Estrutura Lógico Dedutiva

Lisandra Sauer – UFPEL
Giovanni Nunes – UFPEL

DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA

Uma das principais características da Matemática é o uso de demonstrações para justificar a **veracidade** de proposições. Em Matemática, uma prova serve tanto como um **meio de assegurar** quanto **de comunicar** a veracidade do teorema provado. A habilidade de escrever uma demonstração é fundamental para a ampliação da matemática.

PROPOSIÇÕES

- Uma **proposição** é uma afirmação em que é possível atribuir um valor lógico *verdadeiro ou falso*.
- Exemplos de Proposições
  - $-2 < -1$ (V);
  - $3 = 6$ (F).

PRINCÍPIO DA RAZÃO SUFICIENTE

A investigação científica é regida pelo Princípio da Razão Suficiente, ou seja, em ciência, **todo enunciado deve ser justificado.**

DIVISÃO DE CIÊNCIAS

- As ciências se dividem em empíricas (tais como a Física) ou formais (tais como a Matemática).
- Nas empíricas as justificativas são apoiadas em **observações e experiências**.
- Como a Matemática lida com entes abstratos, tais como números e figuras, a justificativa de enunciados matemáticos não pode ser apoiada em observações e experiências. Ela é apoiada em **argumentações e demonstrações.**

PROPOSIÇÃO=ENUNCIADOS

Os matemáticos justificam enunciados usando apenas argumentações, vamos fixar alguns conceitos e apresentar algumas propriedades dos conceitos fixados.

Um enunciado é uma expressão da linguagem matemática, que pode ser classificada como verdadeira ou falsa, de maneira exclusiva, em um dado contexto.

Uma prova de um enunciado verdadeiro é e uma argumentação na linguagem matemática que justifica sua veracidade. Toda investigação matemática é regulada pelo Princípio da Razão Suficiente.

Em Matemática, todo enunciado deve ser provado.

EXEMPLO:

- 2 é um número par
- Demonstração: Todo número que é divisível por 2 é par. 2 é divisível por 2. Logo, 2 é um número par.

Enunciados mal- postos ou mal formulados.

- São afirmações que não é possível atribuir um valor verdadeiro ou falso.

- =2++4=-=2

Paradoxos

CONJUNTO DE AXIOMAS

Chamamos **teoria** a uma organização de um certo ramo de conhecimento, na qual alguns enunciados, chamados axiomas da teoria são escolhidos como base para a justificativa de todos os outros enunciados (verdadeiros) deste ramo de conhecimento. Isto deve ser feito de modo que seja possível justificar todos os outros enunciados com provas nas quais apenas os axiomas da teoria sejam enunciados sem demonstração. Quando um certo ramo de conhecimento é organizado desta maneira, dizemos também que temos uma apresentação axiomática deste ramo de conhecimento.

Os enunciados matemáticos justificados são normalmente chamados de **teorema ou proposição**. Mas os nomes lema e corolário também são usados para fazer referência a enunciados para os quais apresentamos uma prova.

- **Teoremas** são os enunciados matemáticos justificados que são considerados importantes, segundo algum critério.
- **Proposições** são os enunciados matemáticos justificados que não são considerados tão importantes.

Lemas são os enunciados matemáticos justificados que são apresentados apenas como um passo para a prova de um teorema, que não possuem importância em si mesmos.

Corolários são os enunciados matemáticos justificados que são consequência imediata da prova de outro enunciado e cuja prova, portanto, fica bastante simplificada ao considerarmos dada a prova deste outro enunciado.

RESUMINDO

Enunciados

Verdadeiros

Falsos

Não Justificados: Axiomas

Justificados: Teoremas, Proposições, Lemas e Corolários

Definição

- Uma definição é uma parte de um texto que introduz um novo vocábulo, fixando o seu significado.

- Definição Um número natural é par se é o dobro de algum número natural.

Regras para se demonstrar:

REGRA LÓGICA1 :

Em uma prova ou demonstração não pode ser usada nenhuma proposição que não tenha sido provado anteriormente ou suposta verdadeira (axioma).

Proposições e provas

- Uma proposição matemática é uma sentença condicional ou uma sentença da forma:

  Se HIPÓTESE então TESE.

Hipótese	→	TESE

- Se uma proposição não está escrita na forma condicional, ela pode ser reescrita nesta forma.

EXEMPLO

- Teorema: Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

- Podemos reescrevê-lo como
- Teorema: Se um triângulo é isósceles então os seus ângulos da base são congruentes.

REGRA LÓGICA 2

- As justificativas abaixo são justificativas aceitáveis em uma demonstração:

1. Por hipótese ….
2. Pelo axioma …
3. Pelo Teorema …. (provado anteriormente)
4. Por definição…
5. Pelo passo … (um passo anterior do argumento)

Conectivos Lógicos

- Proposições podem ser conectadas através dos seguintes *conectivos:*
- • "~" ou (negação);
- • "$\wedge$" (conectivo "e");
- • "$\vee$" (conectivo "ou");
- • "$\rightarrow$" (conectivo "implica");
- • "$\leftrightarrow$" (conectivo "se, e somente se").

Prova por Contradição

- REGRA LÓGICA 3:
- Para provar uma sentença da forma $H \rightarrow T$, suponhamos que a tese não ocorre (negativa de T) e deduza uma sentença que contradiz a hipótese H.

Prova por Absurdo

- REGRA LÓGICA 4:
- Para provar uma sentença da forma $H \rightarrow T$, suponhamos que a tese não ocorre (negativa de T) e deduza uma sentença absurda usando a hipótese H.

Conectivos Lógicos

- "• "$P \leftrightarrow Q$" é a mesma coisa que "$P \rightarrow Q$ e $Q \rightarrow P$", ou seja, é verdadeira se ambas forem verdadeiras ou ambas forem falsas.

NEGAÇÃO COM QUANTIFICADORES

- REGRA LÓGICA 5: $\sim(\forall x, S(x))$ tem o mesmo valor lógico que $\exists x, \sim S(x)$

- REGRA LÓGICA 6: $\sim(\exists x, S(x))$ tem o mesmo valor lógico que $\forall x, \sim S(x)$

IMPLICAÇÃO

- REGRA LÓGICA 7: Se $P \rightarrow Q$ e P são passos de uma prova, então Q é uma passo justificável

Lei do Terceiro Excluido

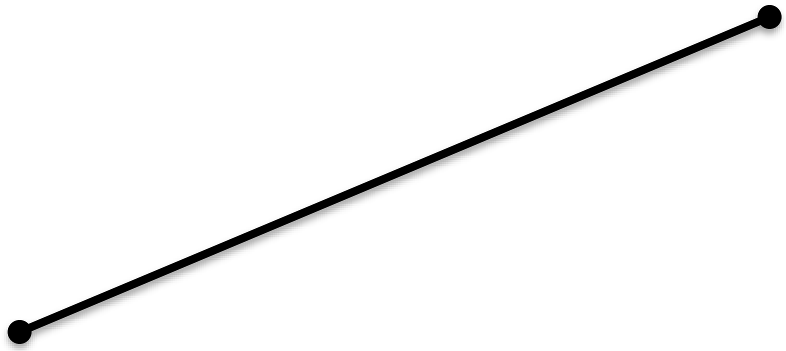
- REGRA LÓGICA 8:
- Para toda sentença P, P ou ~P é um passo válido em uma prova.

Conceitos Primitivos

- A teoria de Geometria Euclidiana partirá de conceitos que não são passíveis de definição para evitar definições cíclicas tipo as que foram dadas por Euclides. Porém estes termos não estão totalmente livres . Os axiomas (afirmações que consideremos verdadeiras) em geral nos dão propriedades que estes objetos devem satisfazer e que poderemos usar em nossas definições.

Um exemplo…

- Quando falamos que dois pontos determinam uma única reta podemos imaginar que ela possui a seguinte forma:



Ou que é a menor distância entre dois pontos:

Referência

- Freitas, R e Viana, P. Minicurso de métodos de prova. II Colóquio de Matemática da Região Sul