MEDIÇÃO EM GEOMETRIA EUCLIDIANA:
comprimento, área e volume.

Giovanni Nunes e Lisandra Sauer

Pelotas
UFPEL
2023

Medição em Geometria Euclidiana:

comprimento, área e volume.

Para a Anne, o melhor de nós dois.

Números, números, números

O que é, o que são

O que dizem sobre você

Música- Papas da Língua: Essa não é a sua vida.

Compositor: Léo Henkin

Prefácio.

Este material escrito é fruto da nossa experiência quando ministramos, por diversas vezes, disciplinas envolvendo Geometria Plana e Geometria Espacial para os cursos de Licenciatura em Matemática da UFPEL.

O principal objetivo deste texto é fazer com que os alunos revisitem e façam conexões com os assuntos de geometria que eles estudaram no ensino básico e compreendam com clareza os conceitos envolvendo medições de segmentos e ângulos, determinação de área de figuras planas e cálculo de volume de sólidos.

O público a que se destina são os estudantes com conhecimento prévio de Geometria (Plana e Espacial) adquirido na escola básica e que irão cursar posteriormente disciplinas que abordem a Geometria Plana e Espacial de forma axiomática. Para um leitor mais curioso, indicamos no decorrer dos capítulos referências de livros onde os assuntos são abordados com maior formalidade do que o presente livro. Eles estão sinalizados com uma númeração entre colchetes, cuja indicação encontra-se no final do livro.

Temos a esperança de que este texto norteie os principais tópicos de geometria e faça a conexão com a teoria de conjuntos estudada ao longo do ensino básico. Acreditamos que este material deva ser complementado de acordo com o público alvo. Salientamos que críticas e/ou sugestões apresentadas por quem fizer uso dele são muito bem vindas.

O livro é composto de uma parte expositiva sobre os assuntos tratados e imediatamente após uma lista de exercícios sobre o assunto é apresentada. Exercitar é muito importante!

No capítulo 1, relacionamos a medição de segmentos aos conjuntos numéricos, destacamos a importância do teorema de Pitágoras para a compreensão de medidas de segmentos que não são racionais e também tratamos das medidas de ângulos.

No capítulo 2 tratamos de formas geométricas planas, apresentando definições, elementos e as relações entre as medidas destes elementos.

No capítulo 3 é tratado área de figuras planas onde a partir do quadrado como unidade de área deduzimos a expressão da área de algumas figuras como: retângulo, triângulo, paralelogramo, polígonos regulares e círculo.

No capítulo 4 tratamos de formas geométricas espaciais. Definimos sólidos especiais como: prismas, pirâmides, cilindro, cone e esfera, além de tratar de seus elementos.

No capítulo 5 é tratado volume de sólidos onde a partir do cubo como unidade de volume deduzimos a expressão do volume dos sólidos trabalhados no capítulo 4.

Agradecemos a Andressa Manske pelas ilustrações, sem ela esse livro não teria saído tão belo.

Sumário

1. Medição de segmentos e ângulos planos

Observe a figura 1 abaixo:

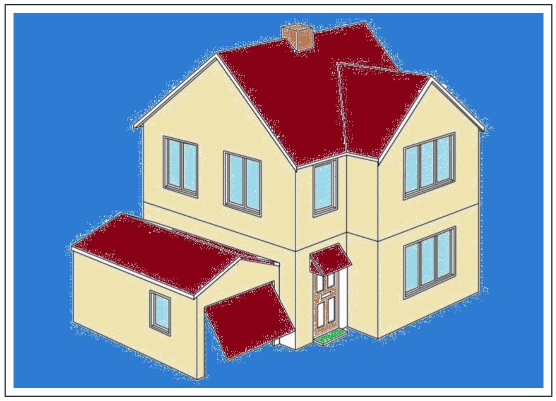

Figura 1. Desenho com formas geométricas.

Nela podemos ver que formas geométricas são utilizadas na construção de casas. Pense a respeito disso: onde mais utilizamos formas geométricas?

1.1. **Pontos, retas e planos.**

Objetivo. Identificar figuras geométricas como pontos, retas e planos.

Geometria é a determinação de medidas, sejam elas: comprimentos, áreas e volumes; em conjuntos formado por pontos. Existem três conceitos em geometria que não são possíveis de definir. Se tentássemos, usaríamos termos que também precisariam ser definidos e por sua vez, ao tentar definir este novo termo, precisaríamos definir outro e assim, de forma recorrente, ficaríamos sempre definindo termos. Estes conceitos primitivos são: pontos, retas e planos. A fim de ajudar na formação intuitiva destes conceitos, podemos informar que: Um ponto é denotado (como o chamamos) por letras maiúsculas do alfabeto latino. Ele não ocupa espaço e, além disso, como se referia Euclides em seu livro Elementos, um ponto é indivisível. Uma reta é denotada por letras minúsculas do alfabeto latino. É formada por infinitos pontos que se estendem em dois sentidos opostos e podemos dividi-la em subconjuntos formados por pontos isolados ou tais que possuem comprimento não nulo. Um plano é denotado por letras minúsculas do alfabeto grego. É formado por infinitos pontos que se estendem de forma ilimitada e de tal forma que não podem ser tomados subconjuntos que possuem volume. A menos de posição, você deve ter imaginado algo como na figura 2

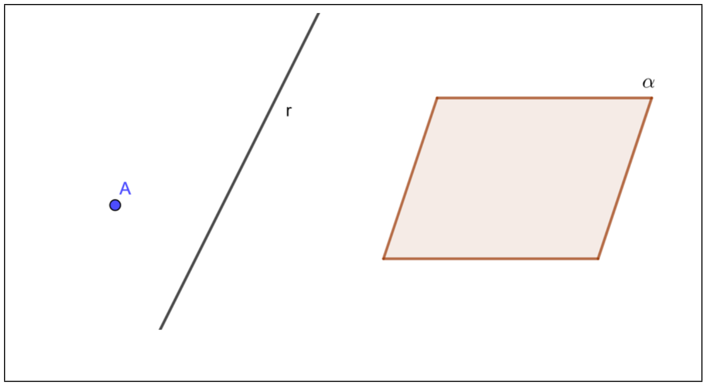

Figura 2. Ponto, reta e plano.

1.2. **Reta Numérica.**

Objetivos. Encontrar a coordenada de um ponto na reta numérica. Determinar a medida de um segmento. Utilizar régua e compasso para determinar ponto médio.

Com relação a figura 3 abaixo, se considerarmos esse conjunto de pontos se estendendo nos dois sentidos da maneira como indicado, temos uma representação geométrica para uma **reta**.

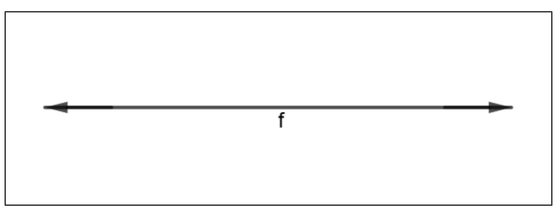

Figura 3. Reta.

Para cada ponto da reta podemos associar um número. Retas associadas a números são chamadas de **retas numéricas**.

1.2.1. *Ordem na reta numérica.* Os primeiros números que você aprendeu foram os números naturais:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

As reticências colocadas após a última vírgula significam que não estão escritos todos os números.

Para pensar:

1. Quantos números naturais existem?

2. No conjunto dos números naturais existe um número que é o maior de todos?

3. Com exceção do número zero, que características os outros números naturais possuem em comum?

Utilizamos os números naturais para fazer contagem, mas não significa que a humanidade primeiro tenha construído esse conjunto para depois contar, muito pelo contrário, este conjunto foi sendo formado lentamente ao longo dos anos. Iremos associar os números naturais aos pontos de uma reta numérica e para isto precisamos abordar segmento de reta.

Definição: Dados dois pontos distintos A e B, o subconjunto da reta que passa por A e B formado pela união dos pontos A e B e por todos os pontos entre A e B é chamado de segmento AB. Os pontos A e B são chamados de extremos. Denotaremos este segmento por $\overline{AB}$. Ver figura 4.

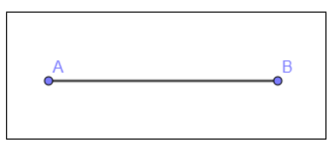

Figura 4. Segmento de reta.

Em construção geométrica existe o **procedimento de transportar um segmento**, que consiste no que segue:
Dados: segmento $\overline{AB}$ da figura 5.

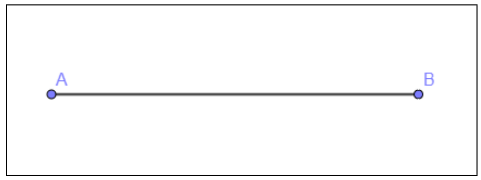

FIGURA 5. Segmento $\overline{AB}$.

Procedimentos:

Passo 1: Construa uma reta r auxiliar como na figura 6;

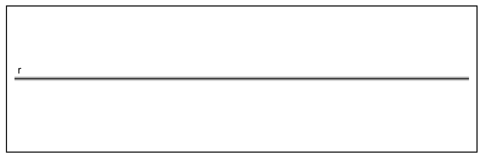

FIGURA 6. Reta auxiliar.

Passo 2: Sobre a reta r tome um ponto C como na figura 7;

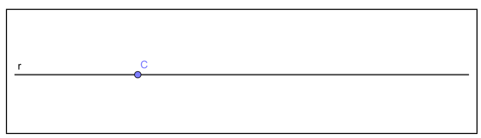

FIGURA 7. Reta com ponto.

Passo 3: Com a ponta seca do compasso em A e a outra ponta em B do segmento dado, fixe este tamanho no compasso. Coloque a ponto seca do compasso em $C \in$ r e trace um arco cuja intersecção com a reta r será um ponto denotado por D;

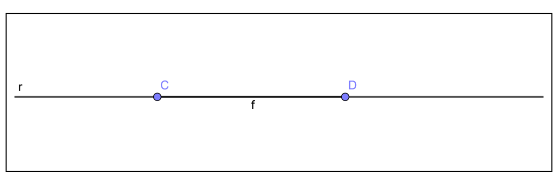

FIGURA 8. Reta com segmento $\overline{CD}$.

Solução: O segmento $\overline{CD}$.

Procedendo como anteriormente, o segmento $\overline{AB}$ foi transportado e está sobreposto em $\overline{CD}$. Para evitar ambiguidade, antes de associarmos todos os pontos de uma reta à alguma coordenada, dado um segmento $\overline{AB}$, iremos utilizar o termo “tamanho” do segmento para nos referirmos a abertura do compasso quando considerarmos os extremos de $\overline{AB}$. Neste contexto, diremos que o tamanho do segmento $\overline{AB}$ é igual ao tamanho do segmento $\overline{CD}$ se $\overline{CD}$ poder ser obtido pelo transporte de $\overline{AB}$. Facilmente podemos perceber se o tamanho de dois segmentos são iguais, verificando se abertura do compasso, quando consideramos os extremos destes segmentos, é igual. Quando os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ tiverem o mesmo tamanho, iremos utilizar a seguinte simbologia $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Dados dois segmentos, também podemos comparar qual deles possui tamanho maior, ou seja, dados dois segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ dizemos que o tamanho de $\overline{EF}$ é maior do que $\overline{GH}$ se ao transportarmos $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ em uma mesma reta suporte e com extremidade em um mesmo ponto, por exemplo E' e G' pontos coincidentes, onde E' representa o ponto associado a E e G' representa o ponto associado a G, obtemos o outro extremo H', associado a H, entre os pontos E' e F' onde F' é associado ao ponto F, como mostra a figura 9.

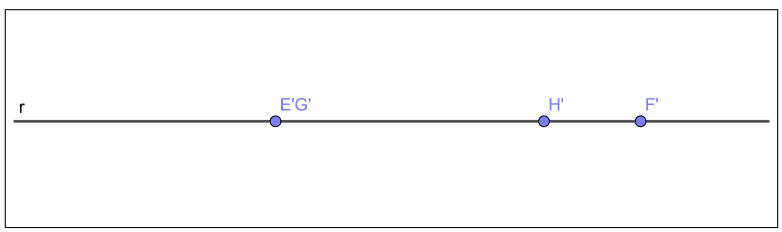

Figura 9. Comparação tamanho de segmentos.

Para associarmos um número natural a um ponto, adotaremos uma unidade de medida, chamada de comprimento. O comprimento do segmento $\overline{AB}$ (figura 10) será nossa unidade, ou seja, $\overline{AB} = 1uc$.

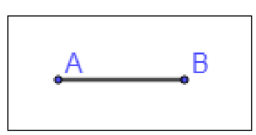

Figura 10. Unidade de comprimento (uc).

Vamos sobrepor o segmento $\overline{AB}$ na reta e associaremos A ao número "0" e B ao número "1". Veja a figura 11 abaixo.

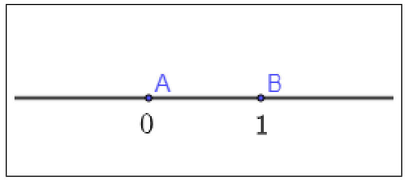

Figura 11. Coordenadas da unidade de comprimento.

Se transportarmos o segmento $\overline{AB}$ para a direita do ponto B e tomarmos um ponto C tal que $\overline{AB} = \overline{BC}$ teremos que a medida de $\overline{AC} = 2uc$ e podemos associar o ponto C com o número 2 como na figura 12.

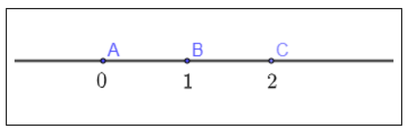

Figura 12. Coordenadas dos pontos A, B e C

Procedendo sucessivamente, podemos associar todos os números naturais a um ponto da reta, como mostra a figura 13 a seguir.

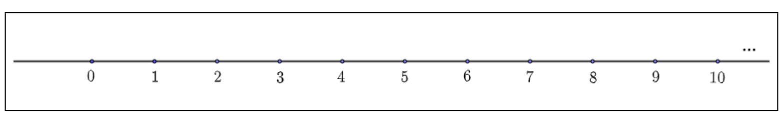

Figura 13. Associação dos números naturais na reta.

Quando a unidade de medida é 1 centímetro, a associação pode ser feita com a régua graduada.

Vamos pensar um pouco o que ocorre entre cada um dos pontos associados a algum número natural, por exemplo, A e B da figura 14.

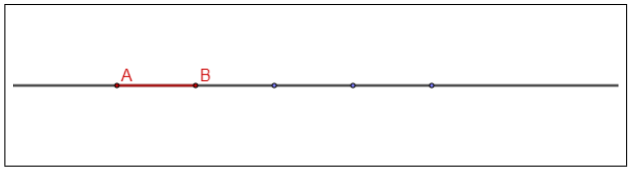

Figura 14. Pontos entre A e B.

Existe um ponto que podemos destacar:

Definição: Um ponto M é chamado de ponto médio de $\overline{AB}$ se M está entre A e B e se $\overline{AM} = \overline{MB}$. Na figura 15 abaixo M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

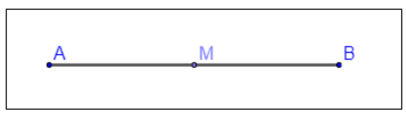

Figura 15. Ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Vamos voltar novamente nosso pensamento ao segmento $\overline{AB}$ de medida $1uc$. Se M é o ponto médio de $\overline{AB}$, quanto mede $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$? A determinação do ponto médio de $\overline{AB}$ é uma forma de subdividir a unidade.

Neste momento, podemos nos perguntar: quantos pontos existem entre A e B? Para responder esta pergunta vamos ver uma construção geométrica: **determinação do ponto médio de um segmento.**

Dados: segmento $\overline{AB}$ da figura 16.

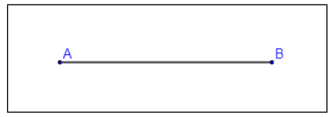

Figura 16. Segmento $\overline{AB}$.

Procedimentos:

Passo 1: Com o centro em A, trace um arco com raio maior que a metade da medida de $\overline{AB}$ como na figura 17.

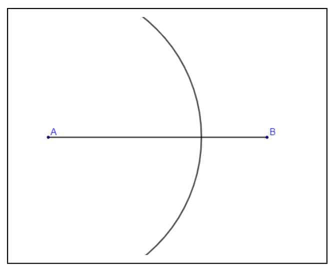

Figura 17. Arco com centro em A.

Passo 2: Com o centro em B, trace um arco com o mesmo raio do passo anterior como na figura 18.

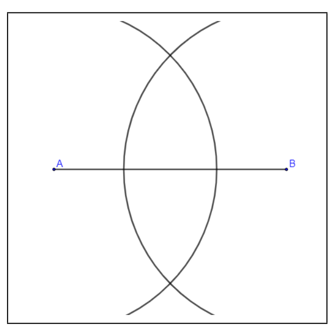

Figura 18. Arco com centro em B.

Passo 3: Denote a intersecção dos dois arcos anteriores por C e D, como na figura 19.

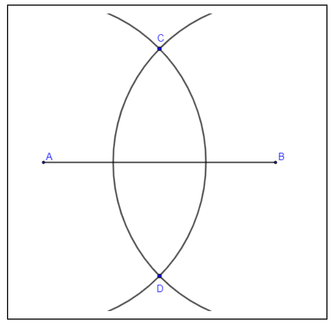

FIGURA 19. Intersecção dos arcos.

Passo 4: Trace a reta determinada por C e D, como na figura 20.

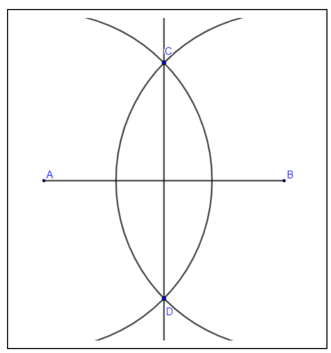

FIGURA 20. Reta determinada por C e por D.

Passo 5: Denote a intersecção de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ por M como na figura 21.

Solução: M ponto médio de $\overline{AB}$. A verificação de que $\overline{AM} = \overline{MB}$ pode ser feita geometricamente através da abertura do compasso.

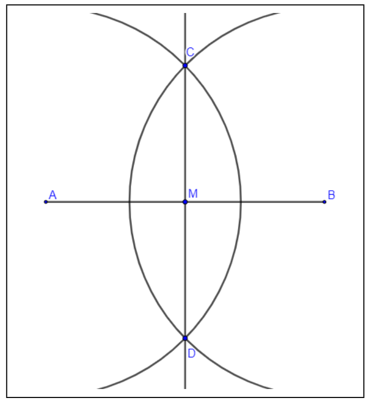

FIGURA 21. Ponto médio M.

Considere o segmento $\overline{AB}$ e o ponto médio M. Se a coordenada do ponto A é 0 e a de B é 1 , pela forma como encontramos M temos que $\overline{AM}$ possui a metade do tamanho de $\overline{AB}$. Note que neste caso, não é possível associar a coordenada do ponto M com um número natural. Como a medida de $\overline{AB}$ é $1uc$ temos que a medida de $\overline{AM}$ é $\frac{1}{2}uc$ o que indica que a coordenada de M é $\frac{1}{2}$. Tome agora o ponto médio de $\overline{AM}$ e denote este ponto por M_1. De forma análoga, tome agora o ponto médio de $\overline{AM_1}$ e denote este ponto por M_2, veja figura 22. Note que podemos repetir este processo de determinar o ponto médio de segmentos, com um dos extremos como sendo o ponto A, quantas vezes quisermos. Desta forma, podemos tomar infinitos pontos entre A e B. Também, podemos dividir o segmento $\overline{AB}$ em outra quantidade de partes iguais, por exemplo, podemos dividir o segmento $\overline{AB}$ unitário em três partes congruentes, ou seja, em três partes de mesma medida, considerando dois pontos P_1 e P_2 entre A e B tais que $\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2B}$. Note que nesse caso todos os três segmentos medem $\frac{1}{3}uc$. Além disso, se a coordenada do ponto A é 0 e a de B é 1 então teremos que as coordenadas P_1 e P_2 são $\frac{1}{3} = 0,3333...$ e $\frac{2}{3} = 0,666...$, respectivamente. Podemos fazer a divisão do segmento unitário em quantas partes de medidas iguais quisermos, ou seja, se quisermos dividir o segmento unitário AB em n partes de medidas iguais, consideraremos $P_1, P_2, ..., P_{(n-1)}$ tais que $\overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_3} = ... = \overline{P_{(n-1)}B}$. Note que teremos n segmentos de medida $\frac{1}{n}uc$. Além disso, se a coordenada do ponto A é 0 e a de B é 1 então teremos que as coordenadas P_1,P_2, ...,$P_{(n-1)}$ são $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}$, respectivamente.

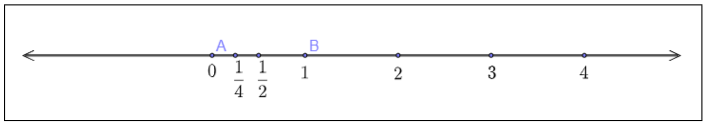

FIGURA 22. Coordenadas fracionárias.

Assim como fizemos a divisão em segmento unitário, podemos fazer em um segmento de qualquer medida. Se partirmos de um segmento de medida p e dividi-lo em q partes congruentes, cada novo segmento terá medida $\frac{p}{q}uc$.

Através do uso das coordenadas de pontos, fixada uma unidade de medida, podemos determinar a medida de um segmento em que as extremidades estão associadas a números racionais. Dado um ponto A de coordenada a e um ponto B de coordenada b, tal que $b > a$, temos que a medida do segmento $\overline{AB}$ é $(b-a)uc$. Por exemplo, se a coordenada de A é $\frac{3}{2}$ e a coordenada de B é $\frac{8}{3}$ a medida do segmento $\overline{AB} = \frac{8}{3} - \frac{3}{2} = \frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6} = 1,166666...uc$ Note que expressões do tipo $\overline{AB} = 1,1666...uc$ ou $\overline{AB}$ igual ao dobro de $\overline{CD}$ deixam claro que estamos nos referindo as medidas dos segmentos. Portanto, para o que segue, em algumas situações, iremos omitir o termo medida ou comprimento, bem como a sigla (uc).

Exercícios

1- Represente na reta numérica os pontos cujas coordenadas são: $A : 0$; $B : \frac{1}{2}$; $C : \frac{3}{2}$; $D : \frac{5}{4}$; $E : 2$; $F : 5$; $G : 0,5$ e $H : 2,5$.

2- Com relação as coordenadas do exercício anterior, determine a medidas dos segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{DC}$ e $\overline{EF}$.

3- Sejam A, B e C pontos de uma reta. Se $\overline{AB} = 3cm$ e $\overline{BC} = 2cm$, determine a medida de $\overline{AC}$.

4- Seja $\overline{AB}$ um segmento de medida $7cm$ e P um ponto entre A e B tal que a medida de $\overline{PB}$ é $\frac{2}{3}cm$. Determine a medida de $\overline{AP}$.

5- Determine a medida do segmento $\overline{AB}$, sabendo que o ponto médio M de $\overline{AB}$ forma segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$, cujas medidas são $(5x-3)uc$ e $(x+4)uc$, respectivamente.

6- Dados os pontos A,B,C e D distintos e dispostos sobre uma reta nesta ordem, de forma que: $\overline{AD} = 29cm$, $\overline{BC} = x + 1cm$, $\overline{CD} = x - 1cm$. Determine a medida de $\overline{BC}$ sabendo que B é ponto médio de AC.

7- Dados os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{OP}$ da figura 23, construa os segmentos que se pede, utilizando régua e compasso:

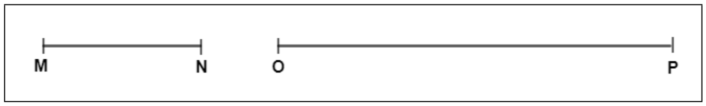

Figura 23. Segmentos.

a)um segmento $\overline{AB}$ cuja medida é $\overline{MN} + \overline{OP}$;

b)um segmento $\overline{AB}$ cuja medida é $\overline{OP} - \overline{MN}$;

c)um segmento $\overline{AB}$ cuja medida é o triplo de $\overline{MN}$;

1.2.2. *Segmentos comensuráveis e incomensuráveis.* Dado o segmento $\overline{AB}$, determine um segmento $\overline{CD}$ tal que a medida de $\overline{CD}$ seja o dobro de $\overline{AB}$, veja figura 24.

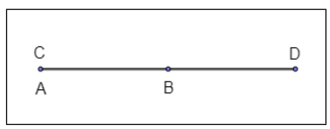

Figura 24. Dobro de $\overline{AB}$.

Note que $\overline{CD} = 2\overline{AB}$ ou $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = 2$. Agora construa um segmento $\overline{EF}$ tal que a medida de $\overline{EF}$ seja o triplo de $\overline{AB}$, veja figura 25.

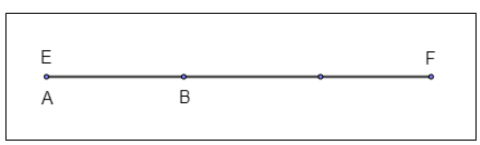

Figura 25. Triplo de $\overline{AB}$.

Note que $\overline{EF} = 3\overline{AB}$ ou $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = 3$.

Como os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ foram construídos a partir de $\overline{AB}$, podemos tomar $\overline{AB}$ como unidade de medida e determinar

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{CD}} = \frac{3\overline{AB}}{2\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{EF}}{\overline{CD}} = \frac{3}{2}.$$

De forma geral, dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são chamados *comensuráveis* se existem números naturais m e n tais que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{m}{n}$, o que implica que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ é um número racional. Dito de outra forma, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são chamados de comensuráveis, se existe um segmento de medida u tal que $\overline{AB} = mu$ e $\overline{CD} = nu$.

Geralmente, utilizamos a régua graduada para medir segmentos no nosso dia a dia, mas em vários casos, esta medição é apenas aproximada. Podemos perceber isto, pois entre cada centímetro temos 10 divisões apenas. Se os extremos dos dois segmentos fossem pontos distintos muito próximos poderíamos não distingui-los. Isto pode gerar a ilusão de que todos os segmentos são comensuráreis.

Lima em seu livro denominado Medida e Forma [7] escreveu que inicialmente Pitágoras e seus discípulos pensavam que todos os segmentos fossem comensuráveis. Os próprios Pitagóricos se deram conta que isso era um equívoco. Para entendermos o raciocínio dos pitagóricos, precisamos lembrar de alguns conceitos vistos no ensino básico.

Definição: Dados dois pontos distintos A e B, o conjunto formado pela união do segmento $\overline{AB}$ e todo ponto C tal que B está entre A e C é chamado de *semirreta* AB, veja figura 26. O ponto A é chamado de origem da semirreta. Denotaremos essa semirreta por $\overrightarrow{AB}$.

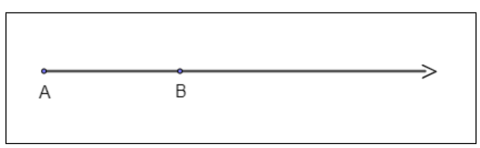

Figura 26. Semirreta AB.

As semirretas de mesma origem formam uma figura chamada *ângulo*.

O ângulo representado na figura 27 é denotado por $A\widehat{O}B$.

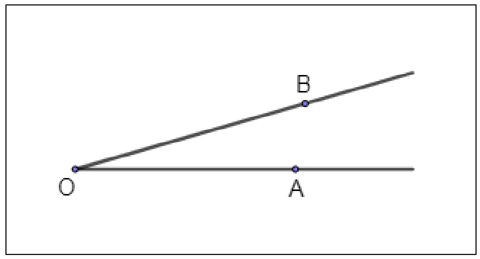

Figura 27. Ângulo $A\widehat{O}B$

No próximo capítulo, iremos tratar mais destas figuras. No momento iremos nos concentrar nos ângulos retos , isto é, os ângulos cuja medida é 90^0. Para determinar a medida de um ângulo, utilizaremos o transferidor. Neste texto, quando nos referirmos a um transferidor será o que possui marcação, apenas de 0^0 a 180^0 como na figura 28.

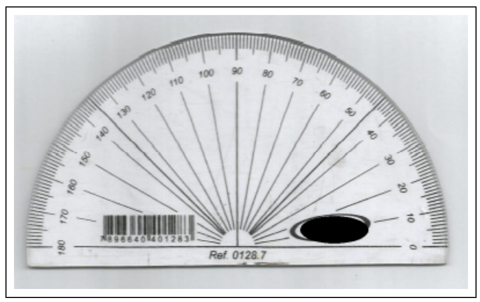

Figura 28. Transferidor.

Para medir o ângulo colocamos o 0 sobre uma das semirretas do ângulo de forma que a outra semirreta esteja voltada para o arco do transferidor e vemos sobre qual marcação do transferidor está a outra semirreta. No caso de um ângulo reto, veja figura 29, o 0 está sobre uma das semirretas e 90 está sobre a outra.

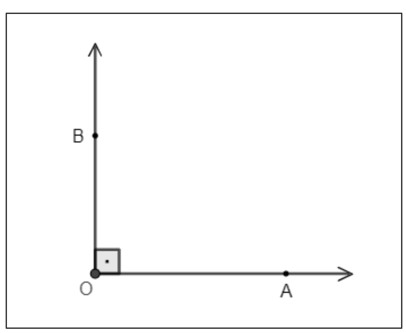

Figura 29. Ângulo reto.

Este ângulo apareceu quando determinamos a construção geométrica do ponto médio.

Em um triângulo retângulo, ou seja, em um triângulo que possui um ângulo reto, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de *hipotenusa* e os outros dois lados de *catetos*, veja figura 30.

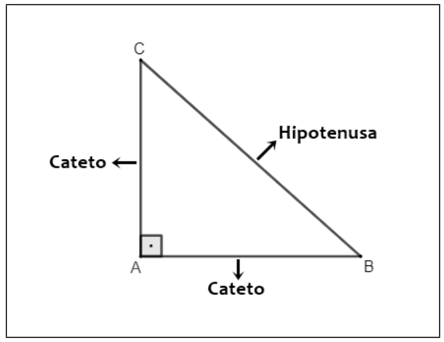

FIGURA 30. Triângulo retângulo.

Os pitagóricos se deram conta que a medida da hipotenusa ao quadrado é igual a soma dos quadrados dos catetos. Se denotarmos a medida da hipotenusa por a e a medida de cada um dos catetos por b e c, teremos na nossa notação: $a^2 = b^2 + c^2$. , Esta relação é conhecida como **Teorema de Pitágoras**. Este resultado, que iremos justificar no cápitulo área de figuras planas, além de ter muitas aplicações, revolucionou a ideia que as pessoas tinham sobre números. Mais precisamente, quando consideramos o triângulo retângulo de catetos $1um$, este triângulo possui hipotenusa a tal que:

$$a^2 = 1 + 1 \Rightarrow a^2 = 2,$$

ou seja, a medida da hipotenusa ao quadrado é 2, portanto $a = \sqrt{2}$. É possível mostrar que $\sqrt{2}$ não é racional, ou seja, não existem naturais p e q, com $q \neq 0$, tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Uma bela demonstração, pode ser encontrada na página 197 do livro: Números Racionais, Reais e Complexos [17]. Números que não possuem estas representações são chamados de *irracionais*. Sendo assim, vamos marcar $\sqrt{2}$ na reta numérica a partir do triângulo retângulo de catetos 1, como na figura 31.

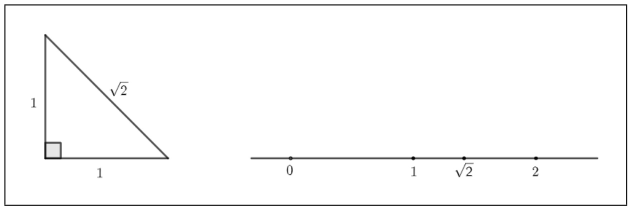

Figura 31. $\sqrt{2}$ na reta numérica.

Outros números em forma de raiz quadrada podem ser determinados pela construção que se segue:

Com o auxílio de uma régua graduada e o esquadro, traçamos um triângulo retângulo como na figura 32 de catetos 1cm, como vimos sua hipotenusa mede $\sqrt{2}cm$.

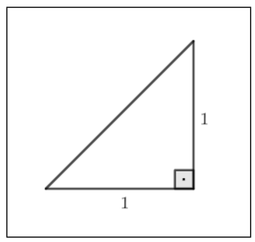

Figura 32. Triângulo retângulo de catetos 1cm.

Para determinar um segmento de medida $\sqrt{3}$, construiremos sobre o triângulo acima um novo triângulo retângulo de catetos $\sqrt{2}$ e 1, como na figura 33 abaixo.

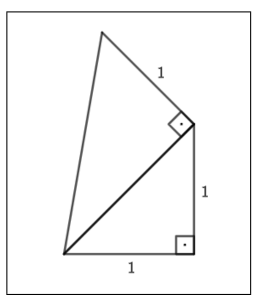

Figura 33. Catetos $\sqrt{2}$ cm e 1cm.

Assim, a hipotenusa ao quadrado do novo triângulo construído mede:

$$1 + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2 = 3.$$

Logo, a medida desta hipotenusa é $\sqrt{3}$. Iremos transportar esta medida para a reta numérica, como na figura 34.

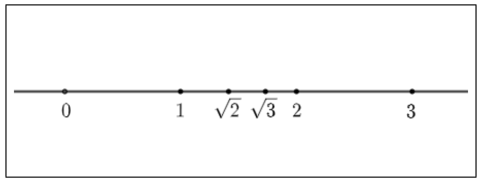

FIGURA 34. Coordenadas irracionais.

Podemos repetir este procedimento para obter um segmento de medida $\sqrt{n}$, para n natural. Como mostra a figura 35.

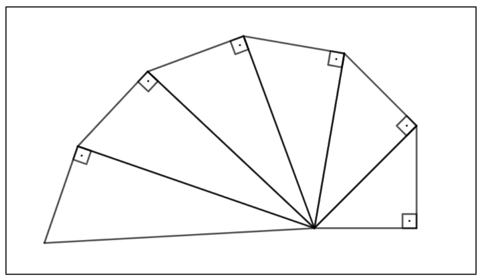

FIGURA 35. Repetição da constução.

Se marcarmos os segmentos que são os catetos de lado $1cm$, na figura acima, eles formam uma linha poligonal chamada de **espiral pitagórica** ou **espiral de Teodoro**.

Voltando a questão da razão entre segmentos de medidas racionais e irracionais:

1) Se compararmos dois segmentos de medidas racionais temos que eles serão comensuráveis. De fato, se a medida deles é racional então existem números naturais p_1, p_2, q_1, q_2 com $q_1, q_2 \neq 0$ tais que suas medidas podem ser representadas por $\frac{p_1}{q_1}$ e $\frac{p_2}{q_2}$. Logo, $\frac{(\frac{p_1}{q_1})}{(\frac{p_2}{q_2})} = \frac{p_1 q_2}{p_2 q_1}$.

2) Se compararmos dois segmentos um com medida racional e outro com medida irracional então eles são incomensuráveis. De fato, suponhamos que m é racional e n é irracional. Como m é racional então $m = \frac{p}{q}$ com $q \neq 0$. Se os dois segmentos fossem comensuráveis então existiriam p_1, q_1 com $q_1 \neq 0$ tal que

$$\frac{m}{n} = \frac{p_1}{q_1} \Rightarrow \frac{(\frac{p}{q})}{n} = \frac{p_1}{q_1} \Rightarrow n = \frac{pq_1}{qp_1}.$$

Daí n seria racional. Logo, os segmentos de comprimento n e m são incomensuráveis.

3) Se compararmos dois segmentos de medidas irracionais, irá depender de suas medidas para podermos classificá-los em comensuráveis e incomensuráveis. Por exemplo:

a) Se $\overline{AB} = \sqrt{2}$ e $\overline{DC} = 3\sqrt{2}$ então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}.$$

Logo $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis.

b)Se $\overline{AB} = \sqrt{2}$ e $\overline{DC} = \sqrt{3}$ então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Logo $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são incomensuráveis.

Exercícios

1) Com as informações abaixo, classifique os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ em comensuráveis e incomensuráveis, justificando sua resposta:

a) $\overline{AB}$ é o quádruplo de $\overline{CD}$;

b) $\overline{AB} = 6$, C é ponto médio de $\overline{AB}$ e D e B são coincidentes;

c) $\overline{AB} = \dfrac{1}{4}$ e $\overline{CD} = \dfrac{1}{8}$;

d) $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ e $\overline{CD} = \sqrt{3}$;

e) $\overline{AB} = \sqrt{7}$ e $\overline{CD} = \sqrt{4}$;

f) $\overline{AB} = \sqrt{2}$ e $\overline{CD} = 3\sqrt{2}$.

2) Dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são tais que a razão entre suas medidas é $\dfrac{1}{3}$. Se $\overline{AB} = 9cm$ e $\overline{AB}$ é o segmento de maior medida, determine $\overline{CD}$.

3) Um **quadrado** é uma figura plana que possui quatro lados de mesma medida e os quatro ângulos retos. Se a medida do lado do quadrado é l determine a medida da sua diagonal.

4) Com relação ao exercício anterior responda:

a) a medida da diagonal do quadrado é sempre um número irracional? Por quê?

b) Se compararmos a medida do lado do quadrado e a medida da diagonal, podemos afirmar que eles são sempre incomensuráveis? Por quê?

5) Um triângulo equilátero possui os três lados de mesma medida. Determine a razão entre o lado do triângulo e a sua altura. Estes segmentos são comensuráveis? Por quê?

1.2.3. *Menos do que nada: os números negativos.* Os gregos não aceitavam os números negativos na época de Pitágoras, mas o desenvolvimento dos conjuntos numéricos foi inevitável com o desenvolvimento do comércio. Iremos utilizar os sinais de + e − que remontam do século XVI. Segundo Asimov [1], o sinal + provavelmente, surgiu de uma deformação do "e" comercial, por motivo de pressa. Para marcar os números negativos na reta numérica, basta proceder de forma análoga ao que foi feito para os números positivos com uma inversão de sentidos, ou seja, os números são posicionados à esquerda de zero e a ordem de "contagem" é da direita para esquerda, como mostra a figura 36.

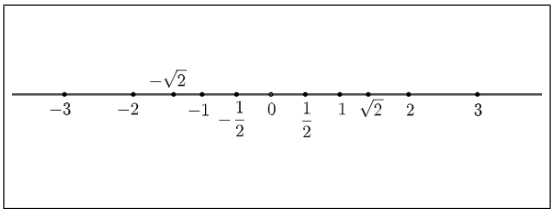

FIGURA 36. Coordenadas Inteiras.

Exercícios

1- Represente na reta numérica os pontos cujas coordenadas são: $A : -\sqrt{3}$; $B : \dfrac{-7}{2}$; $C : \dfrac{4}{5}$; $D : 4$; $E : \sqrt{3}$; $F : 2.5$ e $O : 0$.

2- Com relação ao exercício anterior, determine a medida dos segmentos:

a) $\overline{BC}$;

b) $\overline{DF}$;

c) $\overline{AE}$;

d) $\overline{BF}$;

e) $\overline{DE}$;

f) $\overline{OE}$.

3- Com relação ao exercício 1, determine a coordenada do ponto médio dos seguintes segmentos:

a) $\overline{BF}$;

b) $\overline{OD}$;

c) $\overline{AE}$.

4- Com relação ao exercício 2, classifique os segmentos abaixo em comensuráveis e incomensuráveis.

a) $\overline{BC}$ e $\overline{DF}$;

b) $\overline{AE}$ e $\overline{OE}$;

c) $\overline{BF}$ e $\overline{DE}$.

1.2.4. *Medidas que não são obtidas apenas com régua e compasso.* Até o momento, fizemos a correspondência dos pontos da reta com os números naturais, os números racionais e os irracionais em forma de raiz. Podemos ficar com a sensação de que estes conjuntos são suficientes para cobrir toda a reta. Mas isto é uma ilusão. Existem números que a humanidade só se deu conta ao longo dos tempos. O mais famoso deles é o π e não podemos falar dele sem mencionarmos a circunferência , ou seja, o conjunto de pontos do plano que está a uma distância fixa de um ponto dado, como na figura 37. O ponto fixado é o centro e a distância é o raio. O dobro do raio é chamado de diâmetro.

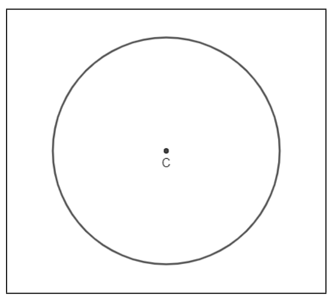

FIGURA 37. Circunferência de centro C.

Um dos fatos fundamentais para a “construção” do π é a consciência de que a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro é sempre constante, fato provado por alguns matemáticos e que vamos abordar daqui a alguns capítulos. Muitos povos procuraram esta constante, mesmo sem ter consciência matemática precisa disto.

No velho testamento (I Reis 7:23) podemos ler, com relação a construção do templo de Salomão: “Fez também de metal fundido um depósito de água, chamado “O mar”. Era redondo e tinha cinco metros de diâmetro por dois e meio de altura e quinze de circunferência”. Isto significa que para os hebreus a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro era tomado como $\dfrac{15}{5} = 3$. Provavelmente, este valor foi obtido por medição. Para quem ficar interessado na história do π, indicamos as referências [9] e [16] para perceber como as aproximações para este número foram se transformando no decorrer do tempo.

Já que π é a razão entre o comprimento da circunferência pelo diâmetro. Podemos dizer que π é o comprimento de uma circunferência de diâmetro igual a 1.

Desde que se formou a ideia de números irracionais, os matemáticos começaram a conjecturar que π fosse um deles. Foi Lambert, em 1761, que demostrou que π não pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, com p, q inteiros. Em 1882, Lindermann, provou que π não é solução de nenhuma equação algébrica com coeficientes inteiros. Tais números que não são raízes de equações algébricas com coeficientes inteiros são chamados de **números transcendentes.** Isto implica que o π não pode ser traçado com régua e compasso, pois construções geométricas consistem de duas operações básicas: 1) traçar a reta definida por dois pontos; 2) traçar circunferência com centro e raio fixos.

As construções geométricas são dadas pela intersecção entre retas e circunferências.

Como a reta possui equação $y = ax+b$ e a circunferência possui equação $(x-c)^2+(y-d)^2 = r^2$, temos que os pontos obtidos pelas construções geométricas são dados pela solução do sistema:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ (x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2. \end{cases}$$

Daí π não pode ser construído com régua e compasso.

Determinando uma aproximação para π.

Um experimento que todos devem fazer em algum momento da vida (dentro ou fora da escola) é determinar uma aproximação para a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro utilizando objetos circulares de vários tamanhos.

Para isto você precisará de fita métrica ou tira de papel, régua e objetos cilíndricos como lata de leite condensado, lata de massa de tomate, pratos, copos, etc. Com uma régua meça o diâmetro das circunferências de cada um dos objetos e registre. Após, com uma tira de papel (ou fita métrica) faça a volta no objeto e faça uma marcação no local onde as extremidades se encontram. Estenda a tira de papel sobre uma régua e anote o comprimento. Com o auxílio de

uma calculadora faça a razão: (comprimento da circunferência) $\times \frac{1}{(di\hat{a}metro)}$.
Com as medidas obtidas complete a tabela:

Objeto	**Comprimento**	**diâmetro**	**razão**

Tabela 1: Obtendo aproximações do π.

Considerando uma aproximação de π por $3,14159$ determine qual foi a razão da sua medição da tabela que mais se aproximou do número acima. A busca pelas casas decimais de π são procuradas até hoje. A última notícia que temos sobre a determinação das casas decimais até o momento, agosto de 2020, foi que Emma Haruka Iwan, uma funcionária da Google Japão, quebrou o recorde absoluto, determinando 31,4 trilhões de dígitos do π, muito além do recorde anterior que era de 22,4 trilhões, ver referência [11].

1.2.5. *Voltando a cobrir a reta numérica.* Com a consciência de que existem medidas que não podem ser construídos com régua e compasso, podemos, através da nomenclatura utilizada na referência [6], associar os pontos das reta aos seguintes conjuntos de números:
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ - Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ - Conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \ \mid \ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ - Conjunto dos números racionais.
$\mathbb{I} :=$ números que podem ser representados por uma lista de dígitos infinitos e não periódicos - Conjunto dos números irracionais.
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ - Conjunto dos números reais.

Considerando o conjunto dos números reais, todo ponto da reta está associado a um número e todo número está associado a um ponto da reta e como consequência da forma como fizemos esta associação, segmentos de mesmo tamanho possuem a mesma medida.

Exercícios

1- (VUNESP-2011-CODESP -SP) Considere a seguinte reta numérica (veja figura 38), onde estão marcados apenas alguns números:

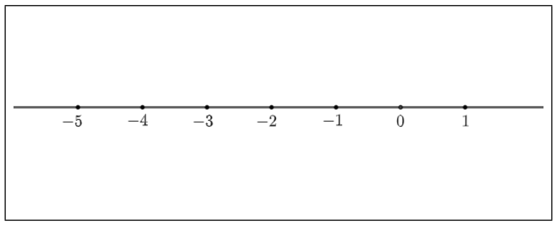

FIGURA 38. Coordenadas inteiras.

O número representado pela fração $\dfrac{-3}{2}$, se fosse colocado na reta, ficaria entre:

a) 0 e -1;

b) -1 e -2;

c) -2 e -3;

d) -3 e -4;

e) -4 e -5.

2- Utilizando o menor intervalo cujos extremos são números inteiros determine a localização dos seguintes números da reta numérica:

a) $\sqrt{35}$; b) $\dfrac{-2}{3}$; c) 2π.

3- Disponha os seguintes números na reta numérica: $A : \sqrt{2}$; $B : \dfrac{-6}{4}$; $C : \dfrac{11}{4}$; $D : 3$; $E : 1$; $F : \dfrac{1}{5}$ e $G : 1,5$.

4- Um segmento possui como extremos pontos de coordenadas 2 e $9,5$. Ao dividir o segmento em 5 partes congruentes, obtemos os pontos A, B, C e D da esquerda para a direita. Determine:

a) a medida do segmento $\overline{AB}$,

b) quais pontos A, B, C e D possuem coordenadas inteiras?

5- Um ponto A possui coordenada a e um ponto B possui coordenada b. Determine a coordenada do ponto médio do segmento $\overline{AB}$ em função de a e de b.

6- Sejam A e B dois pontos da reta tais que, o ponto A possui coordenada a e o ponto B possui coordenada b. Se a e b são inteiros, determine a quantidade de pontos entre A e B que possuem coordenadas inteiras.

7-Dados os segmentos de medidas a seguir, classifique-os em comensuráveis e incomensuráveis:

a) $\overline{AB} = 2\pi$ e $\overline{CD} = \pi$;

b) $\overline{AB} = 4$ e $\overline{CD} = 6$;

c) $\overline{AB} = 3$ e $\overline{CD} = \sqrt{2}$;

d) $\overline{AB} = \dfrac{\pi}{2}$ e $\overline{CD} = \sqrt{3}$.

8- A distância entre dois pontos é a medida do segmento de reta cujos extremos são estes dois pontos. Considere um segmento $\overline{AB}$ e a reta r que passa pelo ponto médio M de $\overline{AB}$, formando um ângulo reto. Sobre esta reta r tome um ponto C. É correto afirmar que C está a mesma distância de A e B? Por quê?

1.3. **Ângulos.**

Objetivos. Encontrar a coordenada dos lados de um ângulo. Determinar a medida de um ângulo. Classificar ângulos segundo a sua medida.

Vamos relembrar a definição de ângulo no plano que aparece em [4].

Definição: Um ângulo é a união de duas semirretas de mesma origem. As semirretas são chamadas de lados e a origem é chamada de vértice.

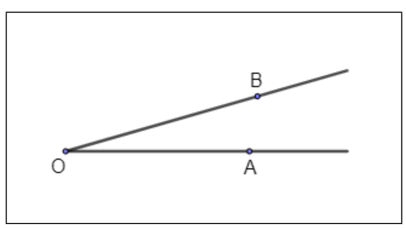

Figura 39. Ângulo $A\widehat{O}B$.

Como visto anteriormente, a notação utilizada para o caso da figura 39 é $A\widehat{O}B$. Observe que se A e B não pertencem a mesma reta, um ângulo $A\widehat{O}B$ divide o plano em duas regiões de tal forma que uma região contém o segmento AB e a outra não. Neste texto, quando nos referirmos a medida do ângulo $A\widehat{O}B$, tomado nessas condições, estaremos sempre considerando a região do plano que contém o segmento $\overline{AB}$. Na secção anterior, fizemos um breve comentário sobre como obter a medida de um ângulo utilizando o transferidor. De forma geral, associamos um número entre 0^0 e 180^0 para cada semirreta que forma o ângulo. Estes números são chamados de coordenadas dos lados do ângulo. A diferença entre o número maior e o menor nos fornece a medida deste ângulo conforme [2].

Considere a figura abaixo:

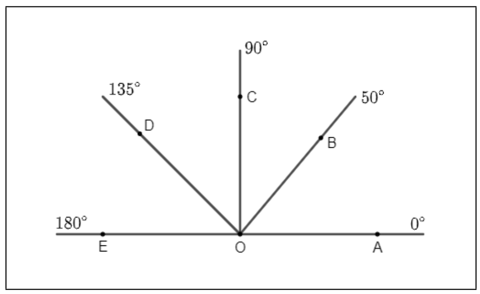

Figura 40. Coordenadas das semirretas .

Temos que:
$A\widehat{O}B = 50^0 - 0^0 = 50^0$
$B\widehat{O}C = 90^0 - 50^0 = 40^0$
$A\widehat{O}D = 135^0 - 0^0 = 135^0$
$C\widehat{O}D = 135^0 - 90^0 = 45^0$

Dois ângulos de mesma medida são chamados de *congruentes.* No exemplo da figura 40 temos que $A\widehat{O}C$ e $C\widehat{O}E$ são congruentes. De acordo com a medida do ângulo, ele é classificado em:
a) Se a medida é 90^0, ele é chamado de reto; Na figura acima, $A\widehat{O}C$ e $C\widehat{O}E$ são retos;
b) Se a medida do ângulo é menor do que 90^0, o ângulo é chamado de agudo. Na figura 40, $A\widehat{O}B$ é agudo;
c) Se a medida do ângulo está entre 90^0 e 180^0, ele é chamado de obtuso. Na figura 40, $A\widehat{O}D$ é obtuso;
d) O ângulo cuja medida é 180^0 é chamado de raso. Na figura 40, $A\widehat{O}E$ é raso.

Exercícios

1) Seja $A\widehat{O}B$ um ângulo cuja medida é 30^0. Com o auxílio do transferidor, represente geometricamente dois ângulos congruentes a $A\widehat{O}B$.

2) Sejam $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$ ângulos congruentes tais que a coordenada de OA é 40° e de OB é 70^0. Determine a coordenada de OC sabendo que é maior que 40° e menor que 130°.

3) Dois ângulos são chamados suplementares se a soma de suas medidas é 180^0. Determine o suplemento de um ângulo cuja medida é 35°.

4) Duas retas são concorrentes em um ponto O. Quantos ângulos, de medida entre 0^0 e 180^0 são formados pela intersecção das duas retas? Justifique sua resposta:

5) Dada a figura 41 abaixo, responda o que se pede:

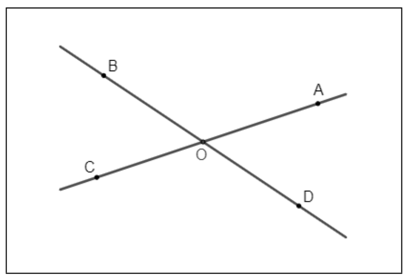

Figura 41. Intersecção das duas retas .

a) Determine a medida de $D\widehat{O}A$ + $B\widehat{O}A$;

b) Determine a medida de $B\widehat{O}A$+ $B\widehat{O}C$;

c) Podemos afirmar que $B\widehat{O}C$ e $D\widehat{O}A$ são congruentes? Justifique sua resposta;

d) Podemos afirmar que $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$ são congruentes? Justifique sua resposta;

6) Os ângulos $A\widehat{O}B$ e $C\widehat{O}D$ da figura do exercício anterior são chamados de opostos pelo vértice (opv). É correto afirmar que o exercício anterior garante que todos os ângulos opostos pelo vértice são congruentes? Por quê?

7) Dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ interceptam-se no ponto O formando quatro ângulos: $A\widehat{O}D$, $A\widehat{O}C$, $C\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}D$. Determine a medida de $C\widehat{O}B$, sabendo que $A\widehat{O}C = 2x + 10^0$ e $B\widehat{O}D = x + 40^0$;

8) Dado um ângulo $A\widehat{O}B$, uma semirreta $\overrightarrow{OC}$ é chamada de bissetriz do ângulo se: $A\widehat{O}C$=$C\widehat{O}B$ e se o segmento $\overline{AB}$ intercepta a semirreta $\overrightarrow{OC}$. Sabendo disso, determine x, no caso em que

$\overrightarrow{OC}$ é bissetriz de $A\widehat{O}B$, $A\widehat{O}C = 3x - 15^0$ e $B\widehat{O}C = 2x + 10^0$.

9) Determine a medida dos ângulos formados pela bissetriz de um ângulo:

a)raso;

b)reto;

10) Dois ângulos são chamados de adjacentes se possuem um lado em comum e sua intersecção é apenas esse lado.

a) Desenho dois ângulos adjacentes;

b) Determine a medida do ângulo formado entre as bissetrizes de dois ângulos adjacentes e suplementares.

2. Forma geométrica plana

Objetivos. Identificar figuras que são polígonos. Classificar polígonos quanto ao número de lados. Identificar polígonos convexos e não convexos. Identificar elementos dos polígonos. Determinar perímetros. Identificar figuras semelhantes. Explorar as propriedades de figuras semelhantes. Deduzir a fórmula do comprimento de uma circunferência. Compreender o número π.

Observe a figura 42 abaixo:

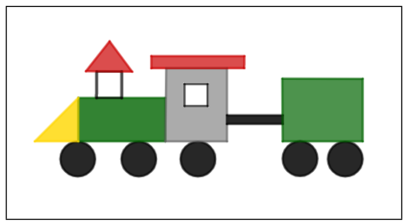

Figura 42. Trem.

Nela podemos observar que o trem é uma composição por desenhos. Alguns deles formados por segmentos de retas e outros não. Alguns desenhos no plano recebem nomes especiais de acordo com a sua característica, a saber: os polígonos e os círculos. Sobre os círculos, falamos neles quando tratamos de medidas que não podem ser obtidas com régua e compasso. Ao longo deste livro voltaremos a falar deles. Por enquanto queremos nos dedicar aos polígonos e os abordaremos de forma análoga a [13].

2.1. **Definição de polígonos e elementos.** Dados n pontos distintos de um plano, $A_1, A_2, ..., A_n$ com $n \geq 3$, onde três pontos consecutivos não pertencem a uma mesma reta. Consideraremos aqui a notação cíclica, isto é, $A_{(n-1)}, A_n, A_1$ e A_n, A_1, A_2 são consecutivos. Chamamos de *polígono* à união dos segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_nA_1}$.

Exemplos:

a) Nas figuras 43 a seguir, temos **polígonos** de cinco e quatro lados:

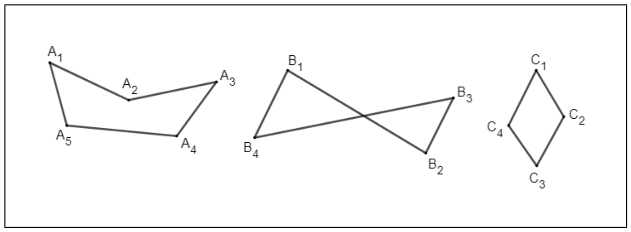

FIGURA 43. Polígonos.

b) Nas figuras 44 abaixo temos exemplos de uniões de segmentos que **não são polígonos**.

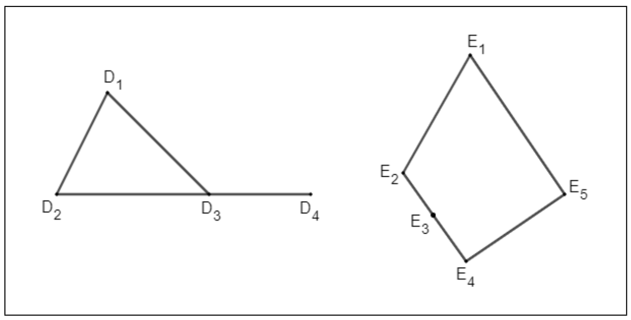

FIGURA 44. Figuras que não são polígonos.

Um polígono separa o plano em duas partes: o **interior** e o **exterior** como indicado na figura 45 abaixo.

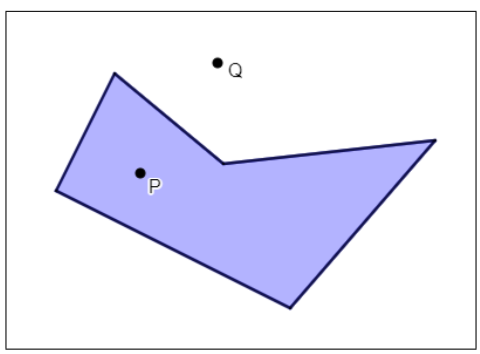

FIGURA 45. Interior e exterior do polígono.

O ponto P está no interior do polígono e o ponto Q está no exterior do polígono. A união do polígono com seus pontos interiores é chamada de ***região poligonal.*** Algumas regiões poligonais "se dobram para dentro" enquanto outras não. Esta noção, de dobrar ou não, é explorada na seguinte definição:

Definição: Uma região poligonal é convexa se dado quaisquer dois pontos A e B no interior do polígono, o segmento $\overline{AB}$ está contido no interior do polígono. Se essa região não é convexa então ela é chamada de côncava. Um polígono que determina uma região poligonal convexa é chamado de polígono convexo e um polígono que determina uma região poligonal côncava é chamado de polígono côncavo.

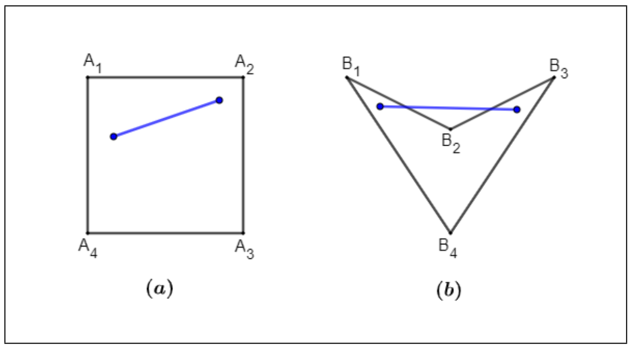

Figura 46. Polígonos convexo e côncavo.

Na figura 46 acima, o polígono (a) é convexo e o polígono (b) é côncavo.

Independente de ser convexo ou côncavo, todo polígono possui lados e ângulos. Mais precisamente, dado um polígono $A_1A_2...A_n$, os segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ..., \overline{A_nA_1}$ são chamados lados do polígono, os pontos $A_1A_2...A_n$ são os vértices do polígono que coincidem com vértices dos ângulos interiores do polígono. Por exemplo, na figura 47 temos o polígono $ABCDE$, ele possui 5 lados que são os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{ED}$ e $\overline{EA}$, possui como vértices os pontos A, B, C, D e E e possui os ângulos internos que chamaremos apenas de ângulos do polígono: $E\widehat{A}B$,$A\widehat{B}C$,$B\widehat{C}D$,$C\widehat{D}E$ e $D\widehat{E}A$.

Como vimos no capítulo anterior todo segmento possui uma medida, que é um número real. A soma das medidas de todos os lados de um polígono é chamado de ***perímetro*** . Com relação a figura anterior, temos que o perímetro de $ABCDE$ é $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{ED} + \overline{EA}$. Denotaremos o perímetro de um polígono por $2p$ e o semiperímetro por p.

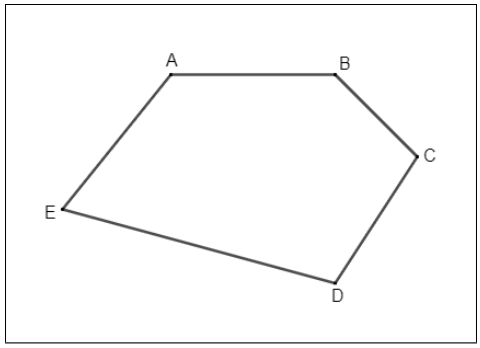

Figura 47. Polígono $ABCDE$.

2.2. **Nomenclatura.** De acordo com o número de lados $n \geq 3$, damos certos nomes a um polígono como escrito na tabela abaixo .

N^0 lados	Nome	N^0 lados	Nome
3	Triângulo	12	Dodecágono
4	Quadrilátero	13	Tridecágono
5	Pentágono	14	Tetradecágono
6	Hexágono	15	Pentadecágono
7	Heptágono	16	Hexadecágono
8	Octógono	17	Heptadecágono
9	Eneágono	18	Octodecágono
10	Decágono	19	Nonadecágono
11	Undodecágono	20	Icoságono

Tabela 2: Classificação dos polígonos quanto ao número de lados.

Nosso interesse principal é no estudo dos polígonos convexos. Por simplicidade, daqui para frente iremos usar o termo polígono para nos referirmos aos polígonos convexos. Sobre eles é bom lembrar que todo polígono possui ângulos (internos). Na escola básica, você estudou que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^0. Temos que todo polígono pode ser decomposto em triângulos e daí conseguimos obter a soma dos ângulos de qualquer polígono. Por exemplo, no pentágono da figura 48 a seguir:

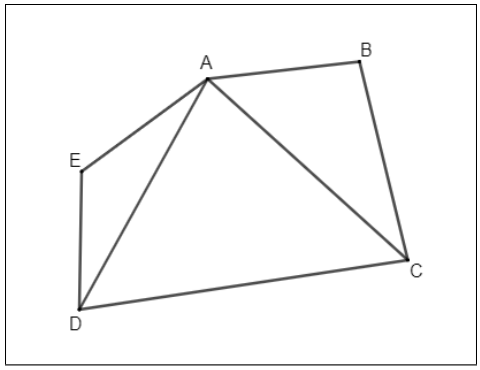

Figura 48. Pentágono.

Podemos decompô-lo em 3 triângulos. Daí a soma das medidas de todos os seus ângulos é $S = 3(180^0) = 540^0$.

Exercícios

1- Um retângulo é um quadrilátero que possui todos os ângulos retos e como consequência possui lados opostos congruentes. Sabendo que um retângulo possui lados de medida $3cm$ e $5cm$, determine seu perímetro.

2- Deseja-se plantar mudas de bergamota em todo o contorno de um terreno retangular de dimensões $12m$ e $30m$. Se entre as mudas a distância desejada é de 1,5 m, quantos pés de bergamota serão plantados?

3- Determine o perímetro de um retângulo, sabendo que a base mede $24cm$ e que a altura mede a metade da base.

4- Um quadrado é um retângulo que possui todos os lados congruentes. Determine a medida do lado do quadrado de perímetro $52cm$.

5- O perímetro de um quadrado corresponde a $3/4$ do perímetro de um retângulo de lados $10cm$ e $4cm$. Qual é a medida, em centímetros, dos lados desse quadrado?

6- Um triângulo retângulo possui hipotenusa de medida $10cm$ e perímetro $24cm$. Determine a medida dos lados desse triângulo.

7- Uma sala retangular A possui lados de medida x e $x + 2$ e outra sala B também retangular possui lados de medida $2x$ e x. Determine o perímetro de cada sala, sabendo que os mesmos são numericamente iguais.

8-Um pentágono possui perímetro $150cm$ e lados de medidas proporcionais aos números $1, 2, 3, 4, 5$.

Determine a medida dos lados deste pentágono.

9- Determine a razão entre o perímetros de um triângulo equilátero de lado l e um quadrilátero com todos os lados congruentes (losango) de lado l.

10- Determine a soma das medidas dos ângulos internos de um (a) quadrilátero; (b) hexágono; (c) polígono de n lados.

2.3. **Polígonos congruentes.** Intuitivamente dizemos que duas figuras são congruentes se forem idênticas, ou seja, estão desenhadas de maneira que possuam o mesmo formato e que todas as suas medidas sejam iguais, daí seria possível sobrepor as duas. De maneira formal definimos congruência de figuras como segue:

Definição: Duas figuras são chamadas congruentes se existe uma aplicação φ que leva uma figura na outra de forma que a distância entre seus pontos é preservada e os ângulos são preservados.

O caso particular de triângulo é estudado na escola básica e também abordado em [14], e como utilizaremos bastante ao longo deste texto, neste momento iremos relembrá-lo de alguns conceitos.

Dizemos que o triângulo ABC é congruente ao $A'B'C'$ se for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices, de forma que:

a. os ângulos em vértices correspondentes tenham medidas iguais;

b. os lados opostos a vértices correspondentes tenham medidas iguais.

Utilizaremos a seguinte notação: $ABC \equiv A'B'C'$, para indicar triângulos congruentes. É possível demonstrar critérios mínimos que permitem estabelecer a congruência de dois triângulos dados. Tais critérios são conhecidos como: casos de congruência de triângulos.

Caso LAL. Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes congruentes e os ângulos correspondentes formados por estes lados também congruentes então os triângulos são congruentes. Veja figura 49.

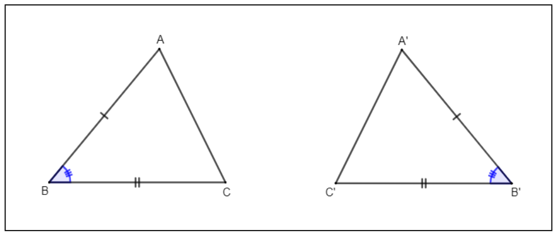

Figura 49. Caso LAL.

Caso ALA. Se dois triângulos possuem dois ângulos correspondentes congruentes e os lados, comum a estes ângulos, também congruentes então os triângulos são congruentes. Veja figura 50

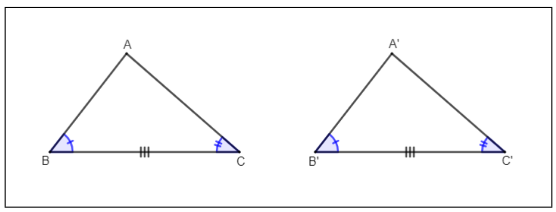

Figura 50. Caso ALA.

Caso LLL. Se dois triângulos possuem os três lados correspondentes congruentes então os triângulos são congruentes. Veja figura 51

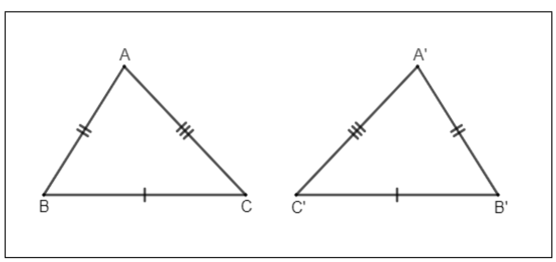

Figura 51. Caso LLL.

Vamos utilizar estes critérios algumas vezes no texto, para convencer o leitor que em algumas situações temos triângulos idênticos. Por exemplo na situação seguinte:

Construção geométrica. Dados três pontos A, B e C não pertencentes a mesma reta, existe uma circunferência que contém A, B e C.

Dados: pontos A, B e C não pertencentes a mesma reta, veja figura 52

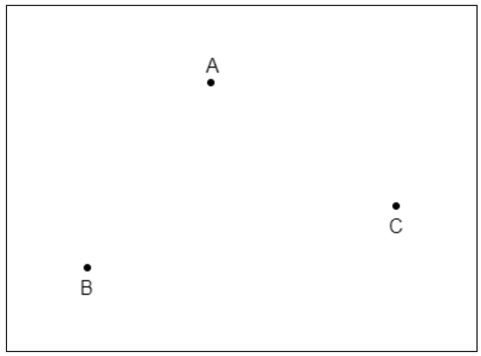

FIGURA 52. Pontos A, B e C.

Procedimentos:

Passo 1: Traçar os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$;

Passo 2: Determinar a reta r_1 que passa pelo ponto médio M_1 de $\overline{AB}$ formando um ângulo reto e a reta r_2 que passa pelo ponto médio M_2 de $\overline{AC}$ formando um ângulo reto. Denotaremos a intersecção de r_1 e r_2 por O, veja figura 53.

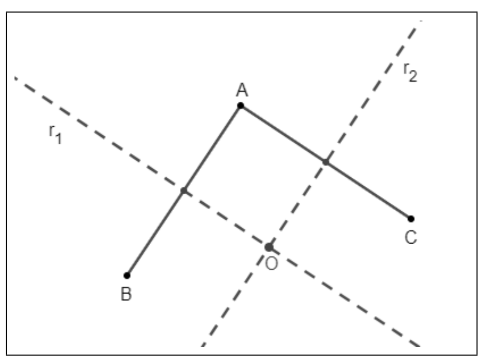

FIGURA 53. Passos 1 e 2.

Passo 3: Traçar a circunferência de centro O e raio $\overline{OA}$, veja figura 54;

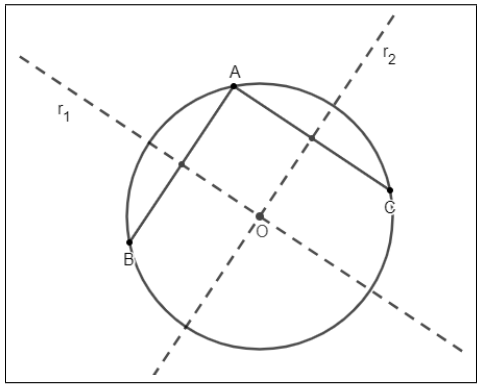

FIGURA 54. Passo 3.

Solução: A circunferência de centro O e raio $\overline{OA}$.

Justificativa:

Traçando os segmentos $\overline{OB}$, $\overline{OA}$ e $\overline{OC}$ na figura anterior, temos que os triângulos AOM_2 e COM_2 são congruentes pelo caso LAL. Bem como, AOM_1 e BOM_1 também são congruentes pelo caso LAL. Assim, os segmentos $\overline{OB}$, $\overline{OA}$ e $\overline{OC}$ (veja figura 55) possuem a mesma medida.

Também utilizaremos congruência de triângulos nos seguintes resultados envolvendo triângulos

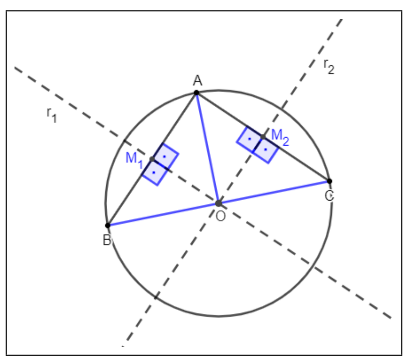

FIGURA 55. Triângulos AOM_2 e COM_2.

isósceles, ou seja, triângulos que possuem dois ângulos de mesma medida.

Ângulos da base de um triângulo isósceles : Se um triângulo possui dois lados de mesma medida então ele possui dois ângulos de mesma medida.

Justificativa:

Seja um triângulo ABC com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de mesma medida. Vamos comparar o triângulo com ele mesmo, mas fazendo outra correspondência entre seus vértices $B \leftrightarrow C$ e A nele mesmo. Assim temos $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{CB}$ é congruente a ele mesmo. Logo o triângulo ABC é congruente a ACB. E portanto, $A\widehat{C}B \equiv A\widehat{B}C$.

Mediana relativa a base no triângulo isósceles. Considere um triângulo isósceles ABC tal que $\overline{AB} = \overline{AC}$ e D o ponto médio de $\overline{BC}$. Então $\overline{AD}$ forma um ângulo reto com $\overline{CB}$ e $C\widehat{A}D = B\widehat{A}D$.

Justificativa: Comparando os triângulos ABD e ACD da figura 56 temos $\overline{AB} = \overline{AC}$,

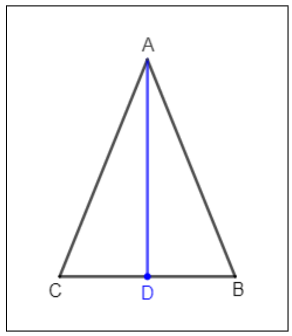

FIGURA 56. Bissetriz de $C\widehat{A}B$.

$\overline{CD} = \overline{BD}$ e $\overline{AD}$ é comum aos dois triângulos. Logo, ABD e ACD são congruentes pelo caso LLL. Logo, $C\widehat{A}D = B\widehat{A}D$ e $A\widehat{D}C = B\widehat{D}A$. Além disso, $C\widehat{D}B$ é raso. Daí,

$$A\widehat{D}C + B\widehat{D}A = 180^0 \Rightarrow A\widehat{D}C = 90^0.$$

Este resultado garante que em um triângulo isósceles a mediana relativa a base está contida na bissetriz do ângulo $B\widehat{A}C$ e forma um ângulo reto com a base.

Exercícios

1- Determine a medida dos ângulos de um triângulo equlátero.

2- Determine a altura de um triângulo equilátero de lado l.

3- Determine a medida dos ângulos de um triângulo retângulo isósceles.

4- Dois triângulos ABC e EFG são congruentes. Sabendo que $\overline{BC} = x + 1$, $\overline{AB} = y + x$, $\overline{FG} = 4$ e $\overline{EF} = 9$, determine x e y.

5- Dois triângulos retângulos de mesmo perímetro são sempre congruentes? E dois triângulos equiláteros de mesmo perímetro são sempre congruentes?

2.4. **Polígonos Regulares.** Aqui iremos estudar polígonos que possuem características especiais.

Definição: Um polígono convexo é chamado de ***regular*** se possui todos os lados de mesma medida e todos os ângulos internos de mesma medida.

Por exemplo, um triângulo equilátero e um quadrado são polígonos regulares. Quando o polígono possui mais de 4 lados, dizemos o nome do polígono e acrescentamos o termo regular.

Na figura 57 abaixo temos um hexágono regular.

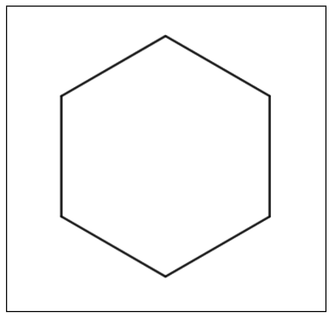

FIGURA 57. Hexágono regular.

Existem duas propriedades que também encontramos em [3] que vamos destacar:

Propriedade 1. Dado um polígono regular existe uma circunferência que passa por todos os seus vértices.
Justificativa:

Dado um polígono regular $A_1A_2...A_n$, trace a circunferência que passa pelos pontos A_1, A_2 e A_3. Denotaremos o centro desta circunferência por O. Trace os segmentos $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$,...,$\overline{OA_n}$ como da figura 58. Note que o triângulo A_2OA_3 possui os lados $\overline{OA_2}$ e $\overline{OA_3}$ de mesma medida. Assim, temos: $O\widehat{A_2}A_3 = O\widehat{A_3}A_2$. Como o polígono é regular então os ângulos $A_1\widehat{A_2}A_3$ e $A_2\widehat{A_3}A_4$ possuem a mesma medida. Daí, por diferença temos: $A_1\widehat{A_2}O$ e $A_4\widehat{A_3}O$ de mesma medida. Comparando os triângulos A_1OA_2 e A_3OA_4 temos que $\overline{A_1A_2}$=$\overline{A_3A_4}$, pois são lados do polígono regular, $\overline{0A_2} = \overline{0A_3}$ pois são raios da circunferência construída e como afirmado anteriormente, $A_1\widehat{A_2}O = A_4\widehat{A_3}O$. Daí os triângulos A_1OA_2 e A_3OA_4 são congruentes pelo caso LAL. Daí, $\overline{OA_1} = \overline{OA_4}$ e portanto A_4 está na circunferência. Procedendo da mesma forma, temos que os demais vértices também estão na circunferência.

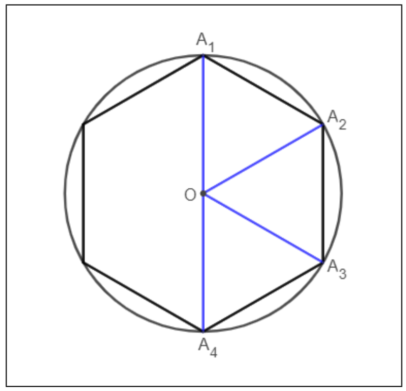

Figura 58. Polígono Inscrito.

Definição: Um polígono que possui todos os seus vértices sobre uma mesma circunferência é dito ***inscrito*** na circunferência.

A propriedade 1 garante que todo polígono regular está inscrito em uma circunferência.

Propriedade 2. Dado um polígono regular existe uma circunferência que passa por todos os seus pontos médios dos lados.
Justificativa:

Dado um polígono regular $A_1A_2...A_n$, trace a circunferência na qual o polígono está inscrito, como na figura 59. Esta circunferência existe pela propriedade 1.

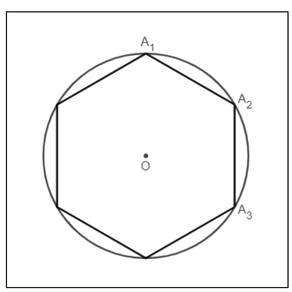

Figura 59. Polígono regular $A_1A_2...A_n$.

Considere O o centro da circunferência. Note que $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = ... = \overline{OA_n}$, pois todos são raios. Como o polígono é regular, então temos que os triângulos A_1OA_2, A_2OA_3,...,A_nOA_1 são todos congruentes pelo caso LLL. Tome M_1 ponto médio de $\overline{A_1A_2}$, M_2 ponto médio de $\overline{A_2A_3}$,...,M_n ponto médio de $\overline{A_nA_1}$ e considere os segmentos $\overline{OM_1}$,$\overline{OM_2}$,...,$\overline{OM_n}$. Como os triângulos A_1OA_2, A_2OA_3,...,A_nOA_1 (veja figura 60) são congruentes então $\overline{OM_1} = \overline{OM_2} = ... = \overline{OM_n}$.

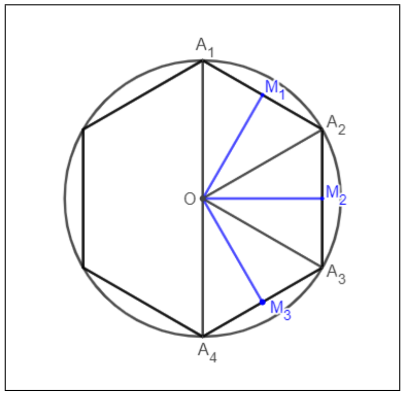

FIGURA 60. Triângulos A_1OA_2, A_2OA_3,...,A_nOA_1.

Trace a circunferência de centro O e raio $\overline{OM_1}$. Na figura 61 temos a circunferência procurada.

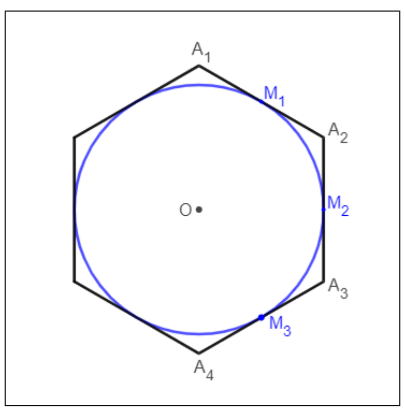

FIGURA 61. Circunferência de centro O e raio $\overline{OM_1}$.

Note que o raio da circunferência encontrada forma um ângulo reto com os lados do polígono no ponto de contato, pois os triângulos A_1OA_2, A_2OA_3,...,A_nOA_1 são isósceles.

Definição: Uma circunferência cujo raio forma um ângulo reto com todos os lados de um polígono é chamada de **circunferência inscrita** ao polígono e o polígono cuja circunferência está inscrita é chamado de polígono **circunscrito** a circunferência.

Importante: As propriedades 1 e 2 garantem que dada uma circunferência é possível inscrever e circunscrever a ela polígonos regulares de qualquer número de lados.

2.4.1. *Elementos notáveis de um polígono regular.* Dado um polígono regular de "n" lados, podemos destacar 3 elementos:

a. O **centro** de um polígono regular é o centro comum das circunferências inscrita e circunscrita ao polígono.

b. O **apótema** de um polígono regular é o segmento com extremos no centro e no ponto médio do lado do polígono. Note que o apótema de um polígono coincide com o raio da circunferência inscrita ao polígono.

c. O **ângulo central** de um polígono regular é o ângulo com vértice no centro do polígono e que passa por dois vértices consecutivos do polígono. Denotando o ângulo central por a_c, temos que sua medida é dada por:

$$a_c = \frac{360^0}{n}.$$

Na figura 62 abaixo, temos o centro O, o apótema a_n e o ângulo central a_c.

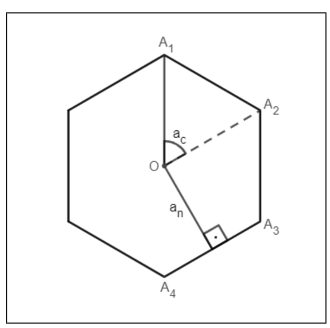

FIGURA 62. Elementos notáveis de um polígono regular.

2.4.2. *Cálculo do perímetro e do apótema de polígonos regulares.* Considere uma circunferência de raio r. Iremos calcular o perímetro e o apótema de alguns polígonos regulares inscritos e circunscritos na circunferência. Para facilitar a notação utilizaremos: n para indicar a quantidade de lados, l_n para indicar a medida do lado e a_n para indicar a medida do apótema.

Exemplo 1. Triângulo equilátero inscrito e circunscrito na circunferência ($n = 3$).

Calcularemos primeiro as medidas no triângulo $A_1A_2A_3$ inscrito na circunferência de raio r e centro O, como na figura 63

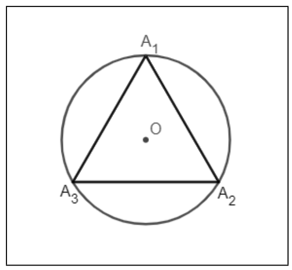

FIGURA 63. Triângulo equilátero inscrito na circunferência.

Note que $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = \overline{OA_3} = r$, que o triângulo A_3OA_2 é isósceles de base $\overline{A_3A_2}$. Além disso, $A_1\widehat{O}A_2$,$A_2\widehat{O}A_3$ e $A_1\widehat{O}A_3$ são ângulos centrais, assim suas medidas são $a_c = \dfrac{360^0}{3} = 120^0$. Observe que o triângulo $A_1A_2A_3$ também é isósceles. Tomando M ponto médio de $\overline{A_3A_2}$ temos que o segmento $\overline{A_1M}$ forma um ângulo reto com $\overline{A_3A_2}$. Além disso, $\overline{A_1M} = r + a_3$. Prolongando o segmento $\overline{A_1M}$ até encontrar a circunferência no ponto P, obtemos $\overline{A_1P} = 2r$, $\overline{OP} = r$ e $M\widehat{A_1}A_2 = 30^0$, como na figura 64.

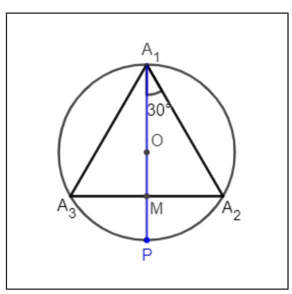

FIGURA 64. Prolongamento de $\overline{A_1M}$.

Considere o triângulo POA_2. Temos que $P\widehat{O}A_2 = \dfrac{120^0}{2} = 60^0$. Assim o triângulo, POA_2 é equilátero. E daí obtemos duas informações $\overline{PA_2} = r$ e $O\widehat{P}A_2 = 60^0$. Daí os triângulos A_1A_2P e A_1A_2M da figura 65 são triângulos retângulos.

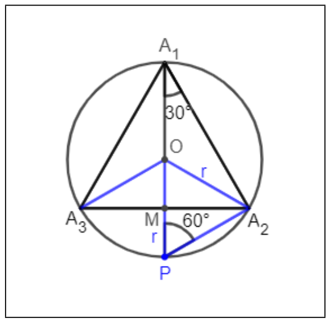

FIGURA 65. Triângulos retângulos.

Pelo teorema de Pitágoras temos:

$$(2r)^2 = (l_3)^2 + r^2 \Rightarrow (l_3)^2 = 3r^2 \Rightarrow l_3 = r\sqrt{3}$$

e

$$(l_3)^2 = (r + a_3)^2 + \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 \Rightarrow 3r^2 = (r + a_3)^2 + \left(\frac{3r^2}{4}\right) \Rightarrow$$

$$3r^2 - \frac{3r^2}{4} = (r + a_3)^2 \Rightarrow \frac{9r^2}{4} = (r + a_3)^2 \Rightarrow \frac{3r}{2} = r + a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{r}{2}.$$

Como consequência, temos que o perímetro de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio r é $2p_3 = 3r\sqrt{3}$.

Calcularemos agora o lado L_3, o perímetro e o apótema de uma triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência de raio r.

Seja $B_1B_2B_3$ um triângulo circunscrito a uma circunferência de raio r. Note que o apótema de qualquer polígono regular circunscrito coincide com o raio r da circunferência, assim, $a_3 = r$. Seja M o ponto médio do lado $\overline{B_3B_2}$. Observe que $\overline{OM} = a_3 = r$ e que $\overline{B_3M} = \dfrac{L_3}{2}$. Daí, pelo Teorema de Pitágoras temos

$$\overline{OB_3}^2 = \left(\frac{L_3}{2}\right)^2 + r^2 \Rightarrow \overline{OB_3} = \sqrt{\left(\frac{L_3}{2}\right)^2 + r^2}.$$

Considere agora a circunferência de raio R que o triângulo de lado L_3 está inscrito como na figura 66.

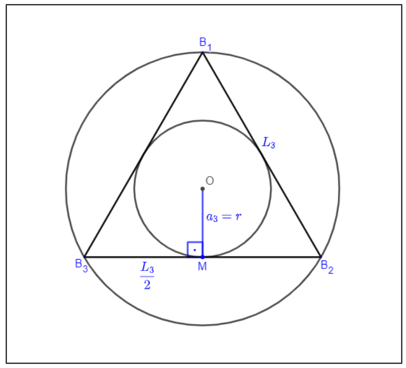

Figura 66. Triângulo inscrito e circunscrito nas circunferências.

Temos que $\overline{OB_3}$ coincide com o seu raio R e pelo que vimos acima $a_3 = \dfrac{R}{2}$. O que implica:

$$r = \frac{\overline{OB_3}}{2} \Rightarrow 2r = \sqrt{\left(\frac{L_3}{2}\right)^2 + r^2}$$

$$4r^2 = \left(\frac{L_3}{2}\right)^2 + r^2 \Rightarrow \frac{L_3^2}{4} = 4r^2 - r^2 \Rightarrow \frac{L_3^2}{4} = 3r^2 \Rightarrow L_3 = 2r\sqrt{3}$$

Assim, o perímetro de $B_1B_2B_3$ é $2p_3 = 6r\sqrt{3}$.

Exemplo 2. Quadrado inscrito e circunscrito na circunferência ($n = 4$).

Calcularemos primeiro as medidas no quadrado $A_1A_2A_3A_4$ inscrito na circunferência de raio r e centro O, como na figura 67.

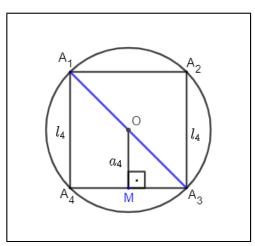

Figura 67. Quadrado inscrito na circunferência.

Note que as diagonais do quadrado coincidem com o diâmetro da circunferência. Assim, pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$(2r)^2 = l_4^2 + l_4^2 \Rightarrow 4r^2 = 2l_4^2 \Rightarrow l_4^2 = 2r^2 \Rightarrow l_4 = r\sqrt{2}.$$

Daí, o perímetro de $A_1A_2A_3A_4$ é $2p_4 = 4r\sqrt{2}$. Agora, considere M o ponto médio de $\overline{A_3A_4}$. Para determinar o apótema a_4 iremos utilizar o teorema de Pitágoras novamente no triângulo MOA_3:

$$r^2 = a_4^2 + \left(\frac{l_4}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = a_4^2 + \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow r^2 = a_4^2 + \frac{r^2}{2} \Rightarrow a_4^2 = \frac{r^2}{2} \Rightarrow a_4 = \frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

Note que, se compararmos a medida do lado do quadrado inscrito com seu apótema, percebemos que a medida do apótema é a metade do lado. Para determinar o lado L_4, o perímetro e o apótema de um quadrado $B_1B_2B_3B_4$ circunscrito na circunferência de raio r (veja figura 68), observe que o lado $L_4 = 2r$. Assim, o perímetro de $B_1B_2B_3B_4$ é $2p_4 = 8r$ e o apótema coincide com o raio, ou seja, $a_4 = r$.

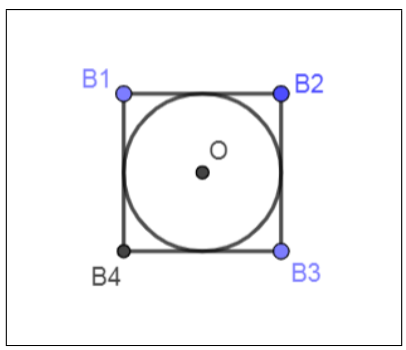

Figura 68. Quadrado circunscrito na circunferência.

Exemplo 3. Hexágono regular inscrito e circunscrito na circunferência ($n = 6$).

Calcularemos primeiro as medidas no hexágono regular $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ inscrito na circunferência de raio r e centro O como na figura 69.

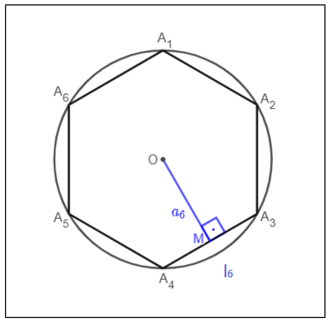

Figura 69. Hexágono inscrito na circunferência.

Note que $A_4\widehat{O}A_3$ é um ângulo central. Assim, $A_4\widehat{O}A_3 = \dfrac{360^0}{6} = 60^0$. Daí, o triângulo A_4OA_3 é equilátero. E como $\overline{OA_4}$ é raio, então $l_6 = r$. Daí, o perímetro de $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ é $2p_6 = 6r$. Daí, considerando M o ponto médio de $\overline{A_3A_4}$ temos que $\overline{OM}$ é um apótema a_6. Pelo Teorema de Pitágoras, no triângulo OMA_3 temos:

$$r^2 = a_6^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow a_6^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} \Rightarrow a_6^2 = \frac{3r^2}{4} \Rightarrow a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}.$$

Calcularemos agora o lado L_6, o perímetro e o apótema de um hexágono regular $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ circunscrito em uma circunferência de raio r como o da figura 70.

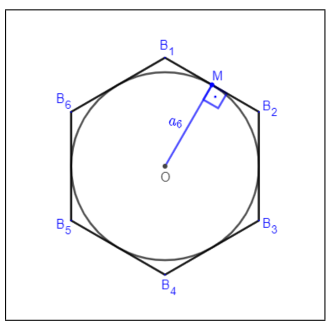

Figura 70. Hexágono circunscrito na circunferência.

Note que o apótema a_6 coincide com o raio, ou seja, $a_6 = r$ e que o ângulo central $B_1\widehat{O}B_2 = \dfrac{360^0}{6} = 60^0$. Assim, o triângulo B_1OB_2 é equilátero. Daí $\overline{OB_1} = \overline{OB_2} = L_6$.
Através do Teorema de Pitágoras temos:

$$L_6^2 = r^2 + \left(\frac{L_6}{2}\right)^2 \Rightarrow L_6^2 - \left(\frac{L_6}{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow \frac{3L_6^2}{4} = r^2 \Rightarrow L_6^2 = \frac{4r^2}{3} \Rightarrow L_6 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}.$$

Assim, o perímetro de $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ é $2p_6 = 6L_6 = 6\left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right) = 4r\sqrt{3}$.

Exemplo 4. Determinação do apótema de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência de raio r.

Denotaremos por a_n o apótema e l_n a medida do lado do polígono regular como na figura 71. Considere A_1 e A_2 dois vértices consecutivos do polígono e M o ponto médio do lado $\overline{A_1A_2}$. Temos pelo Teorema de Pitágoras que:

$$r^2 = a_n^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 \Rightarrow\Rightarrow a_n^2 = r^2 - \frac{l_n^2}{4} \Rightarrow a_n = \sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}}.$$

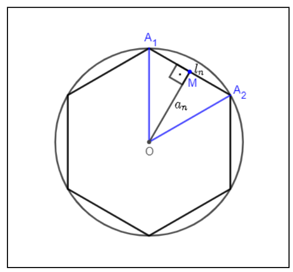

Figura 71. Apótema e o lado do polígono regular.

Exemplo 5. Dado um polígono regular de lado l_n inscrito em uma circunferência de raio r, podemos construir um polígono regular de lado $l_{(2n)}$ inscrito em uma mesma circunferência. Iremos deduzir a expressão para $l_{(2n)}$ em função de r e de l_n.

Considere o polígono regular de lado l_n e apótema a_n, com A_1 e A_2 dois vértices consecutivos e M o ponto médio de $\overline{A_1A_2}$. Prolongue o apótema até encontrar a circunferência em um ponto B_1, como na figura 72.

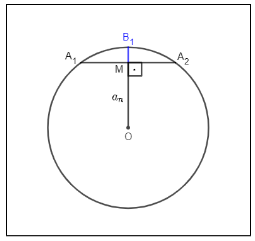

FIGURA 72. Prolongamento do apótema do polígono regular.

Note que os triângulos A_1MB_1 e A_2MB_1 são congruentes pelo caso LAL. Assim $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_1}$, veja figura 73. Este processo podes ser feito sobre todos os lados do polígono regular de lado l_n e daí obtemos um polígono regular com o dobro de lados.

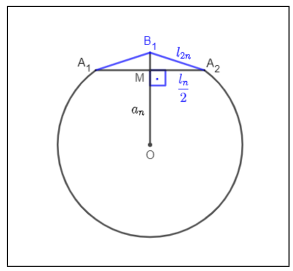

FIGURA 73. Construção dos dois lados do novo polígono regular.

Note que $\overline{B_1M} = r - a_n$, $\overline{A_2B_1} = l_{(2n)}$ e $\overline{MA_2} = \dfrac{l_n}{2}$. Através do teorema de Pitágoras, temos:

$$(l_{2n})^2 = (r - a_n)^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 \Rightarrow (l_{2n})^2 = r^2 - 2ra_n + (a_n)^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2.$$

No exemplo anterior vimos que $a_n = \sqrt{r^2 - \dfrac{l_n^2}{4}}$. Daí,

$$(l_{2n})^2 = r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}} + \left(\sqrt{r^2 - \frac{l_n^2}{4}}\right)^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2.$$

E obtemos:

$$l_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - l_n^2}}.$$

Exercícios

1- Um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência tem perímetro $15cm$. Determine as medidas: do lado do triângulo, do raio da circunferência e do apótema do triângulo equilátero.

2- Determine o raio das circunferências inscrita e circunscrita em um triângulo equilátero com altura $6cm$.

3- Um quadrado circunscrito em uma circunferência tem a diagonal $\frac{7}{4}m$. Determine o lado do quadrado, o perímetro, o raio da circunferência inscrita e o apótema do quadrado.

4- Determine a razão entre o perímetro do polígono regular inscrito na circunferência de raio r e o diâmetro quando:

a. o polígono é um triângulo equilátero;

b. o polígono é um quadrado;

c. o polígono é um hexágono regular.

5- Um octógono regular foi formado cortando-se, dos vértices de um quadrado, triângulos retângulos isósceles de catetos $1cm$. Determine:

a. o lado do octógono regular;

b. o lado do quadrado;

c. o apótema do octógono regular;

d. o raio da circunferência circunscrita no quadrado.

6- Um pentágono regular ABCDE está inscrito em uma circunferência de raio r, marque a alternativa correta:

a) Podemos afirmar que exatamente quatro vértices desse polígono também pertencem a essa circunferência.

b) Esse polígono pode ser dividido em cinco triângulos isósceles, caso a divisão seja feita por meio de seus raios.

c) O centro desse polígono não coincide com o centro da circunferência na qual ele está inscrito.

d) Os lados desse polígono podem assumir valores distintos.

7- Dois polígonos regulares com o mesmo número de lados estão inscritos em circunferências distintas. Um deles tem perímetro igual a 150 cm, e cada um de seus lados mede 15 cm. O segundo deles tem perímetro igual a 280 cm. Determine a medida do lado do polígono de perímetro maior.

8- Um octógono regular está inscrito em uma circunferência de raio r. Determine uma expressão para a medida do seu lado em função do raio r.

9- Um hexadecágono regular está inscrito em uma circunferência de raio r. Determine uma expressão para a medida do seu lado em função do raio r.

10- Um polígono regular de 32 lados está inscrito em uma circunferência de raio r. Determine uma expressão para a medida do seu lado em função do raio r.

2.5. **Semelhança.** Sejam F e F' figuras, do plano ou do espaço e r um número real positivo. Dizemos que F e F' são semelhantes, com razão de semelhança r, quando existe uma correspondência biunívoca $f : F \to F'$, entre os pontos de F e os pontos de F', com a seguinte propriedade: dados A e B em F tais que $f(A) = A'$ e $f(B) = B'$, então $\overline{A'B'} = r\overline{AB}$. A correspondência biunívoca f chama-se **semelhança de razão** r entre F e F'. Se $A' = f(A)$, dizemos que os pontos A e A' são homólogos.

Uma semelhança de razão 1 chama-se **isometria**. Quando existe uma isometria entre as figuras F e F', diz-se que estas são congruentes. A "Semelhança"possui propriedades interessantes que iremos tratar agora:

Propriedade 1. Vamos mostrar que toda semelhança transforma pontos colineares em pontos colineares.

Justificativa:

Sejam $f : F \to F'$ uma semelhança de razão r e A, B e C pontos em F tais que $C \in \overline{AB}$. Daí, então $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$ e pela definição de semelhança $\overline{A'B'} = r\overline{AB}$. Assim, $r(\overline{AB}) = r\left(\overline{AC} + \overline{CB}\right) = r\overline{AC} + r\overline{CB}$, mas $r\overline{AC} + r\overline{CB} = \overline{A'C'} + \overline{C'B'}$. Logo, $\overline{A'C'} + \overline{C'B'} = \overline{A'B'}$. Com isso concluímos que $C' \in \overline{A'B'}$.

Propriedade 2. Toda semelhança $f : F \to F'$, de razão r, transforma um círculo de raio a contido em F em um círculo de raio ra contido em F'.

Justificativa:

Seja C um círculo de centro O e raio a. Queremos concluir que a imagem de C é um círculo de centro $f(O)$ e raio ra. Basta notar que se um ponto $X \in C$ então $\overline{OX} \leq a$ e portanto $\overline{f(O)\,f(X)} = r\overline{OX} \leq ra$, o que implica que $f(X)$ pertence ao círculo de centro $f(O)$ e raio ra. Observe também que se $\overline{OX} = a$ teremos $\overline{f(O)\,f(X)} = r\overline{OX} = ra$, ou seja, a semelhança além de levar o círculo no círculo ela também leva a circunferência na circunferência. Em uma linguagem mais técnica temos que a semelhança leva pontos interiores de uma figura em pontos interiores de outra figura e pontos da fronteira de uma figura em pontos da fronteira de outra figura.

Observação 1. É claro que se $f : F \to F'$ é uma semelhança de razão r então $f^{-1} : F' \to F$ é uma semelhança de razão $\frac{1}{r}$. (Exercício)

Observação 2. Sejam F e F' dois triângulos. Se existe um semelhança f de razão r que leva F em F' então f leva os vértice de F nos vértice de F'.
Justificativa:

Seja A um vértice de F e denote $A' = f(A)$. Já sabemos que f leva pontos colineares em pontos colineares e que se f é uma semelhança f^{-1} também é uma semelhança. Suponha, (por contradição), que A' não é vértice de F'. Então A' pertence à algum lado do triângulo F', digamos $\overline{B'C'}$, sendo diferente de $B' = f(B)$ e de $C' = f(C)$. Mas isto implica que A pertence ao segmento $\overline{BC}$ com $A \neq B$ e $A \neq C$, o que contraria o fato de que A é vértice de F.

Definição: Se $f : F \to F'$ é uma semelhança que transforma o segmento $\overline{AB}$ em F no segmento $\overline{A'B'}$ em F', dizemos que estes segmentos são homólogos. No caso de polígonos, se $\overline{AB}$ é um lado de F e $\overline{A'B'}$ é um lado de F' tal que f transforma $\overline{AB}$ em $\overline{A'B'}$ então dizemos que $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são lados homólogos.

Pelas observações anteriores, fica claro que uma semelhança f de razão r, entre os triângulos ABC e $A'B'C'$, determina lados homólogos proporcionais. Com o objetivo de lembrar o leitor da semelhança de triângulos estudadas na escola básica, iremos apresentar brevemente critérios mínimos que permitem estabelecer a semelhança de dois triângulos dados. Tais critérios são conhecidos como: casos de semelhança de triângulos.

Caso AA. Se dois triângulos ABC e DEF possuem ângulos tais que $\widehat{A} = \widehat{D}$ e $\widehat{B} = \widehat{E}$ então os triângulos são semelhantes. Veja figura 74.

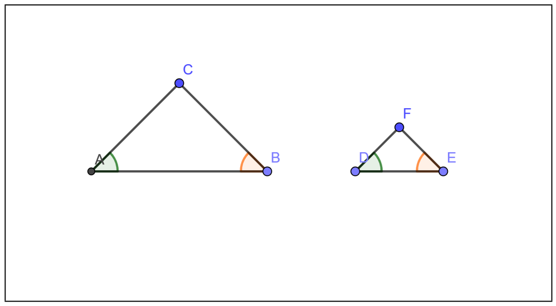

FIGURA 74. Caso AA de semelhança de triângulos.

Caso LAL. Se dois triângulos ABC e DEF possuem ângulos tais que $\widehat{A} = \widehat{D}$ e lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ proporcionais aos lados $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$, respectivamente, então esses triângulos são semelhantes. Veja figura 75.

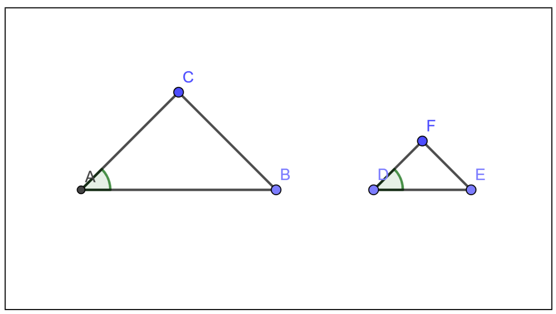

FIGURA 75. Caso LAL de semelhança de triângulos.

Caso LLL. Se dois triângulos ABC e DEF possuem lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ proporcionais aos lados $\overline{DE}$, $\overline{DF}$ e $\overline{EF}$, respectivamente, então esses triângulos são semelhantes. Veja figura 76.

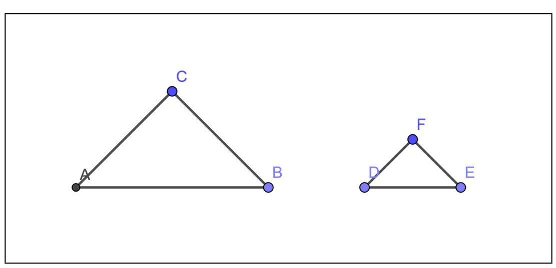

FIGURA 76. Caso LLL de semelhança de triângulos.

Uma formalização rigorosa destes casos precisaria de mais alguns teoremas que fogem do objetivo destas notas e por isso não faremos aqui, mas o leitor mais curioso pode encontrar em [2].

Exercícios

1- Dois quadrados são sempre semelhantes? Justifique sua resposta.

2- Dois polígonos regulares com a mesma quantidade de lados são sempre semelhantes? Justifique sua resposta.

3- Dois retângulos são sempre semelhantes? Justifique sua resposta.

4- Dois retângulos R e R' são semelhantes na razão $\dfrac{3}{4}$ de R para R'. Determine a medida dos lados de R', sabendo que os lados de R medem $12cm$ e $16cm$.

5- Dois polígonos regulares de mesma quantidade de lados são semelhantes na razão k. Determine a razão entre os perímetros. Justifique sua resposta.

6- Um retângulo é chamado áureo se a razão entre seus lados é $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Se um retângulo é semelhante a um retângulo áureo ele também é áureo? Justifique sua resposta.

7- Sabendo que um triângulo retângulo de catetos 3 e 4 é semelhante a um triângulo retângulo de hipotenusa 15. Determine a razão entre seus lados.

2.6. **Comprimento de uma circunferência.** Neste tópico iremos introduzir ideias que nos permitem compreender o número π e o comprimento de uma circunferência. Por se tratar de um texto introdutório, vamos evitar termos técnicos que exijam conhecimento do cálculo diferencial, por esta razão, podem ficar algumas lacunas em certos resultados, mas a medida que os leitores forem adquirindo conhecimentos da teoria de limites e sequências poderão revisitar este tópico e completar possíveis lacunas com argumentos mais técnicos que de certa forma facilitam as justificativas de alguns resultados.

Definição: (comprimento de uma circunferência) O comprimento de uma circunferência C é o número real $|C|$ cujas aproximações por falta são os perímetros $2p_n$ dos polígonos regulares inscritos no círculo C e cujas aproximações por excesso são os perímetros $2P_n$ dos polígonos regulares circunscritos a C.

Pela definição temos $2p_n < |C| < 2P_n$ para todo n.

Observação. Sejam C e C' dois círculos de raio R e R' respectivamente. Então
$$\frac{|C'|}{2R'} = \frac{|C|}{2R}.$$
Justificativa:

Já vimos que dois círculos quaisquer são semelhantes. Supondo que a razão de semelhança entre C e C' seja r, então todo segmento AB contido em C é lavado em um segmento $A'B'$ em C' de tal forma que $\left|\overline{A'B'}\right| = r\left|\overline{AB}\right|$. Logo, dado um polígono I_n, inscrito em C, de lado l, temos em C' um polígono "homólogo"I'_n inscrito em C' de lado rl. Sendo assim o perímetro de I'_n é $r\times$(perímetro de I_n) , bem como $R' = rR$. Portanto o comprimento de C' é o número real cuja aproximação por falta são r vezes as aproximações por falta do comprimento de C. De forma análoga, podemos usar o mesmo argumento para polígonos circunscritos e concluir que o comprimento de C' é o número real cuja aproximação por excesso são r vezes as aproximações por excesso do comprimento de C. Desta forma
$$|C'| = r\,|C| \Rightarrow |C'| = \frac{R'}{R}\,|C| \Rightarrow \frac{|C'|}{R'} = \frac{|C|}{R} \Rightarrow \frac{|C'|}{2R'} = \frac{|C|}{2R}.$$

A discussão anterior independe do raio do círculo, portanto mostra uma propriedade importante, o fato de que o quociente $\frac{|C|}{2R}$ é constante, ou seja, o quociente do comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro é constante. Iremos denotar esta constante pela letra grega π. Com isso temos
$$\frac{|C|}{2R} = \pi \Rightarrow |C| = 2\pi R.$$
Note que a definição de comprimento de uma circunferência permite que você conheça o valor aproximado de π da seguinte forma: O semiperímetro de um polígono de n lados inscrito na circunferência de raio 1 é menor que π, enquanto o semiperímetro de um polígono de n lados circunscrito na circunferência de raio 1 é maior que π. Quando aumentamos o número de lados dos polígonos inscritos, aumentamos o seu semiperímetro e nos aproximamos de π, por baixo, por outro lado quando aumentamos o número de lados de um polígono circunscrito, diminuímos o seu semiperímetro e nos aproximamos de π, por cima.

Exercícios

1- Determine o comprimento das circunferências inscritas e circunscritas ao triângulo equilátero de $9cm$ de perímetro.

2- Se duplicarmos o raio de uma circunferência, o que ocorre com seu comprimento? Justifique.

3- O raio de duas circunferências concêntricas (de mesmo centro) diferem por $2cm$, determine o comprimento da circunferência de maior raio, sabendo que o comprimento da circunferência de menor raio é 30π.

4- Com o auxílio de uma calculadora, obtenha uma aproximação para o número π a partir de um octógono regular.

5- Com o auxílio de uma calculadora, obtenha uma aproximação para o número π a partir de um hexadecágono regular.

6- Com o auxílio de uma calculadora, obtenha uma aproximação para o número π a partir de um polígono regular de 32 lados.

7- Determine o diâmetro de uma circunferência de comprimento 24π.

8- Determine o comprimento das circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo equilátero de $4cm$ de apótema.

9- Determine o comprimento de uma circunferência circunscrita a um hexágono regular de $30cm$ de perímetro.

10- A maior roda-gigante do mundo, atualmente (2020), está localizada em Dubai e chama-se Ain Dubai que significa Olho de Dubai. A estrutura tem 210 metros de diâmetro e 48 cabines com capacidade cada uma delas para 40 passageiros. Utilizando uma aproximação para $\pi = 3,14$ determine a distância aproximada entre as cabines em metros.

3. Áreas de figuras planas

Objetivos. Deduzir as fórmulas referentes a área de regiões planas.

Trataremos agora de medir a porção do plano ocupada por uma região delimitada por uma figura plana F. Para isso iremos comparar F com uma unidade de área (análogo cap. 1). O resultado desta comparação será um número, que indicará quantas vezes a região delimitada pela figura F contém a unidade de área. A fim de facilitar nossa linguagem ao invés de escrever área da região delimitada pela figura, iremos escrever área da figura.

3.1. **Unidade de área.** Nossa unidade de medida de área será o quadrado de lado $1uc$, ou seja, um quadrado Q cujo lado possui uma unidade de coprimento, possui 1 unidade de área (ua).

Vamos assumir o fato, verdadeiro, de que figuras congruentes possuem mesma área, ver [12]. .

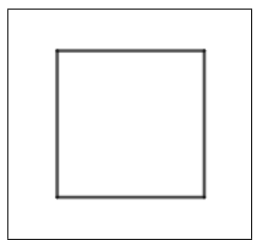

Figura 77. Quadrado de lado $1uc$.

Considere o quadrado de lado $1uc$ como da figura 77. Como tratado no capítulo 1, podemos dividir o segmento de lado $1uc$ em v partes de mesma medida. Note que a medida de cada "parte" será $\frac{1}{v}$. Procedendo dessa forma, em dois lados não paralelos do quadrado obtemos $v \cdot v$ quadrados de lado $\frac{1}{v}$. Assim, quando somamos as áreas dos $v \cdot v$ quadrados de lado $\frac{1}{v}$, também obtemos $1uc$. Logo,

$$(v \cdot v) \times A\left(\frac{1}{v}\right) = 1,$$

onde $A\left(\frac{1}{v}\right)$ é a área do quadrado de lado $\frac{1}{v}$. O que implica em:

$$A\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v^2},$$

O argumento acima nos garante que em um quadrado cujas medidas dos lados são expressas por um número racional l temos sua área dada por l^2. É possível mostrar que este resultado estende-se para quadrados cujas medidas dos lados são espressas por números irracionais. Tal demosntração foge dos objetivos deste livro e será deixada possuemmDe forma geral, a área do quadrado de lado l é l^2.

Para determinar a área de um retângulo de base b e altura h, construa um quadrado de lado $(b+h)$ como na figura 78.

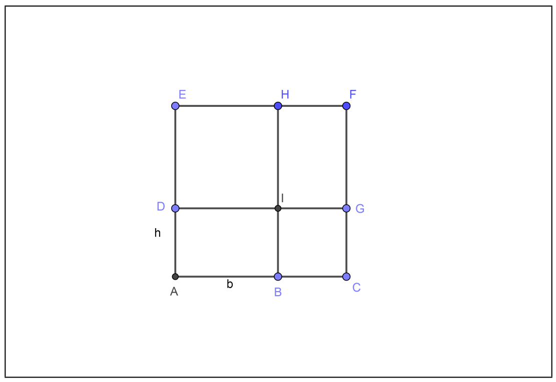

Figura 78. Decomposição do quadrado.

Temos que, a área do quadrado de lados $b+h$ é $(b+h)^2$. Note que esse quadrado é decomposto em dois retângulos de lados b e h e dois quadrados, um de lado b e outro de lado h. Portanto,

$$2A(b,h) + A(h) + A(b) = (b+h)^2,$$

onde $A(b,h)$ é a área do retângulo de lados b e h, $A(h)$ e $A(b)$ são as áreas dos quadrados de lados h e b, respectivamente. Logo,

$$2A(b,h) + h^2 + b^2 = b^2 + 2bh + h^2.$$

O que implica em, $A(b,h) = b \cdot h$. Conclusão: A área (A) do retângulo de base b e altura h é dada por $A = b.h$. Veja figura 79

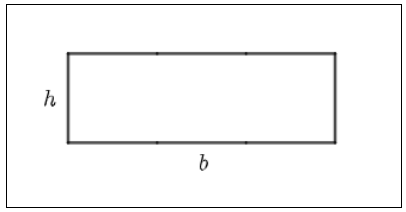

Figura 79. Retângulo de lados b e h.

Vamos determinar agora a área do triângulo . Consideraremos primeiro, o caso em que o triângulo é retângulo. Veja figura 80.

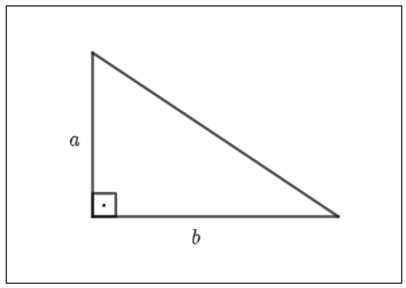

Figura 80. Triângulo retângulo de catetos a e b.

Note que podemos construir um retângulo, como na figura 81.

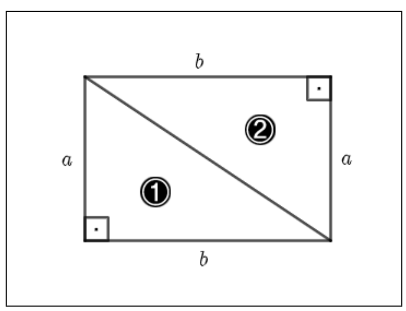

Figura 81. Retângulo de lados a e b.

Pelo caso LLL, temos que os triângulos (1) e (2) são congruentes. Logo, possuem a mesma área. Então

$$2A = a \cdot b \Rightarrow A = \frac{a \cdot b}{2}.$$

No caso de um triângulo qualquer, iremos mostrar que sua área também é o semiproduto de qualquer base pela altura correspondente. De fato, considerando as duas possibilidades restantes, caso o triângulo não seja retângulo, temos:

a) a altura está entre as extremidades da base. Veja figura 82.

Então: $A = A_1 + A_2$, onde $A_1 = \dfrac{b_1 \cdot h}{2}$ e $A_2 = \dfrac{b_2 \cdot h}{2}$. Portanto,

$$A = \frac{(b_1 + b_2)}{2}h \Rightarrow A = \frac{b \cdot h}{2}.$$

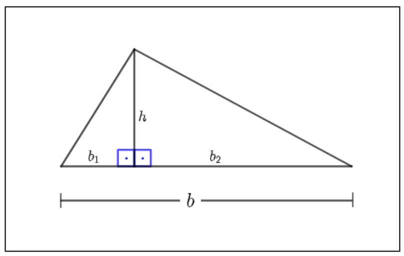

Figura 82. Triângulo não retângulo caso a.

b) a altura está fora da base. Veja figura 83.

Então: $\dfrac{b_1 \cdot h}{2} + A = \dfrac{(b_1 + b) \cdot h}{2}$ o que implica $A + \dfrac{b_1 \cdot h}{2} = \dfrac{b_1 \cdot h}{2} + \dfrac{b \cdot h}{2}$ e portanto

$$A = \frac{b \cdot h}{2}.$$

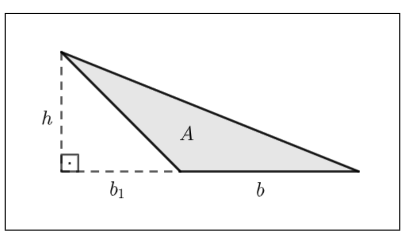

Figura 83. Triângulo não retângulo caso b.

Agora, que sabemos como achar áreas de triângulos, determinar a área do demais polígonos é simples, basta dividir a região poligonal em triângulos e somamos a área de cada uma delas.

Exemplo 1. Determinação da expressão da área de um paralelogramo $PQRS$ como o da figura 84.

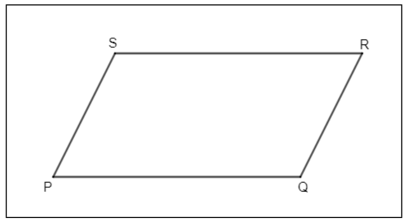

FIGURA 84. Paralelogramo $PQRS$.

O paralelogramo pode ser decomposto em um retângulo e dois triângulos retângulos congruentes. Note que na figura 85 à seguir, $a_1 = a_2$.

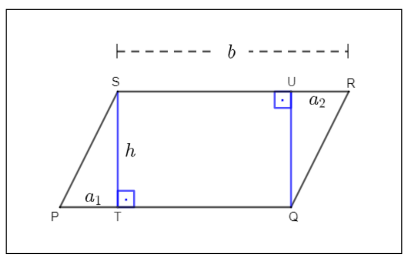

FIGURA 85. Decomposição do paralelogramo.

Assim, temos:

$$A = \frac{a_1 \cdot h}{2} + \frac{a_2 \cdot h}{2} + (b - a_2)h \Rightarrow A = \frac{a_2 \cdot h}{2} + \frac{a_2 \cdot h}{2} + bh - a_2h \Rightarrow A = bh$$

Exemplo 2. Determinação da expressão da área de um polígono regular.

Suponha que o polígono regular possui lado de medida l. Já sabemos que todo o polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência. Iremos decompor o polígono em n triângulos a partir do centro, como mostra a figura 86.

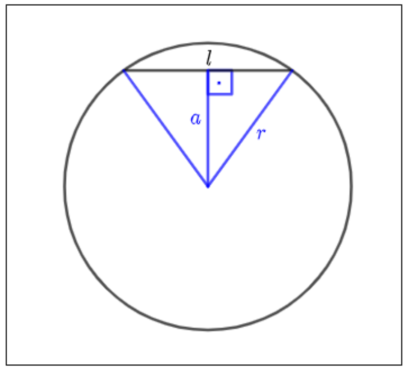

Figura 86. Lado do polígono regular.

A área de cada triângulo é $\dfrac{al}{2}$, onde a é o apótema do polígono regular. Portanto, a área procurada é

$$A = n\frac{la}{2} \Rightarrow A = \frac{nl}{2}a.$$

Como nl é o perímetro do polígono regular, a área procurada é pa, onde p é o semiperímetro e a é o apótema.

Observação. Se optássemos pela circunferência de raio R inscrita no polígono a expressão da área do polígono é pR, onde p é o semiperímetro e R é o raio.

Exercícios

1- A partir da fórmula da área do retângulo, deduza a fórmula da área do quadrado.

2- Determine a fórmula da área do losango em função da medida das diagonais.

3- Determine a fórmula da área do trapézio.

4- Determine a área de um retângulo que possui um lado de medida $3cm$ e diagonal $7cm$.

5- Determine a área de um triângulo equilátero de altura $4cm$.

6- Determine a área de um paralelogramo de lados $9cm$ e $8cm$, sabendo que um dos ângulos formado pelos dois lados mede 45^0.

7- A área de um trapézio é $205cm^2$ e sua altura é $10cm$. Determine a medida das bases, sabendo que a base maior é $8cm$ acrescido do dobro da base menor.

8- Determine a área de um hexágono regular de lado $4m$.

9- Determine a medida dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa $2\sqrt{5}cm$ e de área $5cm^2$.

10- Os lados de um triângulo escaleno, medem: $4cm$,$6cm$ e $9cm$. Determine a altura do triângulo relativa ao lado $9cm$ e a área do triângulo.

3.2. **Justificativas geométricas do Teorema de Pitágoras.** O teorema de Pitágoras afirma que em um triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, ou seja, se denotarmos a medida da hipotenusa por a e a medida de cada um dos catetos por b e c, teremos na nossa notação: $a^2 = b^2 + c^2$. Aqui apresentaremos duas justificativas geométricas adaptadas do livro [10] baseadas em comparações de áreas.

1. Decomposição do quadrado de lados de medida $b + c$: Considere o quadrado de lados $b + c$ da figura 87.

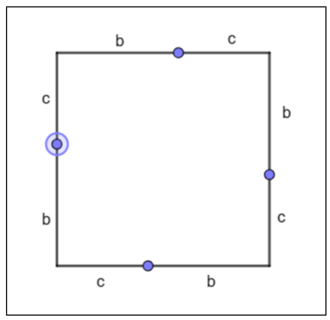

FIGURA 87. Quadrado de lados $b + c$.

No interior do quadrado de lados $b + c$ construímos quatro triângulos retângulos como na figura 88.

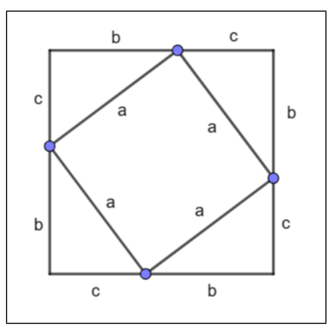

FIGURA 88. Decomposição no quadrado.

Note que a área do quadrado de lados $b + c$ é obtida de duas formas:

a. $A(Q) = (b + c)^2$, ou seja, $A(Q) = b^2 + 2bc + c^2$.

b. $A(Q) = 4\left(\frac{bc}{2}\right) + a^2$.
Logo, como a área do quadrado é única temos:

$$2bc + a^2 = b^2 + 2bc + c^2.$$

Portanto,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

2. Decomposição do trapézio retângulo. Considere um trapézio retângulo, isto é, um trapézio com um dos lados formando ângulos retos com as bases, de forma que as medidas das bases sejam b e c e a altura $b + c$ como na figura 89.

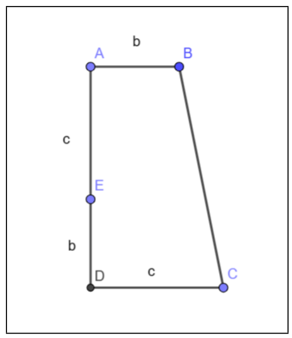

Figura 89. Trapézio retângulo.

No interior do trapézio consideramos os triângulos retângulos de lados de medidas b e c como na figura 90.

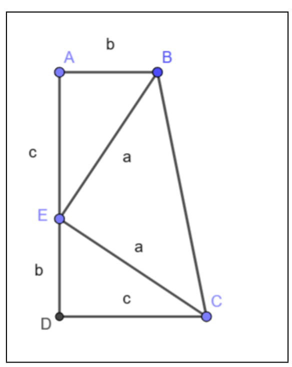

Figura 90. Decomposição no trapézio retângulo.

Note que os triângulos retângulos ABE e DEC são congruentes pelo caso LAL. Assim os segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$ são congruentes. Denotaremos suas medidas por a. Além disso, como $A\widehat{B}E = D\widehat{E}C$ e $A\widehat{B}E + A\widehat{E}B = 90^0$ então temos que o triângulo BEC é reto em E. Logo o trapézio fica decomposto em três triângulos retângulos. Note que a área dessa trapézio é obtida de duas formas:

a. $A(T) = \dfrac{(b+c)(b+c)}{2}$;

b. $A(T) = 2\dfrac{bc}{2} + \dfrac{a^2}{2}$.

Logo, como a área do trapézio é única temos:

$$\frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} + bc = bc + \frac{a^2}{2}.$$

Portanto,

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

3.3. **Área do círculo.** Agora queremos determinar uma expressão da área de um círculo. Para isto iremos abordar a relação entre polígonos semelhantes e área.

3.3.1. *Relação entre polígonos semelhantes e área.* Note que a relação entre a área de dois triângulos semelhantes de razão r com lados homólogos b, b' e altura h e h' é

$$\frac{b'h'}{2} = \frac{rb \cdot rh}{2} = r^2\frac{bh}{2},$$

ou seja, se existe uma semelhança $f : T \to T'$ de razão r então a área do triângulo T' é r^2 vezes a área de T.

Como qualquer polígono plano pode ser dividido em triângulos, segue que se $f : T \to T'$ é uma semelhança de razão r entre os polígonos F e F' então:

$$A(F') = r^2(A(F)),$$

onde A representa a área.

3.3.2. *Dedução da área do círculo.* A área do círculo é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos regulares nele inscritos e cujas aproximações por excesso são as áreas dos polígonos regulares a ele circunscritos.

Denotaremos a área do círculo de raio R por A_C, a_n o apótema do polígono regular inscrito de n lados, p_n o semiperímetro do polígono regular inscrito de n lados e P_n o semiperímetro do polígono regular circunscrito. Temos:

$$p_n a_n < A_C < P_n R$$

para todo n.

Esta definição implica que você sempre poderá aproximar a área do círculo por baixo pela área de um polígono inscrito, bastando aumentar o número de lados para se aproximar cada vez mais do que seria o valor exato.

Da mesma forma sempre poderemos nos aproximar da área do círculo, por cima, pela área de um polígono circunscrito. Um exemplo de uma sequência de aproximações ocorre da seguinte forma:

$$p_4 a_4 < p_8 a_8 < P_{16} a_{16} < ... < p_{2n} a_{2n} < ... < A_C < ... < P_{2n} R < ... < P_{16} R < ...$$

Por outro lado, pela definição de comprimento de uma circunferência temos:

$$p_n < \pi R < P_n$$

Multiplicando a desigualdade por R temos:

$$p_n R < \pi R^2 < P_n R$$

Mas $R > a_n = \sqrt{R^2 - l^2}$, logo:

$$p_n a_n < \pi R^2 < P_n R,$$

ou seja, πR^2 é maior que a área de qualquer polígono regular inscrito na circunferência de raio R, e menor que a área de qualquer polígono regular circunscrito na circunferência de raio R. Com isso, temos que $A_C = \pi R^2$, pois caso contrário teríamos duas possibilidades:

$$A_C > \pi R^2 \qquad ou \qquad A_C < \pi R^2$$

Se fosse $A_C > \pi R^2$ deveria existir um polígono inscrito tal que $p_n a_n > \pi R^2$, para termos $p_n a_n$ próximo da área do círculo, mas isto, como já vimos, é impossível, pois implicaria $p_n > \pi R$ que é absurdo. De forma análoga, $A_C < \pi R^2$ implica na existência de um polígono circunscrito tal que $P_n R < \pi R^2$, o que é impossível, pois implicaria $P_n < \pi R$ que é absurdo. Concluímos que a área do círculo de raio R é πR^2.

Exercícios

1- Um círculo possui área igual a um quadrado de lado l. Determine a medida do raio do círculo em função do lado l do quadrado.

2- Um quadrado está inscrito em um círculo de raio 3. Determine a área da região entre o círculo e o quadrado.

3- A região limitada entre duas circunferências de mesmo centro é chamado de coroa circular. Determine a área de uma coroa formada por circunferências de raios $9cm$ e $11cm$.

4- Determine a razão entre as áreas dos círculos inscrito e circunscrito a um triângulo equilátero de lado l.

5- Sobre os lados de um triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a, são traçadas três semicircunferências externas tendo os lados como diâmetro. Determine a relação entre as áreas dos três semicírculos.

6- Um hexágono regular está inscrito em uma círculo de área $121\pi cm^2$. Determine a área do hexágono.

7- Em quanto aumenta a área de um círculo se dobrarmos o seu raio? Justifique.

8- (ENEM 2019)Em um condomínio, uma área pavimentada, que tem a forma de um círculo com diâmetro medindo $6m$, é cercada de grama. A administração do condomínio deseja ampliar esta área, mantendo seu formato circular, e aumentando, em $8m$, o diâmetro dessa região, mantendo o revestimento da parte já existente. O condomínio dispõe, em estoque, de material suficiente para pavimentar mais $100m^2$ de área. O síndico do condomínio irá avaliar se esse material disponível será suficiente para pavimentar a região a ser ampliada.

Utilize 3 como aproximação para π.

A conclusão correta a que o síndico deverá chegar, considerando a nova área a ser pavimentada, é a de que o material disponível em estoque:

a) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $21m^2$;

b) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $24m^2$;

c) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $48m^2$;

d) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $108m^2$;

e) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede $120m^2$;

9- (UPE/2014) A figura 91 a seguir representa um hexágono regular de lado medindo 2 cm e um círculo cujo centro coincide com o centro do hexágono, e cujo diâmetro tem medida igual à medida do lado do hexágono. Nessas condições, quanto mede a área da superfície pintada?(considere $\pi = 3$ e $\sqrt{3} = 1,7$)

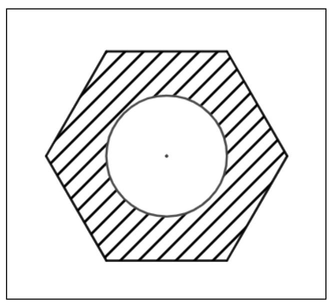

FIGURA 91. Hexágono regular e círculo.

a) $2,0cm^2$, b) $3,0cm^2$, c) $7,2cm^2$, d) $8,0cm^2$, e) $10,2cm^2$

10- Consideremos um círculo C de centro O e sejam A e B dois pontos da circunferência de C que não sejam extremidades de um diâmetro. Chamamos de setor circular menor AOB à reunião dos conjuntos dos raios OA e OB e de todos os pontos do círculo C que estão no interior do ângulo $A\widehat{O}B$, ou seja, os pontos da região do plano determinada pelo ângulo e pelo círculo que contém o segmento $\overline{AB}$. Por simplicidade, vamos nos referir ao setor circular menor, apenas como setor circular. Sendo assim, determine a área de um setor circular de raio 2 e ângulo central medindo 30.

4. Formas geométricas espaciais

Objetivos. Identificar figuras no espaço que são poliedros. Classificar e identificar elementos de algumas figuras espaciais. Calcular área lateral e total em figuras espaciais.

Neste capítulo iremos abordar alguns sólidos que são estudados no ensino básico.

4.1. **Definindo alguns sólidos geométricos.** Um dos sólidos geométricos mais conhecidos são os poliedros. Mas o que é um poliedro? Para responder a essa pergunta utilizaremos a definição dada em [8].

Poliedro. É uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados faces onde:

a) cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

b) A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um outro vértice ou é vazia. Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro.

c) sempre é possível ir de um ponto de uma face a um ponto qualquer de outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas por arestas).

Na figura 92, temos exemplos de dois poliedros.

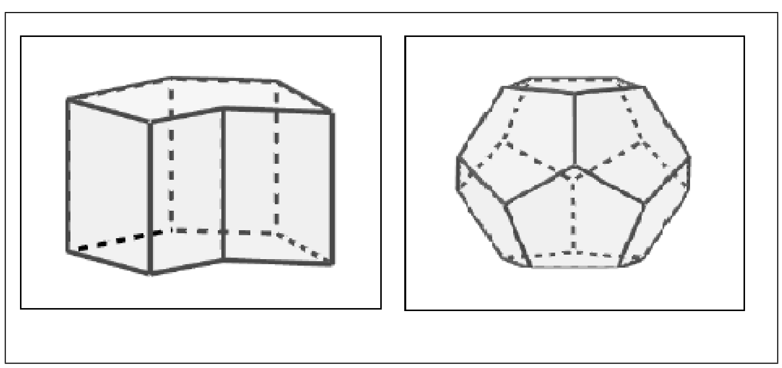

Figura 92. Poliedros.

Já a figura 93 mostra um exemplo de um sólido que não é um poliedro.

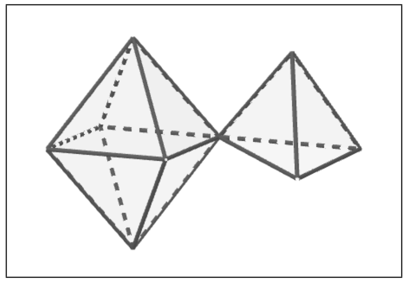

Figura 93. Não Poliedro.

Dentre os poliedros iremos destacar dois: prisma e pirâmide

Prisma. Consideremos um polígono convexo $A_1A_2...A_n$ situado num plano α e um segmento de reta $\overline{PQ}$, cuja reta suporte intercepta o plano α. Chama-se prisma à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a $\overline{PQ}$, com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semi-espaço do determinado por α. Veja a figura 94.

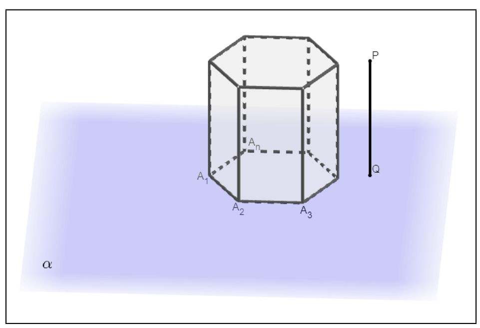

Figura 94. Prisma.

Elementos de um prisma:

Na figura 95 estão destacados os seguintes elementos do prisma:

-2 bases congruentes (polígono convexo $ABC...MN$ situado num plano α e o polígono $A'B'C'...M'N'$ situado num plano β paralelo ao plano α);

-n faces laterais (paralelogramos);

-$(n+2)$ faces.

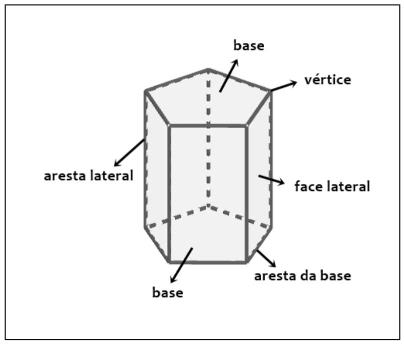

FIGURA 95. Elementos do Prisma.

Observação. Um prisma é dito **prisma reto** se suas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases.

Área lateral e área total de um prisma

A área lateral (A_l) de um prisma é a soma das áreas das faces laterais (paralelogramos).

A área total (A_t) de um prisma é a soma das áreas das faces laterais (A_l) com as áreas das bases (duas bases).

Exercícios

1- Um prisma recebe o nome de acordo com o polígono de sua base. Por exemplo, um prisma é chamado triangular quando suas bases são triângulos. Sabendo disso, escreva o número de faces laterais, faces totais, número de vértices, número de arestas laterais e arestas totais a cada prisma: **a**. quadrangular; **b**. pentagonal; **c**. hexagonal; **d**. octagonal; **e**. decagonal.

2- A base de um prisma reto é um triângulo retângulo de catetos $6cm$ e $8cm$. Determine a área lateral desse prisma, sabendo que sua altura mede $14cm$.

3- Determine a área total de um prisma reto cuja base é um losango de diagonais medindo $10cm$ e $24cm$ e de altura $16cm$.

4- Um cubo é um prisma reto em que todas as faces são quadrados. Determine a área total de um cubo cujo perímetro de uma face é $16cm$.

5- A aresta lateral de um prisma reto mede $5cm$ e o perímetro da base é $36cm$. Determine a área lateral. É possível determinar a área total? Justifique sua resposta.

Pirâmide. Consideremos um polígono convexo $A_1A_2...A_n$ situado num plano α e um ponto V fora de α. Chama-se pirâmide à reunião de segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos do polígono. Veja a figura 96.

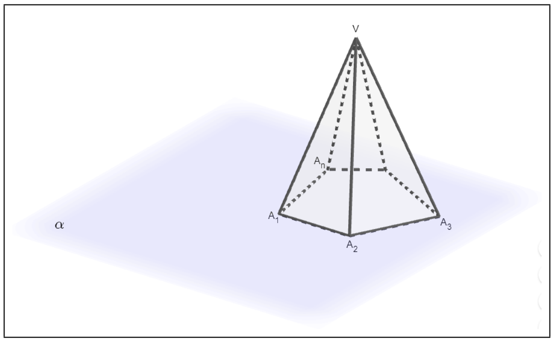

Figura 96. Pirâmide.

Elementos de uma pirâmide

Na figura 97 temos destacados os seguintes elementos da pirâmide: -1 base (polígono convexo $ABC...MN$ situado num plano α)

-n faces laterais (triângulos)

-$(n+1)$ faces

- o vértice V (ponto V fora de α)

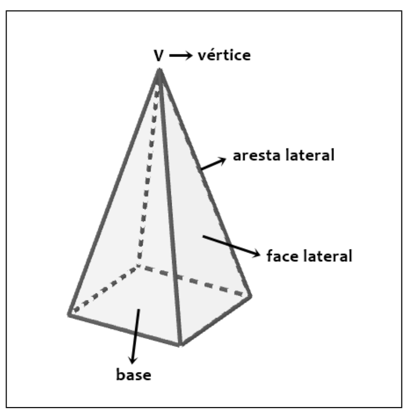

Figura 97. Elementos da pirâmide.

Área lateral e área total de uma pirâmide

A área lateral (A_l) de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais (triângulos).

A área total (A_t) de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais (A_l) com a área da base.

Exercícios

1- Uma pirâmide é dita regular quando sua base é um polígono regular e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. Determine a área lateral e a área total de uma pirâmide regular cuja base é um quadrado de lado $12cm$ e aresta lateral $10cm$.
2- Uma pirâmide regular possui base de perímetro $56cm$ e área lateral de $224cm^2$. Determine a altura de cada face lateral.
3- Um tetraedro regular é uma pirâmide com base triangular e que possui as seis arestas congruentes entre si. Determine a área total e a medida da altura de um tetraedro regular cuja medida da aresta é a.
4- Determine a altura e a área lateral de uma pirâmide regular de base hexagonal cuja aresta da base é $4cm$ e aresta lateral $5cm$.
5- A grande pirâmide de Quéops, localizada no Egito, é uma pirâmide regular de base quadrada, com $137m$ de altura. Cada face dessa pirâmide é um triângulo isósceles cuja altura relativa à base mede $179m$. Determine a área da base dessa pirâmide.

Os sólidos que apresentaremos a seguir não são poliedros, mas possuem propriedades que os tornam dignos de serem estudados.

Cilindro circular. Consideremos um círculo de centro O e raio r, situado num plano α, e um segmento de reta $\overline{PQ}$, não nulo, não paralelo e não contido em α. Chama-se cilindro circular à reunião dos segmentos congruentes e paralelos a $\overline{PQ}$, com uma extremidade nos pontos do círculo e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α. Veja figura 98.

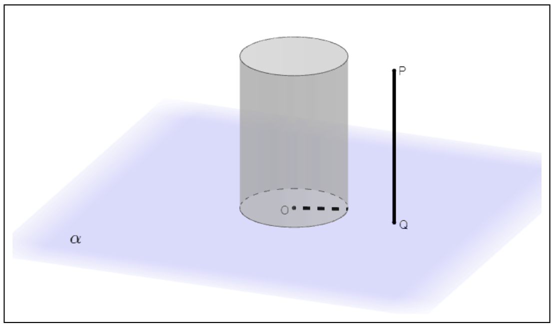

FIGURA 98. Cilindro circular.

Elementos de um cilindro circular

Na figura 99 temos destacados os seguintes elementos do cilindro circular:

-2 bases (círculo de centro O e raio r, situado num plano α, e o círculo de centro O' e raio r situado num plano β paralelo ao plano α);

-geratrizes: são os segmentos com uma extremidade em um ponto da circunferência de centro O e raio r e outra extremidade no ponto correspondente da circunferência de centro O' e raio r;

-r é o raio das bases.

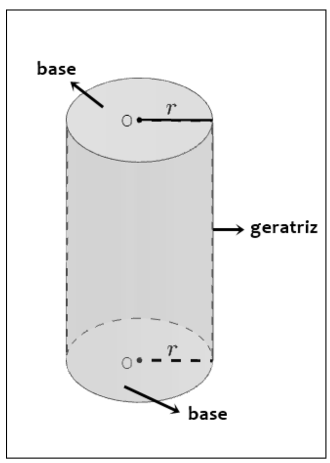

FIGURA 99. Elementos do cilindro circular.

A altura de um cilindro circular é a distância h entre os planos das bases.

Observação. Se as geratrizes são oblíquas aos planos das bases diremos que o cilindro circular é oblíquo, e se as geratrizes são perpendiculares aos planos das bases, temos um cilindro circular reto.

Área lateral e área total de um cilindro circular reto

A superfície lateral (A_l) de um cilindro circular reto é equivalente a um retângulo de dimensões $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base) e h (altura do cilindro). Veja a figura 100.

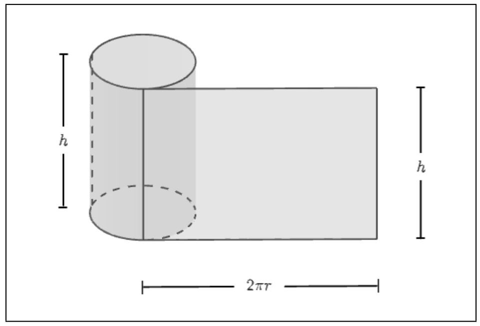

FIGURA 100. Superfície lateral do cilindro circular reto.

A área total do cilindro circular reto é a soma da área lateral (A_l) com as áreas das duas bases (dois círculos), veja a figura 101.

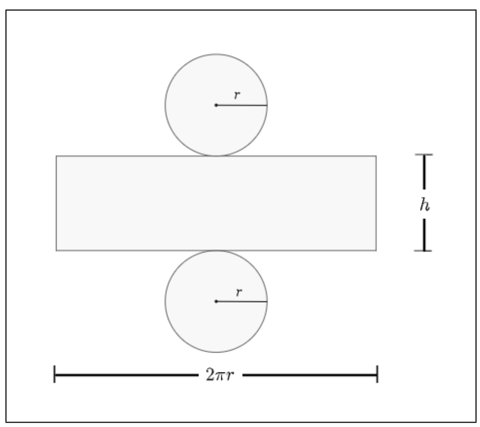

FIGURA 101. Planificação do cilindro circular reto.

Exercícios

1- Determine a expressão para a área lateral e a área total de um cilindro circular reto de altura h e raio r.

2- Um cilindro circular reto possui base de área $16\pi cm^2$ e altura $5\sqrt{2}cm$. Determine sua área lateral.

3- Um cilindro circular reto de $5cm$ de altura possui área lateral $20\pi cm^2$. Determine a área de uma das bases desse cilindro.

4- Um cilindro circular reto é chamado de **cilindro equilátero** se sua altura tem a mesma medida do diâmetro da base. Determine o raio da base de um cilindro equilátero que possui área total $216\pi cm^2$.

5- A partir da rotação de um retângulo em torno de um de seus lados é possível formar um cilindro. Obtenha a área total do cilindro obtido pela rotação do retângulo de lados $3cm$ e $4cm$ em torno do lado de medida $3cm$.

Cone circular. Consideremos um círculo de centro O e raio r, situado num plano α, e V um ponto fora de α. Chama-se cone à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo. Veja a figura 102.

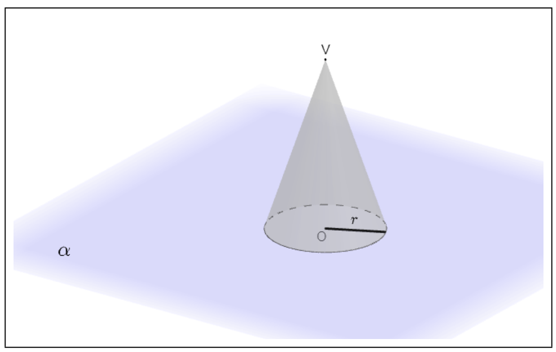

FIGURA 102. Cone circular.

Elementos de um Cone

Na figura 103 temos destacados os seguintes elementos do cone circular reto:

-1 base (círculo de centro O e raio r, situado num plano α);

-vértice (o ponto V fora de α);

-geratrizes: são os segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos da circunferência da base.

-r é o raio da base.

A altura de um cone circular é a distância h entre o vértice e o plano da base.

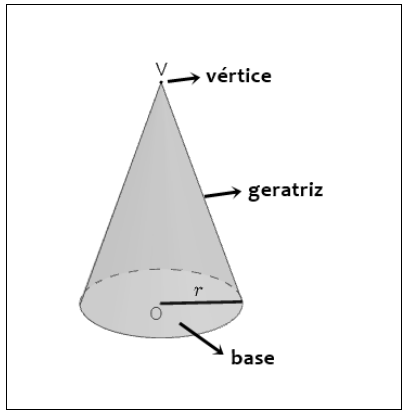

Figura 103. Elementos do cone circular reto.

Observação. Os cones circulares podem ser classificados pela posição da reta VO em relação ao plano da base: Se a reta VO é oblíqua ao plano da base, temos um cone circular oblíquo. Por outro lado se a reta VO é perpendicular ao plano da base, temos um cone circular reto.

Área lateral e área total de um cone circular reto

A superfície lateral de um cone circular reto de raio da base r e geratriz g é equivalente a um setor circular de raio g e comprimento do arco $2\pi r$. Veja a figura 104.

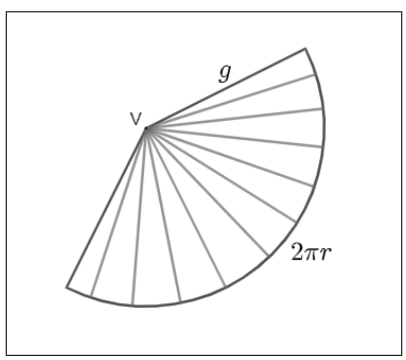

Figura 104. Superfície lateral do cone circular reto.

A área lateral do cone circular reto pode então ser calculada por uma regra de três, como segue:

comprimento	*área*
arco	*setor*
$2\pi g$	πg^2
$2\pi r$	A_l

e portanto $A_l = \pi r g$.

A área total de um cone circular reto é a soma da área lateral (A_l) com a área da base. Veja a figura 105.

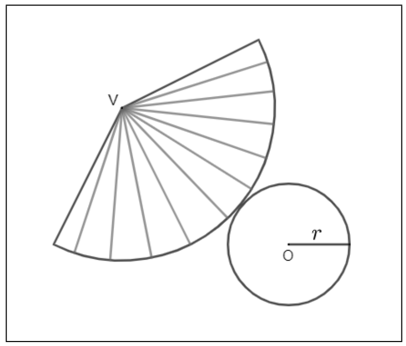

FIGURA 105. Planificação do cone circular reto.

Exercícios

1- Determine a expressão para a área total de um cone circular reto de raio da base r e geratriz g.

2- A planificação da superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular de 90. Calcule a área lateral deste cone, sabendo que a sua geratriz mede $2cm$.

3- O raio da base de um cone circular reto mede $12cm$. Sabendo que a altura mede $9cm$, determine sua área total.

4- Um cone circular reto é chamado de **equilátero** se a medida da sua geratriz é igual a medida do diâmetro da base. Determine a área lateral e a área total de um cone equilátero cujo raio da base mede $5cm$.

5- A geratriz de um cone circular reto mede $5cm$ e a área da base é $9\pi cm^2$. Calcule a medida da altura do cone.

Vamos apresentar um sólido especial que será abordado nos próximos capítulos.

Esfera. Consideremos um ponto O e um segmento de medida r. Chama-se esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância $\overline{OP}$ seja menor ou igual a r, como na figura 106.

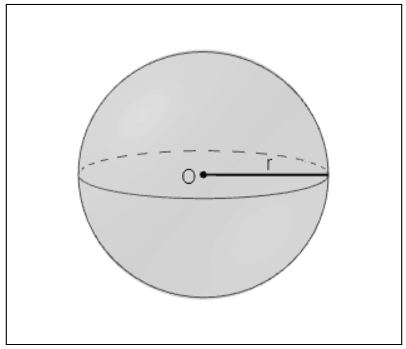

FIGURA 106. Esfera de centro o e raio r.

5. Volume

Objetivo. Deduzir a fórmula do volume de sólidos simples: prismas, pirâmides, cilindros, cones e a esfera.

Intuitivamente, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. A exemplo do que ocorreu com comprimento de segmentos e áreas de figuras planas, é preciso adotarmos uma unidade de medida.

5.1. **Unidade de volume.** A unidade de medida natural para volume é o cubo de aresta $1uc$ conforme [15](A definição de cubo aparece no exercício 4 do capítulo 4). Para cada unidade de comprimento, temos uma unidade correspondente de volume, assim, por exemplo se a unidade de comprimento for o centímetro (cm), então a unidade correspondente de volume será chamado de centímetro cúbico (cm^3).

Vamos deduzir a fórmula para determinar o volume de um paralelepípedo retângulo.

O paralelepípedo retângulo é um poliedro formado por 6 retângulos (Note que o cubo é um caso particular). Ele fica perfeitamente determinado por 3 medidas: comprimento(a), largura(b), altura (c), como na figura 107.

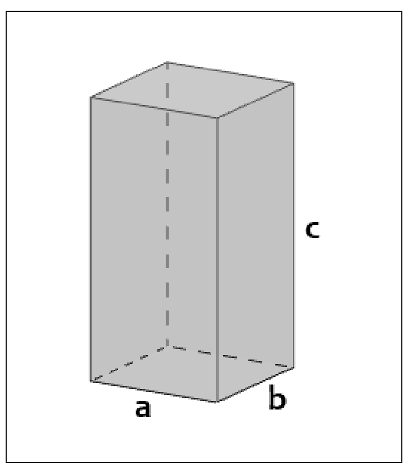

Figura 107. Paralelepípedo retângulo.

O volume desse paralelepípedo retângulo será representado por $V\,(a, b, c)$, em particular o cubo unitário possui $V\,(1, 1, 1) = 1$.

Observe que o volume do paralelepípedo retângulo é proporcional a cada uma de suas dimensões, por exemplo

$$V(na, b, c) = nV(a, b, c),$$

onde $n \in \mathbb{R}_+^*$. Com isso temos

$$\begin{aligned} V(a,b,c) &= V(a.1,b,c) \\ &= aV(1,b,c) = aV(1,b.1,c) \\ &= abV(1,1,c) = abV(1,1,c.1) \\ &= abcV(1,1,1) = abc.1 \\ &= abc. \end{aligned}$$

Portanto o volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c é dado pelo produto de suas dimensões, ou seja $V(a,b,c) = a.b.c$. Note que esta fórmula pode ser expressa como (área da base)×(altura).

Observação. Um ponto P pertencente a um sólido S, é dito ponto interior a S quando existe uma esfera de centro P inteiramente contida em S. Quando P pertence a S mas não existe tal esfera, dizemos que P está na superfície de S. Se dois sólidos são tais que possuem em comum, no máximo pontos de suas superfícies, então o volume da união dos dois é a soma dos volumes de cada um. Trataremos agora de um conhecido princípio que permite deduzir volumes de vários sólidos ver [5].

Princípio de Cavalieri. São dados dois sólidos de mesma altura e apoiados em um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo regiões de mesma área, então esses sólidos tem mesmo volume. Veja a figura 108.

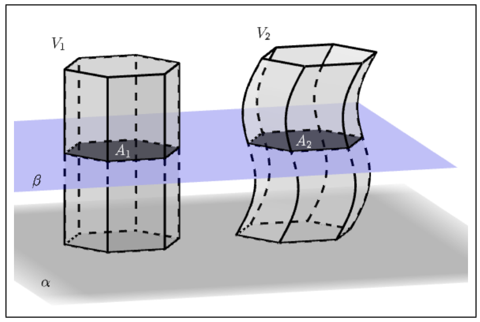

FIGURA 108. Princípio de Cavalieri.

Volume de um Prisma

Seja P_1 um prisma de altura h e cuja base seja um polígono de área A contido em um plano horizontal. Construímos ao lado um paralelepípedo retângulo P_2 com altura h e de tal forma que sua base seja um retângulo de área A. Por se tratar de um prisma, e considerando que o paralelepípedo retângulo também é um prisma, qualquer plano paralelo ao plano horizontal da base que secciona P_1, também secciona P_2, e as secções tem áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases. Então pelo Princípio de Cavalieri, o prisma P_1 e o paralelepípedo P_2 têm volumes iguais. Veja a figura 109. Como o volume de P_2 é dado por $V(P_2) = A.h$, temos que $V(P_1) = A.h$ ou seja, o volume do prisma é o produto da área da base pela medida da altura.

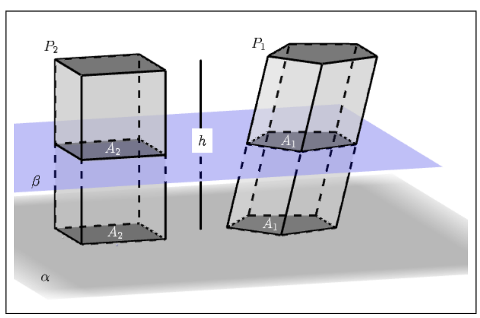

FIGURA 109. Volume do prisma.

Exercícios

1- Determine a expressão para o cálculo do volume de um cubo de aresta a.(Lembre que todas as arestas de um cubo posuem a mesma medida).

2- A base de um prisma de $15cm$ de altura é um triângulo retângulo isósceles de $4cm$ de hipotenusa. Calcule o volume do prisma.

3- Qual o volume de um paralelepípedo retângulo com $12m$ de comprimento por $6m$ de largura e $2m$ de altura.

4- Um prisma regular de base hexagonal possui volume igual a $18\sqrt{3}m^3$. Sabendo que a altura mede $3m$, quanto mede a aresta da base?

5- Um prisma reto tem por base um quadrado de lado $2cm$. Sabendo que o seu volume é $12cm^3$ determine a altura do prisma.

Pirâmide. Algumas propriedades importantes ocorrem quando seccionamos uma pirâmide por um plano paralelo à sua base. Estas propriedades são importantes para deduzirmos a fórmula do volume deste sólido. Consideremos, primeiro, o caso em que a pirâmide é triangular, ou seja, a base da pirâmide é um triângulo.

Considere um plano horizontal α onde a base da pirâmide está apoiada, neste caso um triângulo. Se seccionarmos a pirâmide por um plano paralelo a α, temos:

Propriedade 1. As arestas e a altura ficam divididas na mesma razão.

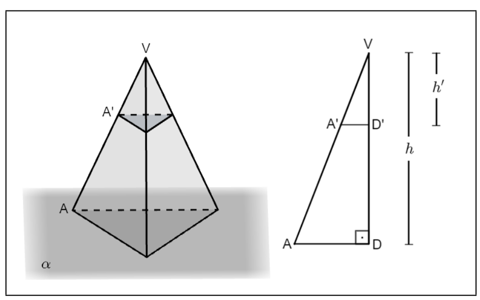

Figura 110. Arestas e altura da Pirâmide.

Justificativa: Note que os triângulos $VA'D'$ e VAD são semelhantes, (caso AA). Veja a figura 110. Mas $\overline{VD} = h$ e $\overline{VD'} = h'$ logo,

$$\frac{\overline{VA}}{\overline{VA'}} = \frac{\overline{VD}}{\overline{VD'}} = \frac{h}{h'}.$$

(observe que nossa aresta foi tomada de forma arbitrária, o que significa que o resultado vale para qualquer escolha)

Propriedade 2. O triângulo gerado pela intersecção de um plano paralelo a base, é semelhante ao triângulo da base. Veja a figura 111.

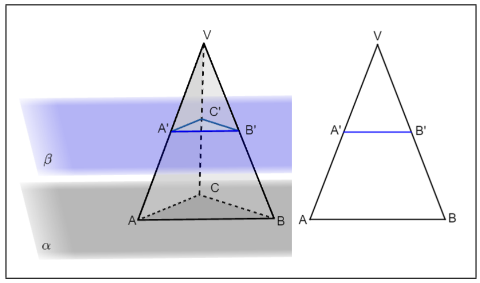

FIGURA 111. Intersecção da pirâmide com o plano paralelo à base.

Justificativa: Analisando os triângulos VAB e $VA'B'$ temos, pela propriedade 1,

$$\frac{\overline{VA}}{\overline{VA'}} = \frac{h}{h'} = \frac{\overline{VB}}{\overline{VB'}},$$

e ainda, o ângulo $A\widehat{V}B$ é congruente ao ângulo $A'\widehat{V}B'$ (ângulo comum). Portanto, pelo caso LAL, os triângulos VAB e $VA'B'$, são semelhantes e a razão de semelhança, nesta ordem é $\frac{h}{h'}$. Note que esta semelhança implica que $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{h}{h'}$ (1). De forma inteiramente análoga, nós podemos provar que os triângulos VAC e $VA'C'$ são semelhantes, bem como os triângulos VBC e $VB'C'$. Da semelhança de VAC e $VA'C'$, temos $\frac{\overline{VA}}{\overline{VA'}} = \frac{h}{h'} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ (2). Da semelhança de VBC e $VB'C'$, temos $\frac{\overline{VB}}{\overline{VB'}} = \frac{h}{h'} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ (3). Por $(1), (2)$ e (3), temos $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{h}{h'}$, o que implica, pelo caso LLL, que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes. Note que a razão de semelhança entre os triângulos ABC e $A'B'C'$, nesta ordem, é $\frac{h}{h'}$.

Observação. Nas mesmas condições anteriores, pelo que foi visto em "semelhança"(capítulo 2), e denotando por $A(VAB)$ e $A\left(VA'B'\right)$ as respectivas áreas dos triângulos VAB e $VA'B'$ temos

$$\frac{A(VAB)}{A\left(VA'B'\right)} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2.$$

Pelo princípio de Cavalieri, decorre diretamente desta última observação que: Duas pirâmides triangulares de bases de mesma área e alturas congruentes têm volumes iguais.

Observação. Todo prisma triangular é a soma de 3(três) pirâmides triangulares (tetraedros) equivalentes entre si (de mesmo volume). Veja a figura 112.

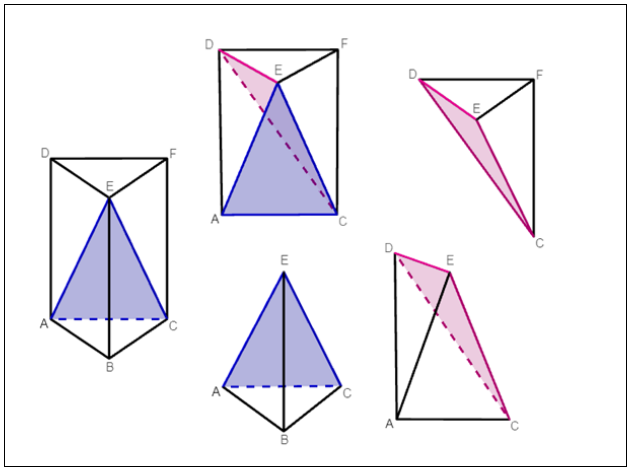

FIGURA 112. Decomposição do prisma em tetraedros.

Volume do Tetraedro

Seja B a área da base e h a medida da altura do prisma triangular dado na observação anterior. Quando dividimos o prisma em 3 tetraedros equivalentes temos

$$V_{T_1} + V_{T_2} + V_{T_3} = V_{PRISMA}.$$

Mas, $V_{T_1} = V_{T_2} = V_{T_3}$ e portanto podemos denotar todos da mesma forma. Vamos denotar V_{T_1}, V_{T_2} e V_{T_3} por V_T e sendo assim temos

$$3V_T = V_{PRISMA} = B.h$$

logo

$$V_T = \frac{1}{3}B.h.$$

Note que B é a base de T_1 e h é a medida da altura de T_1.

Para calcular o volume de uma pirâmide qualquer, de altura h cuja base é um polígono de n lados, de área B, basta observar que a mesma pode ser escrita como a soma de $(n-2)$ tetraedros, como na figura 113. Daí

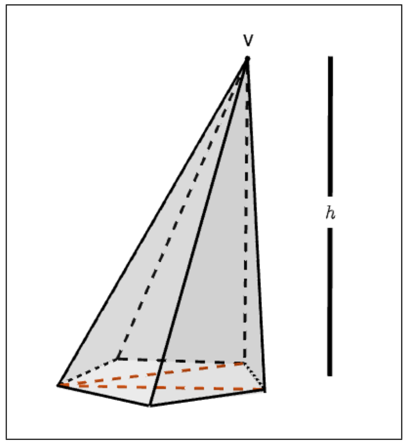

FIGURA 113. Pirâmide.

$$
\begin{aligned}
V &= V_{T_1} + V_{T_2} + ... + V_{T_{n-2}} \\
V &= \frac{1}{3}B_1 h + \frac{1}{3}B_2 h + ... + \frac{1}{3}B_{n-2} h \\
V &= \frac{1}{3}\left(B_1 + B_2 + ... + B_{n-2}\right).h \\
V &= \frac{1}{3}B.h
\end{aligned}
$$

pois $B = B_1 + B_2 + ... + B_{n-2}$. Conclusão: O volume de uma pirâmide é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

Exercícios

1- Qual o volume de um tetraedro regular cuja aresta mede $1cm$?

2- Qual o volume de uma pirâmide regular de base quadrada, sabendo que a medida da altura da pirâmide é $5m$ e o perímetro da base é $12m$.

3- A base de uma pirâmide regular é um hexágono inscrito em uma circunferência de $5cm$ de raio. Calcule o volume desta pirâmide, sabendo que sua altura mede $10cm$.

4- Se cada lado da base de uma pirâmide regular triangular mede $4cm$, determine o volume da pirâmide, sabendo que sua altura mede $2cm$.

5- As arestas laterais de uma pirâmide regular medem $25cm$, e sua base é um quadrado cujos lados medem $9\sqrt{2}cm$. Qual o volume desta pirâmide?

Volume do cilindro circular

Consideremos um cilindro circular de altura h e área da base $B_1 = B$ e um prisma de altura h e área da base $B_2 = B$, ou seja, o cilindro e o prisma têm alturas congruentes e bases equivalentes. Suponhamos que os dois sólidos têm as bases num mesmo plano α e estão num dos semi-espaços determinados por α. Qualquer plano β paralelo a α, que secciona o cilindro circular, também secciona o prisma, formando as secções β_1' e β_2', respectivamente, que têm áreas iguais, pois são congruentes as respectivas bases. Veja a figura 114. Então pelo princípio de Cavalieri, o cilindro circular e o prisma têm volumes iguais.

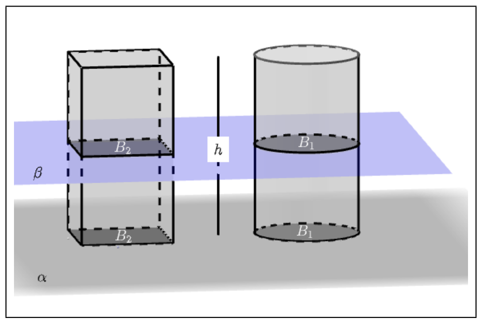

FIGURA 114. Comparação entre o prisma e o cilindro circular.

Como

$$V_{PRISMA} = B_2.h = B.h,$$

temos

$$V_{CILINDRO} = B.h.$$

Em particular, se $B = \pi r^2$, resulta

$$V = \pi r^2.h.$$

Exercícios

1- Determine o volume de um cilindro circular reto que possui raio da base medindo $4cm$ e altura medindo $7cm$.

2- Dado um cilindro C de raio da base medindo $10cm$ e altura medindo $8cm$, qual o volume de um cilindro que também posui $8cm$ de altura mas tem a metade do raio da base de C?

3- De quanto aumenta o volume de um cilindro de raio da base $2cm$, quando aumentamos a sua altura em $3cm$?

4- Quantos metros cúbicos de terra foram escavados para a construção de um poço que tem $8m$ de diâmetro e $14m$ de profundidade?
5- Um cilindro circular reto possui a área lateral igual a $60\pi cm^2$. Se o raio da base deste cilindro mede $5cm$, qual o volume deste cilindro?

Volume do cone circular

Consideremos um cone circular de altura $H_1 = h$ e área da base $B_1 = B$ e um tetredro de altura $H_2 = h$ e área da base $B_2 = B$ (o cone circular e a pirâmide têm alturas congruentes e bases equivalentes). Suponhamos que os dois sólidos têm bases num mesmo plano α e que os vértices estão num mesmo semiespaço dos determinados por α, conforme a figura 115.

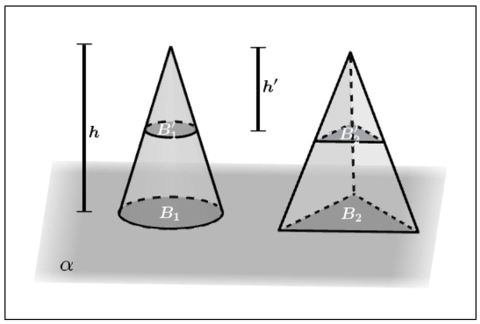

Figura 115. Comparação entre o cone e o tetraedro.

Qualquer plano β paralelo a α que secciona o cone também secciona o tetraedro. Supondo que β dista h' do vértices e que as áreas das secções são B_1' e B_2', respectivamente, temos:

$$\frac{B_1'}{B_1} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 = \frac{B_2'}{B_2}.$$

Como $B_1 = B_2 = B$, vem que $B_1' = B_2'$. Então pelo princípio de Cavalieri o cone e o tetraedro têm volume iguais, ou seja,

$$V_{CONE} = V_{TETRAEDRO} = \frac{1}{3}B.h.$$

Portanto, o volume de um cone é um terço do produto da área da base pela medida da altura. Em particular, se $B = \pi r^2$, resulta que

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2.h.$$

Exercícios

1- Qual o volume de um cone circular reto de raio da base $2cm$ e altura de medida igual a $3cm$?
2- Se um cone tem como base um círculo de raio r, qual deve ser a altura deste cone para ter o mesmo volume de um cilindro que tem na base o círculo com o mesmo raio r, da base do cone, e possui $1cm$ de altura?
3- Um cone circular reto tem área lateral igual a $30\pi cm^2$. Sabendo que a geratirz do cone mede $10cm$, determine o volume deste cone.
4- Um cone circular reto e uma pirâmide regular de base quadrada têm a mesma altura $h = 6cm$. Sabendo que o quadrado de lado $l = 2cm$, da base da pirâmide, está insrito no círculo da base do cone, determine o volume do cone.
5- (Adaptado da Fatec-SP) A altura de um cone circular reto mede o triplo da medida do raio da base. Se o comprimento da circunferência dessa base é $8\pi cm$, então qual o volume do cone?

Volume da esfera

Análogo ao que ocorreu com o círculo nas figuras planas, a esfera necessita de uma construção mais elaborada para determinarmos seu volume e a área de sua superfície. Diferente do que fizemos com os outros sólidos, iremos primeiro deduzir o volume da esfera e usar esta informação para o cálculo da área de sua superfície. Consideremos um cilindro equilátero de raio da base r (a altura é $2r$) e seja S o ponto médio do eixo do cilindro. Tomemos dois cones tendo como bases as do cilindro e S como vértice comum (a reunião desses dois cones é um sólido chamado clépsidra). Ao sólido que está dentro do cilindro e fora dos dois cones vamos chamar de sólido X (este sólido X é chamado anticlépsidra). Veja a figura 116.

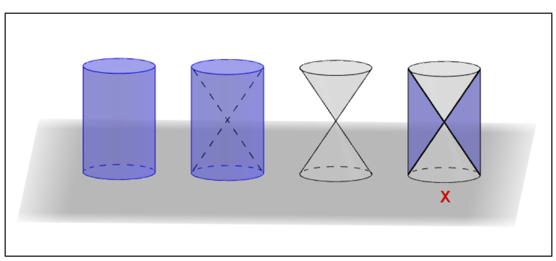

Figura 116. Anticlépsida.

Nossa intenção é comparar as secções do sólido X, que foi construído a partir de um cilindro equilátero de raio da base r, com as secções de uma esfera de raio r. Como já vimos anteriormente, se ao colocarmos estes sólidos com base num mesmo plano α, todo plano paralelo a α, determinar superfí cies de áreas iguais, estes sólidos terão o mesmo volume (Princípio de Cavalieri). Consideremos então, uma esfera de raio r e o sólido X (anticlépsidra). Suponhamos que a esfera seja tangente a um plano α, que o cilindro (que originou o sólido X) tenha base em α e que os dois sólidos, esfera e o sólido X, estejam num mesmo semiespa ço dos determinados por α. Veja a figura 117.

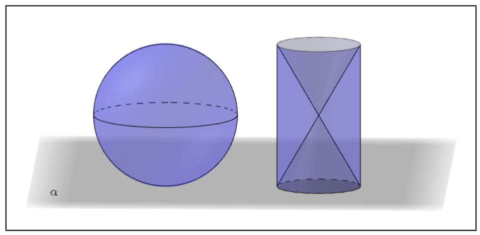

Figura 117. Comparação entre esfera e anticlépsida.

Qualquer plano β paralelo a α, que corta a esfera a uma distância d do seu centro (e do vértice do sólido X), também corta o sólido X. Veja a figura 118.

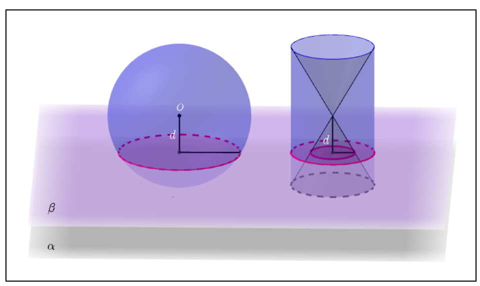

Figura 118. Secção na esfera e na anticlépsida.

Temos que:

1. Área da secção na esfera $= \pi s^2 = \pi\left(r^2 - d^2\right)$. Esta fórmula decorre da área do círculo paralelo que está a uma distância d do centro da esfera.

2. Área da secção do sólido $X = \pi r^2 - \pi d^2 = \pi\left(r^2 - d^2\right)$. Esta fórmula decorre da área da coroa circular ilustrada na figura 119 a seguir.

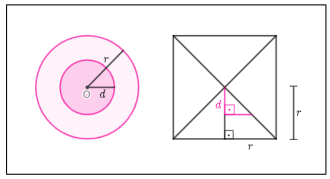

FIGURA 119. Área da secção X.

As áreas das secções na esfera e no sólido X são iguais, e portanto, pelo princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido X têm mesmo volume, ou seja

$$V_{ESFERA} = V_X.$$

Mas

$$\begin{aligned} V_X &= V_{CILINDRO} - 2V_{CONE} = \pi r^2.2r - 2\left(\frac{1}{3}\pi r^2 r\right) = \\ &= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Área da superfície esférica

Para deduzir de forma satisfatória a área de uma superfície esférica, iremos precisar de uma fórmula que relaciona o volume de um sólido com a área da sua superfície. Daremos uma noção intuitiva desta relação, que também pode ser utilizada para deduzir a área da superfície de outros sólidos a partir do conhecimento do volume. Além da esfera, cilindro e cone são outros exemplos de sólidos onde poderíamos utilizar esta técnica que iremos tratar agora. Se considerarmos uma superfície limitada de área A e sobre ela formarmos um sólido de altura x, de bases paralelas, conforme a figura 120, teremos o volume do sólido de base A e altura x, dado por

$$V = A.x,$$

ou seja, indicando por V o volume do sólido, temos que, nesta situação, o volume é dado pela área da base vezes a altura.

Note que esta última igualdade é válida para qualquer x. Intuitivamente, uma superfície é imaginada como uma "placa sólida" de "espessura infinitamente pequena".

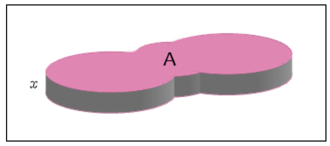

FIGURA 120. Sólido de base A e altura x.

Por isso, se uma "placa sólida" de volume V_p e espessura x for tal que $\frac{V_p}{x}$ tem sentido para $x = 0$ então $\frac{V_p}{x}$ (para $x = 0$) será definida como a área da placa.

Vamos então deduzir a área da superfície esférica utilizando uma placa sólida sobre a esfera como na figura 121.

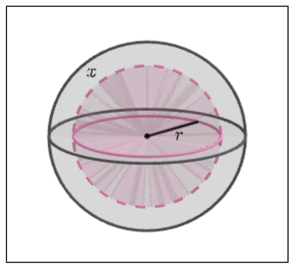

FIGURA 121. Placa sólica sobre a esfera.

$$
\begin{aligned}
V_p &= \frac{4}{3}\pi (r+x)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \\
&\Rightarrow V_p = \frac{4}{3}\pi \left[(r+x)^3 - r^3\right] \Rightarrow \\
&\Rightarrow V_p = \frac{4}{3}\pi \left[3r^2x + 3rx^2 + x^3\right] \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{V_p}{x} = \frac{4}{3}\pi \left[3r^2 + 3rx + x^2\right].
\end{aligned}
$$

Então, para $x = 0$, vem: $A = 4\pi r^2$.

Exercícios

1- Determine o raio de uma esfera de superfície $16\pi cm^2$.

2- Determine a área e o volume de uma esfera de $8cm$ de diâmetro.

3- Determine o volume de uma esfera que possui $256\pi cm^2$ de superfície.

4- Se uma esfera de raio r têm o mesmo volume de um cilindro de raio da base $6cm$ e altura $1cm$, determine, em centímetros, o raio r da esfera.

5- Determine o volume de uma esfera, sabendo que o seu raio mede 1/3 do raio de outra esfera que possui $100\pi cm^2$ de superfície.

6. Respostas dos exercícios

Página 17

1)

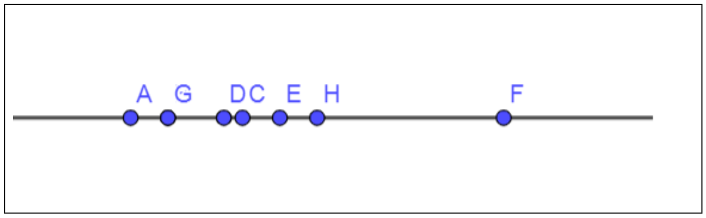

Figura 122. Resposta exercício 1.

2) $\overline{AB} = \frac{1}{2}uc$, $\overline{DC} = \frac{1}{4}uc$, $\overline{EF} = 3uc$ 3)5cm ou 1cm

4) $\frac{19}{3}cm$ 5) $\frac{23}{2}uc$ 6)$\frac{31}{3}cm$ 7) Construção geométrica

Página 24

1)a)comensurável b)comensurável c) comensurável d) comensurável e) incomensurável f)comensurável

2) 3cm 3)$l\sqrt{2}uc$ 4)a) não, $l\sqrt{2}$ pode ser racional b) sim, pois a razão entre a diagonal e o lado é $\sqrt{2}$ 5) não, pois a razão é $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Página 25

1)

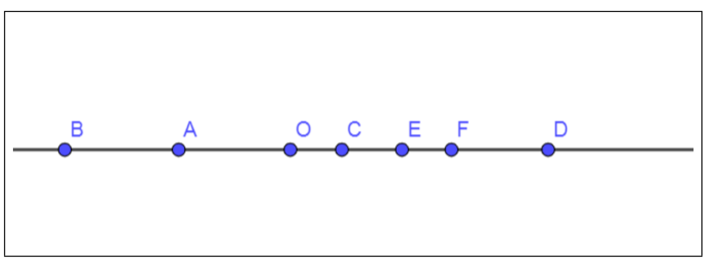

Figura 123. Resposta exercício 1.

2)a)$\frac{43}{10}uc$ b) $1,5uc$ c)$2\sqrt{3}uc$ d) $6uc$ e)$4-\sqrt{3}uc$ f)$\sqrt{3}uc$

3) a)$\frac{-1}{2}$ b)2 c) 0

4) a) comensurável b) comensurável c)Incomensurável

Página 29

1) b   2) a) 5 e 6,   b) -1 e 0,   c) 6 e 7   .

3)

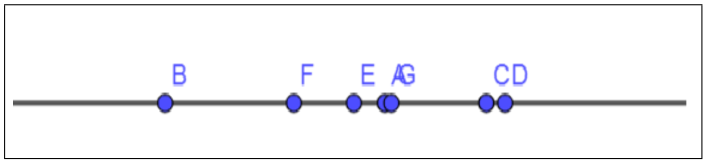

FIGURA 124. Resposta exercício 3.

4) a) 1,5 um   b)Os pontos B e D.   5) $\dfrac{a+b}{2}$

6) $|b-a|-1$ 7) a)comensurável   b) comensurável   c)incomensurável

d) incomensurável   8) Sim, pelo teorema de Pitágoras.

Página 32

1)construção geométrica   2) 40^0 ou 100^0 3) 145^0 4)4

5)a) 180^0 b)180^0 c) Sim, pelos itens a e b.   d)Sim (análogo aos itens a,b e c)   6) Sim(foram utilizados apenas a posição)   7)110^0

8)25^0 9)a)90^0 b)45^0 10)a) Construção geomética   b) 90^0

Página 38

1)16cm   2)56 mudas   3)72cm   4)13cm

5)$l = \dfrac{21}{4}cm$ 6) 6 e 8   7)12   8)10cm,20cm,30cm,40cm e 50cm

9)$\dfrac{3}{4}$ 10) a) 360^0 b)720^0 c)$(n-2)180^0$

Página 43

1)60^0 2)$\dfrac{l\sqrt{3}}{2}$ 3)$90^0, 45^0$ e 45^0 4)$x = 3$ e $y = 6$ 5)Não e sim.

Página 54

1) $l_3 = 5cm$,$r = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}cm$ e $a_3 = \dfrac{5\sqrt{3}}{6}cm$

2) Circunferência inscrita $r = 2cm$;   Circunferência circunscrita: $R = 4cm$

3) $l_4 = \dfrac{7\sqrt{2}}{8}m$, $2p = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$,$r = a_4 = \dfrac{7\sqrt{2}}{16}$

4)a)$\dfrac{2p_3}{d} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,   b)$\dfrac{2p_4}{d} = 2\sqrt{2}$,   c)$\dfrac{2p_6}{d} = 3$.

5)a) $\sqrt{2}cm$,   b)$(2+\sqrt{2})cm$,   c)$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}cm$,   d)$r = \dfrac{(2+\sqrt{2})\sqrt{2}}{2}$

6)b

7)$l = 28cm$

8) $l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

9) $l_{(16)} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

10) $l_{(32)} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

Página 59

1) Sim, função $f(Q_1) = \dfrac{L}{l}Q_1$, onde Q_1 é o primeiro quadrado e Q_2 é o segundo quadrado;

2) Sim, função $f(P_1) = \dfrac{l_2}{l_1}P_1$, onde P_1 é o primeiro polígono e P_2 é o segundo polígono;

3) Não, contra-exemplo retângulo de lados $1cm$ e $2cm$ e retângulo de lados $1cm$ e $3cm$.

4) $16cm$ e $\dfrac{64}{3}cm$

5)k

6)Sim, a razão entre os lados é a mesma.

7)$\dfrac{1}{3}$ ou 3

Página 60

1) Comprimento circunferência inscrita $\sqrt{3}\pi cm$ e comprimento circunferência circunscrita $2\sqrt{3}\pi cm$

2) Duplica também

3) $C = 34\pi cm$

4)$3,0614$

5) $3,1214$

6)$3,1365$

7)24

8)Comprimento circunferência inscrita $8\pi cm$ e comprimento circunferência circunscrita $16\pi cm$

9) $10\pi cm$

10)Distância aproximada de $13,74m$

página 67

1) $A = l^2$, onde l é o lado do quadrado;

2) $A = \dfrac{dD}{2}$, onde d é a diagonal menor e D é a diagonal maior

3) $A = \dfrac{(B+b)h}{2}$, onde B é a base maior, b é a base menor e h é a altura

4)$A = 6\sqrt{10}cm^2$

5)$A = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}cm^2$

6) $A = 36\sqrt{2}cm^2$

7)$B = 30cm$ e $b = 11cm$

8)$A = 24\sqrt{3}cm^2$

9) Os catetos medem $\sqrt{10}cm$

10)$A = \dfrac{\sqrt{1463}}{4}$

Página 70

1) $r = \dfrac{l\sqrt{\pi}}{\pi}$uc,

2)$A = 9(\pi - 2)$ua

3)$A = 40\pi cm^2$

4)$\dfrac{1}{4}$

5) A área da semicircunferência construída sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas das semicircunferências construídas sobre os catetos.

6) $A = \dfrac{363\sqrt{3}}{2}cm^2$

7) Quadriplica

8)e

9)c

10)$A = \dfrac{\pi}{3}cm^2$

Página 74

1)

a) Faces laterais: 4, Faces totais: 6, Vértices: 8, Arestas laterais: 4 e Arestas totais: 12

b) Faces laterais: 5, Faces totais: 7, Vértices: 10, Arestas laterais: 5 e Arestas totais: 15

c) Faces laterais: 6, Faces totais: 8, Vértices: 12, Arestas laterais: 6 e Arestas totais: 18

d) Faces laterais: 8, Faces totais: 10, Vértices: 16, Arestas laterais: 8 e Arestas totais: 24

e) Faces laterais: 10, Faces totais: 12, Vértices: 20, Arestas laterais: 10 e Arestas totais: 30.

2) $A_l = 336cm^2$

3) $A_t = 1072cm^2$

4)$A_t = 96cm^2$

5) $A_l = 180cm^2$. Não é possível determinar a área total, pois não possuímos informações suficientes sobre a base.

Página 76

1)$A_l = 192cm^2$ e $A_t = 336cm^2$

2)$ap = 8cm$

3) $A_t = a^2\sqrt{3}ua$ e $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}ua$

4)$h = 3cm$ e $A_l = 12\sqrt{21}cm^2$

5)$B = 53.088m^2$

Página 78

1)$A_l = 2\pi rh$ e $A_t = 2\pi r(h + r)$.

2) $A_l = 40\pi\sqrt{2}cm$

3) $B = 4\pi cm^2$

4)$r = 6cm$

5) $A_t = 56\pi cm^2$

Página 81

1) $A_t = \pi r(g + r)$

2) $A_l = \pi cm^2$

3) $A_t = 324\pi cm^2$

4) $A_l = 50\pi cm^2$ e $A_t = 75\pi cm^2$

5) $h = 4cm$

Página 85

1) $V = a^3$

2) $V = 60cm^3$

3) $V = 144cm^3$

4)$a = 2m$

5) $h = 3cm$

Página 89

1)$V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}cm^3$

2)$V = 15m^3$

3)$V = \frac{375}{3}\sqrt{3}cm^3$

4) $V = \frac{8}{3}\sqrt{3}cm^3$

5) $V = 216\sqrt{34}cm^3$

Página 90

1)$V = 112\pi cm^3$

2) $V = 200\pi cm^3$

3)Aumenta em $12\pi cm^3$

4) $V = 224\pi m^3$

5) $V = 150\pi cm^3$

Página 92

1)$V = 4\pi cm^3$

2) $h = 3cm$

3) $V = 3\pi\sqrt{91}cm$

4) $V = 4\pi cm^3$

5) $V = 64\pi cm^3$

Página 95

1) $r = 2cm$

2) $A = 64\pi cm^2$ e $V = \frac{256}{3}\pi cm^3$

3) $V = \frac{2048}{3}\pi cm^3$

4) $r = 3cm$

5) $V = \frac{500}{81}\pi cm^3$

7. Referências Bibliográficas

1- Asimov, I (1959). No mundo dos Números. Francisco Alves Editora S/A.

2- Barbosa, J.L.M (2012). Geometria Euclidiana Plana. Sociedade Brasileira de Matemática.

3- Ch., T.I.V (2003). Geometria Básica- Curso 1. Editorial Librería.

4- Dolce, O. e Pompeo, J.N (2007). Fundamentos de Matemática Elementar Vol 9. Editora Atual.

5-Dolce, O. e Pompeo, J.N (2005). Fundamentos de Matemática Elementar Vol 10. Editora Atual.

6- Duarte, C.E. de L. (2013). Conjuntos Numéricos. Disponível em $https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/17017/1/CarlosELD_DISSERT.pdf$

7- Lima, E. L. (1991). Medida e Forma em Geometria. Sociedade Brasileira de Matemática.

8- Lima, E. L., et al.(2006).A Matemática do ensino Médio Vol2. Sociedade Brasileira de Matemática.

9- Lima, E. L. (2006). Meu professor de Matemática e outras história. Sociedade Brasileira de Matemática.

10- Loomis, E. S.(1940) The pythagorean proposition. The national council of teachers of mathematics.

11-Luisa, I. (2019).Mulher conquista recorde mundial do cálculo mais correto do valor de pi. Revista Superinteressante. Editora Abril. Disponível em $https://super.abril.com.br/ciencia/mulher-conquista-recorde-mundial-do-calculo-mais-correto-do-valor-de-pi/$

12-Moise, E. E e Downs Jr, F. L.(1971) Geometria Moderna Parte I.Editora Edgard e Blücher ltda.

13-Muniz Neto, A.C (2013). Geometria. Sociedade Brasileira de Matemática.

14-Muniz Neto, A.C (2012). Tópicos de Matemática Elementar. Vol 2. Sociedade Brasileira de Matemática.

15-Nichols, E. D, et al, (1982). Holt Geometry. Holt, Rinehart and Winston, Publishers.

16- Ribeiro, M. (2014). O número π na educação. Disponível em: $https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=40625$

17-Ripoll, J.B, et al. (2011). Números Racionais, Reais e Complexos. Editora da UFRGS.

Índice Remissivo