Introdução ao pensamento matemático

Lisandra Sauer

Geometria Euclidiana

UFPel

Uma das principais características da Matemática é o uso de demonstrações (provas) para justificar a veracidade das afirmações. Em Matemática, uma prova serve para assegurar que determinado resultado é verdaeiro ou para divuldar a veracidade do teorema provado.Sendo assim, o não conhecimento desta ferramenta por um aluno pode prejudicar consideravelmente seu estudo.

Não existe uma classificação fechada de todos os métodos de provas e nem uma receita de como se demostrar teoremas, tendo em vista que todo dia milhares de artigos são publicados em jornais científicos ou em sites de divulgação. O mais conhecido é:

Não existe uma classificação fechada de todos os métodos de provas e nem uma receita de como se demostrar teoremas, tendo em vista que todo dia milhares de artigos são publicados em jornais científicos ou em sites de divulgação. O mais conhecido é:

- https://arxiv.org/

Não existe uma classificação fechada de todos os métodos de provas e nem uma receita de como se demostrar teoremas, tendo em vista que todo dia milhares de artigos são publicados em jornais científicos ou em sites de divulgação. O mais conhecido é:

- https://arxiv.org/ site de divulgação das áreas de Matemática, física e Astrofísica desenvolvido e mantido pela Universidade de Cornell

Não existe uma classificação fechada de todos os métodos de provas e nem uma receita de como se demostrar teoremas, tendo em vista que todo dia milhares de artigos são publicados em jornais científicos ou em sites de divulgação. O mais conhecido é:

- https://arxiv.org/ site de divulgação das áreas de Matemática, física e Astrofísica desenvolvido e mantido pela Universidade de Cornell
- demonstrações em livros didáticos do ensino básico

Conjecturas e provas

O trabalho de descoberta de resultados matemáticos começa com a intuição, observando-se casos particulares, fazendo analogias e simulações em que são produzidas afirmações que possuem alguma evidência de serem verdadeiras mas não certeza. Essas afirmações são chamadas de Conjecturas.

Toda investigação Matemática é regulada pelo Princípio da Razão Suficiente:

Toda investigação Matemática é regulada pelo Princípio da Razão Suficiente:

Em Matemática, todo enunciado deve ser provado ou apresentado um contra exemplo

Provas são argumentações, explicações detalhadas de porque um enunciado é verdadeiro. As provas possuem as seguintes características:

Provas são argumentações, explicações detalhadas de porque um enunciado é verdadeiro. As provas possuem as seguintes características:

- riqueza de detalhes;

Provas são argumentações, explicações detalhadas de porque um enunciado é verdadeiro. As provas possuem as seguintes características:

- riqueza de detalhes;
- premissas

Provas são argumentações, explicações detalhadas de porque um enunciado é verdadeiro. As provas possuem as seguintes características:

- riqueza de detalhes;
- premissas
- enunciados intermediários

Provas são argumentações, explicações detalhadas de porque um enunciado é verdadeiro. As provas possuem as seguintes características:

- riqueza de detalhes;
- premissas
- enunciados intermediários
- conclusão.

Teoria Axiomática

Toda teoria axiomática pretende descrever o funcionamento de certas relações entre um conjunto de objetos.

Toda teoria axiomática pretende descrever o funcionamento de certas relações entre um conjunto de objetos. A geometria axiomática trata das relações entre pontos, retas e planos;

Toda teoria axiomática pretende descrever o funcionamento de certas relações entre um conjunto de objetos. A geometria axiomática trata das relações entre pontos, retas e planos; A aritmética trata das propriedades dos números inteiros e da teoria dos conjuntos.

- Mas o que são axiomas?

- Mas o que são axiomas?

os axiomas de uma teoria são afirmações que servem para indicar o que é cada objeto ou para validar ou invalidar a suspeita de que algo possa ser um determinado objeto da teoria.

- Mas o que são axiomas?

os axiomas de uma teoria são afirmações que servem para indicar o que é cada objeto ou para validar ou invalidar a suspeita de que algo possa ser um determinado objeto da teoria. Os axiomas próprios de uma teoria fixam as propriedades básicas ou as verdades iniciais da teoria. O desenvolvimento de uma teoria axiomática se faz por meio do estudo das consequências lógicas destes axiomas.

- Mas o que são axiomas?

os axiomas de uma teoria são afirmações que servem para indicar o que é cada objeto ou para validar ou invalidar a suspeita de que algo possa ser um determinado objeto da teoria. Os axiomas próprios de uma teoria fixam as propriedades básicas ou as verdades iniciais da teoria. O desenvolvimento de uma teoria axiomática se faz por meio do estudo das consequências lógicas destes axiomas. Os axiomas (ou postulados) devem ser aceitos sem provas.

Ao se adotar um conjunto de axiomática parte-se dos objetos básicos de que se fala, sem defini-los.

Ao se adotar um conjunto de axiomática parte-se dos objetos básicos de que se fala, sem defini-los. O que a teoria faz é dar uma descrição, ou seja, postular as propriedades ou relações essenciais (ou básicas) que algo deve satisfazer para poder ser considerado um objeto do qual a teoria fala.

Ao se adotar um conjunto de axiomática parte-se dos objetos básicos de que se fala, sem defini-los. O que a teoria faz é dar uma descrição, ou seja, postular as propriedades ou relações essenciais (ou básicas) que algo deve satisfazer para poder ser considerado um objeto do qual a teoria fala.Esse é o papel dos axiomas.

Ao se adotar um conjunto de axiomática parte-se dos objetos básicos de que se fala, sem defini-los. O que a teoria faz é dar uma descrição, ou seja, postular as propriedades ou relações essenciais (ou básicas) que algo deve satisfazer para poder ser considerado um objeto do qual a teoria fala.Esse é o papel dos axiomas. É essencial que não ocorram contradições no conjunto de axiomas.

Estrutura Lógico Dedutiva

Uma proposição é uma afirmação em que é possível atribuir um valor lógico verdadeiro ou falso.

Uma proposição é uma afirmação em que é possível atribuir um valor lógico verdadeiro ou falso. Em matemática, podemos definir Proposição de uma teoria como uma afirmação a qual sempre que todos os axiomas dessa teoria forem verdadeiros, esta afirmação também é verdadeira. De acordo com a importância da proposição ela pode receber o seguinte status:

Uma proposição é uma afirmação em que é possível atribuir um valor lógico verdadeiro ou falso. Em matemática, podemos definir Proposição de uma teoria como uma afirmação a qual sempre que todos os axiomas dessa teoria forem verdadeiros, esta afirmação também é verdadeira. De acordo com a importância da proposição ela pode receber o seguinte status:

- Teorema:

Uma proposição é uma afirmação em que é possível atribuir um valor lógico verdadeiro ou falso. Em matemática, podemos definir Proposição de uma teoria como uma afirmação a qual sempre que todos os axiomas dessa teoria forem verdadeiros, esta afirmação também é verdadeira. De acordo com a importância da proposição ela pode receber o seguinte status:

- Teorema: proposição importante dentro de uma teoria;

Uma proposição é uma afirmação em que é possível atribuir um valor lógico verdadeiro ou falso. Em matemática, podemos definir Proposição de uma teoria como uma afirmação a qual sempre que todos os axiomas dessa teoria forem verdadeiros, esta afirmação também é verdadeira. De acordo com a importância da proposição ela pode receber o seguinte status:

- Teorema: proposição importante dentro de uma teoria;
- Coralário:

Uma proposição é uma afirmação em que é possível atribuir um valor lógico verdadeiro ou falso. Em matemática, podemos definir Proposição de uma teoria como uma afirmação a qual sempre que todos os axiomas dessa teoria forem verdadeiros, esta afirmação também é verdadeira. De acordo com a importância da proposição ela pode receber o seguinte status:

- Teorema: proposição importante dentro de uma teoria;
- Coralário: proposição que decorre diretamente de um teorema;

Uma proposição é uma afirmação em que é possível atribuir um valor lógico verdadeiro ou falso. Em matemática, podemos definir Proposição de uma teoria como uma afirmação a qual sempre que todos os axiomas dessa teoria forem verdadeiros, esta afirmação também é verdadeira. De acordo com a importância da proposição ela pode receber o seguinte status:

- Teorema: proposição importante dentro de uma teoria;
- Coralário: proposição que decorre diretamente de um teorema;
- Lema

Uma proposição é uma afirmação em que é possível atribuir um valor lógico verdadeiro ou falso. Em matemática, podemos definir Proposição de uma teoria como uma afirmação a qual sempre que todos os axiomas dessa teoria forem verdadeiros, esta afirmação também é verdadeira. De acordo com a importância da proposição ela pode receber o seguinte status:

- Teorema: proposição importante dentro de uma teoria;
- Coralário: proposição que decorre diretamente de um teorema;
- Lema proposição cuja aplicação é demonstrar outra proposição

Tradicionalmente, uma proposição pode ser escrita na forma

"Se...então..."(condicional $P \Rightarrow Q$)e daí é dividido em duas partes:

Tradicionalmente, uma proposição pode ser escrita na forma "Se...então..."(condicional $P \Rightarrow Q$)e daí é dividido em duas partes: a hipótese (P)que apresenta as informações conhecidas sobre o problema;

Tradicionalmente, uma proposição pode ser escrita na forma "Se...então..."(condicional $P \Rightarrow Q$)e daí é dividido em duas partes: a hipótese (P)que apresenta as informações conhecidas sobre o problema; a tese (Q)que representa o que de fato se deseja provar.

Tradicionalmente, uma proposição pode ser escrita na forma "Se...então..."(condicional $P \Rightarrow Q$)e daí é dividido em duas partes: a hipótese (P)que apresenta as informações conhecidas sobre o problema; a tese (Q)que representa o que de fato se deseja provar. Se um teorema não está escrito na forma condicional, ele pode ser reescrito nesta forma.

Tradicionalmente, uma proposição pode ser escrita na forma "Se...então..."(condicional $P \Rightarrow Q$)e daí é dividido em duas partes: a hipótese (P)que apresenta as informações conhecidas sobre o problema; a tese (Q)que representa o que de fato se deseja provar. Se um teorema não está escrito na forma condicional, ele pode ser reescrito nesta forma. Além disso, nem sempre é verdade que se $P \Rightarrow Q$ teremos que $Q \Rightarrow P$. (recíproco)

Tradicionalmente, uma proposição pode ser escrita na forma "Se...então..."(condicional $P \Rightarrow Q$)e daí é dividido em duas partes: a hipótese (P)que apresenta as informações conhecidas sobre o problema; a tese (Q)que representa o que de fato se deseja provar. Se um teorema não está escrito na forma condicional, ele pode ser reescrito nesta forma. Além disso, nem sempre é verdade que se $P \Rightarrow Q$ teremos que $Q \Rightarrow P$. (recíproco) Quando tivermos que são verdadeiros $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ então podemos escrever:

Tradicionalmente, uma proposição pode ser escrita na forma "Se...então..."(condicional $P \Rightarrow Q$)e daí é dividido em duas partes: a hipótese (P)que apresenta as informações conhecidas sobre o problema; a tese (Q)que representa o que de fato se deseja provar. Se um teorema não está escrito na forma condicional, ele pode ser reescrito nesta forma. Além disso, nem sempre é verdade que se $P \Rightarrow Q$ teremos que $Q \Rightarrow P$. (recíproco) Quando tivermos que são verdadeiros $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$ então podemos escrever: $P \Leftrightarrow Q$

Justificativas que são aceitáveis em uma demostração:

- Por hipótese...

Justificativas que são aceitáveis em uma demostração:

- Por hipótese...
- Pelo axioma...

Justificativas que são aceitáveis em uma demostração:

- Por hipótese...
- Pelo axioma...
- Pelo teorema... (comprovado anteriormente)

Justificativas que são aceitáveis em uma demostração:

- Por hipótese...
- Pelo axioma...
- Pelo teorema... (comprovado anteriormente)
- Por definição... (sendo coerente à teoria axiomática a que se refere)

Justificativas que são aceitáveis em uma demostração:

- Por hipótese...
- Pelo axioma...
- Pelo teorema... (comprovado anteriormente)
- Por definição... (sendo coerente à teoria axiomática a que se refere)
- Pelos passos... (um passo anterior na argumentação)

Justificativas que são aceitáveis em uma demostração:

- Por hipótese...
- Pelo axioma...
- Pelo teorema... (comprovado anteriormente)
- Por definição... (sendo coerente à teoria axiomática a que se refere)
- Pelos passos... (um passo anterior na argumentação)
- Pelas regras... da lógica.

Regras da Lógica

- Negar por duas vezes determinada afirmação P equivale a própria afirmação P.

- Negar por duas vezes determinada afirmação P equivale a própria afirmação P.
- Negar uma implicação do tipo P)Q é o mesmo que dizer que vale P e não vale Q.

- Negar por duas vezes determinada afirmação P equivale a própria afirmação P.
- Negar uma implicação do tipo P)Q é o mesmo que dizer que vale P e não vale Q.
- Negar duas afirmações válidas P e Q, por exemplo, significa que não vale P ou não vale Q.

- Negar por duas vezes determinada afirmação P equivale a própria afirmação P.
- Negar uma implicação do tipo P)Q é o mesmo que dizer que vale P e não vale Q.
- Negar duas afirmações válidas P e Q, por exemplo, significa que não vale P ou não vale Q.
- Negar para todo x vale uma afirmação P referente a x é equivalente a existir um x tal que não é válida a afirmação P referente a x.

- Negar que existe um x tal que vale uma afirmação P referente a x é equivalente a dizer que para todo x não vale a afirmação P referente a x.

- Negar que existe um x tal que vale uma afirmação P referente a x é equivalente a dizer que para todo x não vale a afirmação P referente a x.
- Se uma afirmação P implica numa afirmação Q dentro de uma demonstração, dizemos que a afirmação Q é justificável.

- Negar que existe um x tal que vale uma afirmação P referente a x é equivalente a dizer que para todo x não vale a afirmação P referente a x.
- Se uma afirmação P implica numa afirmação Q dentro de uma demonstração, dizemos que a afirmação Q é justificável.
- Se P implica Q e Q implica R, então P implica R.

- Negar que existe um x tal que vale uma afirmação P referente a x é equivalente a dizer que para todo x não vale a afirmação P referente a x.
- Se uma afirmação P implica numa afirmação Q dentro de uma demonstração, dizemos que a afirmação Q é justificável.
- Se P implica Q e Q implica R, então P implica R.
- Se as afirmações P e Q sempre ocorrem juntas, e vale P, então vale Q.

- Negar que existe um x tal que vale uma afirmação P referente a x é equivalente a dizer que para todo x não vale a afirmação P referente a x.
- Se uma afirmação P implica numa afirmação Q dentro de uma demonstração, dizemos que a afirmação Q é justificável.
- Se P implica Q e Q implica R, então P implica R.
- Se as afirmações P e Q sempre ocorrem juntas, e vale P, então vale Q.
- Dizer que P implica Q equivale a dizer que se não ocorre Q então não ocorre P.

- Dada uma afirmação P, temos que ou vale P ou não vale P. Isto é, uma afirmação não pode ser simultaneamente válida e inválida. Além disso, necessariamente deve valer uma das duas opções: validade ou invalidade.

- Dada uma afirmação P, temos que ou vale P ou não vale P. Isto é, uma afirmação não pode ser simultaneamente válida e inválida. Além disso, necessariamente deve valer uma das duas opções: validade ou invalidade.
- Suponha que diferentes casos ou afirmações S1, S2, . . . , Sn sejam válidos numa demonstração e tais que necessariamente um deles ocorre. Se cada uma das afirmações S1, S2, . . . , Sn implicam numa afirmação C, então a afirmação C é válida na demonstração.

Tipos de demonstração

Existem três formas básicas de se demonstrar proposições enunciadas na forma $P \Rightarrow Q$:

Existem três formas básicas de se demonstrar proposições enunciadas na forma $P \Rightarrow Q$:

- Demonstração direta:

Existem três formas básicas de se demonstrar proposições enunciadas na forma $P \Rightarrow Q$:

- Demonstração direta:Consiste em supor que P é verdadeiro e construir um encadeamento de inferências que tenham como conclusão que Q é verdadeiro;

Existem três formas básicas de se demonstrar proposições enunciadas na forma $P \Rightarrow Q$:

- Demonstração direta:Consiste em supor que P é verdadeiro e construir um encadeamento de inferências que tenham como conclusão que Q é verdadeiro;
- Demostração por absurdo:

Existem três formas básicas de se demonstrar proposições enunciadas na forma $P \Rightarrow Q$:

- Demonstração direta:Consiste em supor que P é verdadeiro e construir um encadeamento de inferências que tenham como conclusão que Q é verdadeiro;
- Demostração por absurdo: consiste em supor que Q é falso e construir um encadeamento de argumentos que nos leve a conclusão de algum resultado que já sabemos previamente ser falso ou absurdo

Existem três formas básicas de se demonstrar proposições enunciadas na forma $P \Rightarrow Q$:

- Demonstração direta:Consiste em supor que P é verdadeiro e construir um encadeamento de inferências que tenham como conclusão que Q é verdadeiro;
- Demostração por absurdo: consiste em supor que Q é falso e construir um encadeamento de argumentos que nos leve a conclusão de algum resultado que já sabemos previamente ser falso ou absurdo
- Demonstração por contradição:

Existem três formas básicas de se demonstrar proposições enunciadas na forma $P \Rightarrow Q$:

- Demonstração direta:Consiste em supor que P é verdadeiro e construir um encadeamento de inferências que tenham como conclusão que Q é verdadeiro;
- Demostração por absurdo: consiste em supor que Q é falso e construir um encadeamento de argumentos que nos leve a conclusão de algum resultado que já sabemos previamente ser falso ou absurdo
- Demonstração por contradição: consiste em supor que Q é falso e construir um encadeamento de argumentos que nos leve que P é falso.

Referências

- Freitas, Renata; Viana, Petrucio. Minicurso de Métodos de Provas. II Colóquio de Matemática da Região Sul. Londrina, 2012.
- Silva, Danilo Bernardini. Demonstrações Matemáticas: uma abordagem histórica e prática deste a antiguidade até as aulas atuais. Dissetação PROFMAT, 2013.
- Ripoll, Jaime; Ripoll, Cydara; Silveira, José Francisco Porto. Números Racionais, Reais e Complexos. Editora da UFRGS. Porto Alegre, 2011.