

Microeconomia Avançada

Caderno de Soluções Passo a Passo

Listas de Problemas para a Pós-Graduação

Rodrigo Nobre Fernandez

Versão 1.0 – 2026

Como usar este caderno

Este arquivo resolve, em ordem, os 48 exercícios das oito listas incluídas em *Microeconomia Avançada: Notas de Aula para Pós-Graduação*. O objetivo não é apenas registrar respostas finais, mas explicitar a sequência lógica de cada resolução: definição do problema, identificação das condições de otimalidade ou de equilíbrio, desenvolvimento algébrico, checagem e interpretação econômica.

Alguns enunciados originais foram propositalmente deixados abertos — por exemplo, “para três jogos 2×2 ” ou “construa um jogo Bayesiano de entrada”. Nesses casos, este caderno fixa uma parametrização canônica antes de resolver o exercício. A parametrização adotada é parte da solução, e os resultados gerais que não dependem dela são destacados separadamente.

Nota didática. Para uso em sala, uma estratégia útil é entregar aos alunos apenas as listas e liberar este caderno depois da data de entrega. Em vários exercícios, há mais de uma forma correta de chegar ao resultado; aqui se privilegia a rota mais transparente para fins de ensino.

Sumário

Como usar este caderno	ii
1 Lista 1 – Escolha, consumidor e dualidade	1
1.1 Preferências lexicográficas	1
1.2 Cobb–Douglas: Marshalliana, indireta, Hicksiana e despesa	2
1.3 Identidades de Roy e Shephard	3
1.4 Preferência quase-linear com região de canto	4
1.5 Singularidade da matriz de Slutsky	5
1.6 CV, EV e excedente do consumidor em quase-linearidade	6
2 Lista 2 – Preferência revelada, produção e risco	8
2.1 Teste manual de GARP com cinco observações	8
2.2 Desigualdades de Afriat	9
2.3 Tecnologia CES e demandas condicionais	10
2.4 Convexidade e homogeneidade da função lucro	11
2.5 CARA versus CRRA	12
2.6 Espalhamento preservador da média	13
3 Lista 3 – Intertemporal, equilíbrio geral e bem-estar	14
3.1 Escolha intertemporal CRRA em dois períodos	14
3.2 Limite de endividamento	15
3.3 Economia de troca 2×2 Cobb–Douglas	16
3.4 Primeiro Teorema do Bem-Estar	17
3.5 Lógica geométrica do Segundo Teorema do Bem-Estar	18
3.6 Condição de Samuelson e provisão voluntária	19
4 Lista 4 – Jogos estáticos, mistos e Bayesianos	21
4.1 Três jogos 2×2 : dominância, racionalizabilidade e Nash	21
4.2 Nash Pareto ineficiente e Nash Pareto incomparáveis	22
4.3 Equilíbrio misto de Hawk–Dove	23
4.4 Existência de Nash com Kakutani	23
4.5 Jogo Bayesiano de entrada com custo privado	24
4.6 Correlação entre tipos e crenças condicionais	26

5	Lista 5 – Jogos dinâmicos, repetidos e oligopólio	27
5.1	Entrada, ameaça não crível, Nash e SPNE	27
5.2	Crenças por Bayes em sinalização	28
5.3	Limiar de desconto: grim trigger e punição de dois períodos	29
5.4	Cournot com n firmas	30
5.5	Stackelberg versus Cournot	31
5.6	Bertrand homogêneo e variante diferenciada	32
6	Lista 6 – Informação assimétrica e contratos	34
6.1	Mercado de limões com dois tipos	34
6.2	Spence: intervalo de sinais separadores	35
6.3	Screening com dois tipos e custo quadrático	36
6.4	Por que IR_L e IC_H são as restrições relevantes	38
6.5	Principal–agente binário: primeiro e segundo melhor	39
6.6	Responsabilidade limitada	40
7	Lista 7 – Mecanismos e leilões	42
7.1	Princípio da revelação em ambiente Bayesiano finito	42
7.2	VCG para um único objeto	43
7.3	Primeiro preço: distribuição geral	44
7.4	Primeiro preço com $F(v) = v^2$ e $n = 2$	45
7.5	Reserva ótima de Myerson	45
7.6	Equivalência de receita em concessões públicas	47
8	Lista 8 – Problemas integradores	48
8.1	Concessão como leilão seguido de risco moral	48
8.2	Certificação ambiental como sinalização	49
8.3	Seguro contra desastre: seleção adversa e risco moral	50
8.4	Procurement com custo privado e qualidade parcialmente não observável	51
8.5	Pigou versus mercado de licenças com custos privados	52
8.6	Leitura microeconômica de um artigo aplicado	53
	Observações finais	55

Capítulo 1

Lista 1 – Escolha, consumidor e dualidade

1.1 Preferências lexicográficas

Enunciado. Prove que preferências lexicográficas em $\mathbb{R}_+^2$ são completas e transitivas, mas não admitem representação contínua por utilidade real.

Passo 1. Definição da relação. Para $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, defina

$$x \succ_L y \iff x_1 > y_1 \text{ ou } [x_1 = y_1 \text{ e } x_2 > y_2].$$

A relação fraca $\succeq_L$ inclui também a igualdade.

Passo 2. Completude. Dados x e y , há três possibilidades para a primeira coordenada: $x_1 > y_1$, $x_1 < y_1$ ou $x_1 = y_1$. Nos dois primeiros casos, a comparação é imediata. Se $x_1 = y_1$, comparamos x_2 e y_2 . Logo, sempre vale $x \succeq_L y$ ou $y \succeq_L x$ (ou ambos, se $x = y$).

Passo 3. Transitividade. Suponha $x \succeq_L y$ e $y \succeq_L z$. Se $x_1 > y_1$, então $y \succeq_L z$ implica $y_1 \geq z_1$, de modo que $x_1 > z_1$ e, portanto, $x \succ_L z$. Se $x_1 = y_1$, então $x_2 \geq y_2$. Analogamente, ou $y_1 > z_1$, caso em que $x_1 > z_1$, ou $y_1 = z_1$ e $y_2 \geq z_2$. Neste último caso, $x_1 = z_1$ e $x_2 \geq y_2 \geq z_2$. Em todos os casos, $x \succeq_L z$.

Passo 4. Impossibilidade de representação por utilidade real. O resultado pode ser mostrado de forma ainda mais forte: não existe sequer uma função $u : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que represente a ordem lexicográfica, contínua ou não.

Suponha, por absurdo, que exista tal u . Para cada $a \in \mathbb{R}_+$,

$$(a, 1) \succ_L (a, 0),$$

logo

$$u(a, 1) > u(a, 0).$$

O intervalo aberto $I_a = (u(a, 0), u(a, 1))$ é, portanto, não vazio e contém algum racional $q_a \in \mathbb{Q}$.

Agora tome $a < b$. Pela prioridade lexicográfica da primeira coordenada,

$$(b, 0) \succ_L (a, 1),$$

de modo que

$$u(b, 0) > u(a, 1).$$

Assim, os intervalos I_a e I_b são disjuntos. Logo, a aplicação $a \mapsto q_a$ associa a cada $a \in \mathbb{R}_+$ um racional distinto. Isso produziria uma injeção de um conjunto não enumerável em $\mathbb{Q}$, que é enumerável. Contradição.

Interpretação econômica. Completude e transitividade não bastam para garantir uma representação numérica conveniente. O exemplo lexicográfico mostra por que hipóteses topológicas, como continuidade, aparecem na teoria da escolha: elas excluem ordens excessivamente “finas”, nas quais uma coordenada domina absolutamente qualquer variação da outra.

1.2 Cobb–Douglas: Marshalliana, indireta, Hicksiana e despesa

Enunciado. Para $u(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$, obtenha demanda Marshalliana, utilidade indireta, Hicksiana e função despesa.

Passo 1. Problema Marshalliano.

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} x_1^{1/3} x_2^{2/3} \quad \text{sujeito a} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = m.$$

Como a utilidade é estritamente crescente, o orçamento é exaurido.

Passo 2. Condição de tangência. É mais simples maximizar o logaritmo da utilidade:

$$\max \frac{1}{3} \ln x_1 + \frac{2}{3} \ln x_2.$$

As CPOs são

$$\frac{1}{3x_1} = \lambda p_1, \quad \frac{2}{3x_2} = \lambda p_2.$$

Dividindo as duas equações,

$$\frac{x_2}{2x_1} = \frac{p_1}{p_2} \implies x_2 = 2 \frac{p_1}{p_2} x_1.$$

Substituindo no orçamento,

$$p_1 x_1 + 2p_1 x_1 = 3p_1 x_1 = m.$$

Portanto,

$$\boxed{x_1^M(p, m) = \frac{m}{3p_1}}, \quad \boxed{x_2^M(p, m) = \frac{2m}{3p_2}}.$$

Passo 3. Utilidade indireta. Substituímos as demandas na utilidade:

$$\begin{aligned} v(p, m) &= \left(\frac{m}{3p_1} \right)^{1/3} \left(\frac{2m}{3p_2} \right)^{2/3} \\ &= \frac{2^{2/3}}{3} \frac{m}{p_1^{1/3} p_2^{2/3}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$v(p, m) = \frac{2^{2/3} m}{3 p_1^{1/3} p_2^{2/3}}.$$

Passo 4. Função despesa. Para atingir nível de utilidade $\bar{u}$, precisamos de renda $m = e(p, \bar{u})$ tal que

$$\bar{u} = \frac{2^{2/3} e}{3 p_1^{1/3} p_2^{2/3}}.$$

Invertendo,

$$e(p, \bar{u}) = \frac{3}{2^{2/3}} \bar{u} p_1^{1/3} p_2^{2/3}.$$

Passo 5. Demandas Hicksianas. Em uma Cobb–Douglas, as parcelas de gasto permanecem $1/3$ e $2/3$. Logo,

$$h_1(p, \bar{u}) = \frac{1}{3} \frac{e(p, \bar{u})}{p_1} = \frac{\bar{u}}{2^{2/3}} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/3},$$

e

$$h_2(p, \bar{u}) = \frac{2}{3} \frac{e(p, \bar{u})}{p_2} = 2^{1/3} \bar{u} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/3}.$$

Checagem. Substituindo h_1 e h_2 na função utilidade, obtém-se exatamente $\bar{u}$. Além disso, $p_1 h_1 + p_2 h_2 = e(p, \bar{u})$.

1.3 Identidades de Roy e Shephard

Enunciado. Verifique Roy e Shephard para o item anterior.

Passo 1. Roy para o bem 1. Escreva

$$v(p, m) = K m p_1^{-1/3} p_2^{-2/3}, \quad K = \frac{2^{2/3}}{3}.$$

Então

$$\frac{\partial v}{\partial m} = \frac{v}{m}, \quad \frac{\partial v}{\partial p_1} = -\frac{1}{3} \frac{v}{p_1}.$$

Pela identidade de Roy,

$$x_1^M = -\frac{v_{p_1}}{v_m} = -\frac{-\frac{1}{3} v / p_1}{v / m} = \frac{m}{3 p_1}.$$

Passo 2. Roy para o bem 2.

$$\frac{\partial v}{\partial p_2} = -\frac{2}{3} \frac{v}{p_2},$$

portanto

$$x_2^M = -\frac{v_{p_2}}{v_m} = \boxed{\frac{2m}{3p_2}}.$$

Passo 3. Shephard para o bem 1. Com

$$e(p, \bar{u}) = C \bar{u} p_1^{1/3} p_2^{2/3}, \quad C = \frac{3}{2^{2/3}},$$

temos

$$\frac{\partial e}{\partial p_1} = \frac{1}{3} \frac{e}{p_1} = \boxed{h_1(p, \bar{u})}.$$

Passo 4. Shephard para o bem 2.

$$\frac{\partial e}{\partial p_2} = \frac{2}{3} \frac{e}{p_2} = \boxed{h_2(p, \bar{u})}.$$

Interpretação econômica. Roy recupera escolhas não compensadas a partir da utilidade indireta; Shephard recupera escolhas compensadas a partir da função despesa. As duas identidades são manifestações do mesmo princípio de envelope aplicado aos problemas primal e dual do consumidor.

1.4 Preferência quase-linear com região de canto

Enunciado. Resolva integralmente o problema com $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$, identificando a região de canto.

Passo 1. Problema.

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} \sqrt{x_1} + x_2 \quad \text{sujeito a} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq m.$$

Com $m > 0$ e preços positivos, o orçamento é exaurido.

Passo 2. Redução a uma variável. Da restrição,

$$x_2 = \frac{m - p_1 x_1}{p_2}, \quad 0 \leq x_1 \leq \frac{m}{p_1}.$$

Logo,

$$\phi(x_1) = \sqrt{x_1} + \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1.$$

Como

$$\phi''(x_1) = -\frac{1}{4x_1^{3/2}} < 0,$$

a função é estritamente côncava no interior.

Passo 3. Ótimo interior candidato.

$$\phi'(x_1) = \frac{1}{2\sqrt{x_1}} - \frac{p_1}{p_2} = 0$$

implica

$$x_1^* = \frac{p_2^2}{4p_1^2}.$$

O gasto correspondente no bem 1 é

$$p_1 x_1^* = \frac{p_2^2}{4p_1}.$$

Esse ponto é factível com $x_2 \geq 0$ se e somente se

$$m \geq \frac{p_2^2}{4p_1}.$$

Passo 4. Região interior. Se $m \geq p_2^2/(4p_1)$,

$$x_1^M = \frac{p_2^2}{4p_1^2}, \quad x_2^M = \frac{m}{p_2} - \frac{p_2}{4p_1}.$$

Observe que a demanda por x_1 não depende da renda: é a característica quase-linear.

Passo 5. Região de canto. Se

$$m < \frac{p_2^2}{4p_1},$$

o consumidor não tem renda suficiente para alcançar o x_1 interior. Como $\phi'(x_1) > 0$ em todo o intervalo factível, ele coloca toda a renda no bem 1:

$$x_1^M = \frac{m}{p_1}, \quad x_2^M = 0.$$

Passo 6. Utilidade indireta. Portanto,

$$v(p, m) = \begin{cases} \sqrt{m/p_1}, & m < \frac{p_2^2}{4p_1}, \\ \frac{p_2}{2p_1} + \frac{m}{p_2} - \frac{p_2}{4p_1} = \frac{m}{p_2} + \frac{p_2}{4p_1}, & m \geq \frac{p_2^2}{4p_1}. \end{cases}$$

1.5 Singularidade da matriz de Slutsky

Enunciado. Mostre que a matriz de Slutsky é singular por homogeneidade.

Passo 1. A demanda Marshalliana é homogênea de grau zero em (p, m) :

$$x(\lambda p, \lambda m) = x(p, m), \quad \lambda > 0.$$

Passo 2. Diferencie em relação a λ e avalie em $\lambda = 1$. Pelo teorema de Euler,

$$D_p x(p, m) p + x_m(p, m) m = 0.$$

Passo 3. A matriz de Slutsky é

$$S(p, m) = D_p x(p, m) + x_m(p, m)x(p, m)^\top.$$

Multiplicando por p ,

$$\begin{aligned} Sp &= D_p x p + x_m x^\top p \\ &= D_p x p + x_m m, \end{aligned}$$

pois, por Walras, $x^\top p = m$ quando as preferências são localmente não saciadas.

Passo 4. Usando a identidade do passo 2,

$$\boxed{Sp = 0}.$$

Como $p \neq 0$, a matriz possui um vetor não nulo em seu núcleo. Logo,

$$\boxed{\det S = 0},$$

isto é, S é singular.

Interpretação econômica. Uma variação proporcional de todos os preços compensada por uma variação proporcional da renda não altera a escolha real. A singularidade da Slutsky é a assinatura diferencial dessa ausência de ilusão monetária.

1.6 CV, EV e excedente do consumidor em quase-linearidade

Enunciado. Compare variação compensatória, variação equivalente e mudança no excedente do consumidor para uma preferência quase-linear.

Passo 1. Considere

$$u(x, y) = v(x) + y,$$

com y numérico, preço de x igual a p e renda m . O problema pode ser escrito como

$$\max_x \{v(x) - px\} + m.$$

Defina

$$s(p) = \max_x \{v(x) - px\}.$$

Então a utilidade indireta é

$$V(p, m) = m + s(p).$$

Passo 2. A demanda interior satisfaz

$$v'(x(p)) = p.$$

Pelo envelope,

$$s'(p) = -x(p).$$

Passo 3. A função despesa é a inversa da utilidade indireta em renda:

$$e(p, \bar{u}) = \bar{u} - s(p).$$

Passo 4. Considere um aumento de preço de p_0 para $p_1 > p_0$ e renda inicial m . A compensação necessária após a alta para restaurar a utilidade inicial é

$$\begin{aligned} CV &= e(p_1, V(p_0, m)) - m \\ &= [m + s(p_0) - s(p_1)] - m \\ &= s(p_0) - s(p_1). \end{aligned}$$

Como $s'(p) = -x(p)$,

$$CV = \int_{p_0}^{p_1} x(p) dp.$$

Passo 5. A variação equivalente, entendida como a quantia máxima que o consumidor aceitaria pagar aos preços antigos para evitar a alta, é

$$\begin{aligned} EV &= m - e(p_0, V(p_1, m)) \\ &= m - [m + s(p_1) - s(p_0)] \\ &= s(p_0) - s(p_1). \end{aligned}$$

Logo,

$$EV = CV.$$

Passo 6. A perda de excedente do consumidor no caso quase-linear é precisamente a área sob a demanda Marshalliana entre os dois preços:

$$\Delta CS_{\text{perda}} = \int_{p_0}^{p_1} x(p) dp.$$

Portanto,

$$CV = EV = \Delta CS_{\text{perda}}.$$

Interpretação econômica. A igualdade é exata porque não há efeito renda sobre a demanda de x na região interior. Em preferências gerais, Marshalliana e Hicksiana diferem, e o excedente do consumidor deixa de ser uma medida monetária exata de bem-estar.

Capítulo 2

Lista 2 – Preferência revelada, produção e risco

2.1 Teste manual de GARP com cinco observações

Enunciado. Construa um conjunto de cinco observações de consumo e implemente manualmente o teste de GARP.

Passo 1. Construção dos dados. Considere as cinco observações abaixo, todas com gasto observado igual a 10:

t	$p^t = (p_1^t, p_2^t)$	$x^t = (x_1^t, x_2^t)$
1	(1, 1)	(5, 5)
2	(1, 2)	(5, 2.5)
3	(2, 1)	(2.5, 5)
4	(1, 4)	(5, 1.25)
5	(4, 1)	(1.25, 5)

Essas escolhas são, por construção, demandas Cobb–Douglas com parcelas de gasto iguais a $1/2$.

Passo 2. Matriz de custos contrafactuais. Calcule $p^t \cdot x^s$ para todo par (t, s) :

	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
p^1	10	7.5	7.5	6.25	6.25
p^2	15	10	12.5	7.5	11.25
p^3	15	12.5	10	11.25	7.5
p^4	25	15	22.5	10	21.25
p^5	25	22.5	15	21.25	10

Passo 3. Revelação direta. Dizemos que $x^t R^D x^s$ quando $p^t \cdot x^t \geq p^t \cdot x^s$. Como o gasto próprio é sempre 10:

$$1R^D\{2, 3, 4, 5\}, \quad 2R^D4, \quad 3R^D5,$$

além das relações reflexivas.

Passo 4. Fecho transitivo. As relações $2R^D4$ e $3R^D5$ já estão incluídas no conjunto de cestas diretamente reveladas por 1. Não surgem ciclos adicionais relevantes além das relações reflexivas.

Passo 5. Checagem de GARP. GARP é violado se existir t, s tais que $x^t R x^s$ e, ao mesmo tempo,

$$p^s \cdot x^s > p^s \cdot x^t.$$

Por exemplo, $x^1 R x^2$, mas ao preço p^2 temos

$$p^2 \cdot x^2 = 10 < 15 = p^2 \cdot x^1.$$

Portanto, não há reversão estrita. O mesmo ocorre para todos os pares revelados. Assim, o conjunto de dados satisfaz

$$\boxed{\text{GARP}}.$$

Interpretação econômica. GARP testa coerência com maximização de alguma preferência localmente não saciada, sem impor forma funcional. Ele é, portanto, uma ponte direta entre teoria da escolha e dados observados.

2.2 Desigualdades de Afriat

Enunciado. Escreva as desigualdades de Afriat e explique como resolveria o problema por programação linear.

Passo 1. Para observações (p^t, x^t) , $t = 1, \dots, T$, procuramos números u_t e multiplicadores $\lambda_t > 0$ tais que, para todo s, t ,

$$\boxed{u_s \leq u_t + \lambda_t p^t \cdot (x^s - x^t)}.$$

Essas são as desigualdades de Afriat.

Passo 2. Interpretação. O lado direito é o hiperplano de suporte da utilidade no ponto observado x^t . A desigualdade exige que o nível atribuído a qualquer outra observação x^s não ultrapasse esse suporte.

Passo 3. Problema de viabilidade linear. As incógnitas são

$$(u_1, \dots, u_T, \lambda_1, \dots, \lambda_T).$$

Todas as restrições são lineares nessas incógnitas porque p^t e x^t são dados. Para evitar a desigualdade estrita $\lambda_t > 0$, pode-se normalizar

$$\lambda_t \geq \varepsilon$$

para algum $\varepsilon > 0$ pequeno, ou usar uma normalização de escala como $\lambda_1 = 1$ quando admissível.

Passo 4. Objetivo artificial. Como o problema é de factibilidade, pode-se minimizar zero:

$$\min 0$$

sujeito às desigualdades. Alternativamente, introduz-se uma variável de folga e minimiza-se a soma das violações para diagnosticar dados quase racionais.

Passo 5. Recuperação de uma utilidade racionalizadora. Se o sistema é factível, uma função utilidade contínua, crescente e côncava que racionaliza os dados é

$$u(x) = \min_t \left\{ u_t + \lambda_t p^t \cdot (x - x^t) \right\}.$$

O mínimo de funções afins é côncavo, e $\lambda_t > 0$ com preços positivos assegura monotonicidade.

Nota didática. O Teorema de Afriat estabelece a equivalência entre GARP, factibilidade das desigualdades e racionalização por uma utilidade bem comportada. Assim, o exercício anterior e este são duas faces do mesmo resultado.

2.3 Tecnologia CES e demandas condicionais

Enunciado. Para uma tecnologia CES, derive as demandas condicionais de fatores e discuta a elasticidade de substituição.

Considere

$$f(z_1, z_2) = A [\alpha z_1^\rho + (1 - \alpha) z_2^\rho]^{1/\rho},$$

com $A > 0$, $0 < \alpha < 1$, $\rho < 1$ e $\rho \neq 0$.

Passo 1. O problema de custo é

$$\min_{z_1, z_2 \geq 0} w_1 z_1 + w_2 z_2 \quad \text{sujeito a} \quad f(z_1, z_2) \geq q.$$

Com monotonicidade, a restrição vincula.

Passo 2. A taxa marginal de substituição técnica é

$$\frac{MP_1}{MP_2} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{\rho-1}.$$

No ótimo interior,

$$\frac{MP_1}{MP_2} = \frac{w_1}{w_2}.$$

Logo,

$$\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{\rho-1} = \frac{w_1}{w_2} \frac{1 - \alpha}{\alpha}.$$

Passo 3. Isolando a razão ótima,

$$\frac{z_1}{z_2} = \left[\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{w_2}{w_1} \right]^{\frac{1}{1-\rho}} \equiv k(w).$$

Passo 4. Use a restrição tecnológica:

$$q = Az_2 [\alpha k(w)^\rho + (1-\alpha)]^{1/\rho}.$$

Portanto,

$$z_2^c(w, q) = \frac{q/A}{[\alpha k(w)^\rho + (1-\alpha)]^{1/\rho}},$$

e

$$z_1^c(w, q) = k(w) z_2^c(w, q).$$

Passo 5. A elasticidade de substituição de Hicks é constante. Como

$$\ln \frac{w_1}{w_2} = \text{constante} + (\rho - 1) \ln \frac{z_1}{z_2},$$

segue que

$$\sigma = -\frac{d \ln(z_1/z_2)}{d \ln(w_1/w_2)} = \frac{1}{1-\rho}.$$

Interpretação econômica. Quanto maior ρ , maior σ : os fatores tornam-se mais facilmente substituíveis. Quando $\rho \rightarrow 0$, obtém-se Cobb–Douglas e $\sigma = 1$; quando $\rho \rightarrow -\infty$, aproxima-se Leontief e $\sigma \rightarrow 0$.

2.4 Convexidade e homogeneidade da função lucro

Enunciado. Mostre que a função lucro é convexa e homogênea de grau um.

Passo 1. Escreva, para preço do produto p e vetor de preços dos insumos w ,

$$\pi(p, w) = \sup_{z \in Z} \{pf(z) - w \cdot z\}.$$

Passo 2. Para cada plano de produção fixo z , a função

$$\ell_z(p, w) = pf(z) - w \cdot z$$

é linear no vetor de preços (p, w) .

Passo 3. A função lucro é o supremo pontual da família de funções lineares $\{\ell_z\}_{z \in Z}$. O supremo pontual de funções convexas é convexo. Logo,

$$\pi(p, w) \text{ é convexa em } (p, w).$$

Explicitamente, para $0 \leq \theta \leq 1$,

$$\pi(\theta q + (1 - \theta)q') \leq \theta\pi(q) + (1 - \theta)\pi(q'),$$

onde q empilha todos os preços.

Passo 4. Para homogeneidade, tome $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}\pi(\lambda p, \lambda w) &= \sup_z \{\lambda p f(z) - \lambda w \cdot z\} \\ &= \lambda \sup_z \{p f(z) - w \cdot z\} \\ &= \boxed{\lambda \pi(p, w)}.\end{aligned}$$

Interpretação econômica. Convexidade aqui não significa tecnologia convexa; ela decorre da otimização em preços. A firma pode sempre escolher, diante de uma combinação de vetores de preços, o plano que maximiza uma função linear. Homogeneidade reflete que multiplicar todos os preços monetários pela mesma constante apenas muda a unidade de conta.

2.5 CARA versus CRRA

Enunciado. Compare aversão absoluta e relativa ao risco para utilidades CARA e CRRA.

Passo 1. As medidas de Arrow–Pratt são

$$A(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}, \quad R(w) = -w \frac{u''(w)}{u'(w)} = wA(w).$$

Passo 2. CARA. Para

$$u(w) = -e^{-aw}, \quad a > 0,$$

temos

$$u'(w) = ae^{-aw}, \quad u''(w) = -a^2e^{-aw}.$$

Logo,

$$\boxed{A(w) = a}, \quad \boxed{R(w) = aw}.$$

A aversão absoluta é constante; a relativa cresce linearmente com a riqueza.

Passo 3. CRRA. Para

$$u(w) = \frac{w^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad \gamma > 0, \gamma \neq 1,$$

temos

$$u'(w) = w^{-\gamma}, \quad u''(w) = -\gamma w^{-\gamma-1}.$$

Portanto,

$$\boxed{A(w) = \frac{\gamma}{w}}, \quad \boxed{R(w) = \gamma}.$$

No caso limite $\gamma = 1$, $u(w) = \ln w$ e os mesmos resultados relativos valem.

Interpretação econômica. CARA é conveniente quando queremos eliminar efeitos de riqueza sobre a disposição absoluta a assumir risco. CRRA é natural quando decisões de risco escalam com riqueza, pois mantém constante a aversão relativa e implica aversão absoluta decrescente.

2.6 Espalhamento preservador da média

Enunciado. Prove que um espalhamento preservador da média reduz utilidade esperada de todo agente avesso ao risco.

Passo 1. Uma forma útil de caracterizar um espalhamento preservador da média é escrever

$$Y = X + \varepsilon, \quad \mathbb{E}[\varepsilon \mid X] = 0.$$

Assim,

$$\mathbb{E}[Y \mid X] = X.$$

Passo 2. Se o agente é avesso ao risco, u é côncava. Aplicando Jensen condicionalmente a X ,

$$\mathbb{E}[u(Y) \mid X] \leq u(\mathbb{E}[Y \mid X]).$$

Passo 3. Como $\mathbb{E}[Y \mid X] = X$,

$$\mathbb{E}[u(Y) \mid X] \leq u(X).$$

Tomando expectativa novamente,

$$\boxed{\mathbb{E}[u(Y)] \leq \mathbb{E}[u(X)]}.$$

Passo 4. Se u é estritamente côncava e ε é não degenerado com probabilidade positiva, a desigualdade é estrita.

Nota didática. Em formulação mais geral, Y é um espalhamento preservador da média de X se X domina Y em dominância estocástica de segunda ordem. A representação acima via ruído de média condicional zero é a versão martingale do mesmo princípio e torna a prova transparente.

Capítulo 3

Lista 3 – Intertemporal, equilíbrio geral e bem-estar

3.1 Escolha intertemporal CRRA em dois períodos

Enunciado. Resolva o problema intertemporal CRRA de dois períodos e obtenha a resposta do crescimento do consumo à taxa de juros.

Considere

$$\max_{c_0, c_1 > 0} \frac{c_0^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

sujeito a

$$c_0 + \frac{c_1}{1+r} = y_0 + \frac{y_1}{1+r} \equiv W,$$

com $\sigma > 0$ e $\beta \in (0, 1)$.

Passo 1. A Lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{c_0^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \beta \frac{c_1^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \lambda \left(W - c_0 - \frac{c_1}{1+r} \right).$$

Passo 2. As CPOs interiores são

$$c_0^{-\sigma} = \lambda, \quad \beta c_1^{-\sigma} = \frac{\lambda}{1+r}.$$

Eliminando λ ,

$$c_0^{-\sigma} = \beta(1+r)c_1^{-\sigma}.$$

Passo 3. Logo,

$$\left(\frac{c_1}{c_0} \right)^\sigma = \beta(1+r),$$

e

$$\boxed{\frac{c_1}{c_0} = [\beta(1+r)]^{1/\sigma}}.$$

Defina

$$g \equiv [\beta(1+r)]^{1/\sigma}.$$

Passo 4. Substituindo $c_1 = gc_0$ na restrição intertemporal,

$$c_0 + \frac{gc_0}{1+r} = W.$$

Portanto,

$$\boxed{c_0^* = \frac{W}{1+g/(1+r)}}, \quad \boxed{c_1^* = gc_0^*}.$$

Passo 5. Para medir a resposta do crescimento do consumo ao retorno bruto $R = 1+r$, tome logaritmos:

$$\ln \frac{c_1}{c_0} = \frac{1}{\sigma}(\ln \beta + \ln R).$$

Assim,

$$\boxed{\frac{\partial \ln(c_1/c_0)}{\partial \ln R} = \frac{1}{\sigma}}.$$

Em termos de r ,

$$\boxed{\frac{\partial \ln(c_1/c_0)}{\partial r} = \frac{1}{\sigma(1+r)}}.$$

Interpretação econômica. $1/\sigma$ é a elasticidade de substituição intertemporal. Quanto maior σ , mais forte a curvatura da utilidade e menor a resposta do perfil de consumo a mudanças na taxa de juros.

3.2 Limite de endividamento

Enunciado. Introduza limite de endividamento e caracterize quando ele vincula.

Passo 1. Escreva a escolha em termos de ativos entre os períodos:

$$c_0 = y_0 - a_1, \quad c_1 = y_1 + (1+r)a_1.$$

Imponha

$$a_1 \geq -\bar{b},$$

onde $\bar{b} \geq 0$ é o máximo de dívida permitido.

Passo 2. O problema é

$$\max_{a_1 \geq -\bar{b}} u(y_0 - a_1) + \beta u(y_1 + (1+r)a_1).$$

A Lagrangiana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = u(c_0) + \beta u(c_1) + \mu(a_1 + \bar{b}), \quad \mu \geq 0.$$

Passo 3. A CPO é

$$-u'(c_0) + \beta(1+r)u'(c_1) + \mu = 0.$$

Portanto,

$$\boxed{u'(c_0) = \beta(1+r)u'(c_1) + \mu}.$$

Passo 4. Se o limite não vincula, $\mu = 0$ e recuperamos a equação de Euler usual:

$$u'(c_0) = \beta(1+r)u'(c_1).$$

Passo 5. Seja a_1^u a poupança ótima do problema sem restrição. O limite vincula se e somente se

$$a_1^u < -\bar{b}.$$

Equivalentemente, a escolha de consumo presente irrestrita excede o máximo financiável:

$$c_0^u > y_0 + \bar{b}.$$

Passo 6. Quando vincula,

$$a_1^* = -\bar{b},$$

logo

$$c_0^* = y_0 + \bar{b}, \quad c_1^* = y_1 - (1+r)\bar{b}.$$

Além disso, $\mu > 0$ e

$$u'(c_0^*) > \beta(1+r)u'(c_1^*).$$

Interpretação econômica. O consumidor restrito gostaria de transferir ainda mais recursos do futuro para o presente. A desigualdade na Euler mede exatamente o valor-sombra de relaxar o limite de crédito.

3.3 Economia de troca 2×2 Cobb–Douglas

Enunciado. Resolva uma economia de troca 2×2 com utilidades Cobb–Douglas e dotações arbitrárias positivas.

Considere dois consumidores $i = 1, 2$, dois bens e

$$u_i(x_{i1}, x_{i2}) = x_{i1}^{\alpha_i} x_{i2}^{1-\alpha_i}, \quad 0 < \alpha_i < 1,$$

com dotações $\omega_i = (\omega_{i1}, \omega_{i2}) \gg 0$.

Passo 1. Normalize $p_2 = 1$ e denote $p_1 = p > 0$. A riqueza do consumidor i é

$$m_i = p\omega_{i1} + \omega_{i2}.$$

Passo 2. As demandas Cobb–Douglas são

$$x_{i1} = \frac{\alpha_i m_i}{p}, \quad x_{i2} = (1 - \alpha_i) m_i.$$

Passo 3. Seja

$$\Omega_1 = \omega_{11} + \omega_{21}.$$

O equilíbrio do mercado 1 exige

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_i(p\omega_{i1} + \omega_{i2})}{p} = \Omega_1.$$

Multiplicando por p ,

$$p \sum_i \alpha_i \omega_{i1} + \sum_i \alpha_i \omega_{i2} = p\Omega_1.$$

Passo 4. Isolando p ,

$$p^* = \frac{\alpha_1 \omega_{12} + \alpha_2 \omega_{22}}{(1 - \alpha_1) \omega_{11} + (1 - \alpha_2) \omega_{21}}.$$

Como todas as dotações são positivas e $0 < \alpha_i < 1$, o preço é estritamente positivo.

Passo 5. As alocações de equilíbrio são obtidas substituindo p^* nas demandas:

$$x_{i1}^* = \frac{\alpha_i(p^* \omega_{i1} + \omega_{i2})}{p^*}, \quad x_{i2}^* = (1 - \alpha_i)(p^* \omega_{i1} + \omega_{i2}).$$

Passo 6. Não é necessário impor separadamente o fechamento do mercado 2. Pela Lei de Walras, se todos os consumidores exaurem seus orçamentos e o mercado 1 fecha, então o valor do excesso de demanda agregado é zero e o mercado 2 também fecha.

3.4 Primeiro Teorema do Bem-Estar

Enunciado. Demonstre o primeiro teorema do bem-estar com não saciedade local.

Passo 1. Considere um equilíbrio competitivo (p, x^*) em uma economia de troca. Para cada consumidor i , x_i^* maximiza suas preferências no conjunto

$$B_i(p) = \{x_i : p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i\}.$$

Passo 2. Pela não saciedade local, o orçamento é exaurido:

$$p \cdot x_i^* = p \cdot \omega_i.$$

Passo 3. Suponha, por absurdo, que exista uma alocação factível $y = (y_1, \dots, y_I)$ que Pareto-domina x^* . Então

$$y_i \succeq_i x_i^* \quad \forall i,$$

e para pelo menos um agente j ,

$$y_j \succ_j x_j^*.$$

Passo 4. Se $y_i \succeq_i x_i^*$ e $p \cdot y_i < p \cdot \omega_i$, a não saciedade local permitiria encontrar uma cesta arbitrariamente próxima de y_i , estritamente preferida, ainda dentro do orçamento. Isso contradiz a optimalidade de x_i^* . Portanto,

$$p \cdot y_i \geq p \cdot \omega_i \quad \forall i.$$

Para o agente estritamente melhor, necessariamente

$$p \cdot y_j > p \cdot \omega_j.$$

Passo 5. Somando,

$$\sum_i p \cdot y_i > \sum_i p \cdot \omega_i.$$

Passo 6. Mas a factibilidade implica

$$\sum_i y_i \leq \sum_i \omega_i.$$

Com preços não negativos,

$$\sum_i p \cdot y_i \leq \sum_i p \cdot \omega_i,$$

contradição.

Logo,

$$\boxed{x^* \text{ é Pareto eficiente.}}$$

Interpretação econômica. O argumento central é uma contradição de valor: uma melhoria de Pareto exigiria, aos preços de equilíbrio, mais poder de compra agregado do que os recursos disponíveis na economia.

3.5 Lógica geométrica do Segundo Teorema do Bem-Estar

Enunciado. Mostre, por separação geométrica, a lógica do segundo teorema em uma economia convexa.

Passo 1. Seja $x^* = (x_1^*, \dots, x_I^*)$ uma alocação Pareto eficiente. Para cada consumidor, defina o conjunto de cestas estritamente preferidas:

$$P_i(x_i^*) = \{x_i : x_i \succ_i x_i^*\}.$$

Sob convexidade das preferências, esses conjuntos têm geometria compatível com argumentos de separação.

Passo 2. Considere o conjunto de recursos agregados que permitiriam tornar todos os agentes pelo menos tão bem quanto em x^* e alguém estritamente melhor. Pareto-eficiência implica que esse conjunto não intersecta o conjunto de recursos factíveis da economia.

Passo 3. Como os conjuntos relevantes são convexos, um teorema de hiperplano separador garante a existência de um vetor não nulo $p \geq 0$ que separa o conjunto de melhorias do conjunto factível.

Passo 4. Esse vetor p funciona como vetor de preços de suporte. Em particular, para cada agente,

$$p \cdot x_i \geq p \cdot x_i^* \quad \text{para toda } x_i \succeq_i x_i^*.$$

Assim, x_i^* é uma solução de minimização de gasto para alcançar o nível de utilidade $u_i(x_i^*)$.

Passo 5. Escolha transferências de riqueza de modo que

$$m_i = p \cdot x_i^*.$$

Com esses direitos de compra, x_i^* pertence ao orçamento do agente e nenhuma cesta estritamente preferida é mais barata. Logo, x_i^* é escolha ótima do consumidor aos preços p .

Passo 6. Como x^* é factível, os mercados fecham. Portanto, após redistribuição apropriada das dotações ou transferências lump-sum, a alocação Pareto eficiente pode ser descentralizada como equilíbrio competitivo.

Nota didática. A convexidade é decisiva. Sem ela, pode não existir um hiperplano de suporte comum, e uma alocação eficiente pode não ser descentralizável por preços lineares.

3.6 Condição de Samuelson e provisão voluntária

Enunciado. Derive a condição de Samuelson para um bem público e compare com provisão voluntária.

Passo 1. Considere n consumidores com utilidade quase-linear

$$u_i = x_i + v_i(G),$$

e custo do bem público $C(G)$. A restrição agregada é

$$\sum_i x_i + C(G) = M.$$

Passo 2. O planejador maximiza

$$\sum_i [x_i + v_i(G)]$$

sujeito à restrição. Eliminando $\sum_i x_i = M - C(G)$, o problema em G é

$$\max_G \left\{ \sum_i v_i(G) - C(G) \right\}.$$

Passo 3. A CPO interior é

$$\sum_{i=1}^n v'_i(G^*) = C'(G^*).$$

Em termos gerais,

$$\sum_i MRS_i = MRT,$$

que é a condição de Samuelson.

Passo 4. Agora suponha contribuições voluntárias $g_i \geq 0$, com

$$G = \sum_i g_i,$$

e custo unitário para cada contribuição. O consumidor i escolhe

$$\max_{g_i \geq 0} v_i(G) - g_i.$$

Se $g_i > 0$, a CPO privada é

$$\boxed{v'_i(G) = 1}.$$

Passo 5. Compare com a condição social quando $C(G) = G$:

$$\sum_i v'_i(G^*) = 1.$$

O agente privado considera apenas seu próprio benefício marginal, enquanto o planejador soma benefícios de todos.

Passo 6. Exemplo simétrico: $v_i(G) = a \ln G$ e $C(G) = G$. O ótimo social satisfaz

$$\frac{na}{G^*} = 1 \quad \implies \quad \boxed{G^* = na}.$$

Em um equilíbrio de contribuição voluntária com contribuição positiva de algum agente,

$$\frac{a}{G^N} = 1 \quad \implies \quad \boxed{G^N = a}.$$

Logo,

$$G^N < G^* \quad \text{para } n > 1.$$

Interpretação econômica. A subprovisão não decorre de irracionalidade; é um resultado de incentivos. Cada agente ignora a externalidade positiva de sua contribuição sobre os demais.

Capítulo 4

Lista 4 – Jogos estáticos, mistos e Bayesianos

4.1 Três jogos 2×2 : dominância, racionalizabilidade e Nash

Enunciado. Para três jogos 2×2 , encontre dominância, racionalizabilidade e Nash.

Nota didática. Como o enunciado não especifica as matrizes, adotamos três jogos canônicos: Dilema dos Prisioneiros, Coordenação e Matching Pennies.

Jogo A: Dilema dos Prisioneiros

	C	D
C	$(3, 3)$	$(0, 5)$
D	$(5, 0)$	$(1, 1)$

Passo 1. Para o jogador linha, D rende $5 > 3$ se a coluna joga C e $1 > 0$ se joga D . Logo, D domina estritamente C . O mesmo vale para o jogador coluna.

Passo 2. A eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas remove C para ambos. A única estratégia racionalizável é D .

Passo 3. O único equilíbrio de Nash é

$$\boxed{(D, D)}.$$

Jogo B: Coordenação

	A	B
A	$(2, 2)$	$(0, 0)$
B	$(0, 0)$	$(1, 1)$

Passo 1. Não há estratégia estritamente dominada. Cada ação é melhor resposta a alguma crença sobre o rival; portanto, ambas são racionalizáveis.

Passo 2. Existem dois Nash puros:

$$\boxed{(A, A)}, \quad \boxed{(B, B)}.$$

Passo 3. Para o Nash misto, seja q a probabilidade de o rival jogar A . O jogador é indiferente quando

$$2q = 1 - q.$$

Logo,

$$q = \frac{1}{3}.$$

Por simetria, ambos jogam A com probabilidade $1/3$.

Jogo C: Matching Pennies

	H	T
H	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
T	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

Passo 1. Não há dominância e ambas as ações são racionalizáveis.

Passo 2. Não existe Nash puro, pois em cada célula um dos jogadores deseja desviar.

Passo 3. Para tornar o rival indiferente, cada jogador deve misturar uniformemente:

$$\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(T) = \frac{1}{2}.$$

Esse é o único Nash.

4.2 Nash Pareto ineficiente e Nash Pareto incomparáveis

Enunciado. Dê um exemplo em que Nash é Pareto ineficiente e outro com múltiplos Nash Pareto incomparáveis.

Passo 1. O Dilema dos Prisioneiros acima fornece o primeiro exemplo. O equilíbrio (D, D) gera $(1, 1)$, enquanto (C, C) gera $(3, 3)$. Portanto,

$$(3, 3) > (1, 1)$$

componente a componente. Assim, o Nash é Pareto dominado.

Passo 2. Para equilíbrios Pareto incomparáveis, use Batalha dos Sexos:

	O	F
O	$(2, 1)$	$(0, 0)$
F	$(0, 0)$	$(1, 2)$

Os dois Nash puros são

$$(O, O) \quad \text{e} \quad (F, F).$$

Passo 3. Em (O, O) , o jogador 1 prefere esse equilíbrio, mas o jogador 2 prefere (F, F) . Logo, nenhum dos dois equilíbrios Pareto-domina o outro.

4.3 Equilíbrio misto de Hawk–Dove

Enunciado. Calcule o equilíbrio misto de Hawk–Dove com parâmetros gerais.

Considere valor do recurso $V > 0$ e custo de luta $C > V$. Os payoffs são

	H	D
H	$((V - C)/2, (V - C)/2)$	$(V, 0)$
D	$(0, V)$	$(V/2, V/2)$

Passo 1. Seja p a probabilidade de o rival jogar Hawk. O payoff esperado de Hawk é

$$\begin{aligned} U(H) &= p \frac{V - C}{2} + (1 - p)V \\ &= V - \frac{p(V + C)}{2}. \end{aligned}$$

Passo 2. O payoff esperado de Dove é

$$U(D) = p \cdot 0 + (1 - p) \frac{V}{2} = \frac{(1 - p)V}{2}.$$

Passo 3. Em equilíbrio misto interior, o jogador é indiferente:

$$V - \frac{p(V + C)}{2} = \frac{(1 - p)V}{2}.$$

Multiplicando por 2,

$$2V - pV - pC = V - pV.$$

Logo,

$$V - pC = 0.$$

Passo 4. Portanto,

$$\boxed{p^* = \frac{V}{C}}.$$

Como $C > V$, temos $p^* \in (0, 1)$.

Interpretação econômica. Quanto maior o custo de conflito, menor a frequência de comportamento agressivo que pode ser sustentada em equilíbrio.

4.4 Existência de Nash com Kakutani

Enunciado. Prove existência de Nash em um jogo contínuo simples usando Kakutani, deixando explícitas as hipóteses.

Considere Cournot com duas firmas, $q_i \in [0, 1]$, demanda inversa $P = 1 - q_1 - q_2$ e custo marginal zero. O payoff é

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i(1 - q_i - q_j).$$

Passo 1. Conjuntos de estratégias. Cada conjunto $S_i = [0, 1]$ é não vazio, compacto e convexo. O produto $S = [0, 1]^2$ também é compacto e convexo.

Passo 2. Continuidade. π_i é polinomial e, portanto, contínua em (q_i, q_j) .

Passo 3. Quase-concavidade na própria estratégia. Para q_j fixo,

$$\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2} = -2 < 0.$$

Logo, π_i é estritamente côncava em q_i .

Passo 4. A melhor resposta é

$$\text{BR}_i(q_j) = \arg \max_{q_i \in [0,1]} q_i(1 - q_i - q_j).$$

A CPO interior fornece

$$1 - 2q_i - q_j = 0,$$

portanto

$$\boxed{\text{BR}_i(q_j) = \frac{1 - q_j}{2}},$$

que já pertence a $[0, 1/2]$ para $q_j \in [0, 1]$.

Passo 5. Cada correspondência de melhor resposta tem valores não vazios, compactos e convexos. Como aqui é uma função contínua, possui também gráfico fechado e é semicontínua superiormente.

Passo 6. A correspondência produto

$$\text{BR}(q_1, q_2) = \text{BR}_1(q_2) \times \text{BR}_2(q_1)$$

satisfaz as hipóteses de Kakutani. Portanto, existe (q_1^*, q_2^*) tal que

$$(q_1^*, q_2^*) \in \text{BR}(q_1^*, q_2^*).$$

Passo 7. Resolvendo o ponto fixo simétrico,

$$q = \frac{1 - q}{2},$$

logo

$$\boxed{q_1^* = q_2^* = \frac{1}{3}}.$$

4.5 Jogo Bayesiano de entrada com custo privado

Enunciado. Construa um jogo Bayesiano de entrada com custo privado e resolva o BNE.

Nota didática. Adotamos uma versão sequencial simples de entrada-deterência. A solução é um equilíbrio Bayesiano perfeito; sua estratégia em forma agente também é um BNE do jogo Bayesiano correspondente.

O entrante possui custo privado $c \sim U[0, 1]$. A incumbente escolhe primeiro entre investimento dissuasório H e ausência de investimento L . O investimento custa $k > 0$. Se houver entrada, o lucro bruto do entrante é $a \in (0, 1)$ após H e 1 após L . A incumbente recebe 2 sem entrada e 1 com entrada, menos k se escolheu H .

Passo 1. Após observar L , o entrante entra se

$$1 - c \geq 0.$$

Como $c \in [0, 1]$, todos os tipos entram, exceto o tipo limite $c = 1$. Assim,

$$\mathbb{P}(E \mid L) = 1.$$

Passo 2. Após observar H , o entrante entra se

$$a - c \geq 0,$$

isto é,

$$\boxed{c \leq a}.$$

Como $c \sim U[0, 1]$,

$$\boxed{\mathbb{P}(E \mid H) = a}.$$

Passo 3. Se a incumbente escolhe L , seu payoff esperado é

$$\Pi_I(L) = 1.$$

Passo 4. Se escolhe H , com probabilidade a há entrada e com probabilidade $1 - a$ não há:

$$\begin{aligned} \Pi_I(H) &= a(1 - k) + (1 - a)(2 - k) \\ &= 2 - a - k. \end{aligned}$$

Passo 5. A incumbente escolhe H se

$$2 - a - k \geq 1,$$

ou seja,

$$\boxed{k \leq 1 - a}.$$

Caso contrário, escolhe L .

Passo 6. Portanto, o equilíbrio é:

$$\boxed{\begin{cases} H; & E \text{ se } c \leq a, \text{ } O \text{ se } c > a, & k \leq 1 - a, \\ L; & E \text{ para } c < 1, & k > 1 - a. \end{cases}}$$

Interpretação econômica. A estratégia do entrante é de corte em custo. A incumbente investe em deterrência apenas se a redução probabilística de entrada compensa o custo do investimento.

4.6 Correlação entre tipos e crenças condicionais

Enunciado. Mostre como correlação entre tipos altera crenças condicionais e estratégias de equilíbrio.

Passo 1. Considere dois jogadores. Cada um tem custo privado $c_i \in \{c_L, c_H\}$, com $0 < c_L < c_H < 1$, e escolhe investir (I) ou não (N). Se ambos investem, quem investiu recebe benefício 1; se o outro não investe, o benefício é 0. O custo de investir é c_i . Assim, o payoff esperado de investir, para um tipo t , é

$$U_t(I) = \mathbb{P}(I_j \mid t_i = t) - c_t.$$

O payoff de N é zero.

Passo 2. Suponha uma estratégia candidata em que apenas o tipo de baixo custo investe. Então

$$\mathbb{P}(I_j \mid t_i = t) = \mathbb{P}(c_j = c_L \mid c_i = t).$$

Passo 3. Sob independência, se a probabilidade marginal de baixo custo é π , então

$$\mathbb{P}(c_j = c_L \mid c_i = c_L) = \mathbb{P}(c_j = c_L \mid c_i = c_H) = \pi.$$

Logo, a estratégia separadora é equilíbrio se

$$\pi \geq c_L \quad \text{e} \quad \pi \leq c_H.$$

Passo 4. Com correlação positiva, as crenças tornam-se tipo-dependentes. Por exemplo,

$$\mathbb{P}(c_j = c_L \mid c_i = c_L) = 0.9, \quad \mathbb{P}(c_j = c_L \mid c_i = c_H) = 0.1.$$

Se $c_L = 0.4$ e $c_H = 0.6$, então

$$0.9 - 0.4 > 0, \quad 0.1 - 0.6 < 0,$$

e a separação é fortemente sustentada.

Passo 5. Sob correlação negativa, por exemplo

$$\mathbb{P}(c_j = c_L \mid c_i = c_L) = 0.1, \quad \mathbb{P}(c_j = c_L \mid c_i = c_H) = 0.9,$$

o tipo de baixo custo teria

$$0.1 - 0.4 < 0,$$

e não desejaria investir. A estratégia de equilíbrio muda.

Interpretação econômica. Em jogos Bayesianos, não basta conhecer a distribuição marginal de tipos. O objeto decisivo é a distribuição condicional que cada tipo usa para prever o comportamento dos demais. Correlação altera essas crenças e pode mudar qualitativamente o equilíbrio.

Capítulo 5

Lista 5 – Jogos dinâmicos, repetidos e oligopólio

5.1 Entrada, ameaça não crível, Nash e SPNE

Enunciado. Encontre todos os Nash e SPNE de um jogo de entrada com ameaça não crível.

Considere o jogo sequencial: o entrante escolhe O (ficar fora) ou E (entrar). Se fica fora, os payoffs são $(0, 2)$. Se entra, a incumbente escolhe F (lutar) ou A (acomodar). Os payoffs pós-entrada são

$$(E, F) = (-1, -1), \quad (E, A) = (1, 1).$$

Passo 1. Forma normal. Como a incumbente só age após entrada, suas estratégias puras são F e A . A forma normal é

	F	A
O	$(0, 2)$	$(0, 2)$
E	$(-1, -1)$	$(1, 1)$

Passo 2. Nash puros. (E, A) é Nash: dada acomodação, entrar é melhor que ficar fora; dada entrada, acomodar é melhor que lutar.

(O, F) também é Nash: se a incumbente ameaça lutar, o entrante prefere ficar fora. Quando o entrante fica fora, a ação contingente da incumbente não afeta seu payoff, logo F é uma melhor resposta fraca.

Passo 3. Há ainda equilíbrios com o entrante escolhendo O e a incumbente misturando. Seja q a probabilidade de F . O payoff de entrar seria

$$q(-1) + (1 - q)(1) = 1 - 2q.$$

Ficar fora rende 0. Logo, O é melhor resposta sempre que

$$q \geq \frac{1}{2}.$$

Portanto existe um continuum de Nash com o entrante fora e a incumbente ameaçando lutar com probabilidade pelo menos $1/2$.

Passo 4. Indução retroativa. No subjogo após entrada, a incumbente compara

$$-1 \quad \text{com} \quad 1.$$

Logo, escolhe necessariamente A .

Passo 5. Antecipando acomodação, o entrante compara

$$1 \quad \text{com} \quad 0,$$

e entra.

Passo 6. Assim, o único equilíbrio perfeito em subjogos é

$$\boxed{(E, A)}.$$

Interpretação econômica. Nash pode sustentar ameaças fora do caminho que o jogador não executaria se o nó fosse realmente alcançado. SPNE elimina exatamente esse tipo de falta de credibilidade.

5.2 Crenças por Bayes em sinalização

Enunciado. Em um jogo de sinalização simples, calcule crenças por Bayes on-path.

Passo 1. Considere tipos $\theta \in \{H, L\}$, com prior

$$\mathbb{P}(H) = \mu, \quad \mathbb{P}(L) = 1 - \mu.$$

O emissor escolhe sinal $s \in \{0, 1\}$.

Passo 2. Suponha um equilíbrio separador:

$$s(H) = 1, \quad s(L) = 0.$$

Passo 3. Ao observar $s = 1$, a regra de Bayes fornece

$$\mathbb{P}(H \mid 1) = \frac{\mathbb{P}(1 \mid H)\mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(1 \mid H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(1 \mid L)\mathbb{P}(L)}.$$

Como $\mathbb{P}(1 \mid H) = 1$ e $\mathbb{P}(1 \mid L) = 0$,

$$\boxed{\mathbb{P}(H \mid 1) = 1}.$$

Passo 4. Analogamente,

$$\boxed{\mathbb{P}(H \mid 0) = 0}.$$

Passo 5. Agora considere pooling em $s = 0$: ambos os tipos enviam 0. Então

$$\mathbb{P}(H \mid 0) = \frac{1 \cdot \mu}{1 \cdot \mu + 1 \cdot (1 - \mu)} = \boxed{\mu}.$$

Passo 6. Se $s = 1$ nunca ocorre sob pooling, Bayes não determina $\mathbb{P}(H \mid 1)$: essa é uma crença fora do caminho. Refinamentos de equilíbrio podem restringi-la, mas PBE sozinho não a determina quando o denominador de Bayes é zero.

5.3 Limiar de desconto: grim trigger e punição de dois períodos

Enunciado. Derive o limiar de desconto para cooperação com grim trigger e com punição de dois períodos.

Considere um Dilema dos Prisioneiros repetido com payoffs por período

$$T > R > P > S,$$

onde R é cooperação mútua, T é o ganho unilateral de desvio e P é o payoff na punição Nash.

Grim trigger

Passo 1. Cooperando para sempre,

$$V_C = R + \delta R + \delta^2 R + \dots = \frac{R}{1 - \delta}.$$

Passo 2. Desviando uma vez e sendo punido para sempre,

$$V_D = T + \delta \frac{P}{1 - \delta}.$$

Passo 3. Cooperação é sustentável se

$$\frac{R}{1 - \delta} \geq T + \delta \frac{P}{1 - \delta}.$$

Multiplicando por $1 - \delta$,

$$R \geq T - \delta T + \delta P.$$

Logo,

$$\delta(T - P) \geq T - R.$$

Portanto,

$$\boxed{\delta \geq \frac{T - R}{T - P}}.$$

Punição por dois períodos

Suponha que um desvio gere dois períodos de payoff P e depois o retorno à cooperação.

Passo 1. O valor do desvio é

$$V_D^{(2)} = T + \delta P + \delta^2 P + \delta^3 \frac{R}{1 - \delta}.$$

Passo 2. Compare com

$$V_C = R + \delta R + \delta^2 R + \delta^3 \frac{R}{1 - \delta}.$$

Os termos a partir de $t = 3$ cancelam. A condição é

$$R + \delta R + \delta^2 R \geq T + \delta P + \delta^2 P.$$

Passo 3. Rearranjando,

$$(R - P)(\delta + \delta^2) \geq T - R.$$

Defina

$$k = \frac{T - R}{R - P} > 0.$$

Então

$$\delta^2 + \delta - k \geq 0.$$

A raiz positiva é

$$\delta \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + 4k}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\frac{T-R}{R-P}}}{2}.$$

Nota didática. Para que a estratégia completa seja SPNE, a punição também deve ser sequencialmente racional. Se P provém de um Nash do jogo de estágio, isso é imediato durante a fase punitiva.

5.4 Cournot com n firmas

Enunciado. Resolva Cournot com n firmas e custo marginal constante.

Considere demanda inversa

$$P(Q) = a - bQ, \quad a > c,$$

e custo $C_i(q_i) = cq_i$.

Passo 1. O lucro da firma i é

$$\pi_i = [a - b(q_i + Q_{-i}) - c]q_i.$$

Passo 2. A CPO é

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = a - c - 2bq_i - bQ_{-i} = 0.$$

Logo,

$$q_i = \frac{a - c - bQ_{-i}}{2b}.$$

Passo 3. Em equilíbrio simétrico, $q_i = q$ e $Q_{-i} = (n - 1)q$:

$$a - c - 2bq - b(n - 1)q = 0.$$

Portanto,

$$q^* = \frac{a - c}{b(n + 1)}.$$

Passo 4. A quantidade total é

$$Q^* = \frac{n(a-c)}{b(n+1)}.$$

Passo 5. O preço é

$$\begin{aligned} P^* &= a - bQ^* \\ &= a - \frac{n(a-c)}{n+1} \\ &= \frac{a+nc}{n+1}. \end{aligned}$$

Passo 6. Como

$$P^* - c = \frac{a-c}{n+1},$$

o lucro de cada firma é

$$\pi_i^* = \frac{(a-c)^2}{b(n+1)^2}.$$

Interpretação econômica. Quando $n \rightarrow \infty$, $P^* \rightarrow c$ e o resultado converge ao competitivo. Cournot mostra como poder de mercado se dissipa gradualmente com o número de firmas.

5.5 Stackelberg versus Cournot

Enunciado. Resolva Stackelberg e compare quantidades e lucros com Cournot.

Use a mesma demanda $P = a - b(q_1 + q_2)$ e custo marginal c .

Passo 1. A firma 2 é seguidora. Dado q_1 , resolve

$$\max_{q_2} [a - c - bq_1 - bq_2]q_2.$$

Sua melhor resposta é

$$q_2(q_1) = \frac{a - c - bq_1}{2b}.$$

Passo 2. A líder antecipa essa resposta. Defina $A = a - c$. Então

$$Q = q_1 + \frac{A - bq_1}{2b}.$$

O markup de mercado é

$$P - c = A - bQ = \frac{A - bq_1}{2}.$$

Logo,

$$\pi_1(q_1) = q_1 \frac{A - bq_1}{2}.$$

Passo 3. A CPO da líder é

$$\frac{A - 2bq_1}{2} = 0,$$

portanto

$$q_1^S = \frac{A}{2b}.$$

Passo 4. A seguidora produz

$$q_2^S = \frac{A}{4b}.$$

Assim,

$$Q^S = \frac{3A}{4b}, \quad P^S = c + \frac{A}{4}.$$

Passo 5. Os lucros são

$$\pi_1^S = \frac{A^2}{8b}, \quad \pi_2^S = \frac{A^2}{16b}.$$

Passo 6. Em Cournot com duas firmas,

$$q_1^C = q_2^C = \frac{A}{3b}, \quad \pi_i^C = \frac{A^2}{9b}.$$

Comparações:

$$q_1^S > q_i^C > q_2^S,$$

$$\pi_1^S > \pi_i^C > \pi_2^S,$$

e

$$Q^S > Q^C = \frac{2A}{3b}.$$

Interpretação econômica. A liderança em quantidade é uma vantagem estratégica: a líder se compromete com produção alta e força a seguidora a recuar ao longo de sua curva de melhor resposta.

5.6 Bertrand homogêneo e variante diferenciada

Enunciado. Explique por que Bertrand com produto homogêneo e capacidade ilimitada é sensível às hipóteses e resolva uma variante com diferenciação linear.

Passo 1. No modelo homogêneo padrão, duas firmas têm custo marginal comum c , capacidade ilimitada, escolhem preços simultaneamente e consumidores compram do menor preço. Qualquer preço $p > c$ pode ser subcotado por $p - \varepsilon$, capturando todo o mercado com margem positiva. Preços abaixo de c geram prejuízo. Portanto,

$$p_1^* = p_2^* = c.$$

Passo 2. O resultado depende fortemente de produto homogêneo, capacidade ilimitada, custos iguais, ausência de custos de busca, escolha simultânea e possibilidade de atender

todo o mercado. Relaxar qualquer uma dessas hipóteses pode restaurar markups positivos.

Passo 3. Considere agora demandas diferenciadas

$$q_i = a - bp_i + dp_j, \quad 0 < d < b,$$

e custo marginal c .

Passo 4. O lucro é

$$\pi_i = (p_i - c)(a - bp_i + dp_j).$$

A CPO é

$$a - bp_i + dp_j - b(p_i - c) = 0.$$

Logo, a melhor resposta é

$$p_i = \frac{a + dp_j + bc}{2b}.$$

Passo 5. Em equilíbrio simétrico, $p_i = p_j = p$:

$$p = \frac{a + dp + bc}{2b}.$$

Portanto,

$$p^* = \frac{a + bc}{2b - d}.$$

Passo 6. Da CPO, no equilíbrio,

$$q^* = b(p^* - c),$$

logo

$$q^* = \frac{b[a - c(b - d)]}{2b - d}.$$

O resultado requer $a > c(b - d)$ para demanda positiva.

Interpretação econômica. Diferenciação reduz a elasticidade residual enfrentada por cada firma. Por isso, a lógica de subcotação até custo marginal deixa de operar com a mesma força.

Capítulo 6

Lista 6 – Informação assimétrica e contratos

6.1 Mercado de limões com dois tipos

Enunciado. Construa um modelo de limões com dois tipos e caracterize todos os equilíbrios de preço possíveis.

Considere carros de qualidade L e H , com fração λ de carros H . O vendedor de um carro tipo t tem valor de reserva c_t e o comprador valoriza o carro em v_t , com

$$c_H > c_L, \quad v_H > v_L.$$

Compradores são competitivos e pagam o valor esperado condicional à composição dos carros ofertados.

Passo 1. Pooling com ambos os tipos. Se ambos vendem, a qualidade é a priori. O preço competitivo é

$$p_P = \lambda v_H + (1 - \lambda)v_L \equiv \bar{v}.$$

Para ambos ofertarem, é necessário

$$\bar{v} \geq c_H.$$

Como $c_H > c_L$, essa condição também garante participação do tipo baixo. Assim, pooling com trade total existe se

$$\bar{v} \geq c_H.$$

Passo 2. Somente limões. Se apenas L é ofertado, o preço competitivo é

$$p_L = v_L.$$

Para o vendedor L participar,

$$v_L \geq c_L.$$

Para o vendedor H não participar,

$$v_L < c_H.$$

Logo, um equilíbrio de seleção adversa com apenas baixa qualidade existe se

$$c_L \leq v_L < c_H.$$

Passo 3. Somente alta qualidade não pode ocorrer sob a ordenação padrão. Se um preço é alto o suficiente para induzir o tipo H a vender, então $p \geq c_H > c_L$, de modo que o tipo L também deseja vender. Portanto não há equilíbrio competitivo com apenas H ofertado.

Passo 4. Colapso do mercado. Se

$$v_L < c_L$$

e, ao mesmo tempo,

$$\bar{v} < c_H,$$

nem o mercado de baixa qualidade isolado nem o pooling podem se sustentar. Nesse caso, pode haver ausência de trade, com crenças fora do caminho consistentes com nenhum vendedor entrando no mercado.

Passo 5. Assim, os regimes economicamente relevantes são:

$\bar{v} \geq c_H$	: pooling com ambos os tipos pode existir;
$c_L \leq v_L < c_H$	: equilíbrio apenas com limões;
$v_L < c_L$ e $\bar{v} < c_H$	: possível colapso do mercado.

Interpretação econômica. O mecanismo central é endógeno: quando o preço cai, os bens de alta qualidade saem do mercado; isso piora a composição esperada, reduz o preço novamente e pode gerar uma espiral de seleção adversa.

6.2 Spence: intervalo de sinais separadores

Enunciado. No modelo de Spence, derive o intervalo de sinais que sustenta separação.

Considere produtividade $\theta_H > \theta_L > 0$, educação $e \geq 0$, custo

$$c(e, \theta) = \frac{e}{\theta},$$

e educação puramente sinalizadora. Em separação, tome $e_L = 0$ e $e_H = e > 0$. Firms competitivas pagam produtividade esperada.

Passo 1. Em separação perfeita,

$$w(0) = \theta_L, \quad w(e) = \theta_H.$$

Passo 2. A restrição de incentivo do tipo alto é

$$\theta_H - \frac{e}{\theta_H} \geq \theta_L.$$

Logo,

$$e \leq \theta_H(\theta_H - \theta_L).$$

Passo 3. A restrição de incentivo do tipo baixo é

$$\theta_L \geq \theta_H - \frac{e}{\theta_L}.$$

Logo,

$$e \geq \theta_L(\theta_H - \theta_L).$$

Passo 4. Portanto, qualquer sinal

$$\theta_L(\theta_H - \theta_L) \leq e \leq \theta_H(\theta_H - \theta_L)$$

pode sustentar um equilíbrio separador, dado um sistema apropriado de crenças fora do caminho.

Interpretação econômica. O sinal precisa ser caro o bastante para desencorajar o tipo baixo, mas não tão caro a ponto de deixar de valer a pena para o tipo alto. Single crossing garante que esse intervalo seja não vazio.

6.3 Screening com dois tipos e custo quadrático

Enunciado. Resolva screening com dois tipos e custo quadrático para probabilidade genérica λ .

Considere tipos $\theta_H > \theta_L > 0$, probabilidade λ do tipo alto, utilidade

$$U(\theta; q, t) = \theta q - t,$$

e custo do principal

$$C(q) = \frac{q^2}{2}.$$

Passo 1. No caso regular, IR_L e IC_H vinculam:

$$t_L = \theta_L q_L,$$

e

$$t_H = t_L + \theta_H(q_H - q_L).$$

Passo 2. Substituindo no lucro esperado,

$$\begin{aligned}\Pi &= \lambda \left[t_H - \frac{q_H^2}{2} \right] + (1 - \lambda) \left[t_L - \frac{q_L^2}{2} \right] \\ &= \lambda \left[\theta_H q_H - (\theta_H - \theta_L) q_L - \frac{q_H^2}{2} \right] + (1 - \lambda) \left[\theta_L q_L - \frac{q_L^2}{2} \right].\end{aligned}$$

Passo 3. A CPO para q_H é

$$\lambda(\theta_H - q_H) = 0.$$

Logo,

$$\boxed{q_H^* = \theta_H}.$$

Não há distorção no topo.

Passo 4. A CPO para q_L é

$$-\lambda(\theta_H - \theta_L) + (1 - \lambda)(\theta_L - q_L) = 0.$$

Assim,

$$\boxed{q_L^* = \theta_L - \frac{\lambda}{1 - \lambda}(\theta_H - \theta_L)}.$$

Se o lado direito for negativo, a solução com não negatividade é

$$\boxed{q_L^* = 0}.$$

Passo 5. Portanto, de forma compacta,

$$\boxed{q_L^* = \max \left\{ 0, \theta_L - \frac{\lambda}{1 - \lambda}(\theta_H - \theta_L) \right\}}.$$

Passo 6. As transferências são

$$\boxed{t_L^* = \theta_L q_L^*},$$

e

$$\boxed{t_H^* = \theta_L q_L^* + \theta_H(\theta_H - q_L^*)}.$$

Passo 7. A renda informacional do tipo alto é

$$U_H = \theta_H q_H - t_H = (\theta_H - \theta_L) q_L^*.$$

Logo,

$$\boxed{U_H = (\theta_H - \theta_L) q_L^*}.$$

Interpretação econômica. Quanto maior λ , mais importante é, para o principal, reduzir a renda informacional paga ao tipo alto. Por isso a distorção da quantidade do tipo baixo aumenta com a frequência do tipo alto.

6.4 Por que IR_L e IC_H são as restrições relevantes

Enunciado. Mostre formalmente por que IR_L e IC_H são as restrições relevantes no caso regular de screening.

Passo 1. As quatro restrições são

$$\begin{aligned} IR_L : \quad & \theta_L q_L - t_L \geq 0, \\ IR_H : \quad & \theta_H q_H - t_H \geq 0, \\ IC_L : \quad & \theta_L q_L - t_L \geq \theta_L q_H - t_H, \\ IC_H : \quad & \theta_H q_H - t_H \geq \theta_H q_L - t_L. \end{aligned}$$

Passo 2. IR_L vincula. Se IR_L tivesse folga, poderíamos aumentar t_L e t_H pelo mesmo pequeno valor. As diferenças relevantes nas restrições de incentivo não mudariam, mas o lucro do principal aumentaria. O processo continua até IR_L vincular. Portanto,

$$\boxed{t_L = \theta_L q_L}.$$

Passo 3. IC_H vincula. Com IR_L vinculando, se IC_H tivesse folga, o principal poderia elevar t_H sem afetar t_L , reduzindo a utilidade do tipo alto até que IC_H vinculasse. Isso aumenta lucro e relaxa IC_L . Logo,

$$\boxed{\theta_H q_H - t_H = \theta_H q_L - t_L}.$$

Passo 4. Das duas igualdades,

$$t_H = t_L + \theta_H(q_H - q_L).$$

A utilidade do tipo alto em seu contrato é

$$\begin{aligned} U_H &= \theta_H q_H - t_H \\ &= \theta_H q_L - t_L \\ &= (\theta_H - \theta_L) q_L \geq 0. \end{aligned}$$

Logo, IR_H é automaticamente satisfeita.

Passo 5. Para IC_L , calcule a utilidade do tipo baixo ao imitar o alto:

$$\begin{aligned} \theta_L q_H - t_H &= \theta_L q_H - \theta_H q_L - \theta_H(q_H - q_L) \\ &= -(\theta_H - \theta_L)(q_H - q_L). \end{aligned}$$

Se monotonicidade exige $q_H \geq q_L$, então

$$\theta_L q_H - t_H \leq 0.$$

Como o tipo baixo recebe 0 em seu próprio contrato, IC_L também é automaticamente satisfeita.

Interpretação econômica. O tipo baixo fica exatamente em sua opção externa; o tipo alto precisa receber renda para não imitar o baixo. Essa é a geometria econômica por trás da redução de quatro restrições para duas no caso regular.

6.5 Principal–agente binário: primeiro e segundo melhor

Enunciado. Resolva um principal–agente de dois resultados com agente avesso ao risco e compare primeiro e segundo melhor.

Nota didática. Como o enunciado é aberto, usamos a parametrização canônica: esforço $e \in \{L, H\}$, probabilidades de sucesso $p_H > p_L$, custo de esforço $g_H = g > 0$, $g_L = 0$, utilidade do agente $v(w) = \sqrt{w}$ e utilidade de reserva $\bar{U} \geq 0$. O principal é neutro ao risco.

Primeiro melhor: esforço observável

Passo 1. Se o principal deseja implementar H e esforço é observável, não há razão para impor risco ao agente. O contrato eficiente oferece salário constante $w_G = w_B = w^{FB}$.

Passo 2. A participação vincula:

$$\sqrt{w^{FB}} - g = \bar{U}.$$

Logo,

$$w^{FB} = (\bar{U} + g)^2.$$

Passo 3. O custo salarial esperado do principal é exatamente

$$C_W^{FB} = (\bar{U} + g)^2.$$

Ele escolhe esforço alto apenas se o ganho de produto esperado compensar esse custo adicional relativamente ao esforço baixo.

Segundo melhor: esforço oculto

Passo 1. Denote

$$a = \sqrt{w_G}, \quad b = \sqrt{w_B}.$$

A restrição de incentivo para esforço alto é

$$p_H a + (1 - p_H) b - g \geq p_L a + (1 - p_L) b.$$

Logo,

$$(p_H - p_L)(a - b) \geq g.$$

Defina $\Delta p = p_H - p_L > 0$. No contrato de custo mínimo, a restrição vincula:

$$a - b = \frac{g}{\Delta p} \equiv d.$$

Passo 2. A participação sob esforço alto também vincula:

$$p_H a + (1 - p_H)b - g = \bar{U}.$$

Assim,

$$p_H a + (1 - p_H)b = \bar{U} + g.$$

Passo 3. Substitua $a = b + d$:

$$p_H(b + d) + (1 - p_H)b = \bar{U} + g.$$

Logo,

$$\boxed{b = \bar{U} + g - p_H d},$$

e

$$\boxed{a = \bar{U} + g + (1 - p_H)d}.$$

Portanto,

$$\boxed{w_B = b^2}, \quad \boxed{w_G = a^2}.$$

A solução interior requer $b \geq 0$.

Passo 4. O custo salarial esperado é

$$C_W^{SB} = p_H a^2 + (1 - p_H)b^2.$$

Como a média ponderada de a e b é $\bar{U} + g$ e a diferença é d , obtemos

$$\boxed{C_W^{SB} = (\bar{U} + g)^2 + p_H(1 - p_H)d^2}.$$

Substituindo $d = g/\Delta p$,

$$\boxed{C_W^{SB} = C_W^{FB} + p_H(1 - p_H) \left(\frac{g}{\Delta p} \right)^2}.$$

Interpretação econômica. O termo adicional é o custo de incentivos. Para induzir esforço não observável, o principal precisa fazer o salário depender do resultado e, portanto, impor risco a um agente avesso ao risco. O segundo melhor é mais caro que o primeiro melhor.

6.6 Responsabilidade limitada

Enunciado. Introduza responsabilidade limitada e mostre como ela altera o contrato ótimo.

Passo 1. No exercício anterior, a solução interior para a utilidade salarial no mau resultado era

$$b = \bar{U} + g - p_H \frac{g}{\Delta p}.$$

Se esse valor for negativo, a solução irrestrita exigiria $\sqrt{w_B} < 0$, impossível. De forma mais geral, contratos que exigiriam pagamentos do agente ao principal violariam responsabilidade limitada.

Passo 2. Impomos

$$\boxed{w_B \geq 0, \quad w_G \geq 0}.$$

Na região em que a restrição inferior vincula, temos

$$\boxed{w_B = 0}.$$

Passo 3. Escreva $a = \sqrt{w_G}$. A IC exige

$$\Delta p a \geq g,$$

isto é,

$$a \geq \frac{g}{\Delta p}.$$

Passo 4. A IR exige

$$p_H a - g \geq \bar{U},$$

logo

$$a \geq \frac{\bar{U} + g}{p_H}.$$

Passo 5. O principal escolhe o menor bônus compatível com ambas:

$$\boxed{a^* = \max \left\{ \frac{g}{\Delta p}, \frac{\bar{U} + g}{p_H} \right\}}.$$

Portanto,

$$\boxed{w_G^* = (a^*)^2, \quad w_B^* = 0}.$$

Passo 6. Se a IC é a restrição dominante, o agente pode obter renda acima de sua reserva, pois o principal não consegue reduzir ainda mais o pagamento no estado ruim para extrair essa renda.

Interpretação econômica. Responsabilidade limitada remove a “punição” monetária em resultados ruins. O contrato ótimo passa a depender mais de bônus positivos em estados bons e pode gerar renda de incentivo ao agente.

Capítulo 7

Lista 7 – Mecanismos e leilões

7.1 Princípio da revelação em ambiente Bayesiano finito

Enunciado. Prove o princípio da revelação em um ambiente finito Bayesiano.

Passo 1. Considere um mecanismo indireto $\Gamma = (M_i, g)$, em que cada agente i tem tipo $\theta_i \in \Theta_i$, escolhe mensagem $m_i \in M_i$, e a regra de resultado é

$$g : M_1 \times \cdots \times M_n \rightarrow X.$$

Inclua em X tanto a alocação quanto eventuais transferências.

Passo 2. Suponha que o mecanismo possua um equilíbrio Bayesiano em estratégias

$$\sigma_i : \Theta_i \rightarrow M_i.$$

Assim, para todo tipo θ_i e todo desvio de mensagem m'_i , a estratégia $\sigma_i(\theta_i)$ maximiza a utilidade esperada do agente, dadas as estratégias dos demais.

Passo 3. Construa agora um mecanismo direto $\tilde{\Gamma}$ em que cada agente anuncia um tipo $\hat{\theta}_i \in \Theta_i$. Defina a regra de resultado por

$$\boxed{\tilde{g}(\hat{\theta}) = g(\sigma_1(\hat{\theta}_1), \dots, \sigma_n(\hat{\theta}_n)).}$$

Ou seja, o mecanismo direto reproduz exatamente o resultado que o mecanismo original produziria se cada tipo anunciado jogasse sua estratégia de equilíbrio original.

Passo 4. Fixe um agente i com tipo verdadeiro θ_i . Se ele reporta a verdade no mecanismo direto, recebe o mesmo resultado que receberia ao jogar $\sigma_i(\theta_i)$ no mecanismo original.

Passo 5. Se ele mente e anuncia $\hat{\theta}_i$, o mecanismo direto envia a mensagem

$$\sigma_i(\hat{\theta}_i)$$

no mecanismo original. Mas essa é apenas uma mensagem possível de desvio no mecanismo original.

Passo 6. Como $\sigma_i(\theta_i)$ era uma melhor resposta Bayesiana no mecanismo original, para toda mentira $\hat{\theta}_i$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_{-i}|\theta_i} [u_i(\tilde{g}(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i)] \\ \geq \mathbb{E}_{\theta_{-i}|\theta_i} [u_i(\tilde{g}(\hat{\theta}_i, \theta_{-i}), \theta_i)]. \end{aligned}$$

Logo, revelar o tipo verdadeiro é uma estratégia ótima.

Passo 7. Portanto, todo resultado implementável por algum mecanismo em equilíbrio Bayesiano pode ser implementado por um mecanismo direto compatível com incentivos:

$$\boxed{\text{implementabilidade} \Rightarrow \text{implementabilidade direta e BIC.}}$$

Interpretação econômica. O princípio da revelação não afirma que instituições reais tenham de pedir diretamente “qual é seu tipo?”. Ele é uma ferramenta de redução: para caracterizar o conjunto de resultados implementáveis, basta estudar mecanismos diretos e verdadeiros.

7.2 VCG para um único objeto

Enunciado. Construa o VCG para alocação de um único objeto e recupere o segundo preço.

Passo 1. Há n compradores com valores privados $v_i \geq 0$ para um único objeto. O mecanismo eficiente aloca o objeto ao maior valor declarado:

$$\boxed{i^* \in \arg \max_i \hat{v}_i}.$$

Passo 2. No VCG, o pagamento do agente i é a externalidade que sua presença impõe aos demais:

$$p_i = h_i(\hat{v}_{-i}) - \sum_{j \neq i} \hat{v}_j x_j^*(\hat{v}),$$

onde

$$h_i(\hat{v}_{-i}) = \max_{x \text{ factível sem } i} \sum_{j \neq i} \hat{v}_j x_j.$$

Passo 3. Se i perde, algum outro jogador recebe o objeto tanto com quanto sem i . A presença de i não altera o bem-estar dos demais; portanto,

$$\boxed{p_i = 0 \quad \text{para perdedores.}}$$

Passo 4. Se i vence, com sua presença os demais recebem zero de valor do objeto. Sem i , o objeto seria entregue ao rival de maior valor. Logo,

$$h_i(\hat{v}_{-i}) = \boxed{\max_{j \neq i} \hat{v}_j}.$$

Assim, o vencedor paga

$$p_{i^*} = \max_{j \neq i^*} \hat{v}_j.$$

Passo 5. Portanto, VCG para um único objeto é exatamente um leilão de segundo preço: maior lance vence e paga o segundo maior lance.

Interpretação econômica. A verdade é ótima porque o pagamento do vencedor não depende de seu próprio lance, exceto pelo fato de vencer ou perder. Ele internaliza a oportunidade que retira dos demais.

7.3 Primeiro preço: distribuição geral

Enunciado. Derive o equilíbrio simétrico de primeiro preço para uma distribuição geral F .

Considere n licitantes neutros ao risco, valores i.i.d. com distribuição contínua F e densidade $f > 0$ em $[\underline{v}, \bar{v}]$. Procure equilíbrio simétrico estritamente crescente $b(v)$.

Passo 1. Se um licitante de valor verdadeiro v dá o lance que seria dado por um tipo z , isto é, $b(z)$, ele vence quando todos os rivais têm valores menores que z . A probabilidade de vitória é

$$F(z)^{n-1}.$$

Passo 2. Seu lucro esperado é

$$\Pi(z; v) = [v - b(z)]F(z)^{n-1}.$$

Passo 3. Em equilíbrio, um tipo v deve escolher $z = v$. A CPO é

$$\begin{aligned} 0 &= -b'(v)F(v)^{n-1} \\ &\quad + [v - b(v)](n-1)F(v)^{n-2}f(v). \end{aligned}$$

Passo 4. Dividindo por $F(v)^{n-2}$,

$$b'(v)F(v) = (n-1)f(v)[v - b(v)].$$

Logo,

$$b'(v) = (n-1)\frac{f(v)}{F(v)}[v - b(v)].$$

Passo 5. Defina a “sombra” ou desconto

$$y(v) = v - b(v).$$

Então

$$y'(v) = 1 - b'(v) = 1 - (n-1)\frac{f(v)}{F(v)}y(v).$$

Essa é uma EDO linear.

Passo 6. Multiplicando pelo fator integrante $F(v)^{n-1}$,

$$\frac{d}{dv} [y(v)F(v)^{n-1}] = F(v)^{n-1}.$$

Passo 7. Integrando de $\underline{v}$ a v e usando a condição limite natural $b(\underline{v}) = \underline{v}$, obtemos

$$y(v)F(v)^{n-1} = \int_{\underline{v}}^v F(t)^{n-1} dt.$$

Portanto,

$$b(v) = v - \frac{\int_{\underline{v}}^v F(t)^{n-1} dt}{F(v)^{n-1}}.$$

Interpretação econômica. O lance fica abaixo do valor: o licitante troca margem contra probabilidade de vitória. À medida que n cresce, a competição aumenta e o desconto entre valor e lance tende a diminuir.

7.4 Primeiro preço com $F(v) = v^2$ e $n = 2$

Enunciado. Para $F(v) = v^2$ em $[0, 1]$, obtenha a função de lance de primeiro preço com $n = 2$.

Passo 1. Pela fórmula geral, com $n - 1 = 1$,

$$b(v) = v - \frac{\int_0^v F(t) dt}{F(v)}.$$

Passo 2. Como $F(t) = t^2$,

$$\int_0^v t^2 dt = \frac{v^3}{3}.$$

Passo 3. Portanto,

$$b(v) = v - \frac{v^3/3}{v^2} = v - \frac{v}{3}.$$

Logo,

$$b(v) = \frac{2}{3}v.$$

Checagem. Como a distribuição concentra relativamente mais massa em valores altos do que a uniforme, a expressão não coincide com o caso uniforme de dois licitantes, $b(v) = v/2$.

7.5 Reserva ótima de Myerson

Enunciado. Calcule a reserva ótima de Myerson para uma distribuição uniforme e para uma exponencial truncada, quando regular.

Uniforme em $[0, 1]$

Passo 1. A função de valor virtual é

$$\phi(v) = v - \frac{1 - F(v)}{f(v)}.$$

Para $F(v) = v$ e $f(v) = 1$,

$$\phi(v) = v - (1 - v) = 2v - 1.$$

Passo 2. Para vendedor com valor de reserva zero, a reserva ótima satisfaz

$$\phi(r) = 0.$$

Logo,

$$2r - 1 = 0 \implies \boxed{r^* = \frac{1}{2}}.$$

Exponencial truncada em $[0, \bar{v}]$

Considere parâmetro $\lambda > 0$ e

$$F(v) = \frac{1 - e^{-\lambda v}}{1 - e^{-\lambda \bar{v}}}, \quad f(v) = \frac{\lambda e^{-\lambda v}}{1 - e^{-\lambda \bar{v}}}.$$

Passo 1. Calcule a razão inversa de hazard:

$$\begin{aligned} \frac{1 - F(v)}{f(v)} &= \frac{e^{-\lambda v} - e^{-\lambda \bar{v}}}{\lambda e^{-\lambda v}} \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda(\bar{v}-v)}}{\lambda}. \end{aligned}$$

Passo 2. Logo,

$$\boxed{\phi(v) = v - \frac{1 - e^{-\lambda(\bar{v}-v)}}{\lambda}}.$$

Passo 3. A derivada é

$$\phi'(v) = 1 + e^{-\lambda(\bar{v}-v)} > 0.$$

Portanto a distribuição truncada é regular.

Passo 4. A reserva resolve

$$\lambda r = 1 - e^{-\lambda(\bar{v}-r)}.$$

Defina $z = 1 - \lambda r$. Então

$$z = e^{-\lambda \bar{v} + \lambda r} = e^{1 - \lambda \bar{v} - z}.$$

Logo,

$$ze^z = e^{1 - \lambda \bar{v}}.$$

Usando a função de Lambert W ,

$$z = W\left(e^{1-\lambda\bar{v}}\right).$$

Assim,

$$r^* = \frac{1 - W(e^{1-\lambda\bar{v}})}{\lambda}.$$

Nota didática. Sem truncamento, isto é, para a exponencial em $[0, \infty)$, a razão $(1 - F)/f = 1/\lambda$ e a reserva se reduz à forma conhecida $r^* = 1/\lambda$.

7.6 Equivalência de receita em concessões públicas

Enunciado. Discuta quais hipóteses de equivalência de receita são plausíveis em leilões de concessões públicas.

- Passo 1.** O teorema clássico de equivalência de receita exige, em sua forma básica, licitantes neutros ao risco, valores privados independentes e identicamente distribuídos, simetria, mesma regra de alocação e mesma utilidade esperada para o tipo de menor valor.
- Passo 2.** Em concessões públicas, várias dessas hipóteses podem falhar. A demanda futura por rodovia, aeroporto ou saneamento contém importante componente de valor comum. Empresas observam sinais distintos sobre um mesmo fundamento econômico, criando risco de “winner’s curse”.
- Passo 3.** Licitantes também são frequentemente assimétricos em tecnologia, acesso a financiamento, experiência regulatória e custo de capital. Isso viola i.i.d. e simetria.
- Passo 4.** Restrições financeiras e aversão ao risco são relevantes porque os projetos exigem grandes desembolsos iniciais e têm horizonte longo. Nesse caso, primeiro preço e segundo preço podem gerar receitas distintas mesmo com a mesma regra de alocação.
- Passo 5.** Concessões costumam ser multidimensionais: tarifa, outorga, prazo, investimento, qualidade, cronograma e garantias. O objeto licitado não é um único escalar e, muitas vezes, a regra de alocação não coincide entre formatos.
- Passo 6.** Há ainda renegociação e risco moral após a adjudicação. O lance não encerra o jogo: incentivos de investimento e operação afetam o valor do contrato. Isso quebra a separação entre “leilão” e “execução” pressuposta no benchmark estático.
- Passo 7.** Portanto, a equivalência de receita é útil como referência teórica, mas deve ser tratada com cautela em concessões. A pergunta empírica relevante é quais violações das hipóteses são quantitativamente importantes em determinado mercado.

Capítulo 8

Lista 8 – Problemas integradores

8.1 Concessão como leilão seguido de risco moral

Enunciado. Modele uma concessão como leilão seguido de risco moral na execução. Quais variáveis deveriam ser licitadas e quais monitoradas?

Passo 1. Estágio 1: seleção. Suponha n empresas com custo privado θ_i . A autoridade escolhe uma empresa por leilão. Um desenho simples é selecionar a menor necessidade de contraprestação s_i ou, em concessão lucrativa, a maior outorga compatível com obrigações contratuais fixadas previamente.

Passo 2. Se o contrato exige quantidade/escopo q verificável, o custo esperado da empresa pode ser escrito como

$$C(q, e; \theta) = \theta q + \psi(e),$$

onde e é esforço de operação/manutenção após a adjudicação.

Passo 3. Estágio 2: execução. O esforço e é não observável ou imperfeitamente observável, mas afeta um resultado verificável y — por exemplo, disponibilidade da infraestrutura, falhas, acidentes, perdas ou indicadores de qualidade. Suponha

$$\mathbb{E}[y \mid e] = m(e), \quad m'(e) > 0.$$

Passo 4. Um pagamento puramente fixo T não induz esforço além do mínimo, pois a concessionária escolhe

$$\max_e T - \psi(e),$$

o que leva ao menor esforço admissível.

Passo 5. Introduza remuneração por desempenho

$$T(y) = T_0 + by.$$

A concessionária escolhe

$$\max_e T_0 + bm(e) - \psi(e).$$

A CPO é

$$bm'(e) = \psi'(e).$$

Assim, o parâmetro b controla a intensidade de incentivo.

Passo 6. O que licitar? Devem ser licitadas variáveis verificáveis e comparáveis entre concorrentes: outorga, contraprestação, tarifa máxima, prazo quando endógeno e/ou preço por unidade de serviço, desde que o edital fixe claramente qualidade mínima e matriz de risco. Licitar simultaneamente muitas dimensões sem uma função de pontuação transparente pode reduzir comparabilidade e aumentar discricionariedade.

Passo 7. O que monitorar? O foco deve estar em resultados verificáveis correlacionados com esforço e bem-estar: disponibilidade, continuidade, qualidade, segurança, manutenção, tempo de atendimento, indicadores ambientais, cumprimento de investimentos e níveis de serviço. Esforço puro deve ser monitorado apenas quando diretamente verificável; caso contrário, é melhor contratar sobre resultados.

Passo 8. O desenho completo deve ainda incluir garantias, penalidades, mecanismos de revisão e regras de renegociação para evitar que um lance agressivo seja recuperado ex post por renegociações oportunistas.

Interpretação econômica. O menor lance não é necessariamente o contrato de menor custo social. O leilão resolve seleção adversa sobre custos; o contrato de desempenho precisa resolver o risco moral depois que a competição termina.

8.2 Certificação ambiental como sinalização

Enunciado. Modele certificação ambiental como sinalização. Quando um selo caro separa firmas de alta e baixa qualidade?

Passo 1. Considere firmas de qualidade $\theta \in \{H, L\}$, com H ambientalmente superior. Sem certificação, consumidores não observam o tipo. O selo tem intensidade ou rigor $s \geq 0$ e custo $c_\theta(s)$.

Passo 2. Para que o selo tenha conteúdo informativo, imponha single crossing:

$$c'_H(s) < c'_L(s).$$

Certificar é relativamente mais barato para a firma de alta qualidade.

Passo 3. Suponha que, se o mercado acredita que uma firma certificada é tipo H , ela obtém prêmio econômico $\Delta > 0$ relativamente à condição não certificada.

Passo 4. Para que H deseje certificar,

$$\Delta \geq c_H(s).$$

Para que L não imite,

$$\Delta \leq c_L(s).$$

Passo 5. Logo, um nível s separador deve satisfazer

$$c_H(s) \leq \Delta \leq c_L(s).$$

Passo 6. Se os custos são lineares,

$$c_H(s) = k_H s, \quad c_L(s) = k_L s, \quad 0 < k_H < k_L,$$

as condições tornam-se

$$k_H s \leq \Delta \leq k_L s.$$

Portanto,

$$\frac{\Delta}{k_L} \leq s \leq \frac{\Delta}{k_H}.$$

Interpretação econômica. Um selo excessivamente fácil é imitado pelo tipo ruim; um selo excessivamente caro destrói o incentivo do tipo bom. A credibilidade informacional aparece justamente no intervalo entre esses dois limites.

8.3 Seguro contra desastre: seleção adversa e risco moral

Enunciado. Considere seguro contra desastre com tipo de risco privado e ação preventiva oculta. Mostre por que seleção adversa e risco moral coexistem.

Passo 1. O segurado tem tipo privado $\theta \in \{L, H\}$, que afeta a probabilidade de perda. Ele também escolhe prevenção oculta $e \geq 0$. A probabilidade de perda é

$$p_\theta(e), \quad p_H(e) > p_L(e), \quad p'_\theta(e) < 0.$$

Passo 2. Um contrato é (T, I) , com prêmio T e indenização I caso ocorra perda monetária D . Com riqueza inicial W , a utilidade esperada é

$$\begin{aligned} EU_\theta(e; T, I) &= [1 - p_\theta(e)]u(W - T) \\ &\quad + p_\theta(e)u(W - D + I - T) - c(e). \end{aligned}$$

Passo 3. Risco moral. Após comprar o contrato, o segurado escolhe e . A CPO interior é

$$0 = p'_\theta(e) [u(W - D + I - T) - u(W - T)] - c'(e).$$

Como $p'_\theta(e) < 0$, podemos escrever

$$c'(e) = -p'_\theta(e) [u(W - T) - u(W - D + I - T)].$$

Quanto maior a cobertura I , menor a diferença de utilidade entre estados e menor o incentivo à prevenção.

Passo 4. Se $I = D$ há seguro integral, a riqueza líquida é a mesma nos dois estados. O

termo entre colchetes zera e, se $c'(e) > 0$ para $e > 0$, o esforço preventivo colapsa ao mínimo. Esse é o risco moral.

Passo 5. Seleção adversa. Antes da contratação, o tipo θ é privado. Tipos de maior risco atribuem maior valor à mesma cobertura. Se a seguradora oferece um menu (T_L, I_L) e (T_H, I_H) , precisa satisfazer restrições de incentivo como

$$EU_H(T_H, I_H) \geq EU_H(T_L, I_L),$$

$$EU_L(T_L, I_L) \geq EU_L(T_H, I_H).$$

Passo 6. As duas assimetrias coexistem porque o tipo é informação oculta *antes* do contrato, enquanto o esforço é ação oculta *depois* do contrato. Um menu desenhado para separar tipos também altera os incentivos de prevenção, e o esforço endógeno altera o custo atuarial de cada contrato.

Interpretação econômica. Franquias e coparticipações podem desempenhar duas funções simultâneas: ajudar a selecionar tipos e preservar incentivos preventivos. Isso explica por que seguro integral raramente é ótimo quando prevenção é importante e não observável.

8.4 Procurement com custo privado e qualidade parcialmente não observável

Enunciado. Desenhe um mecanismo simples de procurement com custo privado do fornecedor e qualidade parcialmente não observável.

Passo 1. Suponha fornecedores com custo privado θ_i . O comprador público deseja adquirir um serviço cujo componente contratável de qualidade é q e cujo desempenho efetivo depende de esforço oculto e .

Passo 2. O custo do fornecedor vencedor é

$$C(q, e; \theta) = \theta q + \psi(e).$$

O benefício público esperado pode ser representado por

$$B(q, e), \quad B_q > 0, \quad B_e > 0.$$

Passo 3. Etapa de seleção. O edital pode usar um leilão de pontuação

$$S_i = V(q_i) - \alpha P_i,$$

onde P_i é preço solicitado e q_i contém apenas dimensões verificáveis. A função de pontuação precisa ser anunciada ex ante para preservar competição transparente.

Passo 4. Em um mecanismo direto idealizado, fornecedores reportam $\hat{\theta}$. A regra de alocação $x_i(\hat{\theta})$ deve ser monotônica: fornecedores de menor custo devem ter probabilidade

fracamente maior de vencer. Transferências são desenhadas para satisfazer IC e IR, conforme o princípio da revelação.

Passo 5. Etapa de execução. Como e não é observável, o pagamento não deve depender diretamente dele. Suponha um indicador verificável

$$z = e + \varepsilon, \quad \mathbb{E}[\varepsilon] = 0.$$

Use

$$T(z) = T_0 + bz.$$

O fornecedor escolhe

$$\max_e \{T_0 + be - \psi(e)\},$$

logo

$$\boxed{\psi'(e^*) = b}.$$

Passo 6. O coeficiente b deve equilibrar incentivos e risco. Se o fornecedor é avesso ao risco e z é ruidoso, b muito alto impõe risco excessivo; se b é muito baixo, há subesforço.

Passo 7. Portanto, uma arquitetura simples é: competição ex ante sobre preço e qualidade verificável; contrato ex post baseado em indicadores de resultado, garantias e penalidades; e auditoria para reduzir o ruído entre esforço e desempenho observado.

Interpretação econômica. Procurement eficiente requer separar dois problemas: “quem deve ganhar?” e “como fazer o vencedor executar bem?”. Um leilão competitivo sem contrato de desempenho resolve apenas o primeiro.

8.5 Pigou versus mercado de licenças com custos privados

Enunciado. Compare uma política Pigouviana com um mercado de licenças quando custos de abatimento são privados.

Passo 1. Considere firmas $i = 1, \dots, n$ com emissões sem regulação $\bar{e}_i$ e abatimento $a_i = \bar{e}_i - e_i$. O custo de abatimento é privado:

$$C_i(a_i; \theta_i), \quad C'_i > 0, \quad C''_i > 0.$$

O dano depende de emissões agregadas

$$E = \sum_i e_i.$$

Passo 2. O planejador escolhe a_i para minimizar

$$\sum_i C_i(a_i; \theta_i) + D(E).$$

A CPO interior é

$$\boxed{C'_i(a_i^*) = D'(E^*) \quad \forall i}.$$

Todos os custos marginais de abatimento devem ser igualados ao dano marginal.

Passo 3. Taxa Pigouviana. Com imposto por unidade emitida τ , a firma escolhe a_i para minimizar

$$C_i(a_i; \theta_i) + \tau(\bar{e}_i - a_i).$$

A CPO é

$$\boxed{C'_i(a_i) = \tau}.$$

Se o regulador define

$$\tau = D'(E^*),$$

a taxa implementa o ótimo mesmo sem conhecer individualmente os custos, desde que conheça o imposto ótimo agregado.

Passo 4. Licenças negociáveis. Fixe um teto agregado E^{cap} . Com mercado competitivo de permissões e preço λ , cada firma escolhe abatimento até

$$\boxed{C'_i(a_i) = \lambda}.$$

A negociação iguala custos marginais entre firmas automaticamente. Se

$$E^{cap} = E^*,$$

o mercado implementa a alocação eficiente de abatimento.

Passo 5. A diferença sob informação imperfeita está em qual magnitude o regulador fixa. Na taxa, ele fixa o preço da emissão e deixa E endógeno. Nas licenças, fixa E e deixa o preço endógeno.

Passo 6. Com incerteza sobre custos, a lógica de Weitzman compara inclinações. Se o dano marginal cresce muito rapidamente com emissões, erros de quantidade são caros e o instrumento de quantidade tende a ser atraente. Se o dano marginal é relativamente plano e o custo marginal é incerto/íngreme, uma taxa tende a limitar perdas por custos inesperadamente altos.

Interpretação econômica. Informação privada de custos não torna licenças automaticamente superiores a impostos. Ambos descentralizam a equalização de custos marginais; a escolha entre preço e quantidade depende principalmente da natureza da incerteza e das curvaturas de benefícios e custos.

8.6 Leitura microeconômica de um artigo aplicado

Enunciado. Escolha um artigo aplicado de sua área e identifique: jogadores/agentes, informação, ação, restrições, conceito de equilíbrio e parâmetro que produziria a estática comparativa principal.

Nota didática. Como exemplo completo, usamos um artigo hipotético sobre leilões de concessões/PPPs. O mesmo roteiro pode ser aplicado a qualquer artigo empírico ou institucional.

Passo 1. Agentes. Governo concedente e n empresas potenciais. Após a adjudicação, há uma relação bilateral entre governo e concessionária vencedora.

Passo 2. Informação. Cada empresa conhece privadamente seu custo de construção/operação θ_i . O governo observa o lance, mas não observa perfeitamente θ_i nem o esforço operacional futuro e_i .

Passo 3. Ações. Na fase de seleção, as empresas escolhem lances b_i . Na fase de execução, a vencedora escolhe esforço e e eventualmente investimento I .

Passo 4. Restrições. Há IC no leilão, IR para garantir participação, restrição orçamentária/financeira da firma, padrões mínimos de qualidade e, na execução, uma restrição de incentivo do tipo

$$e \in \arg \max_{\tilde{e}} \mathbb{E}[T(y) \mid \tilde{e}] - C(\tilde{e}, \theta).$$

Passo 5. Conceito de equilíbrio. Se os custos são privados e o leilão é de primeiro preço, a fase de seleção é resolvida por equilíbrio Bayesiano de Nash. A fase dinâmica completa pode ser descrita por PBE/SPNE, dependendo de quais informações são reveladas ao longo do tempo.

Passo 6. Parâmetro para estática comparativa. Um candidato natural é o número de concorrentes n . No benchmark de leilões privados, maior n tende a reduzir markups/lances requeridos. Outra possibilidade é a precisão do monitoramento κ : indicadores mais informativos permitem maior potência de incentivos a menor custo de risco.

Passo 7. Predição testável. Por exemplo:

$$\frac{\partial \text{outorga esperada}}{\partial n} > 0$$

em leilões de maior outorga, ou

$$\frac{\partial e^*}{\partial \kappa} > 0$$

se melhor monitoramento torna remuneração por desempenho mais efetiva.

Passo 8. Conexão com empiria. A estrutura teórica indica quais variáveis deveriam ser observadas: número de licitantes, dispersão de lances, estrutura de garantias, qualidade regulatória, indicadores de execução e renegociações. A teoria deixa de ser um ornamento e passa a organizar a especificação empírica.

Observações finais

As soluções deste caderno foram escritas para mostrar raciocínio, não apenas resultados. Em uma disciplina de pós-graduação, recomenda-se cobrar dos estudantes três dimensões em cada resposta: (i) derivação formal correta; (ii) identificação das hipóteses que sustentam a derivação; e (iii) interpretação econômica do resultado. Em problemas abertos, a capacidade de construir uma parametrização coerente é parte da competência avaliada.