetores unitários nas direções *x*, *y*, *z*. Então

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0,$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Qualquer vetor, **a**, de componentes *a<sub>x</sub>*, *a<sub>y</sub>*, *a<sub>z</sub>*, ao longo dos eixos *Ox*, *Oy*, *Oz*, pode ser escrito como segue:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}.$$

Sejam **a**, **b**, **c** vetores arbitrários de módulos *a*, *b*, *c*, respectivamente. Então

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$(s\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (s \text{ escalar}).$$

Seja  $\theta$  o menor dos dois ângulos entre **a** e **b**. Então

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \theta$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - b_y a_z) \mathbf{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \mathbf{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \mathbf{k}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \text{ sen } \theta$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

## Funções trigonométricas

Radiano	Grau	Seno	Co-seno	Tangente	Cotangente		
0,0000	0	0,0000	1,0000	0,0000	∞	90	1,5708
0,0175	1	0,0175	0,9998	0,0175	57,29	89	1,5533
0,0349	2	0,0349	0,9994	0,0349	28,64	88	1,5359
0,0524	3	0,0523	0,9986	0,0524	19,08	87	1,5184
0,0698	4	0,0698	0,9976	0,0699	14,30	86	1,5010
0,0873	5	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	85	1,4835
0,1047	6	0,1045	0,9945	0,1051	9,514	84	1,4661
0,1222	7	0,1219	0,9925	0,1228	8,144	83	1,4486
0,1396	8	0,1392	0,9903	0,1405	7,115	82	1,4312
0,1571	9	0,1564	0,9877	0,1584	6,314	81	1,4137
0,1745	10	0,1736	0,9848	0,1763	5,671	80	1,3963
0,1920	11	0,1908	0,9816	0,1944	5,145	79	1,3788
0,2094	12	0,2079	0,9781	0,2126	4,705	78	1,3614
0,2269	13	0,2250	0,9744	0,2309	4,332	77	1,3439
0,2443	14	0,2419	0,9703	0,2493	4,011	76	1,3265
0,2618	15	0,2588	0,9659	0,2679	3,732	75	1,3090
0,2793	16	0,2756	0,9613	0,2867	3,487	74	1,2915
0,2967	17	0,2924	0,9563	0,3057	3,271	73	1,2741
0,3142	18	0,3090	0,9511	0,3249	3,078	72	1,2566
0,3316	19	0,3256	0,9455	0,3443	2,904	71	1,2392
0,3491	20	0,3420	0,9397	0,3640	2,748	70	1,2217
0,3665	21	0,3584	0,9336	0,3839	2,605	69	1,2043
0,3840	22	0,3746	0,9272	0,4040	2,475	68	1,1868
0,4014	23	0,3907	0,9205	0,4245	2,356	67	1,1694
0,4189	24	0,4067	0,9135	0,4452	2,246	66	1,1519
0,4363	25	0,4226	0,9063	0,4663	2,144	65	1,1345
0,4538	26	0,4384	0,8988	0,4877	2,050	64	1,1170
0,4712	27	0,4540	0,8910	0,5095	1,963	63	1,0996
0,4887	28	0,4695	0,8829	0,5317	1,881	62	1,0821
0,5061	29	0,4848	0,8746	0,5543	1,804	61	1,0647
0,5236	30	0,5000	0,8660	0,5774	1,732	60	1,0472
0,5411	31	0,5150	0,8572	0,6009	1,664	59	1,0297
0,5585	32	0,5299	0,8480	0,6249	1,600	58	1,0123
0,5760	33	0,5446	0,8387	0,6494	1,540	57	0,9948
0,5934	34	0,5592	0,8290	0,6745	1,483	56	0,9774
0,6109	35	0,5736	0,8192	0,7002	1,428	55	0,9599
0,6283	36	0,5878	0,8090	0,7265	1,376	54	0,9425
0,6458	37	0,6018	0,7986	0,7536	1,327	53	0,9250
0,6632	38	0,6157	0,7880	0,7813	1,280	52	0,9076
0,6807	39	0,6293	0,7771	0,8098	1,235	51	0,8901
0,6981	40	0,6428	0,7660	0,8391	1,192	50	0,8727
0,7156	41	0,6561	0,7547	0,8693	1,150	49	0,8552
0,7330	42	0,6691	0,7431	0,9004	1,111	48	0,8378
0,7505	43	0,6820	0,7314	0,9325	1,072	47	0,8203
0,7679	44	0,6947	0,7193	0,9657	1,036	46	0,8029
0,7854	45	0,7071	0,7071	1,0000	1,000	45	0,7854
		Co-seno	Seno	Cotangente	Tangente	Grau	Radiano

## APÊNDICE J VALORES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

1901	Wilhelm Konrad Röntgen	1845-1923	pelo descobrimento dos raios-X.
1902	Hendrik Antoon Lorentz Pieter Zeeman	1853-1928 1865-1943	pelas suas pesquisas na influência do magnetismo sobre o fenômeno da radiação
1903	Antoine Henri Becquerel	1852-1908	pelo seu descobrimento da radioatividade natural.

## APÊNDICE K VENCEDORES DO PRÊMIO NOBEL DE FÍSICA\*

\* Ver *Nobel Lectures, Physics, 1901-1970*, Elsevier Publishing Company, para as conferências apresentadas no recebimento do prêmio Nobel e biografias. As justificativas são, quase sem exceção, citações das citações do Prêmio Nobel.



	Pierre Curie Marie Sklowdowska-Curie	1859-1906 1867-1934	por suas pesquisas em conjunto sobre o fenômeno da radiação descoberto pelo professor Henri Becquerel.
1904	Lord Rayleigh (John William Strutt)	1842-1919	por suas pesquisas sobre as densidades dos gases mais importantes e pela descoberta do Argônio.
1905	Philipp Eduard Anton von Lenard	1862-1947	por seu trabalho sobre raios catódicos
1906	Joseph John Thomson	1856-1940	por suas investigações técnicas e experimentais sobre condução de eletricidade por gases.
1907	Albert Abraham Michelson	1852-1931	pela invenção do interferômetro e por suas pesquisas feitas no campo da espectroscopia e da meteorologia.
1908	Gabriel Lippmann	1845-1921	por seu método de reproduzir cores fotograficamente, baseado no fenômeno da interferência.
1909	Gublielmo Marconi Carl Ferdinand Braun	1874-1937 1850-1918	por suas contribuições para o desenvolvimento do telégrafo sem fio
1910	Johannes Diderik van der Waals	1837-1923	por seu trabalho sobre a equação de estado para gases e líquidos
1911	Wilhelm Wien	1864-1928	pelo descobrimento de leis relativas à radiação térmica.
1912	Nils Gustaf Dalén	1869-1937	pela invenção de reguladores automáticos para uso em conjunto com acumuladores gasosos na sinalização costeira.
1913	Heike Kamerlingh Onnes	1853-1926	por suas investigações sobre propriedades da matéria a baixas temperaturas, que levaram à produção do Hélio líquido.
1914	Max von Laue	1879-1960	pelo descobrimento da difração dos raios-X em cristais.
1915	William Henry Bragg William Lawrence Bragg	1862-1942 1890-1971	por seus estudos na análise da estrutura cristalina por meio de raios-X.
1917	Charles Glover Barkla	1877-1944	pelo descobrimento da radiação X característica dos elementos.
1918	Max Planck	1858-1947	pelo descobrimento do quantum de energia.
1919	Johannes Stark	1874-1957	pela descoberta do efeito Doppler em raios canais e do desdobramento de linhas espectrais por campos elétricos.
1920	Charles-Édouard Guillaume	1861-1938	por serviço prestado às medidas de precisão em Física, devido à sua descoberta das anomalias das ligas de aço-níquel.
1921	Albert Einstein	1879-1955	por seus serviços à Física Teórica, e, especialmente, pelo descobrimento da lei do efeito fotoelétrico.
1922	Niels Bohr	1885-1962	pela investigação da estrutura dos átomos e da radiação por eles emitida.
1923	Robert Andrews Milikan	1868-1953	por seu trabalho sobre a carga elétrica elementar e sobre o efeito fotoelétrico.
1924	Karl Manne Georg Siegbahn	1886-1954	por suas descobertas e pesquisas no campo da espectroscopia de raios X.
1925	James Franck Gustav Hertz	1882-1964 1887-1975	pela descoberta das leis que governam as colisões entre átomos e elétrons.
1926	Jean Baptiste Perrin	1870-1942	por seu trabalho sobre a estrutura descontínua da matéria, e, princi-

			palmente, pelo descobrimento do equilíbrio de sedimentação.
1927	Arthur Holly Compton	1892-1962	pelo descobrimento do efeito que tem seu nome.
	Charles Thomson Rees Wilson	1869-1959	pelo método de tornar visíveis, por condensação de vapor, as trajetórias de partículas carregadas.
1928	Owen Willians Richardson	1879-1959	por seu trabalho sobre o fenômeno termoiônico e, especialmente, pelo descobrimento da lei que tem seu nome.
1929	Prince Louis-Victor de Broglie	1892-	pelo descobrimento da natureza ondulatória dos elétrons.
1930	Sir Chandrasekhara Venkata Raman	1888-1970	por seu trabalho sobre o espalhamento de luz e pelo descobrimento do efeito que tem seu nome.
1932	Werner Heisenberg	1901-1976	pela criação da Mecânica Quântica, cuja aplicação, entre outras coisas, conduziu à descoberta de formas alotrópicas do Hidrogênio.
1933	Erwin Schrödinger	1887-1961	pelo descobrimento de novas formas da teoria atômica.
	Paul Adrien Maurice Dirac	1902-	
1935	James Chadwick	1891-1974	pelo descobrimento do nêutron.
1936	Victor Franz Hess	1883-1964	pela descoberta da radiação cósmica.
	Carl David Anderson	1905-	pela descoberta do pósitron.
1937	Clinton Joseph Davisson	1881-1958	pelo descobrimento experimental da difração de elétrons por cristais.
	George Paget Thomson	1892-1975	
1938	Enrico Fermi	1901-1954	pelas demonstrações da existência de novos elementos radioativos produzidos por irradiação de nêutrons, e pela descoberta correlata de reações nucleares induzidas por nêutrons lentos.
1939	Ernest Orlando Lawrence	1901-1958	pelo invento e desenvolvimento do ciclotron e pelos resultados obtidos com ele, especialmente com relação a elementos radioativos artificiais.
1943	Otto Stern	1888-1969	por sua contribuição para o desenvolvimento do método de feixes moleculares e seu descobrimento do momento magnético do próton.
1944	Isidor Isaac Rabi	1898-	por seu método de ressonância para registro das propriedades magnéticas dos núcleos atômicos.
1945	Wolfgang Pauli	1920-1958	pelo descobrimento do Princípio da Exclusão, também chamado Princípio de Pauli.
1946	Percy Williams Bridgman	1882-1961	pela invenção de um aparelho para produzir pressões extremamente altas, e pelas descobertas feitas com ele no campo da Física de altas pressões.
1947	Sir Edward Victor Appleton	1892-1965	por seus estudos da física da atmosfera superior, especialmente pela descoberta da camada de Appleton.
1948	Patrick Maynard Stuart Blackett	1897-1974	pelo desenvolvimento do método da câmara de nuvem de Wilson, e seus descobrimentos, com ela, nos campos da Física Nuclear e radiação cósmica.
1949	Hideki Yukawa	1907-	pela predição da existência dos mésons, com base em trabalhos teóricos sobre forças nucleares.
1950	Cecil Frank Powell	1903-1969	pelo desenvolvimento do método fotográfico para estudo de pro-

1951	Sir John Douglas Cockcroft Ernest Thomas Sinton Walton	1897-1967 1903-	cessos nucleares e pela descoberta de mésons, feita com este método. por seus trabalhos pioneiros sobre a transformação de núcleos atômicos por partículas atômicas aceleradas artificialmente.
1952	Felix Bloch Edward Mills Purcell	1905- 1912-	pelo desenvolvimento de técnicas para medição de campos magnéticos nucleares.
1953	Frits Zernike	1888-1966	pela demonstração do método de contraste de fase, especialmente pela invenção do microscópio de contraste de fase.
1954	Max Born	1882-1970	por suas pesquisas em Mecânica Quântica, especialmente pela interpretação estatística da função de onda.
	Walther Bothe	1891-1957	pelo método da coincidência e pelas descobertas feitas com ele.
1955	Willis Eugene Lamb	1913-	por suas descobertas relativas à estrutura fina do Hidrogênio.
	Polykarp Kusch	1911-	pela determinação precisa do momento magnético do elétron.
1956	William Shockley John Bardeen Walter Houser Brattain	1910- 1908- 1902-	por suas pesquisas em semicondutores e pela descoberta do efeito transistor.
1957	Cheng Ning Yang Tsung Dao Lee	1922- 1926-	por suas profundas investigações das chamadas leis da paridade, que conduziram a importantes descobertas relativas às partículas elementares.
1958	Pavel Aleksejevič Čerenkov Il'ja Michajlovic Frank Igor' Evgen'evič Tamm	1904- 1908- 1895-1971	pelo descobrimento e interpretação do efeito Čerenkov.
1959	Emilio Gino Segrè Owen Chamberlain	1905- 1920-	pela descoberta do anti-próton.
1960	Donald Arthur Glaser	1926-	pela invenção da câmara de bolhas.
1961	Robert Hofstadter	1915-	por seus estudos pioneiros do espalhamento de elétrons por núcleos atômicos e por suas conseqüentes descobertas relacionadas à estrutura dos núcleons.
	Rudolf Ludwig Mössbauer	1929-	por suas pesquisas relacionadas com as absorções ressonantes de radiação $\gamma$ e pela descoberta do efeito que tem seu nome.
1962	Lev Davidovic Landau	1908-	por suas teorias pioneiras sobre a matéria condensada, em especial sobre o Hélio líquido.
1963	Eugene P. Wigner	1902-	por suas contribuições à teoria do núcleo atômico e partículas elementares, particularmente através do descobrimento e aplicação de princípios fundamentais de simetria.
	Maria Goeppert Mayer J. Hans D. Jensen	1906-1972 1907-1973	pelas descobertas relativas à estrutura de camadas do núcleo.
1964	Charles H. Townes Nikolai G. Besov Alexander M. Prochorov	1915- 1922- 1916-	pelo trabalho fundamental no campo da Eletrônica Quântica, o que conduziu à construção de osciladores e amplificadores baseados no princípio maser-laser.
1965	Sin-Itiro Tomonaga Julian Schwinger Richard P. Feynman	1906- 1918- 1918-	pelo trabalho fundamental em Eletrodinâmica Quântica, com conseqüências profundas para a Física de Partículas Elementares.
1966	Alfred Kastler	1902-	pelo descobrimento e desenvolvimento de métodos ópticos para o estudo da ressonância de Hertz em átomos.

1967	Hans Albrecht Bethe	1906-	por suas contribuições à teoria das reações nucleares, especialmente suas descobertas relativas à produção de energia em estrelas.
1968	Luis W. Alvarez	1911-	por sua contribuição decisiva à Física de Partículas Elementares, em particular o descobrimento de um grande número de estados ressonantes, tornado possível através do seu desenvolvimento da técnica de uso de câmara de bolhas de Hidrogênio e análise de dados.
1969	Murray Gell-Mann	1929-	por suas contribuições e descobrimentos relativos à classificação e às interações das partículas elementares.
1970	Hannes Alvéén	1908-	por seu trabalho fundamental e descobertas em Magneto-Hidrodinâmica, com aplicações úteis em diferentes partes da Física do Plasma.
	Louis Néel	1904-	por seu trabalho fundamental e descobertas relativas ao antiferromagnetismo e ferromagnetismo, que conduziram a importantes aplicações em Física do Estado Sólido.
1971	Dennis Gabor	1900-	pelo descobrimento dos princípios da holografia.
1972	John Bardeen Leon N. Cooper J. Robert Schrieffer	1908- 1930- 1931-	pelo desenvolvimento de uma teoria da supercondutividade.
1973	Leo Esaki	1925-	pelo descobrimento do efeito túnel em semicondutores.
	Ivar Giaever	1929-	pelo descobrimento do efeito túnel em supercondutores.
	Brian D. Josephson	1940-	pela predição teórica das propriedades de uma supercorrente através uma barreira tipo-túnel.
1974	Antony Hewish	1924-	pelo descobrimento dos pulsares.
	Sir Martin Ryle	1918-	por seu trabalho pioneiro em rádio-astronomia.
1975	Aage Bohr Ben Mottelson James Rainwater	1922- 1926- 1917-	pelo descobrimento da conexão entre movimento coletivo e movimento de partícula e pelo desenvolvimento da teoria da estrutura do núcleo atômico, baseado nesta conexão.
1976	Burton Richter Samuel Chao Chung Ting	1931- 1936-	pelo descobrimento (independente) de uma importante partícula fundamental.
1977	Philip Warren Anderson Nerill Francis Mott John Hasbrouch Van Vleck	1923- 1905- 1899-	pelas pesquisas teóricas fundamentais sobre a estrutura eletrônica dos sólidos magnéticos e desordenados.

# índice remissivo

## A

Aceleração, 36-37  
angular, 227  
  como vetor, 231  
  e aceleração tangencial, 233  
  e torque, 255  
centrípeta, 63, 64, 67  
da partícula no plano, 68, 313  
de Coriolis, 313  
devida à gravidade, 44  
do projétil, 57  
radial, 63, 233  
relativa, 70  
tangencial, 66, 233

Adesão, superfície, 105

Alavanca, braço de, 243, 244

Alcance, do projétil, 58, 60-61

Amônia, 189

Aniquilação, 161

Ano-luz, 12, 13

Aristóteles, 45, 49

Átomo de hidrogênio, 289

Atrito,  
  cinético,  
    coeficiente de, 104, 105, 106  
    leis de, 104  
  como força não conservativa, 140, 141,  
  142  
  de deslizamento, 103  
  de rolamento, 105-106

  direção de, 103  
  e referenciais em movimento, 162  
  e teorema do trabalho-energia, 155  
  efeito de lubrificantes no, 105  
  estático,  
    coeficiente de, 104  
    e movimento de rolamento, 262  
  leis do, 103  
  método para determinar o coeficiente,  
  106  
  força de, 88, 96  
  teoria do, 104, 105-106

## B

Babinet, J., 5

Balança de mola, 90

Barn, 213

Beams, J. W., 105-106

Betatron, 140

Bohr, N., 290  
  modelo de, 73, 119

Bola de bilhar, 288, 291

Born, M., 115

Bureau Internacional de Pesos e Medidas,  
  2, 4

## C

Cálculo, 33

Câmara,

  de bolhas, 209  
  de Wilson, 209, 210

Cavalo-vapor, 133

Centro,  
  de gravidade, 175, 297  
  de massa, 169, 297  
  da lâmina triangular, 173  
  de corpos simétricos, 173  
  de duas partículas, 170  
  de três partículas, 171  
  de um corpo rígido, 172  
  determinação experimental do, 298  
  e dinâmica rotacional, 247, 248  
  e referencial, 173  
  movimento do, 174, 225  
  movimento do, 174, 225

Chadwick, J., 221

Ciclóide, 74

Cinemática, 30  
  descrição vetorial, 236  
  rotacional, 225

Colisão, 195, 196  
  conservação do momento na, 197  
  elástica, 53, 199  
  forças externas na, 197-198  
  inelástica, 199, 202  
  invariantes na, 206  
  multidimensional, 206-207  
  no centro do referencial de massa,  
  204-205  
  perfeitamente inelástica, 199, 202

- unidimensional, 200  
 velocidade relativa na, 200
- Comprimento,  
 padrão primário do, 5  
 padrão secundário do, 6
- Comprimentos, algumas medidas de, 6
- Condições iniciais, 43
- Conferência Geral sobre Pesos e Medidas, 2, 3, 6, 9
- Conservação  
 como relação escalar, 179  
 como relação vetorial, 179  
 da energia, 157, 161  
 da massa, Tóp. Supl. III, 7, 316  
 do momento, 178  
 do momento angular, 281  
 e inércia rotacional, 282  
 e rotação, 285-287  
 em colisões, 197  
 no mergulho, 282-283
- Constante,  
 de Planck, 115, 289  
 elástica, 127  
 da energia mecânica, 144, 155, 156  
 da matéria, 159  
 da paridade, Tóp. Supl. II, 316  
 de energia total, 214  
 princípios de, 178
- Coordenadas polares, 65  
 e movimento circular uniforme, 66-67
- Corde, tensão na, 84, 85
- Corpo rígido, 247, 255  
 equações de movimento para, 256  
 equilíbrio do, 294-296  
 momento angular e velocidade, 278
- Coulomb, C., 104  
 lei de, 88
- D*
- da Vinci, Leonardo, 104
- Daish, C. R., 216
- D'Alembert, 205
- Decaimento radioativo, recuo no, 181
- Derivada, 33
- Desaceleração, 43
- Descartes, R., 205
- Deslocamento, 14, 15  
 angular, 226  
 como vetor, 230
- Déuteron, 161, 221
- Dia,  
 sideral, 238-239  
 solar, 238-239
- Diagrama do corpo livre, 92
- Dimensões, 42
- Dina, 85
- Dinâmica, 30, 76  
 rotacional, 226, 241
- Dirac, P.A.M., 115
- E*
- Einstein, A., 113-114, 159
- Eixos,  
 instantâneos de rotação, 260  
 principais, 279, 286
- Elétron-volt, 132
- Elevador, 96
- Energia,  
 cinética, 130  
 de rotação, 247  
 e referenciais em movimento, 137, 145  
 e trabalho, 131  
 relativística, 160, 168  
 unidades, 131
- conservação de, 157  
 de configuração, 143  
 de dissociação, 153  
 de ligação, 162  
 de repouso, 161  
 interna, 156  
 mecânica, 144, 155  
 potencial, 143, 148, 305  
 como propriedade do sistema, 149  
 da molécula diatômica, 152  
 e equilíbrio, 305-306  
 e força, 144  
 em três dimensões, 153  
 posições de referência, 146
- Escalar, 15
- Esqui, 117, 266
- Estado natural dos corpos, 78
- Estática, 83
- Estrela de nêutron, 73
- Expressão binomial, 160
- F*
- Fator de peso, 170
- Fio, 302
- Foguete, 183, 185-186  
 equação do, 187  
 múltiplo estágio, 189  
 propulsão do, 185
- Força, 77, 80  
 centrífuga, 112, 314  
 centrípeta, 108  
 trabalho realizado pela, 123  
 como grandezas derivadas, 85-86  
 como vetor, 82  
 conservativa, 140, 141, 142, 143  
 de ação, 83  
 de Coriolis, 314  
 de reação, 83  
 dimensões de, 87  
 dissipativa, 156  
 e energia mecânica, 156  
 e energia potencial, 144  
 em movimento circular uniforme, 108  
 impulsiva, 195  
 inercial, 111, 112, 314  
 interna, 175  
 leis de, 87-89  
 medida de, 205  
 método estático de medição da, 90  
 momento de uma, 242  
 na natureza, classificação de, 111  
 não conservativa, 141, 142, 143  
 normal, 92, 103  
 restauradora, 127  
 unitária, 86
- G*
- g*, 44
- Galileu, 11, 45, 49, 72, 78
- Gardner, M., 311
- Geiger, 213
- Glaser, D., 209
- Goddard, R., 189
- Gradiente, 154
- Grama, 85
- Grandezas básicas, definição de, 1
- Gravidade, força de, no corpo rígido, 297
- H*
- Haltere, 249, 280
- Heisenberg, W., 115
- Hidrogênio, átomo de, 289
- Hooke, lei de, 127, 140
- I*
- Impulso, 196  
 angular, 289
- Independência de trajetória e forças conservativas, 142
- Inércia, 77  
 lei da, 79  
 momento de, 248  
 rotacional, 248  
 de corpo contínuo, 250  
 do arco, 251  
 do cilindro anular, 250  
 do haltere, 249  
 do plano retangular, 269  
 e conservação do momento angular, 282  
 tabela de, 252
- Integral, 127  
 de linha, 129
- Interferômetro, 5
- Intervalos de tempo, algumas medidas de, 8
- Invariância, Top. Supl. II, 25, 316
- Iô-iô, 270
- Isolar o sistema, 299
- J*
- Jarda, 4
- Joule, 124
- L*
- Lavoisier, A., 159
- Lee, T. D., 25
- Lei de Coulomb, 88
- Leibnitz, 205
- Libra, 86  
 como unidade de massa, 87
- Lua, 189
- Lucrécio, 159
- Luz,  
 como limitador da velocidade, Tóp. Supl. III-3, 316  
 medição da, 238

- velocidade da, em referenciais inerciais, Tóp. Supl. III-2, 316
- M**
- Magnetos, força entre, 88  
Máquina de Atwood, 95  
Marsden, 213  
Massa, 77, 81  
  como escalar, 82  
  como grandeza derivada, 85  
  como inércia de translação, 248, 255  
  de repouso, 159, 177  
  e peso, 88  
  especificação de, 82  
  padrão do SI, 6  
  primeiro momento de, 173  
  unidade atômica de, 6  
  variável, 182  
Massas atômicas, algumas medidas, 7  
Mecânica, 30  
  clássica, 76  
  limitações da, 113, 114, 115  
  referenciais da, 111-112  
  referencial de rotação, 314  
  quântica, 115  
Mês,  
  lunar, 11  
  sideral, 11  
Metro,  
  atômico, 6  
  barra-padrão, 4  
  original, 4  
Milha métrica, 12  
Moderador, 201  
Mola,  
  energia potencial de, 148  
  lei de força, 88, 127  
  trabalho de extensão, 127  
Momento,  
  angular, 243  
  conservação do, 272, 281  
  de corpos rígidos, 273, 279  
  de partículas elementares, 286  
  de *spin*, 286, 290  
  do sistema de partículas, 246, 290  
  e torque, 245  
  e velocidade angular, 256, 260, 273, 276  
  do sistema solar, 287  
  orbital, 287, 290  
  quantização do, 287, 290  
  de inércia, 247  
  linear, 176, 243  
  momento do, 244  
Monóxido de carbono, 189  
Movimento,  
  circular uniforme, 66  
  aceleração do, 66  
  trabalho realizado no, 131  
  de rolamento, 259  
  de rotação, equações do, 286  
  de translação, 31, 169, 224  
  em uma dimensão,  
  regiões de movimento no, 151  
  solução completa, 151  
  linear, equações de, 42  
  plano,  
  equações do, 56  
  forma vetorial, 57, 312  
  relativo, 69, 70, 114  
  retilíneo, 34
- N**
- Nêutron, 161  
  descoberta do, 221  
  moderador de, 201, 203  
Newton, I, 76-79, 80, 85-86, 176  
Núcleo, descoberta do, 213
- O**
- Oscilador harmônico, 148  
Owens, J., 72
- P**
- Padrão, 1  
  pião, 272  
Parábola, 41, 59  
Paralaxe, 6  
Parâmetro de impacto, 206-207  
Parsec, 12  
Partícula, 30  
  alfa, 44, 181  
  na Mecânica Quântica, 114, 115  
Partículas elementares, 286  
Pêndulo,  
  balístico, 203  
  cônico, 109  
  energia mecânica do, 154  
  simples, 129  
Peso, 85, 88-89  
  e massa, 88-89  
Ponto sela, 305  
Posição, 55  
Potência,  
  instantânea, 133  
  média, 133  
  no movimento de rotação, 254  
  unidades de, 133  
Potencial de Yukawa, 164  
Precessão, 273  
  equação vetorial da, 274-275, 277  
Prefixos do SI, 3  
Primeira lei de Newton, 79, 83, 111  
Processo de limite, 35  
Produto,  
  escalar, 22, 123  
  e lei comutativa, 29  
  em termos de componentes, 28  
  vetorial, 22, 236  
  derivada do, 245  
  em notação de vetores unitários, 28  
  lei associativa do, 29  
Projétil, 57  
  aceleração do, 57, 64  
  alcance do, 58, 60-61, 71  
  altura máxima do, 71  
  ângulo da velocidade do, 59  
  explosão do, 180  
  trajetória do, 59  
  velocidade  
  horizontal do, 57-58  
  vertical do, 58  
Próton, 161  
Pseudovetor, Tóp. Supl. II, 316
- Q**
- Queda livre, 44  
  e teorema do trabalho-energia, 133  
  equações de, 45  
Quilograma-padrão, 7, 81  
Quilowatt-hora, 134
- R**
- Radiação gama, 161  
Radiano, 226  
Raio de giração, 268  
Reações nucleares, 214  
Reator, fissão no, 201  
Referencial,  
  e teorema do trabalho-energia, 137  
  inercial, 79, 111  
  não inercial, 79, 111  
Regra da mão direita, 22, 23, 231, 242, 244  
Relação de incerteza de Heisenberg, 115  
Relatividade, teoria especial da, 114  
Relógios, 9  
Repartição Nacional de Padrões, 2, 7, 9, 10  
Resistência do ar, 45  
Ressonância, 212  
Roldana,  
  com massa, 96  
  sem massa, 95  
Rotação, 224  
  analogia com translação, 227  
  com aceleração constante, 228  
Rotor, 109  
  rígido, 290  
Rutherford, E., 214
- S**
- Satélite artificial, velocidade do, 64  
Schrödinger, E., 115  
Seção eficaz de choque, 211  
  e energia, 212  
  unidades de, 212  
Segunda lei de Newton, 81, 121, 178  
  com massa variável, 183, 184  
  em relatividade, 177  
Segundo, 9  
Shake, 12  
Sistema,  
  de massa variável, movimento de, 182-184  
  Internacional de Unidades, veja Sistema SI  
  SI,  
  força, 80, 85  
  massa, 7  
  potência, 133  
  prefixos, 3  
  tempo, 8  
  trabalho, 124

unidades derivadas, 3  
unidades fundamentais, 3

Slug, 87  
Sol, 168  
Sonda Mariner, 192

## T

Tempo, 9  
padrão do, 9  
universal, 9  
Tensão, 84  
Tensor, 23  
Teorema,  
do trabalho-energia, 131, 139, 144, 155,  
156, 158  
como lei da Mecânica, 133  
referenciais em movimento, 137  
dos eixos paralelos, 251-252  
Teoria especial da relatividade, 114  
adição da velocidade, 114  
Terceira lei de Newton, 83, 175  
e a conservação do momento, 180, 197  
e forças inerciais, 112  
em foguetes, 186  
forma forte da, 246, 285  
forma fraca da, 285  
integral primeira da, 145  
Terra, variação da rotação, 10  
Thomson, 213  
Torque, 242  
e aceleração angular, 255  
e momento angular, 244, 267, 273  
em sistema de partículas, 246  
em torno de um eixo, 253  
em um corpo rígido, 253

## Trabalho,

como grandeza escalar, 123  
como integral de linha, 129  
dependência na trajetória, 141, 142  
e uso vulgar, 124  
em distender uma mola, 127  
na rotação, 254  
num trajeto fechado, 141  
por uma força,  
centrípeta, 123  
constante, 117  
de atrito, 157  
variável, 126, 136  
relativístico, 193  
unidades de, 124

## U

## Unidade,

astronômica, 12, 13  
de massa atômica, 7, 215

## Unidades,

de engenharia inglesas, 4, 86, 87  
do Cgs, 85-87  
gaussianas, 4

## V

## Velocidade, 31

angular, 230-233  
e momento angular, 256, 259, 273  
instantânea, 226,  
média, 226  
constante, 33  
escalar, 33  
e aceleração radial, 233  
média, 48

instantânea, 33  
média, 32  
terminal, 101  
variável, 34

Velocidades relativas,  
adição de, 68  
em relatividade, 114

## Vetor, 15

adição,  
analítica de, 19, 27  
geométrica, 15, 17  
lei comutativa de, 16  
axial, 315  
viga-mestra, 302  
componentes do, 17  
decomposição de, 17, 18  
multiplicação de, 21  
polar, 315  
pseudo, Tóp. Supl. II, 316  
sob uma reflexão, Tóp. Supl. II, 316  
subtração de, 16  
unitário, 18  
em coordenadas polares, 65  
*Vis viva*, 205  
Vizinhança, 76, 78  
Volante, 266

## W

Watt, 133  
J., 133  
Wilson, C.T.R., 209  
Wood, R.W., 287

## Y

Yang, C.N., 25



# FÍSICA

---

R. RESNICK  
D. HALLIDAY

---

1

Esta quarta edição foi cuidadosamente revisada e os problemas propostos, existentes no final de cada capítulo, foram totalmente reformulados. Em alguns, os dados numéricos foram substituídos. Outros foram modificados, sem alterar, no entanto, o conteúdo e o seu objetivo didático.

A principal finalidade da obra é de constituir uma base sólida dos princípios da Física Clássica, capacitando o estudante a equacionar problemas.

Foi conferida, também, ênfase à aplicação prática, às teorias mais modernas, bem como ao interesse histórico e filosófico dos eventos. A reformulação dos problemas coube ao Professor Adir Moysés Luiz, Doutor em Ciência (D.Sc.) e Professor Adjunto do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro, autor de inúmeras publicações, entre livros didáticos e trabalhos de pesquisa científica.

ISBN: 85-216-0299-5



LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS EDITORA