Polígonos Regulares

UFPEL-DME
Geometria Plana
Prof Lisandra Sauer

Hora da Piadinha

Por que um polígono regular foi ao psicólogo?

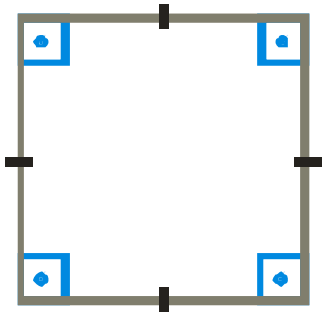
Porque ele é Iso-lado

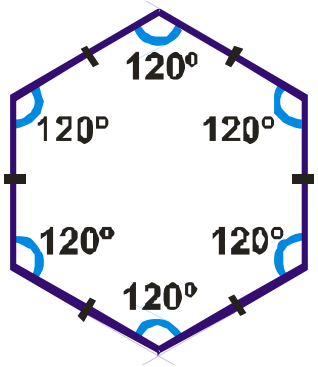


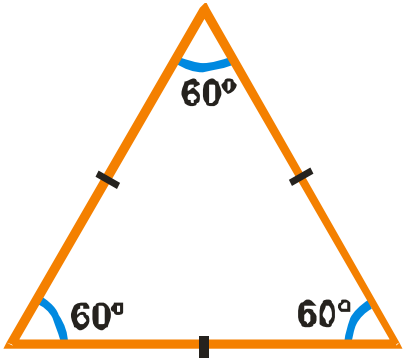
2. Polígonos regulares

Um polígono é chamado de regular quando possui todos os ângulos internos congruentes e todos os lados congruentes.

Exemplos:





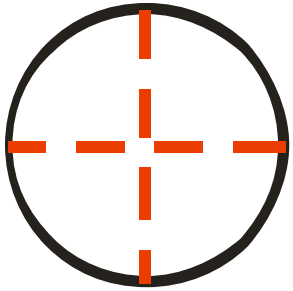


Propriedade dos polígonos regulares

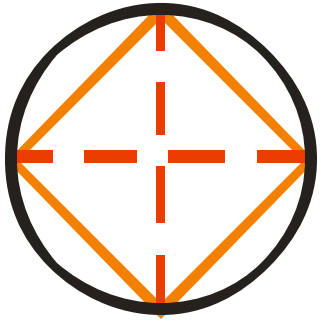
- Se uma circunferência for dividida em três ou mais arcos congruentes, então as cordas consecutivas formam um polígono regular inscrito na circunferência.

- Se uma circunferência for dividida em três ou mais arcos congruentes, então as tangentes aos pontos consecutivos de divisão formam um polígono regular circunscrito à circunferência.

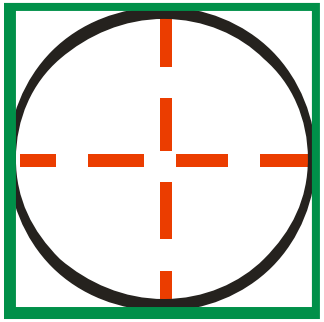
Na circunferência ao lado, traçamos dois diâmetros perpendiculares entre si. A circunferência ficou dividida em quatro arcos congruentes.



As cordas consecutivas formam um quadrado inscrito na circunferência.

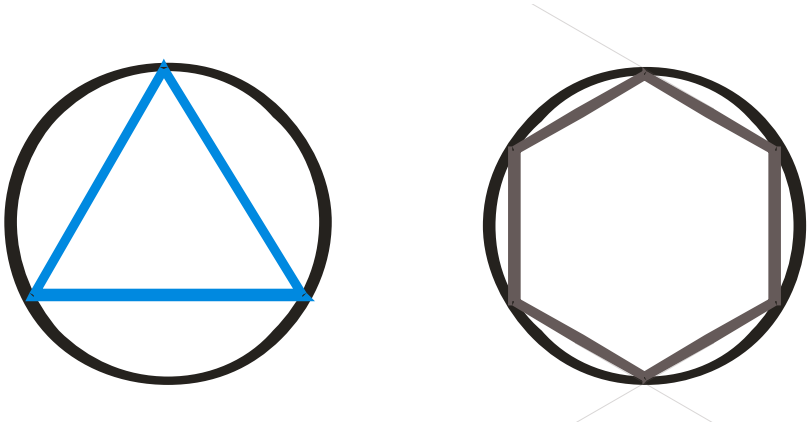


As tangentes pelos pontos de divisão formam um quadrado circunscrito à circunferência.

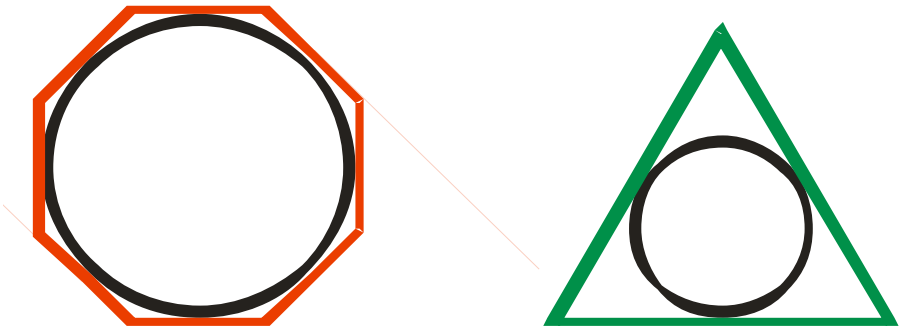


Desse modo, podemos dizer que, se um polígono é regular, então existe um circunferência que passa por todos os seus vértices e uma outra que tangencia todos os seus lados.

- Todo polígono regular é inscritível numa circunferência.
- Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência.



Polígonos regulares inscritos

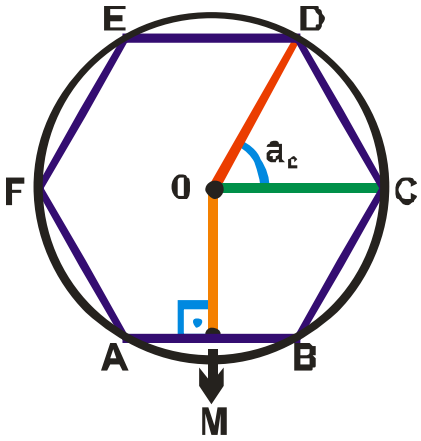


Polígonos regulares circunscritos

Elementos de um polígono regular

Se um polígono é regular, consideramos:

- **Centro do polígono** é o centro da circunferência circunscrita a ele (ponto O).
- **Raio do polígono** é o raio da circunferência circunscrita a ele $\left(\overline{OC}\right)$.
- **Apótema do polígono** é o segmento que une o centro do polígono ao ponto médio de um de seus lados $\left(\overline{OM}\right)$.
- **Ângulo central** é aquele cujo vértice é o centro do polígono e cujo lados são semi-retas que contêm dois raios consecutivos (CÔD).



Ângulo cêntrico

e

A medida do ângulo cêntrico (central) em um polígono regular é dada por:

$$a_c = \frac{360^o}{n}$$

(n = número de lados)

Cálculo de lado e apótema de polígonos regulares

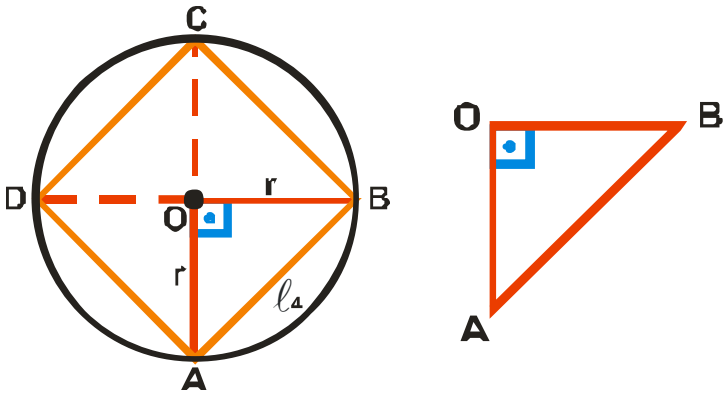
Calcularemos a medida do lado e a medida do apótema de um polígono regular inscrito em uma circunferência em função da medida do raio.

Quadrado inscrito

Considere uma circunferência de centro *O* e raio de medida *r*.

Para construir um quadrado *ABCD* inserido nessa circunferência, traçamos dois diâmetros perpendiculares entre si ($\overline{AC}$ e $\overline{BD}$), determinando o vértices do quadrado. Vamos calcular a medida do lado e do apótema desse quadrado em função de *r*.

Cálculo da medida do lado (ℓ_4)



No $\triangle AOB$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(AB)^2 = (AO)^2 + (OB)^2$

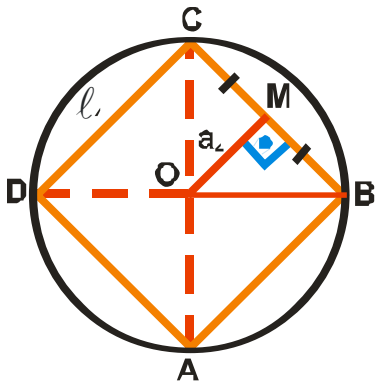
$$\ell_4^2 = r^2 + r^2$$

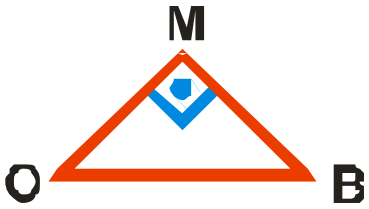
$$\ell_4^2 = 2r^2$$

$$\ell_4 = \sqrt{2r^2} \ (r > 0)$$

$$\ell_4 = r\sqrt{2}$$

Cálculo da medida do apótema (a_4)





No $\triangle OMB$, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(OM)^2 + (BM)^2 = (OB)^2$

$$a_4^2 + \left(\frac{\ell_4}{2}\right)^2 = r^2$$

$$a_4^2 + \frac{2r^2}{4} = r^2$$

$$a_4^2 = r^2 - \frac{2r^2}{4} = \frac{2r^2}{4}$$

$$a_4 = \sqrt{\frac{2r^2}{4}} \ (r > 0)$$

$$a^4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Hexágono regular inscrito

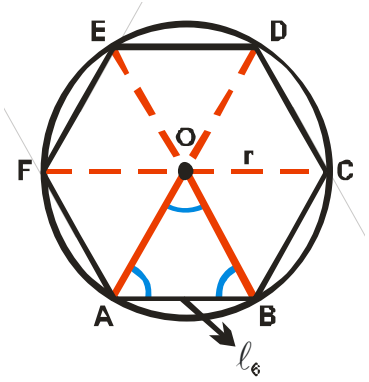
Considere uma circunferência de centro *O* e raio de medida *r*.

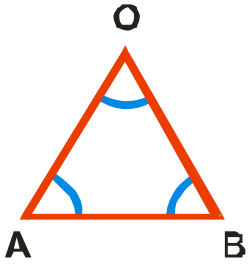
Para construir um hexágono regular *ABCDEF* inscrito nessa circunferência, dividimos a circunferência em seis arcos congruentes e, a seguir, unimos consecutivamente os pontos de divisão.

Vamos calcular a medida do lado e do apótema desse hexágono em função de *r*.

Cada um dos arcos indicados nessa circunferência mede $\frac{360^o}{6} = 60^o$.

Sendo assim temos:





M($A\hat{O}B$) = 60º, m($A\hat{B}O$) = $\frac{m\,(AB)}{2} = \frac{120^o}{2} = 60^o$

e m ($B\hat{A}O$) = $\frac{m\,(BD)}{2} = \frac{120^o}{2} = 60^o$

O ΔAOB, é eqüilátero, ou seja:

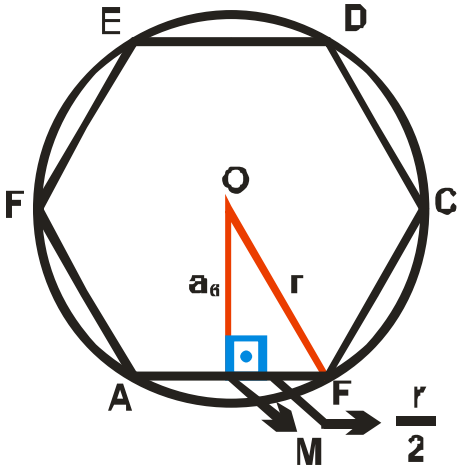
$AB = AO = OB$

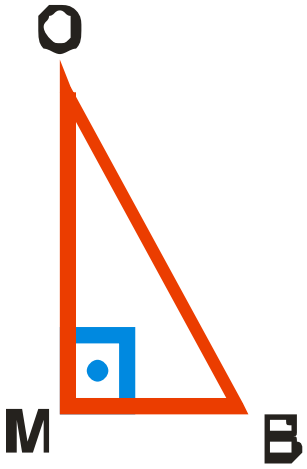
$\downarrow \quad \downarrow$

$\ell_6 = r$

Logo: $\ell_6 = r$

Cálculo da medida do apótema (a_6)





No Δ *OMB*, pelo teorema de Pitágoras, temos:
$(OM)^2 + (MB)^2 = (OB)^2$

$$a_6^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2$$

$$a_6^2 + \frac{r^2}{4} = r^2$$

$$a_6^2 = r^2 - \frac{r^2}{4}$$

$$a_6^2 = \frac{3r^2}{4}$$

$$a_6 = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} \quad (r > 0)$$

$$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

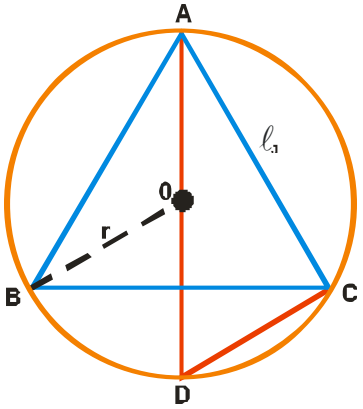
Triângulo eqüilátero inscrito

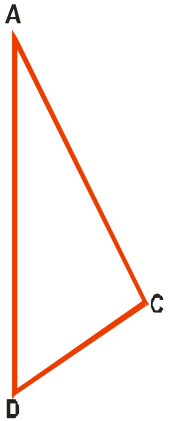
Considere uma circunferência de centro *O* e raio medida r.

Para construir um triângulo eqüilátero *ABC* inscrito nessa circunferência, dividimos a circunferência em seis arcos congruentes e, a seguir, unimos alternadamente os pontos de divisão.

Vamos calcular a medida do lado e do apótema desse triângulo em função de r.

Cálculo da medida do lado





Observe que:

- o Δ *ADC* é retângulo (inscrito na semicircunferência)
- $\overline{DC} = \ell_6 = r$

No Δ *ADC*, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(AC)^2 + (DC)^2 = (AD)^2$

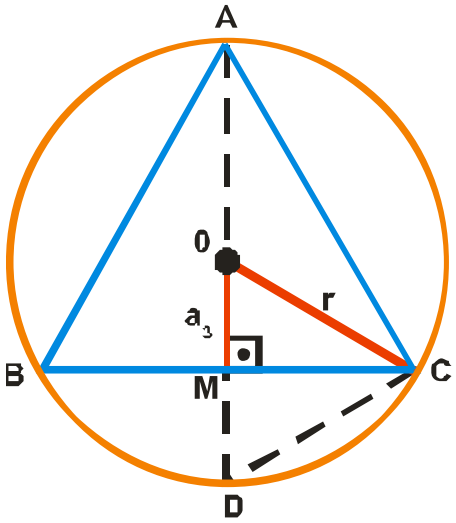
$(\ell_3)^2 + (\ell_6) = (2r)^2$

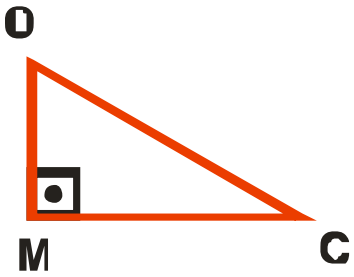
$\ell_3^2 + r^2 = 4r^2$

$\ell_3^2 = 3r^2$

$\ell_3 = r\sqrt{3}$

Cálculo da medida do apótema (a_3)





No ΔOMB, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(OC)^2 = (OM)^2 + (MB)^2$

$$a_3^2 + \left(\frac{\ell_3}{2}\right)^2 = r^2$$

$$a_3^2 + \frac{3r^2}{4} = r^2$$

$$a_3^2 = r^2 - \frac{3r^2}{4}$$

$$a_3^2 = \frac{r^2}{4}$$

$$a_3^2 = \sqrt{\frac{r^2}{4}} \quad (r > 0)$$

$$a_3 = \frac{r}{2}$$

Referências:

Dolce, Osvaldo. Pompeo, José Nicolau. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Plana. Volume 9 – São Paulo : Atual, 2005.