Notas de Aula de Organização Industrial

Rodrigo Nobre Fernandez

Pelotas

2024

Prefácio

Esta apostila é um resumo das notas de aula da disciplina de Organização Industrial do curso de Pós-Graduação em Organizações e Mercados (Mestrado/Doutorado em Economia Aplicada) e de Economia Industrial do curso de Ciências Econômicas, ambos da Universidade Federal em Pelotas. Em quase sua totalidade essas notas de aula transcrevem literalmente ou resumem o conteúdo do livro de Shy (1995). Agredeço a Carolina Trindade pelas obervações e correções. Destaco que essa apostila não tem fins comerciais, o texto serve exclusivamente como material de apoio as aulas. Quaisquer erros e omissões são de minha inteira responsabilidade. Contribuições e considerações podem ser enviadas para: **rodrigo.fernandez@ufpel.edu.br** ou **rodrigonobrefernandez@gmail.com**

Sumário

1 O Estudo da Organização Industrial **4**

1.1 Principais observações 4

2 Conceitos básicos de jogos não cooperativos **6**

2.1 Jogos na forma normal 6

2.1.1 Equilíbrio em ações (estratégias) dominantes 7

2.2 Jogos na forma extensiva 10

2.3 Jogos repetidos 13

2.4 Jogos infinitamente repetidos 15

2.5 Estratégias Mistas 16

2.6 Jogos com informação imperfeita 17

3 Tecnologia, produção e demanda **20**

3.1 Tecnologia 20

3.2 Função de custos 21

3.3 Dualidade entre produção e custos 23

3.4 Função de demanda 24

3.5 Excedente do consumidor 26

4 Competição Perfeita **27**

4.1 Retornos à escala 27

4.2 Apreçamento de CMg e bem-estar social 29

5 Monopólio **31**

5.1 Maximização de lucros do monopolista 31

5.2 Monopólio e bem estar social 32

5.3 Discriminação de preços 33

5.4 O cartel e o monopólio multiplanta 34

5.4.1 O Cartel 35

5.5 Monopólio multiplanta 36

5.6 Monopólio e bens duráveis 36

5.7 Bens duráveis com uma demanda discreta 39

6 Mercados para produtos homogêneos **41**

6.1 Cournot 41

6.1.1 O modelo de dois vendedores 41

6.1.2 Jogo com N vendedores 43

6.1.3 Firmas heterogêneas . . . 45
6.1.4 Equilíbrio de Cournot e o nível de bem-estar . . . 46
6.2 Movimentos sequenciais . . . 47
6.3 Estrutura de mercado de Bertrand . . . 49
6.3.1 Solução do equilíbrio . . . 49
6.3.2 Bertrand sob restrição de capacidade . . . 50
6.4 Cournot *vs* Bertrand . . . 51
6.5 Conluio . . . 51
6.5.1 Jogo de 1 período . . . 51
6.5.2 Jogos infinitamente repetidos . . . 52

7 Mercado para produtos diferenciados 54
7.1 Modelo simples para dois produtos diferenciados . . . 54
7.1.1 Cournot com produtos diferenciados . . . 55
7.1.2 Bertrand com produtos diferenciados . . . 55
7.1.3 Cournot *vs* Bertrand em produtos diferenciados . . . 56
7.1.4 Jogos sequenciais de preço . . . 56
7.2 Competição monopolística em produtos diferenciados . . . 57
7.2.1 O modelo . . . 57
7.3 Modelos locacionais . . . 60
7.3.1 Abordagem linear . . . 61
7.3.2 Localização e jogo de preços . . . 64
7.3.3 Custo de transporte quadrático . . . 64
7.3.4 A abordagem circular . . . 65
7.3.5 Entrada sequencial na cidade linear . . . 67

8 Concentração, fusões e barreiras a entrada 70
8.1 Medidas de concentração . . . 70
8.1.1 O Índice HH (Herfindahl-Hishaman) . . . 70
8.1.2 Índice de entropia . . . 70
8.1.3 Índice de instabilidade . . . 71
8.2 Multiprodução - Economias de Escala e de Variedade . . . 71
8.3 Fusões . . . 72
8.3.1 Integração horizontal . . . 73
8.3.2 Fusão vertical . . . 74
8.3.3 Fusões horizontais entre firmas que produzem bens complementares 76
8.4 Barreiras à entrada . . . 77
8.5 Custos irrecuperáveis e barreiras a entrada . . . 80
8.6 Impedimento a entrada . . . 81
8.6.1 Manutenção da capacidade . . . 81

8.6.2 Investimentos na substituição de capital 83
8.7 Economia Judo 85
8.8 Compra espacial precedente 86
8.9 Limitar preços como sinalização de custos 88
8.10 Mercados contestáveis 91

9 Pesquisa e Desenvolvimento 92

9.1 Classificação do processo de inovação 92
9.2 Corrida para inovação 93
9.2.1 Equilíbrio na corrida por P&D 93
9.2.2 Nível social ótimo de P&D 94
9.2.3 Data esperada da descoberta 96
9.3 Cooperação em P&D 97
9.3.1 P&D não cooperativo 97
9.3.2 P&D cooperativo 98
9.4 Patentes 98
9.4.1 Escolha de P&D de acordo com o tempo de duração das patentes . 99
9.4.2 Tempo ótimo de duração de patentes 100
9.5 Lançamento de uma invenção 101
9.6 Governos e Corridas Internacionais por P&D 102
9.6.1 Subsidiando o desenvolvimento de um novo produto 102
9.6.2 Subsidiando o processo de inovação 103

10 Economia da compatibilidade e dos padrões 105

10.1 Externalidades de Rede 105
10.1.1 A demanda interdependente por serviços de comunicação 105
10.1.2 O trade-off entre a padronização e a variedade da produção 107
10.2 Abordagem dos serviços de apoio 110
10.2.1 Efeitos de rede sem externalidades de rede 110
10.2.2 Compatibilidade parcial 112
10.3 Abordagem de componentes 113
10.3.1 O modelo básico 113
10.3.2 Sistemas incompatíveis 114
10.3.3 Sistemas compatíveis 116
10.3.4 Compatibilidade e incompatibilidade 116

11 Propaganda 118

11.1 Propaganda persuasiva 118
11.1.1 Propaganda e produtor monopolista 118
11.1.2 Propaganda persuasiva, muito ou pouca? 119

11.2 Propaganda informativa 121
11.3 Propaganda direcionada 123
11.3.1 Firmas e Consumidores 123
11.3.2 Métodos de propaganda 123
11.4 Comparação de propaganda 124
11.4.1 O uso estratégico de comparação para propaganda 124
11.4.2 Propaganda e preços 125

12 Qualidade, Durabilidade e Garantias 126
12.1 Renda Pessoal e Qualidade de Compra 126
12.2 Qualidade como diferenciação de produto 127
12.3 Um modelo modificado de diferenciação vertical 128
12.4 Estrutura de Mercado, Qualidade e Durabilidade 131
12.4.1 Estrutura da Economia 131
12.4.2 Monopólio 131
12.4.3 Competição Perfeita 131
12.5 O Dilema entre Inovação e Durabilidade 132
12.5.1 Consumidores 132
12.5.2 Firmas 132
12.5.3 Durabilidade, Inovação e Bem-Estar 134
12.6 O mercado de limões 136
12.6.1 Um modelo de carros usados 136
12.6.2 O problema dos compradores 137
12.6.3 O problema do vendedor de limões 138
12.6.4 O problema do vendedor de carros usados bons 138
12.7 Jogos de Sinalização de Qualidade 139
12.7.1 Monopolista 139
12.8 Garantias 141
12.8.1 Garantias sob assimetria de informação 141
12.8.2 O papel das garantias sob informação assimétrica 143

13 Estratégias de apreçamento 145
13.1 Tarifa de duas partes 145
13.1.1 Visitações ao clube 145
13.1.2 Não há taxas anuais 145
13.1.3 Taxas anuais 146
13.1.4 Tarifa de duas partes 147
13.2 Apreçamento não uniforme 147
13.3 Apreçamento Peak-Load 149
13.3.1 Passageiros sazonais 150

13.3.2 Capacidade de assentos e estrutura de custos da empresa 150
13.3.3 Estrutura de maximização de lucros do monopolista 150
13.3.4 Peak-Load sobre longos períodos 151
13.4 As firmas poderiam controlar as “temporadas”? 151

14 Táticas de marketing 156
14.1 Bundling e Tying 156
14.1.1 Como o agrupamento pode ser lucrativo? 156
14.1.2 Como o *tying* pode ser lucrativo? 156
14.1.3 Tying misto 158
14.1.4 Tying e encerramento 158
14.1.5 Tying e a segmentação do mercado internacional 160
14.1.6 Tying como diferenciação de produto 162
14.2 Dealership 165
14.2.1 Distribuindo o produto em um único local 165
14.2.2 Manutenção do preço de revenda e propaganda 167
14.2.3 Distribuição territorial 168

15 Monitoramento, administração, compensação e regulação 172
15.1 Provendo incentivos econômicos 172
15.1.1 Provendo incentivos econômicos sob incerteza 173
15.1.2 O problema de agência sob informação assimétrica 174
15.2 Produção com equipes 175
15.2.1 Divisão igual do mecanismo econômico 176
15.3 Competição e compensação gerencial 178
15.3.1 Incentivos aos gerentes 178
15.3.2 O jogo de dois estágios 178
15.3.3 Conluio entre os donos 180
15.4 Por qual motivo os executivos recebem salários mais elevados? 181
15.5 Regulando uma firma com o custo desconhecido 183
15.5.1 Revelação verdeira 184
15.5.2 Um mecanismo que funciona 184

16 Dispersão de preços e teoria da pesquisa 187
16.1 Dispersão de preços 187
16.2 Teoria da busca 190
16.2.1 A estratégia do preço de reserva 191
16.2.2 O número esperado de buscas 194

17 Indústrias selecionadas **195**
17.1 Estradas públicas e congestionamento 195
17.1.1 Equilíbrio numa estrada congestionada 195
17.1.2 O nível socialmente ótimo de congestionamento 196
17.1.3 Pedágio 197

Referências **198**

1 O Estudo da Organização Industrial

1.1 Principais observações

Nossa abordagem para analisar o comportamento da indústria é baseada em quatro fatos estilizados:

Concentração

Muitas indústrias são compostas por poucas empresas.

Características do produto

Em alguns setores, as empresas produzem produtos homogêneos ou quase idênticos, enquanto em outras empresas se distinguem das empresas concorrentes pela venda de marcas diferenciadas.

Atividades caras

As empresas de um setor estão envolvidas em atividades onerosas repetidas, com o objetivo de aumentar as vendas de suas marcas. Em alguns setores, essas atividades constituem o principal custo da empresa e podem exceder o custo de produção do próprio produto. Essas atividades dispendiosas podem incluir publicidade, controle de qualidade, custos de diferenciação do produto, marketing e custos de concessionária.

Pesquisa e desenvolvimento

As empresas alocam recursos para inventar tecnologias de produção de redução de custos, bem como novos produtos. Essas alocações de recursos também incluem grandes investimentos em imitações de tecnologias inventadas por empresas rivais (engenharia reversa).

Freqüentemente, pensa-se que essas quatro observações estão inter-relacionadas. A maioria dos estudos empíricos anteriores em organização industrial concentrou-se na execução de regressões de variáveis como margens de lucro, tamanho das empresas, despesas com publicidade e despesas com pesquisa e desenvolvimento (P&D) na concentração. O objetivo deste material é fornecer uma ligação teórica dos fatores que afetam a concentração e como a concentração afeta o comportamento estratégico das empresas. A razão pela qual pensamos na concentração como uma questão importante da teoria da organização industrial decorre do fracasso da estrutura competitiva do mercado em explicar por que as indústrias são compostas por poucas empresas grandes em vez de muitas empresas pequenas. Assim, a teoria da estrutura competitiva de mercado, embora seja fácil de resolver se existe um equilíbrio, na maioria dos casos não consegue explicar a composição e o comportamento das firmas no setor.

Dado o comportamento não competitivo das empresas, os mercados também são influenciados pelas reações dos compradores às tentativas das empresas de maximizar os lucros. A esse respeito, nossa análise aqui terá que caracterizar completamente como os consumidores determinam quais marcas comprar, quanto comprar e como pesquisar e selecionar a marca de menor preço que se adapta às suas preferências específicas. Por esse motivo, a abordagem que adotamos é principalmente estratégica, o que significa que tanto as empresas quanto os consumidores aprendem a estrutura do mercado e escolhem uma ação que maximize o lucro (para as empresas) e a utilidade (para os consumidores). Além disso, dada a complexidade das decisões tomadas por empresas estratégicas (não competitivas), a questão da organização interna das empresas torna-se um fator importante que afeta seu comportamento. Assim, abordamos brevemente a questão de como a estrutura de gestão em condições de informações imperfeitas afeta o desempenho da empresa no mercado.

Finalmente, analisamos extensivamente o papel do regulador. Em primeiro lugar, de um ponto de vista teórico, perguntamos se a intervenção pode aumentar o bem-estar social sob várias estruturas de mercado e atividades das empresas. Em segundo lugar, descrevemos e analisamos o sistema jurídico que afeta nossos setores.

2 Conceitos básicos de jogos não cooperativos

A teoria dos jogos é um conjunto de ferramentas para a previsão de resultados para a interação de um grupo de agentes, onde a ação de um único agente afeta diretamente os payoffs (lucros, pagamentos, ganhos etc) dos outros.

A teoria dos jogos é especialmente útil quando o número de agentes é pequeno, no caso em que a ação de cada agente pode ter um impacto significativo no payoff dos outros jogadores.

Nossa análise foca-se em jogos não cooperativos, o que não quer dizer que não se possa obter algum resultado de cooperação com esse estrutura de jogo. Normalmente, dividimos os jogos em dois tipos: forma normal ou forma extensiva. Na forma normal os jogadores escolhem suas ações ao mesmo tempo, enquanto que, na forma extensiva os jogadores tomam as sua decisões em períodos de tempos distintos.

Além disso, distinguimos entre os dois tipos de ações que podem ser tomadas: uma ação pura em que o jogador escolhe um tipo de ação de um conjunto disponível de ações e uma ação mista, ou, estratégia mista, em que o jogador atribui uma probabilidade para jogar cada ação.

Um outro ponto importante, é que os jogadores possuem o mesmo conhecimento sobre as regras, os ganhos (payoffs) e sobre a estrutura do jogo.

Também restringimos a análise a jogos de informação perfeita. Isso significa, que cada jogador possui toda a informação sobre as ações que podem ser tomadas pelos outros jogadores. Em outras palavras, antes de jogarem os jogadores já conhecem os possíveis desdobramentos do jogo.

2.1 Jogos na forma normal

Começaremos com a seguinte definição:

Definição 1. *Um jogo na forma normal é descrito do seguinte modo:*

1. Um conjunto de N *jogadores listados em* $I = \{1, ..., N\}$*;*

2. Cada jogador i, $i \in I$ *possuí um conjunto de ação* A^i *que é o conjunto de todas as ações disponíveis para o jogador* i*. Seja* $a^i \in A^i$ *denotar uma ação particular tomada por* i*. Assim, o conjunto de ações do jogador* i *é uma lista de todas as ações disponíveis para o jogador* i *e assim* $A^i = \left\{a_1^i, a_2^i, ..., a_{K_i}^i\right\}$ *em que* K_i *é o número de ações disponíveis para o jogador* i*. Seja* $a = \left(a^1, ..., a^N\right)$ *a lista de ações escolhidas por cada jogador. Chamamos a lista de ações escolhidas para cada jogador* i *como o resultado do jogo;*

3.Cada jogador i *tem uma função* payoff *,* π^i*, que é um número real* $\pi^i(a)$ *a cada resultado do jogo. Formalmente, cada função* π^i *mapeia um vetor* N *dimensional* $a = \left(a^1, ..., a^N\right)$ *a um número real* $\pi^i(a)$*.*

Um simples exemplo para aplicarmos a definição 2.1 é o jogo da Guerra/Paz que segue abaixo:

Tabela 2.1: Jogo Guerra/Paz

	País 2	
País 1	Guerra	Paz
Guerra	**1** $\underline{1}$	**3** $\underline{0}$
Paz	**0** $\underline{3}$	**2** $\underline{2}$

Temos 2 jogadores, como os seguintes conjuntos de ação $A^1 = \{\text{Guerra, Paz}\}$ e $A^2 = \{\text{Guerra, Paz}\}$. Considerarmos aqui Guerra (G) e Paz (P). Há exatamente 4 resultados possíveis para um jogo: $(G, G), (G, P), (P, G)$ e (P, P). As entradas grifadas em negrito contém os ganhos do jogador 1, as que estão sublinhadas são as do jogador 2.

Para solucionarmos o jogo precisaremos de um conceito de equilíbrio. Porém, antes disso utilizaremos a seguinte definição:

$$a^{-i} = \left(a^1, ..., a^{i-1}, a^{i+1}, ..., a^N\right)$$

Esse é o conjunto de ações de todos os outros jogadores exceto *i*. Então expressar o nosso conjunto de resultados fica bem mais fácil, isto é, $a = (a^i, a^{-i})$.

2.1.1 Equilíbrio em ações (estratégias) dominantes

Novamente começaremos apresentando uma definição.

Definição 2. *Uma ação específica $\tilde{a}^i \in A^i$ é dita uma ação dominante para o jogador* i *se não importa o que todos os jogadores estão jogando, jogar $\tilde{a}^i$ sempre maximiza o* payoff *do jogador* i*. Formalmente, para cada escolha de ações feitas por todos os jogadores exceto* i*, a^{-i}:*

$$\pi^i \left(\tilde{a}^i, \tilde{a}^{-i}\right) \geq \pi^i \left(a^i, a^{-i}\right) \forall a^i \in A^i$$

Antes de solucionarmos o jogo anterior definiremos um conceito de equilíbrio em estratégias dominantes.

Definição 3. *Um resultado $a = \left(\tilde{a}^1, ..., \tilde{a}^N\right)$ em que $\tilde{a}^i \in A^i$ para cada $i = 1, ..., N$ é um equilíbrio em estratégias dominantes se $\tilde{a}^i$ é uma ação dominante para cada jogador* i.

Um forma didática de solucionarmos o jogo é seguir os seguintes passos:

1. Escolha o Jogador 1 (J1, o País 1);

2. Fixe a escolha do Jogador 2 (J2, o País 2) e analise a escolha do País 1;

3. Por exemplo, se J2 joga G, então J1 jogará G. Podemos ver que 1>0;

4. Marque um traço na estratégia que representa o maior ganho para J1;

5. Repita o mesmo procedimento para J2, mas marque em negrito a ação que representa o maior ganho;

6. Se houver equilíbrio, em um dos quadrantes da matriz os ganhos de J1 e J2 estarão marcados.

Tabela 2.2: Jogo Guerra/Paz

	País 2	
País 1	Guerra	Paz
Guerra	$\underline{1}$ **1**	$\underline{3}$ 0
Paz	0 **3**	2 2

No jogo acima a estratégia G é dominante para os dois jogadores. O resultado do jogo é $(a^1, a^2) = (G, G)$. Na literatura, o jogo descrito na Tabela 2 é comumente chamado de jogo do Dilema dos Prisioneiros. Em vez de ter dois países lutando uma guerra, considere dois prisioneiros suspeitos de terem cometido um crime, pelo qual a polícia não tem evidências suficientes para condenar qualquer um dos suspeitos. Os dois prisioneiros são colocados em duas celas isoladas diferentes e recebem uma punição menor (ou uma indenização maior) se confessarem ter cometido esse crime em conjunto. Se substituirmos GUERRA por CONFESSAR, e PAZ por NÃO CONFESSAR, obtemos o chamado jogo do Dilema dos Prisioneiros.

Contudo essa noção de equilíbrio não existe para a maioria dos jogos de nosso interesse. Para demonstrarmos isso, vamos analisar um jogo chamado de Batalha dos Sexos.

Tabela 2.3: Jogo Batalha dos Sexos

	Raquel	
Jacob	Opera (w)	Futebol (ϕ)
Opera (w)	$\underline{1}$ **1**	$\underline{3}$ 0
Futebol (ϕ)	0 **3**	2 2

Num jogo desse tipo, o que é de maior valia para os jogadores é estar juntos. Assumimos que os payoffs são as utilidades dos jogadores notamos que ambos obtém maior ganho quando estão juntos. Note que para Jacob o ganho de ir a Opera é maior do que aquele obtido quando ele vai ao Futebol. Para Raquel o contrário é verdadeiro. Comumente um jogo do tipo Batalha dos Sexos é considerado como um jogo de coordenação. Se aplicarmos a regra de bolso, veremos que não há equilíbrio em estratégias dominantes. Definiremos então uma noção razoável para um equilíbrio.

Definição 4. *Um resultado* $\hat{a} = \left(\hat{a}^1, ..., \hat{a}^N\right)$ *em que* $\widehat{a}^i \in A^i$ *para cada* $i = 1, ..., N$ *é um equilíbrio de Nash se nenhum jogador achar benéfico desviar dado que todos os outros jogadores não irão desviar de suas estratégias ao resultado de Nash. Formalmente,* i

$$\pi^i\left(\hat{a}^i, \hat{a}^{-i}\right) \geq \pi^i\left(a^i, \hat{a}^{-i}\right) \forall a^i \in A^i$$

Note que para o jogo Guerra/Paz o resultado (Guerra, Guerra) é um Equilíbrio de Nash.

Proposição 2.1. Um equilíbrio em estratégias dominantes é um Equilíbrio de Nash (EN). No entanto, um EN não precisa ser necessariamente um equilíbrio em estratégias dominantes.

Podemos notar que no jogo Batalha dos Sexos não há um único EN. Temos dois equilíbrios, (OPERA, OPERA) e (FUTEBOL, FUTEBOL). Se o jogo possuí mais de um equilíbrio, o poder preditivo é baixo. Suponha que após 20 anos de casamento os payoffs são os seguintes:

Tabela 2.4: Jogo Batalha dos Sexos

	Raquel	
Jacob	Opera (w)	Futebol (ϕ)
Opera (w)	$\underline{2}$ 1	0 **2**
Futebol (ϕ)	0 **1**	$\underline{1}$ 0

Note que esse jogo não possuí um EN. É sempre melhor para Jacob escolher o contrário de Raquel. Ou seja, suponha (OPERA, OPERA) , Raquel tem incentivo a desviar para FUTEBOL e assim por diante. Utilizaremos a noção de funções de melhor resposta para encontrarmos um Equilíbrio de Nash.

Definição 5. *1. Em um jogo de dois jogadores, a função de melhor resposta do jogador* i *é uma função* $R^i\left(a^j\right)$*, que para cada ação* a^j *o jogador* j *atribui uma ação* $a^i = R^i\left(a^j\right)$ *que maximiza o payoff do jogador* i $\pi^i\left(a^i, a^j\right)$*;*

2. De modo geral, em um jogo com N *jogadores a função de melhor resposta* $R^i\left(a^{-i}\right)$ *para um conjunto de ações* a^{-i} *de* $1, 2, ..., i-1, i+1, ..., N$ *jogadores designa uma ação* $a^i = R^i\left(a^{-i}\right)$ *que maximiza o payoff do jogador* i $\pi^i\left(a^i, a^{-i}\right)$*.*

Vejamos as funções de melhor resposta de Raquel e Jacob:

$$R^J\left(a^R\right) = \begin{cases} w \text{ se } a^R = w \\ \phi \text{ se } a^R = \phi \end{cases} \text{ e } R^R\left(a^J\right) = \begin{cases} w \text{ se } a^J = w \\ \phi \text{ se } a^J = \phi \end{cases}$$

Proposição 2.2. *Se* $\hat{a}$ *é um EN então* $\hat{a}^i = R^i\left(\hat{a}^{-1}\right)$ *para cada jogador i.*

Demonstração. Pela definição 2.4 cada jogador não se beneficia pelo desvio num resultado que é um EN. Assim, pela definição 2.5 cada jogador tem sua função de melhor resposta. □

Vejamos um resultado que pode proporcionar um nível mais elevado de bem-estar.

Definição 6. *Um resultado* $\hat{a}$ *Pareto domina o resultado* $\overline{a}$ *se:*

1.

a) Para cada i $\pi^i\left(\hat{a}\right) \geq \pi^i\left(\overline{a}\right)$ *e*

b) Existe pelo menos um jogador j *que joga* $\pi^j\left(\hat{a}\right) \geq \pi^j\left(\overline{a}\right)$

2. Um resultado a^**é Pareto eficiente (Pareto ótimo) se não existe qualquer outro resultado que Pareto domina* a^**.*

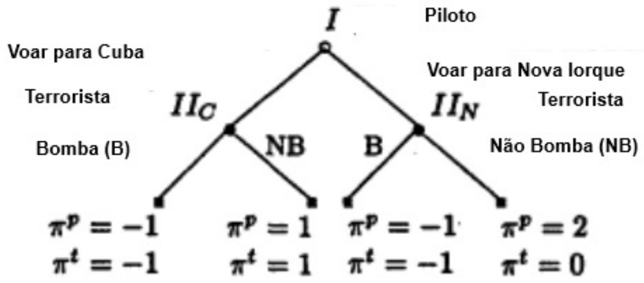
3. Os resultados $\hat{a}$ *e* $\overline{a}$ *são Pareto não comparáveis se para algum jogador* i $\pi^i\left(\hat{a}\right) \geq \pi^i\left(\overline{a}\right)$*, mas, para algum outro jogador* j $\pi^j\left(\hat{a}\right) \leq \pi^j\left(\overline{a}\right)$*.*

Por exemplo, no jogo Guerra/Paz os resultados (G,P) e (P,G) são Pareto não comparáveis. Note que (P,P) é Pareto ótimo e Pareto domina (G,G).

2.2 Jogos na forma extensiva

Os jogos na forma extensiva , permitem que os jogadores se movimentem em períodos distintos de tempo. Considere o seguinte exemplo: um terrorista embarca num voo de Mineanopólis para Nova Iorque. Após 30 minutos, o avião atinge a altitude de 30.000 pés, então o terrorista aborda o piloto e sussurra no ouvido dele que explodirá uma bomba se a aeronave não for levada até Cuba. A figura abaixo descreve o jogo Piloto/Terrorista:

Figura 2.1: Jogo Piloto/Terrorista



O jogo é representado por uma árvore começando no nó de decisão (ponto I). Os outros nós de decisão são II_N e II_C e os nós terminais são os pontos finais. Os ramos conectando os nós de decisão aos nós terminais descrevem as ações de cada jogador.

Após escutar a ameaça do terrorista, o piloto deve escolher qual ação irá tomar. Ao nó inicial o conjunto de ações do piloto, pode ser definido por $A_I^{Piloto} = \{\text{NY, Cuba}\}$. Dependendo da ação escolhida por ele, o terrorista joga ao nó inicial II_N ou II_C. Os conjuntos de ação do terrorista são os seguintes: $A_{II_C}^{Terrorista} = \{\text{B, NB}\}$ ao nó II_C e $A_{II_N}^{Terrorista} = \{\text{B, NB}\}$ ao nó II_N. Daremos uma definição formal de jogos na forma extensiva com informação perfeita.

Definição 7. *Um jogo na forma extensiva:*

1. Uma árvore de jogo contendo um nó inicial, outros nós de decisão, nós terminais e ramos ligando cada nó de decisão aos seus sucessores;

2. Uma lista de $N \geq 1$ jogadores, indexados por i, $i = 1, ..., N$;

3. Para cada nós de decisão, o nome do jogador estará intitulado para a escolha daquela ação;

4. Para cada jogador i, *uma especificação do conjunto de ação a cada nós que o jogador* i *está intitulado a escolher uma ação;*

5. A especificação de um pagamento para cada jogador ao atingir o nó terminal.

Agora definiremos o que são estratégias em jogos na forma extensiva:

Definição 8. *Uma estratégia par ao jogador* i *denotada por s^i é um plano completo de ações. Cada nó de decisão possuí uma ação que o jogador intitulado deve escolher.*

Quais são as estratégias disponíveis no jogo Piloto/Terrorista? Como o terrorista pode terminar a qualquer um dos nós II_N ou II_C a estratégia para o terrorista seria uma especificação da ação que ele precisa tomar a cada nó. Ou seja, embora seja claro que o terrorista irá alcançar os nós II_N ou II_C, mas não os dois, a estratégia para esse jogador deve especificar o que irá fazer ao atingir cada um dos dois nós. Portanto, o terrorista possui quatro possibilidades de estratégias dadas por (B,B), (B,NB), (NB,B) e

(NB, NB) onde o primeiro componente se refere a ação do terrorista em II_C e o segundo em II_N. Como o piloto está restrito a se mover somente no nó I seu conjunto de ação tem somente duas possíveis ações NY ou Cuba. O jogo possuí oito resultados possíveis: (NY,(B,B)),(NY,(B,NB)),(NY,(NB,B)),(NY,(NB,NB)),

(CUBA,(B,B)),(CUBA,(B,NB)),(CUBA,(NB,B)),(CUBA,(NB,NB)).

Ainda não definimos uma noção de equilíbrio para jogos na forma extensiva. Transformaremos o jogo na forma extensiva para a forma normal e poderemos usar a noção de EN.

	Terrorista			
Piloto	(B,B)	(B,NB)	(NB,B)	(NB,NB)
NY	$\underline{-1}$ -1	$\underline{2}$ **0**	-1 -1	$\underline{2}$ **0**
Cuba	$\underline{-1}$ -1	-1 -1	$\underline{1}$ **1**	1 0

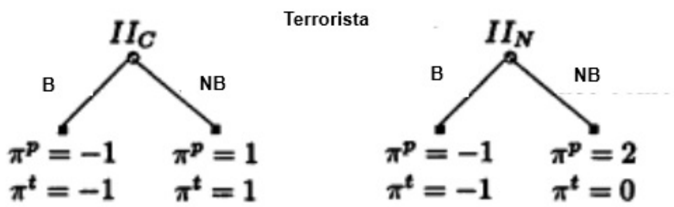
Há três equilíbrios de Nash: (NY, (B,NB)), (NY, (NB,NB)) e (Cuba, (NB,B)). O próximo passo, consistirá em refinarmos nossa noção de equilíbrio.

O conceito atual de EN não condiz com a habilidade do piloto em prever o comportamento do terrorista. O piloto perceberá que o terrorista não terá incentivo quando o avião chegar em NY. Mais precisamente, os resultados (NY, (B,NB)) e (Cuba, (NB,B)) são ameças não críveis, já que os nós terminais indicam que o terrorista não explodirá a bomba. Vamos definir um conceito de equilíbrio que o jogador que se move primeiro levará em conta as ações subsequentes dos demais jogadores. Considerando que os demais jogadores fariam, o jogador 1 otimiza seu conjunto de ações buscando obter a maior recompensa possível.

Definição 9. *Um subjogo é um nó de decisão do jogo original, junto com os nós de decisão e nós terminais seguindo diretamente este nó. Um subjogo é chamado de de subjogo próprio se ele difere do jogo original.*

Claramente, o jogo Piloto/Terrorista possuí três subjogos. Um é o jogo como um todo, os outros dois contém os nós II_N e II_C como nós iniciais.

Figura 2.2: Jogo Piloto/Terrorista

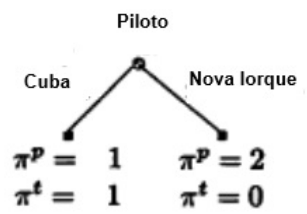


Definição 10. *Um resultado é dito como um Equilíbrio de Nash Perfeito de Subjogos (ENPS) se ele induz a um EN em cada subjogo do jogo original*

Afirmação 2.3. O resultado (NY,(NB,NB)) constituí um único ENPS para o jogo Piloto/Terrorista.

Para verificarmos esse resultado, usamos os dois subjogos próprios e comparamos os ganhos do terrorista. Em II_N $NB(0) > B(-1)$ então se estiver em II_N o terrorista escolherá NB. Já em II_C novamente $NB(0) > B(-1)$ então o terrorista escolherá NB independentemente do nó que estiver. Subimos esses dois resultados e teremos a escolha do piloto.

Figura 2.3: Jogo Piloto/Terrorista



Como $\pi^{Piloto} = 2$ (NY) $> \pi^{Piloto} = 2$ (CUBA) então o equilíbrio será (NY, (NB,NB)). Esse procedimento que utilizamos é chamado de indução retroativa. Começamos encontrando os equilíbrios em cada subjogo do fim para o início. Posteriormente, vamos fazendo a comparação dos ganhos para obtermos o EN.

2.3 Jogos repetidos

Um jogo repetido é um jogo de uma rodada que é repetido N ou infinitas vezes. A importância desses jogos é que é possível obter-se um equilíbrio cooperativo sob algumas condições. Após cada a rodada, os jogadores podem observar o que ocorreu anteriormente. Esse monitoramento das rodadas anteriores é perfeito e pode ser chamado de histórico. Em outras palavras, os jogadores possuem uma memória completa ou perfeita. Eles lembram de tudo o que aconteceu previamente.

Definição 11. *1. Um período* t *é a história do jogo e H_t é a lista dos resultados jogados em todos os períodos $t = 1, 2, ..., t-1$;*

2. Uma estratégia de um jogador num jogo repetido T *vezes é uma lista de ações que o jogador toma em cada período $t = 1, 2, ..., T$ em que cada período* t *a ação $a_t^i \in A^i$ está baseada no período* t*, ou seja, na história do jogo. Isto é, a_t^i mapeia a história H_t a uma ação no conjunto A^i.*

Portanto, uma estratégia de um jogador em um jogo repetido é uma lista de ações a serem jogadas no período t, onde cada ação do período t do jogador i é baseada na lisa observada de ações jogadas por todos os jogadores em todo os períodos $t = 1, 2, ..., t-1$ resumida pelo histórico H_t.

Portanto, um resultado de um jogo repetido seria uma lista de ações que cada jogador está tomando em cada período, enquanto o período t de recompensa para cada jogador é uma função das ações jogadas pelos jogadores no período t.

Considere o jogo Paz/Guerra e suponha que esse jogo seja repetido T vezes, sendo $T \in [1, \infty[$. Denotamos $\rho \in]0, 1[$ como o fator de desconto.

Teorema. *Suposição 2.1: Seja a_t^i a ação omada pelo jogador i no período t, sendo i=1,2 e $t = 1, 2, ..., T$. Também seja, $\pi_i^t\left(a_t^1, a_t^2\right)$ o payoff do jogador i no período t. Então quando o jogo é repetido T vezes temos que:*

$$\pi^i = \sum_{t=1}^{T} \rho^{t-1} \pi_i^t\left(a_t^1, a_t^2\right)$$
$$= \begin{cases} \pi_1^i\left(a_t^1, a_t^2\right) + \rho\pi_2^i\left(a_t^1, a_t^2\right) + ... + \rho^{T-1}\pi_T^i\left(a_t^1, a_t^2\right) \;\; se\ T < \infty \\ \pi_1^i\left(a_t^1, a_t^2\right) + \rho\pi_2^i\left(a_t^1, a_t^2\right) + \rho^2\pi_3^i\left(a_t^1, a_t^2\right) + ... \;\; se\ T = \infty \end{cases}$$

Se o número de jogadores for maior do que dois, então substitua $\left(a_t^1, a_t^2\right)$ por $a_t = \left(a_t^1, a_t^2, a_t^3, ...\right)$. Agora veremos quantas estratégias estão disponíveis para o país 1. Mais precisamente, quantas estratégias estão disponíveis no conjunto de estratégias do país 1 para um jogo de duas rodadas.

Proposição 2.4. *Há $2^5 = 32$ estratégias disponíveis para o país 1 em duas ações disponíveis, no jogo repetido de dois períodos.*

Demonstração. Olharemos *t=2*. Nesse período, há quatro possíveis histórias. Então, $H_2 \in \{(G, G), (G, P), (P, G), (P, P)\}$. O país 1, pode escolher G ou P. Agora, para especificar completamente uma estratégia, o país tem que especificar qual ação será tomada para cada história possível. Portanto em $t = 2$ o número de ações é 2^4. Em $t = 1$ há duas ações disponíveis para o país 1 no período 1. Assim, o número de estratégias disponíveis para esse país num jogo de duas ações de dois períodos 2×2^4. □

Similarmente se o jogo é repetido 3 vezes:

$$2 \times 2^4 \times 2^{16} = 2097152$$

Proposição 2.5. *Para qualquer inteiro T, $1 \leq T \leq +\infty$ o jogo repetido Paz/Guerra tem um único ENPS é cada país jogar guerra em todos os períodos.*

Demonstração. Usando indução retroativa, suponha que os países já tenham jogado $T-1$ períodos e agora eles já estão prontos para jogar no período T. Então, como no período T

é o último período do jogo que o jogo é jogado, o período T é idêntico ao jogo Paz/Guerra para um único período *t=1*. Assim, o único EN no *T-ésimo* período é jogar Guerra para cada país.

Agora, considere o jogo jogado em $T-1$. Ambos sabem que após esse jogo ser finalizado eles terão pelo menos 1 período para não cooperarem e jogarem Guerra. Assim, em $T-1$, cada jogador jogaria uma estratégia dominante Guerra. Olhando para trás, em $T-2$, $T-3$ e assim por adiante até *t=1* podemos estabelecer que Guerra será jogado por cada jogador em cada período. □

2.4 Jogos infinitamente repetidos

Em um jogo infinitamente repetido, não podemos utilizar indução retroativa, pois não é possível estabelecer o período terminal. Usaremos um tipo específico de estratégia para solucionarmos o jogo.

Definição 12. *O jogador* i, *está jogando uma estratégia trigger se para cada* t=1,2,...

$$a_t^i = \begin{cases} \textit{Guerra desde que } a_t^i = a_t^j \textit{ Paz } \forall t = 1, ..., t-1 \\ \textit{Paz, caso contrário} \end{cases}$$

Se o outro jogador não coopera a partir daí (do período t) o jogador irá jogar Guerra para sempre. Vamos verificar como ocorre o equilíbrio em estratégias trigger.

Proposição 2.6. *Se ρ é suficientemente grande então o resultado quando os jogadores jogam a estratégia trigger é um ENPS. Formalmente, isso ocorre se $\rho < \frac{1}{2}$.*

Demonstração. Para facilitar a demonstração, suponha que o jogador desvie no primeiro período. A partir daí, o outro jogador sempre jogará Guerra, como segue:

$$\pi_1^i = \pi_1^i\left(G, P\right) + \sum_{t=2}^{T} \rho^{t-1} \pi_t^1\left(G, G\right) = 3 + \frac{\rho}{1-\rho}$$

Caso o jogador i nunca desvie:

$$\pi_t^i = \sum_{t=1}^{T} \rho^{t-1} \pi_1^1\left(P, P\right) = \frac{2}{1-\rho}$$

Então não será benéfico se:

$$\frac{2}{1-\rho} > 3 + \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$\rho > \frac{1}{2}$$

□

Também poderíamos mostrar que jogar Guerra em cada período constitui um EN. O teorema popular (popular, porque esse resultado já era conhecido por estudiosos de teoria de jogos antes dele mesmo ser provados) indica que se ρ for suficientemente alto há um número grande de ENPS em jogos repetidos. Por exemplo, a estratégia *tit-for-tat* (olho por olho, dente por dente) é aquela que se houver traição o jogador traído responde na rodada subsequente com a estratégia punitiva. É possível que seja observado EN com esse tipo de estratégia.

2.5 Estratégias Mistas

Aqui os jogadores randomizem suas ações sobre seus conjuntos de ação. Uma característica interessante é que sempre existe um EN sob esse tipo de estratégia. Veja o seguinte jogo:

	Mr. β	
Mr. α	L	R
T	0 **0**	0 -1
B	1 0	-1 **3**

Não há EN em estratégias puras.

Definição 13. *1. A estratégia mista do jogador α é a distribuição de probabilidade sobre jogar $\alpha^{\alpha} = T$ e jogar $\alpha^{\alpha} = B$. Formalmente, a ação mista α é a probabilidade $p \in [0,1]$ tal que o jogador α jogue T com probabilidade* p *e B com probabilidade* 1-p;

2. A estratégia mista de β é a probabilidade $q \in [0,1]$ tal que β jogue L com a probabilidade q *e R* 1-q*;*

3. Um perfil de ação de estratégias mistas é uma lista (p,q)*;*

4. O resultado do jogo com estratégias mistas é a lista das ações jogadas por cada jogador.

Definição 14. *Uma função payoff no jogo de estratégias mistas é o valor dos payoffs esperados no jogo de estratégias puras. Formalmente, para um perfil* (p,q) *o payoff esperado para $i = \alpha, \beta$ é dado por:*

$$E\pi^{i}(p,q) = pq\pi^{i}(T,L) + p(1-q)\pi^{i}(T,R) + (1-p)q\pi^{i}(B,L) + (1-p)(1-q)\pi^{i}(B,R)$$

Definição 15. *Um perfil de ação $(\hat{p},\hat{q})$ onde $\hat{p}$ e $\hat{q} \in [0,1]$ é um EN me estratégias mistas se nenhum jogador acharia benéfico desviar, dado que o outro jogador também faça. Formalmente,*

$$E\pi^{\alpha}(\hat{p},\hat{q}) \geq E\pi^{\alpha}(p,\hat{q})\,\forall p \in [0,1]$$
$$E\pi^{\beta}(\hat{p},\hat{q}) \geq E\pi^{\beta}(\hat{p},q)\,\forall q \in [0,1]$$

Vamos solucionar o jogo usando a noção de equilíbrio em estratégias mistas.

$$E\pi^{\alpha}(p,q) = pq(0) + p(1-q)(0) + (1-p)q(1) + (1-p)(1-q)(-1)$$

$$E\pi^{\alpha}(p,q) = (2q-1)(1-p)$$

$$E\pi^{\beta}(p,q) = pq(0) + p(1-q)(-1) + (1-p)q(0) + (1-p)(1-q)(3)$$

$$E\pi^{\beta}(p,q) = (3-4p)(1-q)$$

Agora olharemos ao par de probabilidades $(\hat{p},\hat{q})$*que satisfazem as seguintes condições: (a)* $(\hat{p},\hat{q})$ *maximiza* $E\pi^{\alpha}(p,\hat{q})$ *e (b)* $(\hat{p},\hat{q})$ *maximiza* $E\pi^{\beta}(p,\hat{q})$

$$R^{\alpha}(q) = \begin{cases} 1 \; se \; q < 0.5 \\ [0,1] \;\; se \; q = 0.5 \\ 0 \; se \; q > 0.5 \end{cases} \; e \; R^{\beta}(p) = \begin{cases} 1 \; se \; p < 0.75 \\ [0,1] \;\; se \; p = 0.75 \\ 0 \; se \; p > 0.75 \end{cases}$$

Ou seja, quando β *joga R com uma probabilidade alta* $(1-q) > 0.5$ *a melhor resposta do jogador* α *é jogar T com* p=1*. Com o propósito de minimizar a perda de receber -1. No entanto, quando* β *com probabilidade 1* $(p = 0)$ *com o propósito de maximizar seu ganho:*

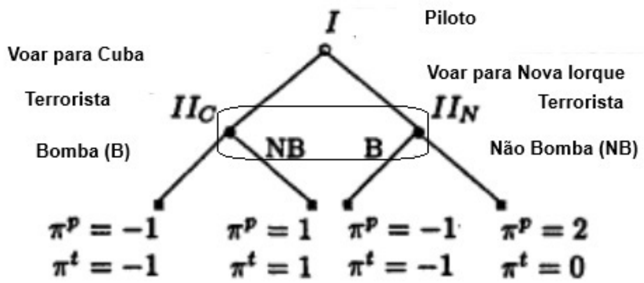
$$\frac{\partial \pi^{\alpha}}{\partial p} = -2q + 1 = 0 \rightarrow q^* = 0.5$$

$$\frac{\partial \pi^{\beta}}{\partial q} = -3 + 4p = 0 \rightarrow p^* = 0.75$$

Proposição 2.7. *Existe um único EN em estratégias mistas para o jogo com* $(p^*, q^*) = (0.75, 0.5)$.

2.6 Jogos com informação imperfeita

Jogos com informação imperfeita descrevem situações em que os jogadores nem sempre observam a ação do outro jogador desde o começo do jogo, portanto o jogador não tem certeza de qual nó será alcançado. Vejamos os seguinte exemplo:



No circulo o terrorista não sabe em que nós está. Esse círculo descreve o conjunto de informação do terrorista.

Definição 16. *Um conjunto de informação de um jogador é a coleção de nós que o jogador deve escolher para tomar uma ação. Quando o jogador atinge um conjunto de informação, ele sabe que o conjunto de informação foi atingido, mas não sabe se esse conjunto de informação contém mais de um nó. O jogador não sabe em qual nó ele está posicionado.*

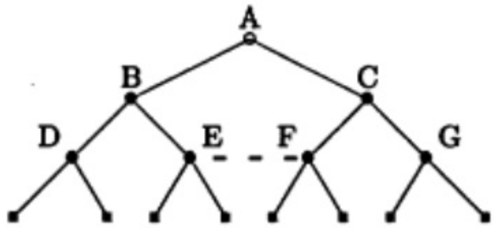
Definição 17. *Um jogo na forma extensiva é:*

1. Um jogo com informação imperfeita é aquele que há um conjunto de informação que contém mais de um nó;

2. Em um jogo com informação perfeita, os conjuntos de informação são unitários.

Definição 18. *Em um jogo de informação imperfeita, uma estratégia para o jogador* i *é uma lista de ações que o jogador escolhe a qualquer conjunto de informação o qual ele deve tomar uma ação.*

Definição 19. *Um subjogo está em um conjunto de informações que contém um único nó e todos os nós de decisão e terminais subsequentes. Desde que todos os nós subsequentes não estejam contidos em conjuntos de informações que contenham nós que não possam ser alcançados a partir do subjogo.*



No exemplo acima, temos três subjogos: i) todo o jogo; ii) D e iii) G. Note que entre E e F há um conjunto de informação. Para o jogo Piloto/Terrorista, com o conjunto de informação ele se torna um jogo simultâneo:

	Terrorista	
Piloto	B	NB
NY	-1 -1	1 **1**
Cuba	-1 -1	2 **0**

Nesse caso o EN é um ENPS que seria (NY, NB).

3 Tecnologia, produção e demanda

Nesse capítulo revisaremos os principais conceitos de microeconomia que serão necessários ao decorrer desse material.

3.1 Tecnologia

A função de produção reflete matematicamente como as firmas transformam fatores produtivos em bens finais. Por simplicidade assumimos que apenas dois insumos são necessários para a produção de um bem final. Esses insumos são definidos como trabalho e capital. Note que uma firma pode utilizar dois ou mais insumos para a produção de um bem.

Definimos uma função de produção como: $Q = f(k, l)$. Assumimos que a função de produção é C^2 (duas vezes continuamente diferenciável) em relação a seus argumentos. Seja:

$$PMg_l = \frac{\partial f(k,l)}{\partial l} \text{ e } PMg_k = \frac{\partial f(k,l)}{\partial k} \tag{3.1}$$

Se $Q = f(k,l) = (k^\alpha + l^\alpha)^\beta$ com $\alpha, \beta > 0$ então:

$$PMg_l = \beta (k^\alpha + l^\alpha)^{\beta-1} l^{\alpha-1}$$

$$PMg_k = \beta (k^\alpha + l^\alpha)^{\beta-1} k^{\alpha-1}$$

Ainda sabemos que:

$$\underset{l\to 0}{lim} PMg_l = +\infty$$

Para chegarmos no resultado acima devemos aplicar L'Hopital:

$$\underset{l\to 0}{lim} PMg_l = \frac{\beta (k^\alpha + l^\alpha)^{\beta-1}}{l^{1-\alpha}} = \frac{f(l)}{g(l)}$$

$$\underset{l\to 0}{lim} PMg_l = \frac{f''(l)}{g'(l)} = \frac{\alpha\beta(\beta-1)(k^\alpha + l^\alpha)^{\beta-2} l^{\alpha-1}}{(1-\alpha) l^{-\alpha}}$$

$$\underset{l\to 0}{lim} PMg_l = \frac{\alpha\beta(\beta-1)(k^\alpha + l^\alpha)^{\beta-2}}{(1-\alpha) l}$$

Se $\alpha < 1$ então $1-\alpha > 0$. Quando multiplicamos $(1-\alpha)\times(l \to 0)$ teremos um decimal muito pequeno. Ao transformarmos em um número fracionário, pelo processo de divisão de fração o numerador irá se tornar um número muito grande. Esse resultado quer dizer que quando l é muito pequeno, qualquer acréscimo de l aumentará o produto marginal em uma magnitude muito grande. O mesmo resultado vale para o fator trabalho.

Definição 20. *1. O trabalho e o capital são definidos como fatores de suporte em um processo particular de produção. Em outras palavras, o emprego de um fator aumenta o produto marginal do outro fator*

$$\frac{\partial f(k,l)}{\partial l \partial k} = \frac{\partial f(k,l)}{\partial k \partial l} > 0$$

2. O capital e o trabalho são chamados de fatores substitutos em um processo produtivo. Um aumento no emprego de um fator diminui o produto marginal do outro fator:

$$\frac{\partial f(k,l)}{\partial l \partial k} = \frac{\partial f(k,l)}{\partial k \partial l} < 0$$

Em nosso exemplo, se $\beta > 1$ então k e l são fatores de suporte. Se $\beta < 1$ k e l são fatores substitutos.

Definição 21. *Seja $\lambda > 1$, então a tecnologia de produção $Q(k,l)$ exibe:*

1. *Retornos crescentes à escala se: $f(\lambda k, \lambda l) > \lambda f(k,l)$;*
2. *Retornos decrescentes à escala se: $f(\lambda k, \lambda l) < \lambda f(k,l)$*
3. *Retornos constantes à escala se: $f(\lambda k, \lambda l) = \lambda f(k,l)$*

Em nosso exemplo:

$$Q = f(k,l) = (k^\alpha + l^\alpha)^\beta$$

$$f(\lambda k, \lambda l) = ((k\lambda)^\alpha + (l\lambda)^\alpha)^\beta$$

$$f(\lambda k, \lambda l) = \lambda^{\alpha\beta}(k^\alpha + l^\alpha)^\beta$$

Então:

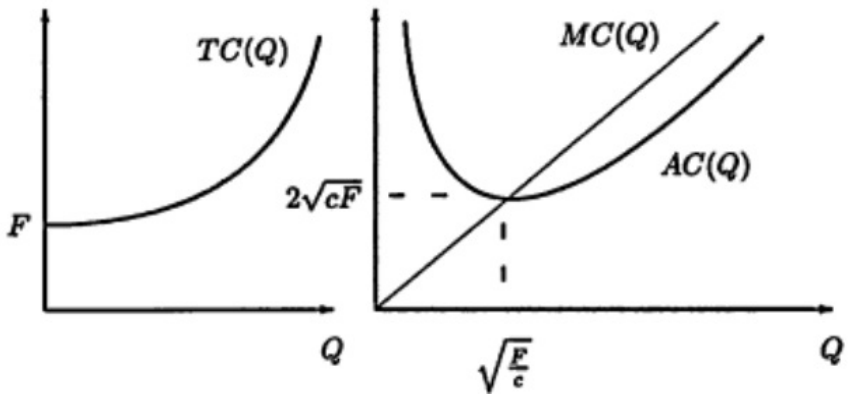
$$f(\lambda k, \lambda l) = \lambda^{\alpha\beta}(k^\alpha + l^\alpha)^\beta > \lambda f(k,l) = \lambda(k^\alpha + l^\alpha)^\beta$$

Isso é verdade se, e somente se: $\alpha\beta > 1$.

3.2 Função de custos

A função de custos mapeia o preço dos fatores de produção e suas quantidades utilizadas no processo produtivo. Seja w a taxa de salário e r o preço da unidade do capital. Então, $CT(w,r;Q)$ mede o custo total para a produção de Q unidades. A função de custo total médio médio o custo total sobre a quantidade produzida c e o custo marginal é definido como $CMg = {}^{\partial CT(Q)}/_{\partial Q}$.

Considere como exemplo a seguinte função de custo total $CT\,(Q) = F + cQ^2$.



Legenda: TC = custo total; MC = custo marginal e AC = custo total médio.

$$CTMed = \frac{F}{Q} + cQ$$

$$CMg = 2cQ$$

No ponto de mínimo o custo total médio é igual ao custo marginal.

Proposição 3.1. *Se a função de custos alcança o mínimo para um Q>0 então para um nível particular de Q o CTMed(Q) = CMg ao nível mínimo de Q.*

Demonstração. Seja $Q^{Min} > 0$. Defina $CMg = {}^{\partial CT(Q)}/_{\partial Q}$. Considere que Q^* é a quantidade produzida que soluciona:

$$\underset{Q}{Min} CTMed = CT\,(Q)\,/Q$$

Pelas condições de primeira ordem temos que:

$$\frac{CT'\,(Q)}{Q} - \frac{CT\,(Q)}{Q^2} = 0$$

$$CT'\,(Q) = \frac{CT\,(Q)}{Q}$$

$$CMg\,(Q^*) = CTMed\,(Q^*)$$

□

Para o nosso exemplo

$$\underset{Q}{Min} CTMed = \frac{F}{Q} + cQ$$

$$-\frac{F}{Q^2} + c = 0$$

$$c = \frac{F}{Q^2}$$

$$Q^* = \sqrt{\frac{F}{c}}$$

Agora plugamos Q^*na função de CTMed.

$$CTMed = \frac{F}{\sqrt{\frac{F}{c}}} + c\sqrt{\frac{F}{c}} = 2\sqrt{Fc}$$

Avaliamos o CMg a Q^*.

$$CMg\left(Q^*\right) = 2cQ^* = 2c\sqrt{\frac{F}{c}} = 2\sqrt{Fc}$$

Notamos que os resultados são idênticos.

3.3 Dualidade entre produção e custos

Por simplicidade assumimos que $Q = f\left(l\right) = l^{\gamma}$ com $\gamma > 0$. Se $Q = l^{\gamma}$ então $l = Q^{\frac{1}{\gamma}}$ e $CT = wQ^{\frac{1}{\gamma}}$. Sob retornos crescentes de escala a curva de custo médio decai com o nível de produção. Isso reflete que com uma escala de produção maior o custo unitário cairá.

Agora iremos mostrar um exemplo um pouco mais complicado. Suponha que a função de produção seja do tipo *Cobb-Douglas* $Q = f\left(k, l\right) = k^a l^{1-a}$, normalizamos os preços para $p = 1$ e a função de custo total $CT\left(k, l\right) = wl + rk$. Por simplicidade suporemos que $a = 0.5$.

O problema da firma é maximizar os lucros:

$$\underset{k,l}{Max} \pi\left(k, l\right) = pf\left(k, l\right) - CT\left(k, l\right) = k^a l^{1-a} - wl - rk$$

Pelas condições de primeira ordem temos que:

$$\frac{\partial \pi}{\partial k} = ak^{a-1} l^{1-a} - r = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial l} = \left(1 - a\right) k^{a-1} l^{-a} - w = 0$$

Dividindo as duas equações teremos que:

$$l^* = k^* \frac{r}{w}$$

Se inserirmos l^* na função de produção teremos que:

$$Q = f(k^*) = k^* \left(\frac{r}{w}\right)^{1-a}$$

Agora faremos o mesmo processo para a função de custo total:

$$CT(k^*) = wk^* \frac{r}{w} + rk^* = 2rk^*$$

Para entendermos a relação entre a função de custos e a de produção mostramos que:

$$k^* = Q \left(\frac{w}{r}\right)^{1-a}$$

Inserindo essa equação na função de custos:

$$CT(Q) = 2rQ \left(\frac{w}{r}\right)^{1-a}$$

$$CT(Q) = 2wQ \left(\frac{w}{r}\right)^{a}$$

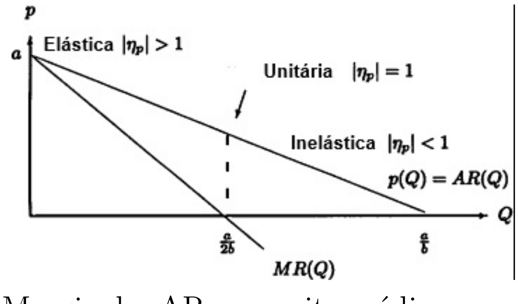
3.4 Função de demanda

Seja $Q(p)$ a função de demanda agregada de um único produto. A função de demanda representa o montante máximo que um número de consumidores está disposto a pagar a um dado preço de mercado.

$$Q(p) = \frac{a-p}{b} \text{ sendo } a, b > 0$$

A função de demanda inversa é:

$$p(Q) = a - bQ$$



Legenda: MR = Receita Marginal e AR = receita média.

A função de receita total representa o produto do preço multiplicado pela quantidade $RT\left(Q\right) = pQ = aQ - bQ^2$. A receita marginal é a derivada da função receita em relação a Q. Em outras palavras, mostra a variação da receita para uma variação na quantidade produzida. A receita marginal é $RMg = a - 2bQ$. A receita média é a divisão da receita total por Q, ou seja, $RMed = a - bQ$. Note que a receita média é exatamente igual a função de demanda para o caso da demanda linear.

Proposição 3.2. *Se a função de demanda é linear, então a receita marginal (RMg) também é linear. O intercepto da RMg possuí duas vezes a magnitude do intercepto da função de demanda.*

Podemos então utilizarmos um conceito que mede a sensibilidade da demanda a variações no preço.

Definição 22. *A elasticidade preço da demanda η_p mede o quão rápido a demanda se ajusta a uma pequena mudança no preço:*

$$\eta_p\left(Q\right) = \left|\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{p}{Q}\right|$$

Definição 23. *A um dado nível* Q, *a demanda é:*

1. *Elástica: se $\eta_p\left(Q\right) < -1$ ou $\left|\eta_p\left(Q\right)\right| > 1$;*
2. *Inelástica: se $\eta_p\left(Q\right) \in (0, 1)$ ou $\left|\eta_p\left(Q\right)\right| < 1$;*
3. *Unitária: se $\eta_p\left(Q\right) = -1$ ou $\left|\eta_p\left(Q\right)\right| = 1$.*

Seja $Q = ap^{-\epsilon}$ e $p = a^{\frac{1}{\epsilon}}Q^{-\frac{1}{\epsilon}}$. Então $\eta_p\left(Q\right) = \epsilon$. A elasticidade preço da demanda depende exclusivamente do valor de ϵ.

Ainda, podemos notar que há uma relação entre a *RMg* e a elasticidade preço da demanda. Se a *RMg=0* então $\eta_p\left(Q\right) = 1$ e se *RMg>0* então $\left|\eta_p\left(Q\right)\right| > 1$.

Proposição 3.3. *Há uma relação entre a RMg e a elasticidade preço da demanda, como segue:*

$$RMg\left(Q\right) = p\left(Q\right)\left[1 + \frac{1}{\eta_p\left(Q\right)}\right]$$

Demonstração. Seja

$$RMg\left(Q\right) = \frac{\partial RT\left(Q\right)}{\partial Q} = \frac{\partial\left[p\left(Q\right)Q\right]}{\partial Q} = p\left(Q\right) + Q\frac{\partial p\left(Q\right)}{\partial Q}$$

$$RMg\left(Q\right) = p\left(Q\right)\left[1 + \frac{Q}{p\left(Q\right)}\frac{\partial p\left(Q\right)}{\partial Q}\right]$$

Pelo teorema da função inversa, temos que:

$$\frac{\partial p\left(Q\right)}{\partial Q}=\left(\frac{\partial Q}{\partial p\left(Q\right)}\right)^{-1}$$

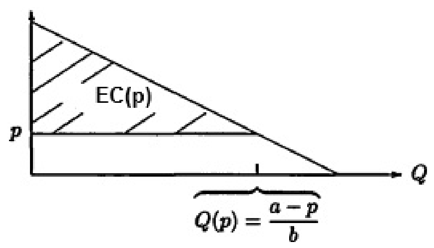
$$RMg\left(Q\right)=p\left(Q\right)\left[1+\frac{Q}{p\left(Q\right)}\frac{1}{\frac{\partial Q}{\partial p}}\right]$$

$$RMg\left(Q\right)=p\left(Q\right)\left[1+\frac{1}{\eta_p\left(Q\right)}\right]$$

□

3.5 Excedente do consumidor

O excedente do consumidor (EC) pode ser definido como uma medida de utilidade ou ganho de utilidade quando os consumidores podem comprar um produto a um preço de mercado. Considere a demanda linear:



Suponha que p^* é o preço de mercado. Então, $EC=\frac{(a-p^*)Q^*}{2}=\frac{(a-p)^2}{2b}$. Podemos também usar cálculo:

$$EC=\int_0^{Q^*}p\left(Q\right)dQ-p^*Q^*$$

$$EC=aQ^*-b\frac{Q^{*2}}{2}-\left(a-bQ^*\right)Q^*=\frac{bQ^{*2}}{2}$$

$$EC=\frac{b\left(\frac{(a-p^*)}{b}\right)^2}{2}=\frac{\left(a-p^*\right)^2}{2b}$$

4 Competição Perfeita

Definiremos um mercado competitivo ou perfeitamente competitivo sendo aquele que os agentes econômicos se comportam de tal forma.

Definição 24. *Um comprador ou vendedor é dito ser competitivo se o agente assume ou acredita que o preço de mercado é dado, isto é, as ações do agente não podem influenciar o preço do mercado.*

É importante notar que o comportamento competitivo está relacionado com as crenças dos agentes e não diretamente relacionado ao tamanho do mercado. Além disso, o comportamento *price-taker* (tomador de preço) parece razoável, quando um número de firmas é grande, tendo em vista que cada empresa representa somente uma pequena fatia da indústria.

Outro ponto importante é que as soluções para mercados imperfeitamente competitivos convergem para aquelas de mercados competitivos quando o número de firmas é suficientemente grande. Uma suposição bastante importante é que os produtos são homogêneos e a função de demanda agregada é:

$$p\left(Q\right) = a - bQ \text{ sendo } a, b > 0$$

4.1 Retornos à escala

Suponha um mercado com duas firmas produzindo um bem homogêneo. Além disso, considere que as empresas apresentam uma tecnologia de produção com retornos constantes à escala. A função de custos de cada firma é dada por:

$$CT_i\left(q_i\right) = c_i q_i \forall i = 1, 2$$

$$c_2 \geq c_1$$

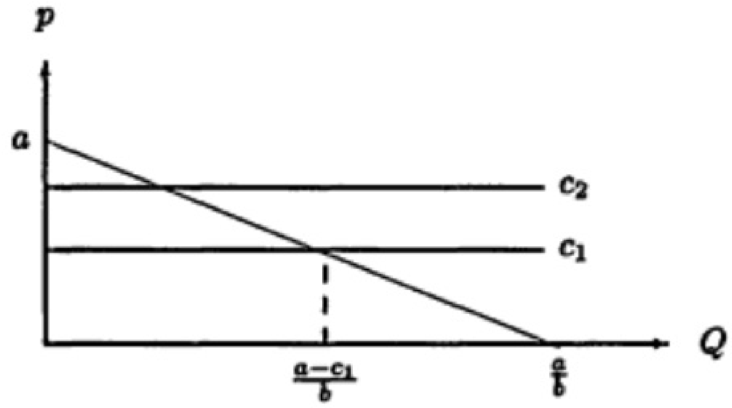
De modo geral, custos unitários estão associados com retornos constantes à escala na produção. E outras palavras, ao dobrar a quantidade de insumos, dobra-se a quantidade produzida.

Definição 25. *A tripla $\{p^e, q_1^e, q_2^e\}$ é chamado de equilíbrio competitivo se:*

1. Dados p^e e q_i^e que soluciona: $\underset{q_i}{Max} \pi_i\left(q_i\right) = p^e q_i - c_i q_i$

2. $p^e = a - b\left(q_1^e + q_2^e\right)$; $Q = \left(q_1^e + q_2^e\right)$ e p^e, q_1^e e $q_2^e \geq 0$.

Vejamos um exemplo de um equilíbrio competitivo sob retornos constantes à escala:



Devemos calcular as curvas de oferta das firmas oriundas da parte 1 da definição 4.2.

Lema 4.1. *As funções de oferta são dadas por:*

$$q_i = \begin{cases} \infty & se p > c_i \\ [0, \infty[& se\ p = c_i \\ 0 & se p < c_i \end{cases} \quad \forall i = 1, 2$$

Demonstração. Como cada firma i trata p como dado, a margem de lucro da firma é definida por $p - c_i$, como $p - c_i$ é tratada pela firma i como constante por unidade de lucro, então se $p - c_i > 0$ a firma produziria $q_i = +\infty$ e se $p - c_i < 0$ a firma não produz nada. Por fim, se $p - c_i = 0$ ou $p = c_i$ a firma tem lucro econômico zero para cada nível de produção implicando que o nível do produto é indeterminado, ou seja, está no intervalo entre $[0, +\infty[$. □

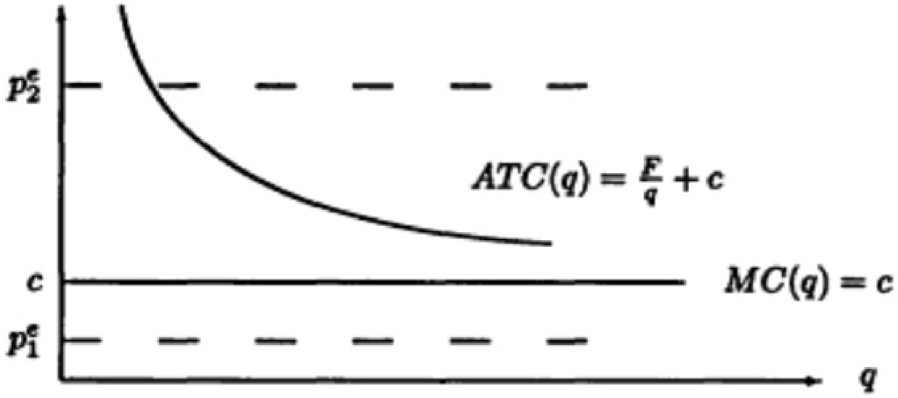
Proposição 4.2. *Se $a > c_2 \geq c_1$, o único equilíbrio competitivo é dado por $p = c_1$,e :*

1. Se $c_2 > c_1, q_2^e = 0$ e $q_1^e = \frac{a-c_1}{b}$;

2. Se $c_2 = c_1$ então $Q = q_1^e + q_2^e = \frac{a-c_1}{b}$ e $q_2, q_1 \geq 0$. Isto é , o produto agregado da indústria é determinado, mas a divisão da indústria entre as firmas é indeterminada.

Note que se $a < c_1$ isso que dizer que a demanda é muito baixa e nenhuma firma deveria produzir. Para complementar a análise, suponha que uma das firmas possui a seguinte estrutura de custos:

$$CT(q) = \begin{cases} F + cq \text{ se } q > 0 \\ 0 \text{ se } q = 0 \end{cases}$$



Legenda: MC = Custo Marginal e ATC = Custo Total Médio

Proposição 4.3. *Seja $a > c$. Se a tecnologia da firma apresenta retornos crescentes à escala, não há um equilíbrio competitivo.*

Demonstração. **(Contradição)** Suponha que existe um equilíbrio competitivo. Então $p^e \leq c$ ou $p^e > c$ de acordo com a figura acima.

(a) Suponha que $p^e = p_1^e \leq c$. Então, $p_1^e < \frac{F}{q} + c = CTMed$ para cada $q > 0$. O preço de equilíbrio está abaixo do $CTMed$ para cada $q > 0$. Assim, a firma deveria produzir $q^e = 0$. Mas, $q^e = 0$ não pode ser um equilíbrio, pois os preços e quantidade são estritamente positivos;

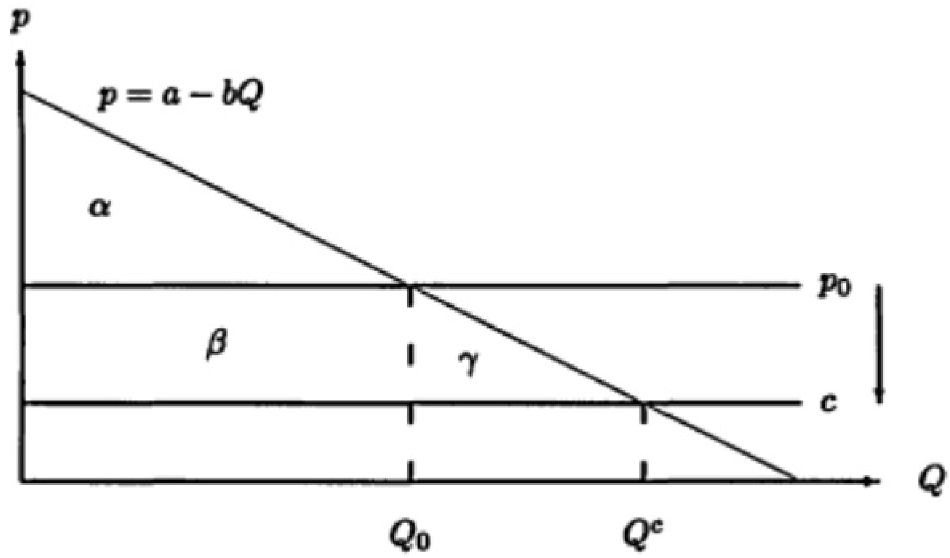
(b) Suponha que $p^e = p_2 > c$. Então, $p_2 > CTMed$ para um certo nível de q . Ou seja, o preço de equilíbrio está acima do $CTMed$ para um nível de produção suficientemente grande. Além disso, o lucro por unidade $p_2^e - CTMed$ aumentaria com q, implicando que um equilíbrio competitivo $q^e = +\infty$. Mas, que $q^e = +\infty$ não pode ser um equilíbrio, já que a quantidade demandada sempre é finita e o excesso de oferta viola a parte 2 da definição de equilíbrio. □

4.2 Apreçamento de CMg e bem-estar social

Demonstraremos que o mercado competitivo é aquele que maximiza o bem-estar.

Definição 26. *Seja o preço de mercado dado por* p *e suponha que há $N \geq 1$ firmas na indústria. Definimos a função de bem estar social como:*

$$W(p) = EC(p) + \sum_{i=1}^{N} \pi_i(p)$$



Legenda: MC = Custo Marginal e ATC = Custo Total Médio

Quando $p = p_0$ o $EC\,(p_0) = \alpha$ e $\sum_{i=1}^{N} \pi_i\,(p) = \beta$ então $W\,(p) = \alpha + \beta$. No que γ é um peso morto associado a $p_0 > c$. Quando $p = c$ o $EC\,(p_0) = \alpha + \beta + \gamma$ e $\sum_{i=1}^{N} \pi_i\,(p) = 0$. Note que $W\,(p)$ aumenta via EC porém o EP (excedente do produtor) medido pelos lucros das firmas cai para zero.

5 Monopólio

Desenvolveremos a teoria de um mercado com apenas um vendedor que se depara com consumidores que são tomadores de preço. Um caso extremo de monopólio ocorre quando há poucas firmas competindo no mercado, ou seja, essas empresas podem exercer algum poder de monopólio. Mesmo em mercados com um número de empresas suficientemente grande essas firmas sempre podem exercer algum poder de mercado.

5.1 Maximização de lucros do monopolista

O problema do monopolista é:

$$\underset{Q}{Max}\pi\left(Q\right) = RT\left(Q\right) - CT\left(Q\right)$$

Uma condição necessária, mas não suficiente é que $Q^m > 0$, então teremos que:

$$\frac{\partial\pi\left(Q\right)}{\partial Q} = \frac{\partial RT}{\partial Q} - \frac{\partial CT}{\partial Q} = 0$$

$$RMg = CMg$$

Ambos avaliados Q^m. Por simplicidade, assumimos que:

$$p\left(Q\right) = a - bQ \text{ e } CT\left(Q\right) = F + cQ^2$$

$$\underset{Q}{Max}\pi\left(Q\right) = \left(a - bQ\right)Q - F - cQ^2$$

$$\frac{\partial\pi\left(Q\right)}{\partial Q} = a - 2bQ - 2cQ = 0$$

$$Q^m = \frac{a}{2\left(b + c\right)}$$

Colocando a quantidade de monopólio na equação da demanda:

$$p\left(Q^m\right) = a - b\left[\frac{a}{2\left(b + c\right)}\right] = \frac{ab - 2c}{2\left(b + c\right)}$$

Consequentemente:

$$\pi\left(Q^m\right) = \frac{a^2}{4\left(b + c\right)} - F$$

Ao mesmo tempo, o lucro ótimo do monopolista impõe uma condição sobre a quantidade:

$$Q^m = \begin{cases} \frac{a}{2(b+c)} & \text{se } F \leq \frac{a^2}{4(b+c)} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Se $F = \frac{a^2}{4(b+c)}$ o monopolista cairia numa condição de lucro econômico. No entanto, o preço ainda é maior que o custo marginal.

$$\pi\left(Q^m\right) = pQ^m - F - cQ^m = \left(p - c\right) Q^m - F$$

$$\pi\left(Q^m\right) = \left(p - c\right) Q^m - F = 0$$

$$\left(p - c\right) Q^m = F$$

Como $F > 0$ então $p - c > 0$.

A condição suficiente é que a segunda derivada do lucro em função da quantidade deve ser estritamente menor do que zero.

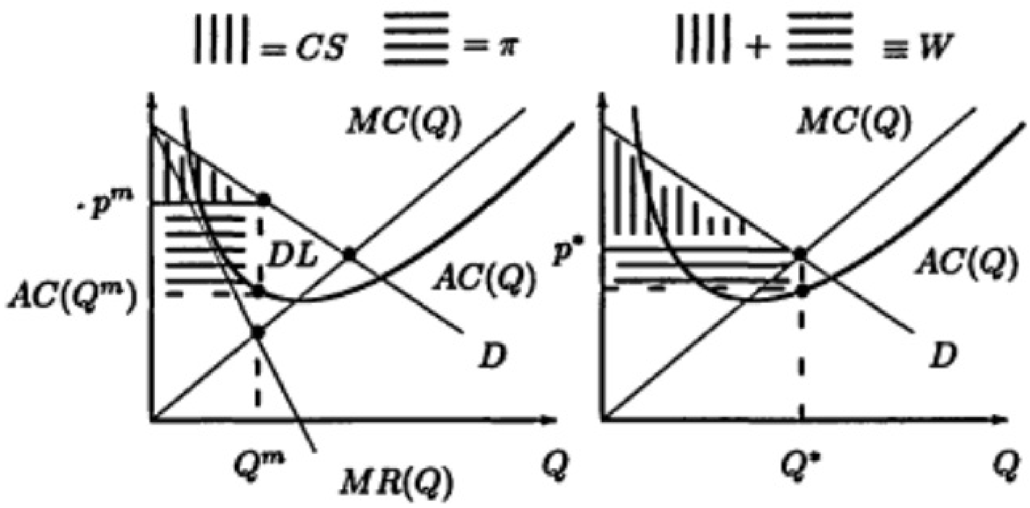
$$\frac{\partial \pi\left(Q\right)}{\partial Q} = a - 2bQ - 2cQ$$

$$\frac{\partial^2 \pi\left(Q\right)}{\partial Q^2} = -2\left(b + c\right) < 0$$

Note que b e c são estritamente maiores que zero.

5.2 Monopólio e bem estar social

Como já vimos, analisaremos a perda de bem-estar social decorrente do monopólio.



Legenda: MC = Custo Marginal, AC = Custo Total, DL= Peso Moto, CS= Excedente do consumidor; π =(EP) excedente do produtor, lucro do monopolista e D = demanda.

A figura acima mostra a perda de bem-estar oriunda do monopólio. O gráfico da esquerda é a situação de monopólio e o da direita representa um mercado com concorrência perfeita. Para calcularmos o peso morto utilizamos a seguinte fórmula:

$$DL = (p^m - CMg)\left(Q^{p=CMg} - Q^m\right)$$

5.3 Discriminação de preços

Um monopolista pode aumentar seus lucros utilizando técnicas para cobrar preços diferentes a consumidores distintos. O monopolista não consegue fazer isso se um consumidor consegue comprar uma quantidade excessivamente grande a um preço baixo e posteriormente revender esse produto a um preço mais alto. Restringindo essa possibilidade, as empresas podem adotar as seguintes estratégias:

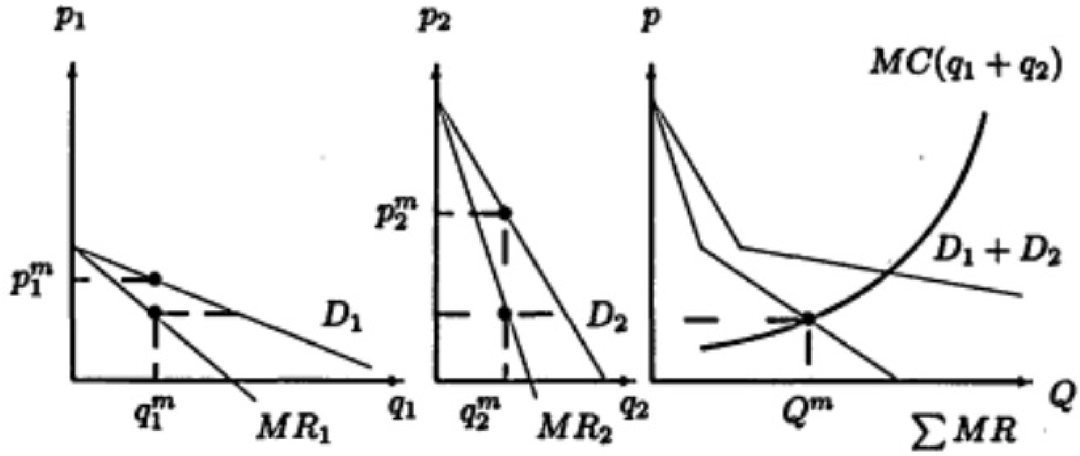
1. Podem cobrar preços diferentes de acordo com a localidade;
2. Taxar ou dar descontos para consumidores de acordo com a faixa etária;
3. Cobrar preços distintos para livros com capa dura (para universitários) e capa mole para os demais indivíduos.

Considere um monopolista que atua em dois mercados. Esses mercados são isolados, no sentido que a empresa pode cobrar preços distintos e os consumidores não podem fazer arbitragem. Em outras palavras, um consumidor não pode revender o produto que comprar por um preço mais baixo a um preço mais elevado. O monopolista escolhe as quantidades a serem vendidas em cada mercado do seguinte modo:

$$\underset{q_1,q_2}{Max}\pi\left(q_1,q_2\right)=RT\left(q_1\right)+RT\left(q_2\right)-CT\left(q_1+q_2\right)$$

$$\frac{\partial\pi\left(q_1^m,q_2^m\right)}{\partial Q}=RM_i\left(q_i^m\right)-CMg\left(q_1^m+q_2^m\right)=0 \text{ para cada } i=1,2$$

Desse modo, um monopolista discriminador de preços iguala $RMg_1\left(q_1^m\right)=RMg_2\left(q_2^m\right)=CMg\left(q_1^m+q_2^m\right)$. Note que se a $RMg_1\left(q_1^m\right)>RMg_2\left(q_2^m\right)$ então o monopolista deveria transferir uma unidade do mercado 2 para o mercado 1.



Legenda: MR = Receita Marginal; D = demanda.

Para encontrarmos a relação entre o preço cobrado em cada mercado e as elasticidades da demanda temos que:

$$p_1^m\left(1+\frac{1}{\eta_1}\right)=p_2^m\left(1+\frac{1}{\eta_2}\right)$$

Como $p_2^m>p_1^m$ temos que $\eta_2>\eta_1$ ou $|\eta_2|<|\eta_1|$ lembrando que a elasticidade é um número negativo.

Proposição 5.1. *Um monopolista discriminador de preços irá vender um montante estritamente positivo em cada mercado e cobrará um preço mais alto no mercado em que a demanda é menos elástica.*

5.4 O cartel e o monopólio multiplanta

O monopólio multiplanta ocorre todas as plantas industriais pertencem a um único dono ou quando há uma fusão horizontal entre as empresas. Alternativa, quando o monopolista opera em diversas plantas vendendo o mesmo produto.

O cartel consiste num acordo entre um grupo de empresas para a produção de uma quantidade abaixo da de concorrência, com o propósito de aumentar o preço. Vamos assumir que:

$$p\left(Q\right) = a - bQ \text{ e } CT_i\left(q_i\right) = F + cq_i^2$$

5.4.1 O Cartel

O cartel organiza as N plantas direcionando cada plana da produção de um montante. O objetivo é maximizar as somas dos lucros das N plantas. Seja $\pi_i\left(q_i\right)$ o lucro de cada planta i e $Q = \sum_{i=1}^{N} q_i$ .O objetivo do cartel é escolher $q_1, ..., q_N$ para:

$$\underset{q_1,...,q_N}{Max}\, \pi\left(q_1, ..., q_N\right) = \sum \pi_i\left(q_i\right)$$

$$\underset{q_1,...,q_N}{Max}\, \pi\left(q_1, ..., q_N\right) = \left[a - b\sum_{i=1}^{N} q_i\right]\sum_{i=1}^{N} q_i - \sum_{i=1}^{N} CT\left(q_i\right)$$

$$\frac{\partial \pi_i\left(q_1, ..., q_N\right)}{\partial q_j} = a - 2b\sum_{j=1}^{N} q_j - 2cq_j = 0$$

$$\frac{\partial \pi_i\left(q_1, ..., q_N\right)}{\partial q_j} = RMg\left(Q\right) = CMg\left(Q\right)$$

Proposição 5.2. *O produto que maximiza o lucro de cada planta é encontrado igualando a curva de receita marginal ao custo marginal. Ambos avaliados a quantidade Q produzida por cada planta. Como todas as plantas possuem custos idênticos, encontraremos um equilíbrio simétrico em que o cartel direciona cada planta a produzir o mesmo nível de produto. Isto é, $q_1 = q_2 = ... = q_N$.*

Demonstração. Usamos a condição que $q_1 = q_2 = ... = q_N = q$. Então,

$$\frac{\partial \pi_i\left(q_1, ..., q_N\right)}{\partial q} = a - 2bNq - 2cq = 0$$

$$q = \frac{a}{2\left(bN + c\right)}$$

□

Assim, o produto total de cartel e o preço de mercado são dados por:

$$Q = Nq = \frac{a}{2\left(bN + c\right)} \text{ e } p = a - bQ = \frac{a\left(bN + 2c\right)}{2\left(bN + c\right)}$$

5.5 Monopólio multiplanta

O monopólio multiplanta é muito similar ao cartel. No entanto, o monopolista pode decidir fechar as empresas para reduzir custos.

Então, qual seria o tamanho ótimo de N? O monopolista irá ajustar o número de plantas de modo a minimizar o custo total médio para cada operação. Lembre que para o cartel a receita marginal é igual ao custo marginal para cada planta. Iremos ajustar q_i para operar no nível que o custo total médio é mínimo, ou seja:

$$\frac{\partial CTMed}{\partial q_i} = -\frac{F}{q_i^2} + c = 0 \rightarrow q_i = \sqrt{\frac{F}{c}}$$

Lembre que quando o custo total médio é mínimo ele é igual ao custo marginal. Usaremos a seguinte condição:

$$RMg\,(Q) = CMg\,(q_i)$$

$$\sqrt{\frac{F}{c}} = \frac{a}{2\,(bN + c)}$$

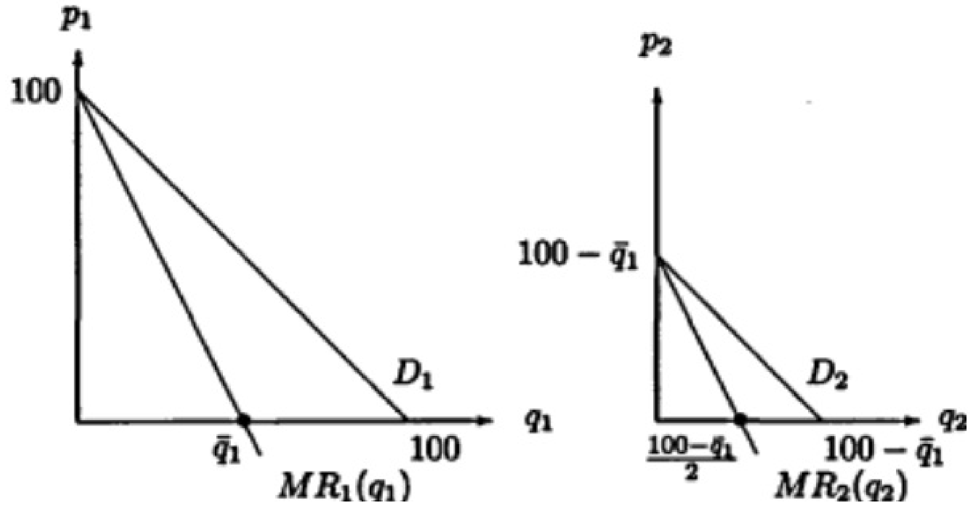
$$N^m = \frac{a\sqrt{c}}{2b\sqrt{F}} - \frac{2c}{b}$$

5.6 Monopólio e bens duráveis

Dessa vez, trabalharemos com bens duráveis, isto é, produtos que podem ser utilizados por um longo período de tempo, como por exemplo: televisor, refrigerador, carros, casas etc.

Nesse caso, o comportamento do monopolista será diferente. Suponha que há um continuum de consumidores, ou seja, uma massa populacional de consumidores que valoram de modo distinto o serviços referentes a um carro. Ainda suponha que os consumidores vivam por apenas dois períodos de tempo denotados por $t = 1, 2$ e o monopólio vendo o bem durável por esses dois períodos.

Assim, se o consumidor compra o produto ele o terá para a vida inteira, sem a necessidade de trocá-lo. Os consumidores valoram o produto de modo diferente e possuem uma demanda agregada dada por $p = 100 - Q$.



Legenda: MR = Receita Marginal; Nota: Na figura da esquerda está representado o primeiro período e no da direita o segundo.

Definição 27. *Consideraremos que o monopolista assume dois papéis: o de vendedor e o de locatário.*

1. Ao vender o produto para um consumidor por um preço p^s a firma transfere todos os direitos de propriedade do uso do produto e recebê-lo de vola do consumidor e o tempo da compra se estende indefinidamente.

2. Ao alugar um produto para o consumidor pelo preço p^R o locatário mantém a propriedade do produto, mas o contrato com o consumidor permite a ele desfrutar dos serviços oferecidos pelo produto por um período específico de tempo.

É importante destacarmos que ao vender um produto, o comprador não pode revendê-lo. O novo dono não pode produzir produtos idênticos ou similares aquele comprado. Há uma proteção (patente) sobre o direito de venda e por simplicidade não há mercado de bens usados.

Monopolista locatário

Assumiremos que o monopolista aluga o produto por somente um período. Suponha que os custos de produção são zero, então:

$$\pi^R = \left(100 - Q^R\right) Q^R$$

$$\frac{\partial \pi^R}{\partial Q^R} = 100 - 2Q^R = 0$$

$$Q^R = 50 \text{ e } p^R = 50$$

$$\pi_t^R = (100 - 50)\, 50 = 2500 \text{ para cada} t$$

$$\pi_t^R = \pi_1^R + \pi_2^R = 5000$$

Monopolista vendedor

O monopolista sabe que aqueles consumidores que compram em *t=1* não irão repetir a compra. Em *t=2* o monopolista irá se deparar com uma demanda residual e deverá vender o produto a um preço mais baixo. Utilizaremos o conceito de indução retroativa para solucionarmos esse jogo.

Período 2: A demanda em *t=2* é $p_2 = 100 - Q$. Nesse caso, $Q = \bar{q_1} + q_2$. A receita marginal é dada por $RT = (100 - \bar{q_1} - q_2)\, q_2$ então $\frac{\partial RT}{\partial q_2} = 100 - \bar{q_1} - 2q_2$. A condição de lucro máximo em t=2 é: $\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 100 - \bar{q_1} - 2q_2 = 0$ o que implica que $q_2^* = \frac{100 - \bar{q_1}}{2}$,$p_2^* = \frac{100 - \bar{q_1}}{2}$ e $\pi_2 = \left(\frac{100 - \bar{q_1}}{2}\right)^2$.

Período 1: Suponha que o monopolista vende $\bar{q_1}$ para os compradores com os preços de reserva mais elevados. O consumidor marginal será indiferente entre comprar no primeiro período e ganhar um nível de utilidade $2\,(100 - \bar{q_1}) - p_1$ e comprar no segundo período e ganhar utilidade de $(100 - \bar{q_1}) - p_2 = 100 - \bar{q_1} - \frac{100 - \bar{q_1}}{2}$. Então:

$$2\,(100 - \bar{q_1}) - p_1 = 100 - \bar{q_1} - \frac{100 - \bar{q_1}}{2}$$

$$p_1 = 150 - \frac{3\bar{q_1}}{2}$$

Ao somarmos os preços dizemos que p_1 será mais alto pois o produto durará dois períodos. Temos que o ENPS soluciona:

$$\underset{q_1}{Max} \pi = (\pi_1 + \pi_2) = \left(150 - \frac{3\bar{q_1}}{2}\right) \bar{q_1} + \left(50 - \frac{\bar{q_1}}{2}\right)^2$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_1} = 150 - \frac{3\bar{q_1}}{2} - \left(50 - \frac{\bar{q_1}}{2}\right) = 0$$

$$\bar{q_1} = 40$$

Então, $p_1 = 150 - \frac{120}{2} = 90$, $q_2^* = p_2^* = \frac{100-40}{2} = 30$ e $\pi_2 = \left(\frac{100-40}{2}\right)^2 = 900$. Ainda temos que:

$$\pi_1 = \left(150 - \frac{3\bar{q_1}}{2}\right) \bar{q_1} = (150 - 60)\, 40 = 3600$$

$$\pi^S = \pi_1 + \pi_2 = 3600 + 900 = 4500$$

Proposição 5.3. *Um monopólio que vende bens duráveis ganha menos do que um monopolista que aluga esses bens.*

Demonstração. A demonstração é simples, podemos apenas verificar a diferença entre os lucros desses monopolistas:

$$\pi^R - \pi^S > 0$$

$$5000 - 4500 > 0$$

$$500 > 0$$

□

5.7 Bens duráveis com uma demanda discreta

Seja uma economia com somente dois consumidores vivendo por dos períodos de tempo. O montante máximo que um consumidor deseja pagar pelo serviço é V^Hse seu tipo H e V^Lse seu tipo é L. Assumimos que H deseja pagar mais do que duas vezes o que ele deseja pagar ou seja: $V^H > 2V^L > 0$.

$$U^i = \begin{cases} 2V^i - p_1 & \text{se compra em } t = 1 \\ V^i - p_2 & \text{se compra em } t = 2 \\ 0 & \text{se não compra} \end{cases}$$

No lado da produção, apenas uma firma produz os carros a custo zero. A empresa vive por dois períodos e maximiza a soma do lucro das vendas.

Um monopolista locador

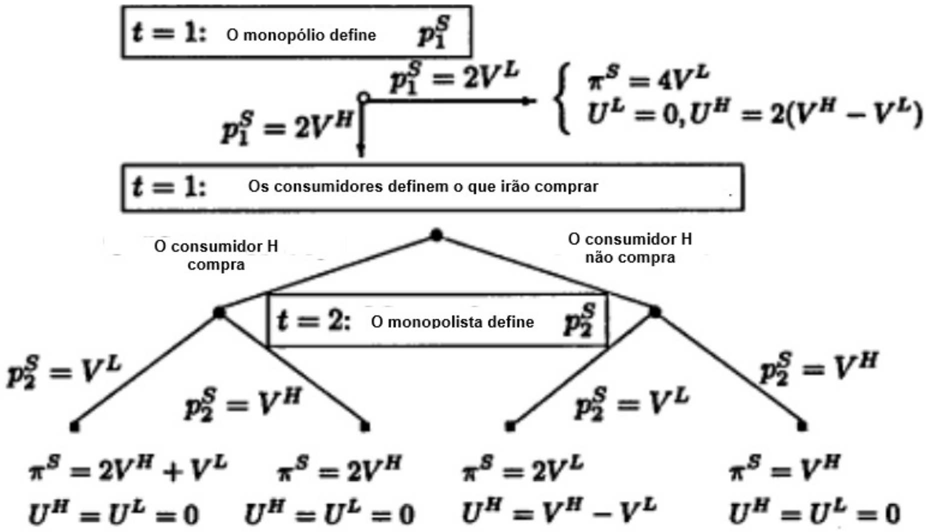
O monopolista alugar os carros por *t=1.* A empresa pode atribuir $p_1^R = V^H$ o que faz com que H compre por 1 período ou $p_t^R = V^L$ que incluí ambos consumidores. No primeiro caso $\pi^R = 2V^H$ e no segundo caso $\pi^R = 4V^L$. Como $V^H > 2V^L$, então:

Proposição 5.4. *Um monopolista locador de automóveis, somente alugará o produto para os consumidores do tipo H, colocando $p_t^R = V^H$ para $t = 1, 2$ e receberá $\pi^R = 4V^H$.*

Um monopolista vendedor

Suponha que o monopolista venda carros aos preços p_t^S. Utilizaremos indução retroativa para solucionarmos esse jogo.

Período 2: Se o consumidor *H* compra em *t=1*, somente *L* comprará em *t=2.*



Quando *H* compra em *t=1* o monopólio maximiza o lucro em *t=2* colocando $p_2^S = V^L$, ou seja, $\pi_2 = V^L$. Se *H* não compra em *t=1* então em *t=2* o monopólio se depara com dois consumidores desejando a aquisição do produto em *t=2*. No entanto, o monopólio cobra $p_2^S = H$ e vende um em *t=2* $\pi_2 = V^H$ (vende apenas para *H*).

Período 1: Como *L* sabe que o preço em *t=2* nunca ficará abaixo de V^L então *L* comprará em *t=1* a qualquer preço abaixo de $2V^L$. Se o monopolista escolhe $p_1^S = 2V^L$ ele venderá para os dois consumidores. Note que $p_1^S > 2V^L$ não ocorrerá porque nesse caso o monopolista não venderia. Verificaremos que se $p_1^S = 2V^H$. Da análise de *t=2* então *H* recebe $U^H = 0$. Comprando ou não o produto em *t=1.* Comprar é ótimo para *H* em *t=1* se $p_1^S = 2V^H$. Então, $p_1^S = 2V^H$ e *H* compra em *t=1* e $p_2^S = V^L$ e *L* compra em *t=2* é um ENPS.

Proposição 5.5. *O equilíbrio do jogo de um monopólio para bens duráveis com uma demanda discreta é:*

1. *Cobrar em t=1 o preço de venda que é igual a soma dos preços de aluguel* $p_1^S = 2p_t^R$*;*
2. *Receber um lucro mais alto do que o monopolista que aluga:* $\pi^S = 2V^H + V^L > 2V^H = \pi^R$

6 Mercados para produtos homogêneos

Analisaremos o comportamento do consumidor e das firmas sob estruturas de mercado oligopolizadas. A principal suposição desse capítulo é que os produtos são homogêneos, isto é, os consumidores não pode diferenciar os produtos por causa da marca. Um exemplo disso seriam as frutas, legumes e grão vendidos no supermercado.

6.1 Cournot

A teoria de jogos não cooperativos para o estudo de oligopólio começa com o trabalho de Antonie Augustin Cournot de 1938. No livro Princípios matemáticos da teoria da riqueza, Cournot procede com uma análise idêntica ao que atualmente estabelecemos por Equilíbrio de Nash em que as firmas utilizam a quantidade produzida como uma forma de estratégia.

6.1.1 O modelo de dois vendedores

Iremos considerar que as empresas vendem produtos idênticos. As firmas podem alterar a sua produção com o propósito de modificar o preço de mercado. A função de custo de cada empresa é dada por :

$$CT_i\left(q_i\right) = c_i q_i \ \forall i = 1,2$$

Os custos marginais para as duas empresas são estritamente positivos. A demanda do marcado é dada por:

$$p\left(Q\right) = a - bQ \text{ e } a, b > 0, a > c_i \text{ e } Q = q_1 + q_2$$

As empresas irão escolher as quantidades simultaneamente e modo a maximizarem seus lucros. No entanto, a produção da firma 1 afeta a produção da firma 2 e vice-versa.

Definição 28. *A tripla* $\left\{p^C, q_1^C, q_2^C\right\}$ *é um equilíbrio Cournot-Nash se:*
a. $q_2^C = q_2$; q_1^C *soluciona* $\underset{q_1}{Max}\pi\left(q_1, q_2^C\right) = p\left(q_1 + q_2^C\right)q_1 - c_1 q_1$;
b. $q_1^C = q_1$; q_2^C *soluciona* $\underset{q_2}{Max}\pi\left(q_1^C, q_2\right) = p\left(q_1^C + q_2\right)q_2 - c_2 q_2$;
c. a. $p^C = a - b\left(q_1^C + q_2^C\right)$ *sendo que* $p^C, q_1^C,$ *e* $q_2^C \geq 0$.

Vamos derivar as condições de equilíbrio:

$$\underset{q_1}{Max}\pi_1\left(q_1, q_2\right) = p\left(q_1 + q_2\right)q_1 - c_1 q_1$$

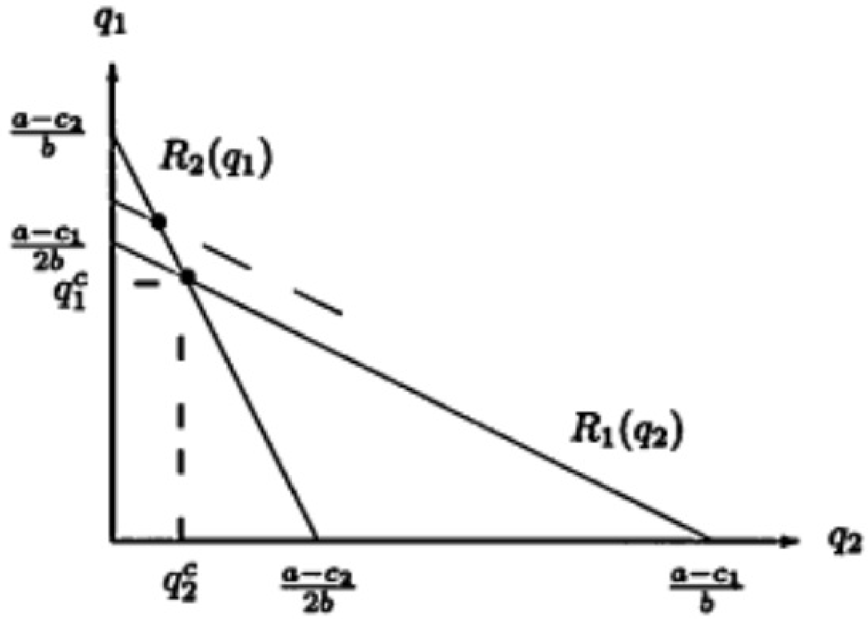
$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = a - 2bq_1 - bq_2 - c_1 = 0$$

$$q_1 = \frac{a - bq_2 - c_1}{2b}$$

Essa é chamada de função de reação da empresa 1 frente as ações das demais firmas. A derivação para 2 é equivalente e teremos que:

$$q_2 = \frac{a - bq_1 - c_2}{2b}$$

Vamos esboçar graficamente a relação entre essas duas curvas:



As curvas de melhor resposta possuem inclinação negativa. Isso quer dizer que se a quantidade produzida pela rival aumenta, o nível de produção deveria cair para manter o preço elevado. Outro ponto importante é que a empresa com um menor custo produzirá mais e obterá um lucro mais elevado ficando a outra firma com uma demanda residual. Se solucionarmos o sistema de equações acima teremos que:

$$q_1^C = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}$$

$$q_2^C = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3b}$$

Inserindo essas expressões na equação de demanda encontraremos que:

$$p^C = \frac{a + c_1 + c_2}{3}$$

Podemos calcular os lucros de cada empresa:

$$\pi_1 = \left(\frac{a + c_1 + c_2}{3}\right)\left(\frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}\right) - c_1\left(\frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}\right) = \frac{(a - 2c_1 + c_2)^2}{9b}$$

$$\pi_2 = \left(\frac{a + c_1 + c_2}{3}\right)\left(\frac{a - 2c_2 + c_1}{3b}\right) - c_2\left(\frac{a - 2c_2 + c_1}{3b}\right) = \frac{(a - 2c_2 + c_1)^2}{9b}$$

Observaremos se as condições de segunda ordem são satisfeitas para um máximo:

$$\frac{\partial^2 \pi_1}{\partial (q_1)^2} = -2b$$

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial (q_2)^2} = -2b$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2 \partial q_1} = -b$$

Montando o Hessiano:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \pi_1}{\partial (q_1)^2} & \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2 \partial q_1} \\ \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1 \partial q_2} & \frac{\partial^2 \pi_2}{\partial (q_2)^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2b & -b \\ -b & -2b \end{vmatrix} = 4b^2 - b^2 = 3b^2 > 0$$

Note que o primeiro menor principal é negativo e o determinante é positivo o que satisfaz as condições para um máximo.

6.1.2 Jogo com N vendedores

Suponha uma indústria com $N \geq 1$. Analisaremos dois tipos de indústrias: (a) com N firmas com funções de custo idênticas ou (b) firmas heterogêneas com as funções de custos distintas.

Solucionaremos o caso (a) para uma empresa representativa, por exemplo, a firma 1:

$$\underset{q_1}{Max} \pi_1 (Q) = \left[a - b\sum_{i=1}^{N} q_i\right] q_1 - cq_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = a - 2bq_1 - b\sum_{i=2}^{N} q_i - c = 0$$

A função de melhor resposta da firma 1 em relação as outras empresas é:

$$q_1 = \frac{a - b\sum_{i=2}^{N} q_i - c}{2b}$$

Como as firmas possuem o mesmo custo podemos concluir que no equilíbrio a quantidade ofertada por elas será igual, ou seja, $q_1 = q_2 = ... = q_N = q$

$$q = \frac{a - b\left(N-1\right)q - c}{2b}$$

$$q = \frac{a-c}{b\left(N+1\right)}$$

Então sabemos que $Q^C = Nq$, isto é:

$$Q = \frac{N}{\left(N+1\right)}\frac{\left(a-c\right)}{b}$$

O preço de Cournot é:

$$p = a - bQ = \frac{a+Nc}{N+1}$$

Podemos calcular o lucro para a firma i. Utilizaremos a firma 1 como exemplo:

$$\pi_1\left(Q\right) = \left[a - bQ\right]q - cq$$

$$\pi_1\left(Q\right) = \left(\frac{a+Nc}{N+1}\right)\left(\frac{N}{\left(N+1\right)}\frac{\left(a-c\right)}{b}\right) - c\left(\frac{N}{\left(N+1\right)}\frac{\left(a-c\right)}{b}\right)$$

$$\pi_1\left(Q\right) = \frac{N\left(a-c\right)^2}{b\left(N+1\right)^2}$$

Há algumas observações interessantes. Suponha que o número de firmas é muito grande ($N \to \infty$), então:

$$\lim_{N\to\infty} q = \frac{a-c}{b\left(N+1\right)} = 0$$

$$\lim_{N\to\infty} Q = \frac{N}{\left(N+1\right)}\frac{\left(a-c\right)}{b}$$

Nesse caso devemos usar L'Hopital:

$$\lim_{N\to\infty} Q = \frac{f\left(N\right)}{g\left(N\right)} = \frac{f'\left(N\right)}{g'\left(N\right)}$$

$$\lim_{N\to\infty} Q = \frac{a-c}{b}$$

Por fim, olharemos para o preço e novamente usaremos L'Hopital:

$$\lim_{N\to\infty} p = \frac{a+Nc}{N+1} = \frac{f\left(N\right)}{g\left(N\right)} = \frac{f'\left(N\right)}{g'\left(N\right)} = c$$

Ou seja, quando N é muito grande $p = c$ que é o resultado de concorrência perfeita. O mesmo ocorre para quantidade produzida.

6.1.3 Firmas heterogêneas

Se cada firma possui um custo marginal diferente, estritamente positivo ou igual zero a solução do problema de maximização dos lucros é diferente:

$$\underset{q_i}{Max}\pi_i\left(Q\right) = \left[a - b\sum_{i=1}^{N} q_i\right] q_i - c_i q_i$$

Supondo que a quantidade é estritamente positiva, para todas as firmas, teremos que:

$$a - 2bq_i - b\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} q_j = c_i \forall i = 1, ..., N$$

Podemos escrever a equação acima do seguinte modo:

$$a - bq_i - bQ = c_i$$

Se aplicarmos o somatório teremos:

$$\sum a - b\sum q_i - b\sum Q = \sum c_i$$

$$Na - bQ - bNQ = \sum c_i$$

$$Q = \frac{Na - \sum c_i}{b\left(N+1\right)}$$

O preço será:

$$p = a - b\left(\frac{Na - \sum c_i}{b\left(N+1\right)}\right) = \frac{a + \sum c_i}{\left(N+1\right)}$$

Proposição 6.1. *Numa indústria em que as empresas possuem custos unitários constantes, se em um equilíbrio a la Cournot todas as empresas produzem um quantidade positiva, então o produto agregado da indústria e o preço dependem somente do somatório dos custos unitários das empresas e não da distribuição do nível de custos entre as empresas.*

Vejamos um exemplo para ilustramos a distribuição dos custos entre as firmas. Suponha que $H \geq 1$ possuem a estrutura de custos c_H e $L \geq 1$ possuem a estrutura de custos c_L com $c_H \geq c_L \geq 0$.

$$N = H + L$$

$$Q^c = \frac{(H+L)\,a - Hc_H - Lc_L}{b\,(H+L+1)} = \frac{(H+L)\,a}{b\,(H+L+1)} - \frac{(Hc_H + Lc_L)}{(H+L+1)}$$

$$p^c = \frac{a}{N+a} + \frac{\sum c_i}{N+1} = \frac{a + (Hc_H + Lc_L)}{(H+L+1)}$$

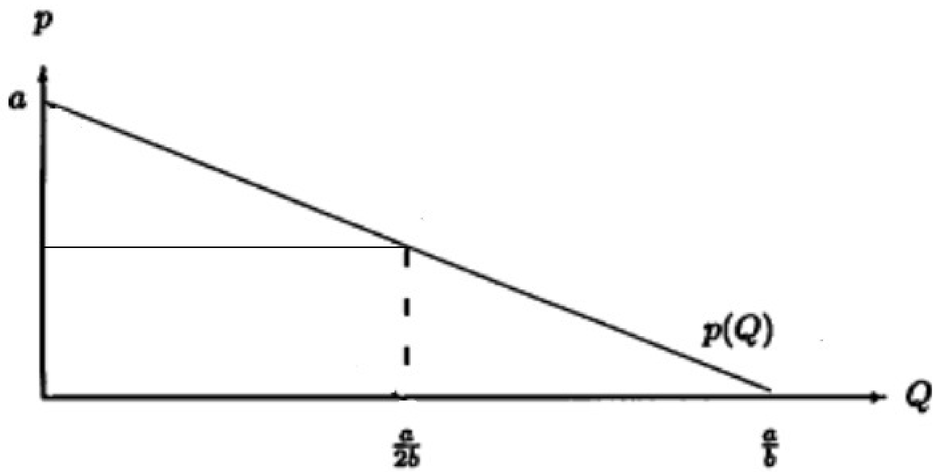
Suponha que o tamanho do mercado aumente com a entrada de uma firma do tipo H e duas do tipo L então temos que:

$$N = (H+1) + (L+2)$$

$$\sum c_i = (H+1)\,c_H + (L+2)\,c_L$$

6.1.4 Equilíbrio de Cournot e o nível de bem-estar

Ao desenharmos nossa função de demanda temos que:



O

$$EC\,(Q^c) = \frac{(a - p^c)\,Q^c}{2} = \frac{(a-c)^2\,N^2}{2b\,(N+1)}$$

Claramente

$$\frac{\partial EC\,(N)}{\partial N} = \frac{2N\,(a-c)^2}{2b\,(N+1)^2}\left[1 - \frac{N}{N+1}\right]$$

Como $N \geq 1$, $\frac{N}{N+1} < 1$, portanto$\frac{\partial EC(N)}{\partial N} > 0$.

O EC aumenta com N devido a redução no preço e no aumento da quantidade consumida. O bem-estar social pode ser definido como a soma:

$$W^c(N) = EC(N) + N\pi^c(N)$$

$$W^c(N) = \frac{(a-c)^2 N^2}{2b(N+1)} + N\frac{(a-c)^2}{b(N+1)}$$

$$W^c(N) = \frac{(a-c)^2}{2b}\left(\frac{N^2+2N}{N^2+2N+1}\right)$$

Se o número de firmas aumenta muito, ou seja, $N \to \infty$:

$$\underset{lim\to\infty}{W^c(N)} = \frac{(a-c)^2}{2b}\frac{f(N)}{g(N)}$$

Devemos utilizar L'Hopital:

$$\underset{lim\to\infty}{W^c(N)} = \frac{(a-c)^2}{2b}\frac{f(N)'}{g(N)'}$$

$$\underset{lim\to\infty}{W^c(N)} = \frac{(a-c)^2}{2b}\frac{2N+2}{2N+2} = \frac{(a-c)^2}{2b}$$

Esse é o resultado do EC do mercado de concorrência perfeita. Ou seja, quando $N \to \infty$ o bem-estar social se aproxima daquele do mercado de concorrência perfeita. O EC é compensado com a queda no EP (lucros das empresas). Note que:

$$\gamma = \frac{(a-c)^2}{2b}$$

$$\frac{\partial W^c(N)}{\partial N} = \gamma\left(\frac{N^2+2N}{N^2+2N+1}\right)$$

$$\frac{\partial W^c(N)}{\partial N} = \gamma\left(\frac{N^2+2N}{N^2+2N+1}\right)\left[1-\frac{N^2+2N}{N^2+2N+1}\right]$$

Devemos avaliar o seguinte. Como $N > 0$, podemos tomar o limite do termo:

$$\underset{N\to\infty}{lim} = \frac{N^2+2N}{N^2+2N+1} = \frac{2N+2}{2N+2} = 1$$

Assim, quando N é muito grande a variação do bem estar é muito pequena. No entanto, $\forall N \; \frac{N^2+2N}{N^2+2N+1} < 1$, o que implica que $\frac{\partial W^c(N)}{\partial N} > 0$.

6.2 Movimentos sequenciais

Esse tipo do jogo segue a estrutura de mercado da empresa líder/seguidora que é a base do modelo do trabalho de Stackelberg.

Em linhas gerais, a empresa seguidora tema a quantidade ofertada da empresa líder toma como dada e decide quanto irá ofertar. Utilizaremos o conceito de indução retroativa, isto é, resolveremos o jogo de trás para frente.

t=2

Nesse período a empresa 2 (seguidora) escolhe q_2 tomando q_1 como dado.

$$\underset{q_2}{Max}\pi_2 = [a - b(q_1 + q_2)]\, q_2 - cq_2$$

$$q_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_1}{2}$$

t=1

A firma 1 (líder) sabe a escolha da firma 2 e maximiza seus lucros:

$$\underset{q_1}{Max}\pi_1 = \left[a - b\left(q_1 + \frac{a-c}{2b} - \frac{q_1}{2}\right)\right]\left(\frac{a-c}{2b} - \frac{q_1}{2}\right) - c\left(\frac{a-c}{2b} - \frac{q_1}{2}\right)$$

$$\underset{q_1}{Max}\pi_1 = \left[\frac{a+c}{2} - b\frac{q_1}{2}\right] q_1 - cq_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = q_1 = \frac{a-c}{2b}$$

Então teremos que $q_2 = \frac{a-c}{4b}$. Podemos obter:

$$Q = q_1 + q_2 = \frac{a-c}{2b} + \frac{a-c}{4b} = \frac{3(a-c)}{4b}$$

Na sequência, calcularemos o preço: $p = a - bQ$:

$$p = \frac{a+3c}{4}$$

.

$$\pi_1 = pq_1 - cq_1 = \left(\frac{a+3c}{4}\right)\left(\frac{a-c}{2b}\right) - c\left(\frac{a-c}{2b}\right)$$

$$\pi_1 = \left(\frac{a-c}{2b}\right)\left(\frac{a+2c-4c}{4}\right)$$

$$\pi_1 = \frac{(a-c)^2}{8b}$$

$$\pi_2 = pq_2 - cq_2 = \left(\frac{a+3c}{4}\right)\left(\frac{a-c}{4b}\right) - c\left(\frac{a-c}{4b}\right)$$

$$\pi_2 = \frac{(a-c)^2}{16b}$$

Com base nesses resultados temos a seguinte proposição.

Proposição 6.2. *Um jogo sequencial resulta numa quantidade agregada maior e um preço de mercado mais baixo do que a estrutura proposta num modelo de Cournot estático.*

6.3 Estrutura de mercado de Bertrand

Em contraste com o modelo de Cournot as empresas competem por preço. É mais fácil pensar que as empresas podem alterar seus preços numa velocidade maior do que modificar a quantidade produzida. Em 1883 Joseph Bertrand publicou uma revisão do trabalho de Cournot. Ele não estava satisfeito com a generalização proposta por Cournot.

Para começarmos, faremos duas suposições explícitas sobre o comportamento dos consumidores:

1. Os consumidores sempre irão comprar do vendedor que cobrar o preço mais baixo;

2. Se há dois vendedores e eles cobram o mesmo preço, então a metade dos consumidores comprará do vendedor 1 e a oura metade do vendedor 2.

A função de demanda é dada por:

$$q_i = \begin{cases} 0 & \text{se } p_i > a \\ 0 & \text{se } p_i > p_j \\ \frac{a-p}{2b} & \text{se } p_i = p_j \text{ e } p < a \\ \frac{a-p_i}{b} & \text{se } p_i < min\{a, p_j\} \end{cases}$$

Definição 29. *A quadrupla $\{q_1, q_2, p_1, p_2\}$ é um equilíbrio Bertrand-Nash se:*

1. p_1 maximiza $\pi_1 = (p_1 - c_1)\, q_1$

2. p_2 maximiza $\pi_2 = (p_2 - c_2)\, q_2$

3. q_1 e q_2 são determinadas pela função de demanda.

6.3.1 Solução do equilíbrio

Note que no jogo de Bertrand as funções de lucro são descontínuas em $p_1 = p_2$. Essa descontinuidade permite que a firma 1 abaixe p_1 num montante (pequeno) $\epsilon > 0$, isto é, $p_1 = p_2 - \epsilon$ e essa empresa venderia para todo o mercado.

Definição 30. *Seja $\epsilon > 0$ muito pequeno o meio de troca (moeda) é dita contínua se $\epsilon = 0$ e discreta se $\epsilon > 0$.*

Proposição 6.3. *1. Se $\epsilon = 0$ e $c_1 = c_2 = c$ então $p_1 = p_2 = c$ e $q_1 = q_2 = \frac{a-c}{2b}$.*

2. Se $\epsilon > 0$ e $c_2 = \lambda\epsilon$. Define-se que $\lambda \geq 2$ é um inteiro positivo. Seja ainda ϵ suficientemente pequeno para satisfazer $(c_2 - \epsilon - c_1)\left(\frac{a-c_2+\epsilon}{b}\right) > (c_2 - c_1)\left(\frac{a-c_2}{2b}\right)$. Se $c_2 - c_2 > \epsilon$, então $p_2 = c_2, p_1 = c_2 - \epsilon$, $q_2 = 0$ e $q_1 = \frac{a-c_2+\epsilon}{b}$.

Demonstração. (Parte 1) No equilíbrio cada firma deve ter lucros não negativos, $p_i \geq c_i \forall i = 1, 2$. Suponha que $p_1 > p_2 > c$. Então a firma 1 reduzir seu preço para $p_1 = p_2 - \epsilon$ então $p_2 > p_1 > c$ ela atenderá todo o mercado. Nesse caso a melhor resposta da firma 2 é cobrar um preço $p_2 = p_1 - \epsilon = p_1 - 2\epsilon$, por exemplo. Nesse caso, a firma 2 atenderá a todo mercado e a firma 1 fará lucro zero. Essa competição ocorrerá até o ponto que $p_1 = p_2 = c$ e ambas fazem lucro zero. Qualquer desvio fará com que as empresas tenham prejuízo. Assim, $p_1 = p_2 = c$ é um equilíbrio de Nash. Um duopólio gerar um resultado idêntico a um mercado com um N suficientemente grande.

(Parte 2) Suponha que a empresa 2 faz $\pi_2 = 0$ atribuindo $c_2 = p_2$. Logo, a empresa 2 não pode aumentar seus lucros cortando o preço, então ela não desviará. Se $p_1 < c_2$ então a firma 1 cobrará um preço $p_1 = p_2 - \epsilon$ e se tornará a única vendedora. Note que $c_2 - \epsilon > c_1$, tendo em vista que $\pi_1 > 0$. Nesse caso, $q_2 = 0$ e $q_1 = \frac{a - c_2 + \epsilon}{b}$. Então, $\pi_1 = (c_2 - \epsilon - c_1) q_1 = (c_2 - \epsilon - c_1) \frac{a - c_2 + \epsilon}{b}$. □

6.3.2 Bertrand sob restrição de capacidade

No curto prazo as empresas possuem uma capacidade produtiva restrita. Isso ocorre, porque no curto prazo as empresas ainda estão ajustando a sua estrutura produtiva o que implica numa possibilidade do custo marginal ser crescente.

Esse questionamento foi levantado pelo economista irlandês Francis Ysidro Edgeworth. Para demonstramos esse argumento, suponha que no curto prazo cada empresa pode produzir apenas 2 unidades. O mercado é constituído por 2 empresas com $c_1 = c_2$. Ainda esse mercado possuí 4 consumidores. O consumidor 1 tem uma disposição a pagar (DAP) de 3 por uma unidade. O consumidor 2, possuí uma DAP de 2, o 3 uma DAP de 1 e o 4 a DAP é zero.

Se $c_1 = c_2$ os preços seriam zero num jogo na estrutura de Bertrand. As empresas fariam lucros nulos. Porém essa situação não constituí um EN. Note que a firma 1 pode aumentar seus lucros de $\pi_1 = 0$ para

$\pi_1 = 3$ aumento o preço $p_1 = 3$ e vendendo uma unidade para o consumidor 1. Assim, a firma 2 vende uma unidade para um dos outros consumidores. Observamos que nesse caso as empresas sempre irão desviar do preço de mercado de Bertrand.

Nesse sentido, se a firma 1 cobrar $p_1 = 3$ a firma 2 deveria cobrar $p_2 = p_1 - \epsilon$ e venderia uma unidade para o consumidor 1 fazendo $\pi_2 \cong 3$. Esse relacionamento sempre continuaria e as empresas nunca irão conseguir atingir um EN em preços. Esse resultado é conhecido como paradoxo de Edgeworth.

Equilíbrios nessa situação podem ser encontrados quando: (a) os produtos são diferenciados; (b) quando a demanda flutua aleatoriamente e (c) quando as firmas participam de um jogo infinitamente repetido disputando preços.

6.4 Cournot *vs* Bertrand

Avaliaremos um ambiente particular em que no primeiro período as empresas decidem o quanto irão produzir e no segundo definem seus preços. Ilustraremos esse resultado de Kreps e Scheinkman (1983) com um exemplo de uma indústria com 2 firmas, com $p = 10 - Q$ e $c_1 = c_2 = 1$. Solucionaremos o jogo dinâmico de dois períodos utilizando indução retroativa.

t=2

Por simplicidade as firmas escolhem suas quantidades *a la Cournot*. Então:

$$q_i = \tfrac{a-2c_i+c_j}{(N+1)b} = \tfrac{10-1}{3} = 3; a = 10; b = 1; c_1 = c_2 = 1$$
$$p = 10 - 6 = 4$$

Lema 6.4. *Se o produto (capacidade) escolhido em t=1 satisfaz* $q_1 + q_2 \leq Q$ $(q_1 + q_2 \leq 6)$ *, então o equilíbrio de Nash de t=1 indica que as duas empresas irão escolher 4 em t=1.*

t=1

Em t=1 as firmas observam as quantidades ofertadas em t=2. As empresas sabem que ao ofertarem 3 unidades cada o preço de "equiíbrio" que esvazia (market cleanning) é exatamente 4. Isso faz com que o conhecimento adquirido das firmas torne o problema idêntico nos 2 períodos.

6.5 Conluio

Analisaremos como a cooperação pode ser um resultado num ambiente de jogos não cooperativos.

6.5.1 Jogo de 1 período

Seja $p = 1 - Q$, com $Q = q_1 + q_2$. Sabemos que $\pi_i = (1 - Q)\, q_i$ e $q_1\,(q_2) = \frac{(1-q_2)}{2}$. Ainda assumimos que $c_1 = c_2 = 0$. Nesse caso, teremos que $q_1 = q_2 = \frac{a-c}{3b}$, sendo $a = 1; b = 1; c = 0$. Ainda temos que $q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$ e $p = \frac{1}{3}$. Sabemos que $\pi_i = \frac{1}{9}$, chamaremos essa quantidade/preço/lucro de *M*.

Agora calcularemos a quantidade de monopólio e dividiremos esse mercado por 2. Esse é o caso do cartel em que as empresas decidem ofertar $q_1 = q_2 = q$ e se comportarem como monopolistas. Teremos que $\pi_i = (1 - 2q)\, q$. Em que,

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q} = 1 - 4q = 0 \to q = \frac{1}{4}$$

$$p = \frac{1}{2}; Q = \frac{1}{2} \text{ e } \pi_i = \frac{1}{8}$$

Definiremos esses valores como a produção de L ou baixa.

Desvio

Suponha que a firma 2 produza $q_2 = \frac{1}{4}$, a quantidade do cartel. Nesse caso, a firma 1 pode aumentar seus lucros produzindo qualquer quantidade superior a q_2. Em outras palavras, $\pi_1 = (1 - q_1 - 1/4)\, q_1$. Tomando a derivada em relação a q_1:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \frac{3}{4} - 2q_1 = 0 \rightarrow q_1 = \frac{3}{8}$$

Chamaremos essa quantidade de H. Note que $p = 1 - \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{8-3-2}{8} = \frac{3}{8}$ e $Q = \frac{5}{8}$. $\pi_1 = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$ e $\pi_2 = \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$.

A tabela abaixo mostra os lucros das empresas para os 3 tipos de produção L, M ou H. Devemos usar a estratégia feita no parágrafo anterior para calcularmos as quantidades de desvio.

	F2		
F1	$q_2 = L = \frac{1}{4}$	$q_2 = M = \frac{1}{3}$	$q_2 = H = \frac{3}{8}$
$q_1 = L = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}, \frac{1}{8}$	$\frac{5}{48}, \frac{5}{36}$	$\frac{3}{32}, \frac{9}{64}$
$q_1 = M = \frac{1}{3}$	$\frac{5}{36}, \frac{5}{48}$	$\frac{1}{9}, \frac{1}{9}$	$\frac{7}{72}, \frac{7}{64}$
$q_1 = H = \frac{3}{8}$	$\frac{9}{64}, \frac{3}{32}$	$\frac{7}{64}, \frac{7}{72}$	$\frac{3}{32}, \frac{3}{32}$

Lucros das empresas para cada nível de produto.

Proposição 6.5. *No jogo de 1 período.*

1. *Existe um único equilíbrio Cournot-Nash dado por* $q_1 = q_2 = M = 1/3$*;*
2. *O equilíbrio é Pareto dominado pelo resultado cooperativo* $q_1 = q_2 = L = 1/4$*;*

6.5.2 Jogos infinitamente repetidos

Suponha que as empresas vivam indefinidamente, ou seja, para sempre. Em cada período t ambas firmas observam o que foi jogado nos períodos anteriores e jogam um jogo simultâneo descrito na tabela anterior. Em cada t a firma i escolherá $q_i(t) \in \{L, M, H\}$ para $i = 1, 2$ e $t = 1, 2, ...$

Seja $\rho \in \,]0, 1[$ o fator de desconto. Seja r a taxa de juros da economia, então podemos definir $\rho = \frac{1}{1+r}$. As empresas irão maximizar o somatório dos lucros descontados ou o valor presente dos lucros:

$$\pi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \rho^{t-1} \pi_i(t)$$

Estratégia *Trigger*

Em cada t o jogador irá jogar coopera, desde que o rival também o faça. Se houver desvio então esse jogador escolherá Cournot para sempre.

Definição 31. *O jogador está jogando a estratégia* Trigger *se para cada* $t = 1, 2, ...$

$$q_i(t) = \begin{cases} L, \text{ desde que } q_1 = q_2 = L \forall t = 1, ..., t-1 \\ M, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Proposição 6.6. *Se ρ é suficientemente grande, então ambas firmas jogando a estratégia trigger em um ENPS. Formalmente, essas estratégias constituem um ENPS se $\rho > \frac{9}{17}$ ou $\rho > \frac{1}{2}$.*

Demonstração. Faremos uma demonstração de um modo mais simples. Suponha que a firma 1 jogue a quantidade *H* em *t=1* e a empresa 2 jogaria sempre *M*. Note que $\pi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \rho^{t-1} = \frac{1}{1-\rho}$. Quando a empresa 1 joga *H* em *t=1* e a empresa 2 responde com *L* e a partir daí a firma 2 sempre jogará *M*. O lucro descontado da firma 1 será:

$$\pi_1 = \frac{9}{64} + \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)\frac{1}{9}$$

Caso 1 não desvie:

$$\pi_1 = \left(\frac{1}{1-\rho}\right)\frac{1}{8}$$

Note que não será lucrativo para 1 desviar se, e somente se:

$$\left(\frac{1}{1-\rho}\right)\frac{1}{8} > \frac{9}{64} + \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)\frac{1}{9}$$

$$\rho > \frac{9}{17}$$

□

Concluímos nossa análise com as seguintes considerações:

1. Se o número de firmas aumenta e a demanda cresce no mesmo montante do aumento no número de empresas a cooperação consegue ser sustenta. No entanto, se N aumenta e a demanda não cresce as empresas tem um forte incentivo a desviar do nível de produção do conluio.

2. Como os *booms* e recessões afetam o comportamento das empresas. Será que esse comportamento cooperativo é sustentável?

7 Mercado para produtos diferenciados

Nesse capítulo suporemos que os consumidores conseguem distinguir entre as marcas. Os produtos são substitutos imperfeitos. Algumas observações são importantes:

1. A maioria das indústrias produzem um grande número de produtos similares, mas não idênticos;

2. Somente um pequeno subconjunto de todas as variedades possíveis é produzido. Por exemplo, não há disponibilidade do produto em todas as cores;

3. A maior parte das indústrias desse mercado estão concentradas;

4. Os consumidores compram uma pequena parte das variedades dos produtos disponíveis.

7.1 Modelo simples para dois produtos diferenciados

Considere uma indústria com duas firmas produzindo dois produtos diferenciados. Denotamos as seguintes funções de demanda:

$$p_1 = \alpha - \beta q_1 - \gamma q_2 \text{ e } p_2 = \alpha - \gamma q_1 - \beta q_2$$

$$\beta > 0 \text{ e } \beta > \gamma^2$$

A suposição $\beta > \gamma^2$ implica que o efeito de q_1 em p_1 é maior do que o efeito do aumento de q_1 em p_2. Em outras palavras, o efeito do próprio preço domina o efeito cruzado. Resolvendo o sistema de equações:

$$q_2 = a + cp_1 - bp_2$$
$$q_1 = a - cp_1 + cp_2$$

Sendo que $a = \frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\beta^2-\gamma^2}, b = \frac{\beta}{\beta^2-\gamma^2} > 0$ e $c = \frac{\gamma}{\beta^2-\gamma^2} > 0$.

Definição 32. *A medida de diferenciação das empresas é $\gamma = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$:*

1. As marcas são altamente diferenciadas se os consumidores acham que os produtos são muito diferentes, ou seja, uma mudança no preço da marca j *tem um efeito muito pequeno ou negligenciável na demanda da marca* i. *Formalmente se $\delta \to 0$, ou seja, $\gamma^2 \to 0$ e $c \to 0$.*

2. Os produtos são quase homogêneos se o efeito cruzado está perto em magnitude ou é igual ao efeito preço. Nesse caso, o preço de todas as marcas tem fortes efeitos na demanda de cada marca, mais precisamente, se um aumento no preço da marca j *aumenta a demanda da marca* i *na mesma magnitude, como um decréscimo no preço da marca* i, *ou seja, quando $\delta \to 1$, $\gamma^2 \to \beta^2$ e $c \to b$.*

7.1.1 Cournot com produtos diferenciados

Assumiremos custos marginais nulos e as funções de demanda:

$$\underset{q_i}{Max}\pi_i\left(q_1,q_2\right)=\left(\alpha-\beta q_i-\gamma q_j\right)q_i$$

$$\frac{\partial\pi_i}{\partial q_i}=\alpha-\beta q_i-\gamma q_j=0$$

$$q_i=\frac{\alpha-\gamma q_j}{2\beta}$$

Resolvendo o sistema para duas empresas:

$$q_1=q_2=\frac{\alpha}{2\beta+\gamma}$$

$$p=\frac{\alpha\beta}{2\beta+\gamma}$$

$$\pi_i=\frac{\alpha^2\beta}{\left(2\beta+\gamma\right)^2}$$

Proposição 7.1. *Num jogo de Cournot com produtos diferenciados o lucro das firmas aumenta quando os produtos são diferenciados* $(\gamma^2\to 0)$.

7.1.2 Bertrand com produtos diferenciados

Nesse caso as empresas irão competir por preço o problema da firma i é:

$$\underset{p_i}{Max}\pi_i\left(p_1,p_2\right)=\left(a-bp_i+cp_j\right)p_i\forall i,j=1,2$$

$$\frac{\partial\pi_i}{\partial p_i}=a-2bp_i-cp_j=0$$

$$p_i=\frac{a+cp_j}{2b}$$

Definição 33. *1. As estratégias dos jogadores são ditas como substitutos se as funções de melhor resposta tem inclinação negativa;*

2. As estratégias dos jogadores são dias complementares se as funções de melhor resposta tem inclinação positiva.

Essa terminologia não está relacionada com substituição e complementariedade no consumo.

$$p_i^b=\frac{a}{2b-c}=\frac{\alpha\left(\beta-\gamma\right)}{2\beta-\gamma};q_i^b=\frac{ab}{2b-c};\pi_i^b=\frac{a^2b}{2b-c}$$

$$\pi_i^b = \frac{\alpha^2\beta\left(\beta-\gamma\right)}{\left(2\beta-\gamma\right)^2\left(\beta+\gamma\right)}$$

Proposição 7.2. *Em um jogo de Bertrand com produtos diferenciados, os lucros das firmas aumentam quando os produtos se tornam mais diferenciados quando* $\gamma^2 \to 0$.

7.1.3 Cournot *vs* Bertrand em produtos diferenciados

Em qual estrutura de mercado o preço seria mais alto? Como a mudança da diferenciação do produto afeta a diferença relativa entre essas duas estruturas de mercado? Usando as definições de a, b e c.

$$p_i^c - p_i^b = \frac{\alpha\beta}{2\beta+\gamma} - \frac{ab}{2b-c} = \frac{\alpha}{4\beta\gamma^{-2}-1}$$

Proposição 7.3. *Em uma indústria com produtos diferenciados:*

1. O preço de mercado sob Cournot é maior que o de Bertrand;

2. Quanto mais diferenciados são os produtos menor é a diferença entre essas duas estruturas de mercado $\frac{\partial\left(p_i^c-p_i^b\right)}{\partial\gamma} > 0$*;*

3. A diferença de preços é zero quando os produtos se tornam independentes. Formalmente, $\lim\limits_{\gamma\to 0}\left(p_i^c - p_i^b\right) = 0$.

7.1.4 Jogos sequenciais de preço

Considere um jogo de dois períodos onde uma das firmas é a líder e a outra é a seguidora. Para simplificar, especificaremos o seguinte sistema de demanda.

$$q_1 = 168 - 2p_1 + p_2 \text{ e } q_2 = 168 + p_1 - 2p_2$$

A empresa 2 toma p_1 como dado e:

$$\pi_2 = \left(168 + p_1 - 2p_2\right)p_2$$

$$\frac{\partial\pi_2}{\partial p_2} = \frac{168+p_1}{4} = p_2$$

No primeiro período a empresa 1 maximiza:

$$\underset{p_1}{Max}\pi_1 = \left(168 - 2p_1 + \frac{168+p_1}{4}\right)p_1$$

$$\frac{\partial\pi_1}{\partial p_1} = p_1 = 60$$

$$p_2 = 57$$

$$q_1 = 105 \text{ e } q_2 = 114$$

$$\pi_1 = 6300 \text{ e } \pi_2 = 6498$$

Proposição 7.4. *Sob um jogo sequencial de preços:*

1. Ambas as empresas possuem lucro maior sob movimentos sequenciais do que sob o jogo de um único período de Bertrand. Formalmente, $\pi_i^S > \pi_i^b$*;*

2. A firma líder recebe um lucro mais baixo do que a seguidora;

3. Comparado aos níveis de lucro de Bertrand, o aumento do lucro da empresa líder é menor do que o aumento do lucro da empresa seguidora. Formalmente, $\pi_1^S - \pi_1^b < \pi_2^S - \pi_2^b$.

Apresentamos nesse exemplo que nem sempre a primeira empresa a se movimentar possuí vantagem no mercado. Como as empresas possuem custos nulos, então a empresa 2 observa a ação da empresa 1 e diminui o preço para ficar com uma fatia maior do mercado. Note que se a firma 1 baixa muito o preço, a empresa 2 cobrará um preço ainda mais baixo e a empresa 1 pode ficar com uma parcela muito pequena do mercado.

7.2 Competição monopolística em produtos diferenciados

As principais características desse mercado são:

1. Os consumidores são homogêneos, ou seja, tem preferências idênticas ou podem ser representados por um único consumidor que gosta de consumir uma variedade de marcas;

2. Há um número ilimitado de marcas produzidas;

3. Há livre entrada de novas empresas.

7.2.1 O modelo

Considere uma indústria produzindo marcas diferentes, de *i=1,...,N*. Seja q_i a quantidade consumida e p_i o preço unitário de cada marca.

Consumidores

Nessa economia, há um consumidor representativo que as suas preferências apresentam "amor pela variedade". Seja a função de utilidade desse consumidor dada por:

$$u(q_1, ..., q_N) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{q_i}$$

$$\frac{\partial u}{\partial q_i} = 0.5q_i^{-0.5} \text{ sendo que } \lim_{q_i \to 0} 0.5q_i^{-0.5} = +\infty$$

Na margem quando q_i é muito baixo qualquer incremento nesse parâmetro aumenta muito a utilidade do consumidor. A renda I é composta pelos salários recebidos mais os lucros das firmas.

$$\sum_{i=1}^{N} p_i q_i \leq I = wL + \sum_{i=1}^{N} \pi_i (q_i)$$

Normalizamos $w = 1$ e diremos que os consumidores são proprietários das firmas. Teremos que:

$$L(p_i, q_i, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{q_i} + \lambda \left[I - \sum_{i=1}^{N} p_i q_i \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.5q_i^{-0.5} - \lambda q_i = 0$$

$$q_i (p_i) = \frac{1}{4\lambda^2 p_i^2} \text{ e } p_i (q_i) = \frac{1}{2\lambda q_i^{-0.5}}$$

calcularemos a elasticidade-preço da demanda:

$$\eta_i = \left| \frac{\partial q_i (p_i)}{\partial p_i} \frac{p_i}{q_i} \right| = \frac{-1}{2\lambda^2 p_i^3} \frac{p_i}{\frac{1}{4\lambda^2 p_i^2}} = |2|$$

Firmas

Cada marca é produzida por uma única firma. Todas as firmas possuem uma tecnologia idêntica com retornos crescentes à escala.

$$CT_i (q_i) = \begin{cases} F + cq_i, \text{ se } q_i > 0 \\ 0, \text{ se, } q_i = 0 \end{cases}$$

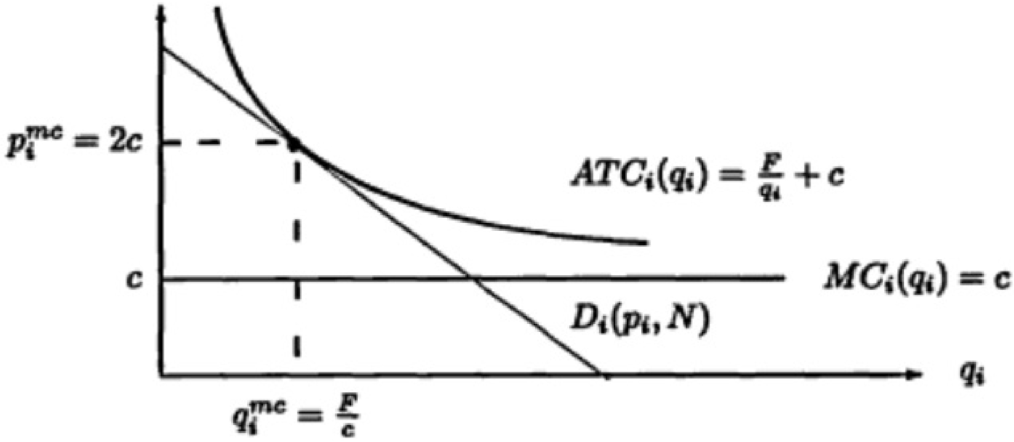
Definição 34. *A tripla* $\{N^{mc}, p_i^{mc}, q_i^{mc}, i = 1, ..., N^{mc}\}$ *é um equilíbrio de competição monopolística se:*

1. Firmas: cada empresa se comporta como um monopolista da sua marca. Dada a demanda para cada marca i*, cara firma escolhe* q_i^{mc} *para* $\underset{q_i}{Max} \pi_i = p_i (q_i) q_i - (F + cq_i)$*;*

2. Cada consumidor toma sua renda e preços como dados e maximiza a sua utilidade;

3. Livre entrada: cada firma faz lucro econômico zero $\underset{q_i}{Max} \pi_i (q_i^{mc}) = p_i (q_i^{mc}) q_i^{mc} - (F + cq_i^{mc}) = 0$*;*

4. Restrição de recursos: A demanda de trabalho para a produção é igual a oferta de mão de obra: $\sum_{i=1}^{N} (F + c_i q_i) = L$.



Legenda: ATC = Custo Total Médio; MC = Custo Marginal.

No equilíbrio cada marca produz ao preço que iguala o custo total médio. No equilíbrio todas as firmas produzem na parta da inclinação negativa dessa curva. Assim, as firmas não minimizam o custo total médio sob competição monopolística.

O problema de maximização da firma é semelhante ao do monopolista:

$$\underset{q_i}{Max} \pi_i (q_i) = p_i (q_i) q_i - (F + c q_i)$$

$$\frac{\partial \pi_i (q_i)}{\partial q_i} = p_i' (q_i) q_i + p_i (q_i) - c = 0$$

$$p_i' (q_i) q_i + p_i (q_i) = c$$

$$p_i \left[p_i' (q_i) \frac{q_i}{p_i} + 1 \right] = c$$

$$p_i \left[\frac{\partial p_i}{\partial q_i} \frac{q_i}{p_i} + 1 \right] = c$$

Temos que:

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_i} \frac{q_i}{p_i} = \frac{1}{\eta_i}$$

$$p_i \left[\frac{1}{\eta_i} + 1 \right] = c$$

como $\eta_i = -2$

$$p_i \left[-\frac{1}{2} + 1 \right] = c$$

$$p_i = 2c$$

A condição de lucro zero implica que:

$$\pi_i\left(q_i^{mc}\right) = \left(p_i\left(q_i^{mc}\right) - c\right) q_i^{mc} - F = 0$$

$$\pi_i\left(q_i^{mc}\right) = \left(2c - c\right) q_i^{mc} = F$$

$$q_i^{mc} = \frac{F}{c}$$

Quantas marcas irão produzir nessa economia? A restrição de recursos nos dá essa resposta:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(F + c_i q_i\right) = L$$

Note $q_i^{mc} = \frac{F}{c} \forall i = 1, ..., N$

$$N\left(F + c\frac{F}{c}\right) = L$$

$$N = \frac{L}{2F}$$

Proposição 7.5. *1. Num mercado de competição monopolística com c e F>0 somente um número N>0 (finito) de empresas irá produzir. O equilíbrio é dado por:*

$$p_i^{mc} = 2c, q_i^{mc} = \frac{F}{c} \text{ e } N^{mc} = \frac{L}{2F}$$

2. Quando $F \to \infty$, então haverá uma baixa variedade de marcas que serão consumidas em grandes quantidades. Quando $F \to 0$ há uma grande quantidade de marcas que serão produzidas numa pequena quantidade.

7.3 Modelos locacionais

Apresentamos modelos em que os consumidores são heterogêneos. Devido aos seus diferentes gostos ou a sua distinta localização, cada consumidor tem uma preferência distinta em relação as marcas que são comercializadas no mercado.

A localização pode indicar a localização física de um determinado consumidor. Nesse caso, o consumidor irá comprar na loja em que o custo de transporte seja minimizado. A localização também pode significar a distância da marca para aquela que o consumidor acredita que é a ideal para que ele efetivamente compre o produto.

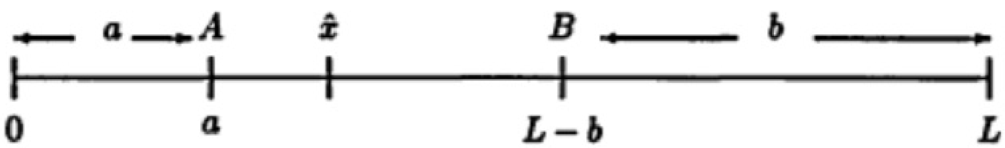
Assim, a distância expressa de forma simplificada como uma linha reta, pode ser vista como o grau de "doçura" do produto. Suponha que os consumidores mais a direita prefiram café mais adoçado e os mais a esquerda café menos adoçado ou sem açúcar. Nesse caso, a distância entre um consumidor e uma firma mede a desutilidade de comprar da marca que não é a ideal. Essa desutilidade é equivalente ao custo de transporte expresso na interpretação anterior.

7.3.1 Abordagem linear

No modelo de Hotelling (1929) são considerados 2 consumidores que residem numa cidade linear de comprimento $L > 0$. Suponha que os consumidores estejam uniformemente distribuídos nesse intervalo, então cada ponto da linha reta representa um único consumidor. Cada consumidor é indexado por um $x \in [0, L]$, sendo que x é somente o identificador do consumidor.

Jogo de preço com localização fixa

Suponha que há duas firmas vendendo um produto que é idêntico em todos os sentidos. Com exceção em uma única característica que a localização onde ele é vendido. Assim, a figura abaixo mostra que a firma A está localizada a unidades de distância do ponto zero. A firma B está localizada a direita da firma A b unidades de distância do ponto L. Por simplicidade, não consideramos os custos de produção.



Cada consumidor compra apenas uma unidade do produto. Para se deslocar até uma loja, o consumidor deve incorrer num custo de transporte de $\tau(t)$ por uma unidade de distância. Por exemplo, o consumidor localizado no ponto x tem que para um custo de transporte de $t(x-a)$ para comprar da firma A ou $t[x-(L-b)]$ para comprar da firma B. Iremos definir a função de utilidade de um consumidor localizado a um ponto x dado por:

$$U_x = \begin{cases} -p_A - t\,|x-a|\,, \text{se compra de A} \\ -p_B - t\,|x-(L-b)|\,, \text{ se compra de B} \end{cases}$$

Seja $\hat{x}$ o consumidor indiferente. Formalmente, se $a < \hat{x} < L-b$ então:

$$-p_A - t\,|\hat{x}-a| = -p_B - t\,|\hat{x}-(L-b)|$$

$$\hat{x} = \frac{p_B - p_A}{2t} + \frac{(L-b)+a}{2}$$

Essa é a demanda a qual a empresa A se depara caso desejássemos obter a demanda da empresa B temos que:

$$L - \hat{x} = \frac{p_B - p_A}{2t} + \frac{L+b-a}{2}$$

Olharemos para o equilíbrio de Bertrand-Nash em preços. A firma A toma $p_B$como dado e escolhe p_A para:

$$\underset{p_A}{Max}\pi_A = \frac{p_A p_B - p_A^2}{2t} + \frac{[(L-b)+a]\, p_A}{2}$$

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial p_A} = \frac{p_B - 2p_A}{2t} + \frac{(L-b)+a}{2} = 0$$

O mesmo vale para a empresa B:

$$\underset{p_B}{Max}\pi_b = \frac{p_A p_B - p_B^2}{2t} + \frac{[L+b-a]\, p_B}{2}$$

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial p_A} = \frac{p_A - 2p_B}{2t} + \frac{L+b-a}{2} = 0$$

Resolvendo o sistema de equações teremos que:

$$p_A = \frac{t\,(3L+a-b)}{3}$$

$$p_B = \frac{t\,(3L-a+b)}{3}$$

Dessa forma, conseguimos computar $\hat{x}$:

$$\hat{x} = \frac{3L+(a-b)}{6}$$

O lucro das empresas será:

$$\pi_A^* = \hat{x} p_A = \frac{[3L-(a-b)]^2}{18}$$

$$\pi_B = (L-\hat{x})\, p_B = \frac{[3L+(a-b)]\,[3L-(a-b)]}{18}$$

Se $a = b$ as empresas dividem o mercado igualmente:

$$\pi_A = \pi_B = \frac{tL^2}{2}$$

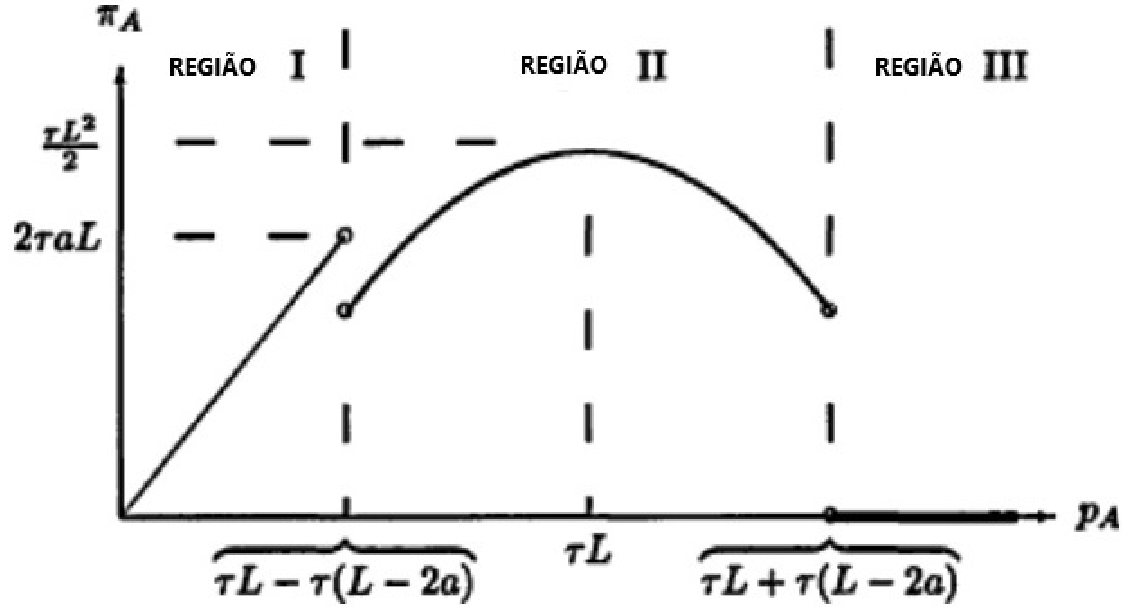
Proposição 7.6. *1. Se as empresas estão localizadas no mesmo ponto* $(a + b = L)$ *então os produtos são homogêneos e* $p_A = p_B = 0$ *é um único equilíbrio;*

2. O equilíbrio descrito por $\hat{x}$ *e* π_A^* *exite, se, e somente se as duas empresas estão muito próximas uma da outra. Formalmente, se, e somente se:*

$$\left(L + \frac{a-b}{3}\right)^2 \geq \frac{4L+a+2b}{3} \text{ e}$$
$$\left(L + \frac{b-a}{3}\right)^2 \geq \frac{4L+b+2a}{3}$$

Demonstração. (Parte 1) Quando $a + b = 1$ os produtos são homogêneos. Então, as empresas irão reduzir os preços até $p_A = p_B = 0$. Uma competição *a la Bertrand.*

(Parte 2) Faremos uma prova simplificada. Suponha que $a = b$. Considere que $a < L/2$. Devemos mostrar que o equilíbrio exite se, e somente se, $L^2 \geq 4La$ ou se somente se $a \leq L/4$. Quando $a = b$ a distância entre as duas firmas é $L - 2a$. Também se o equilíbrio existe $p_A = p_B = tL$. Os lucros são $\pi_A = \pi_B = \frac{tL^2}{2}$; $\pi_A = p_A \frac{L}{2}$.



Nota = $\tau = t$

$L - 2a$ é a distância entre a e b.

Na Região I: $p_A < tL - t\,(L - 2a)$. Nesse caso p_A é muito baixo, tal que o consumidor está localizado no mesmo ponto onde a firma B está localizada e poderia comprar somente de A. O lucro de A é dado por $\pi_A = p_A L$.

Região II: Aqui as duas firmas vendem uma quantidade positiva. $\pi_A = p_A L - \frac{p_A^2}{2t}$ e $p_B = tL$. Usamos a equação $\underset{p_A}{Max} \pi_A = \frac{p_A p_B - p_A^2}{2t} + \frac{[(L-b)+a]p_A}{2}$ que resulta em $\pi_A^* = \frac{tL^2}{2}$.

Região III: Aqui p_A é alto, então todos os consumidores compram da empresa B. Esse é o caso polar da Região I. Agora dado $p_B = tL$ a figura acima mostra que π_A possuí 2 equilíbrios (2 máximos locais).

Em um deles $p_A = tL - t\,(L - 2a) - \epsilon$, enquanto que no outro mercado é dividido com a firma B $p_A = tL$. Para p_A e p_B apresentados anteriormente serem um equilíbrio o preço para o máximo global deveria cair na Região II e não na I. Isto é, para o equilíbrio $p_B = tL$.

$$\pi_A^{II} = \frac{tL^2}{2} \geq \pi_A^{II} = [tL - t(L - 2a)] = 2taL$$

$$\frac{tL^2}{2} \geq 2taL$$

$$L \geq 4a$$

□

7.3.2 Localização e jogo de preços

Até agora definimos que a localização das empresas é fixa. Seria interessante termos uma teoria que permitisse que as empresas escolhessem o preço e a sua localização.

Para mostrar, deveríamos nos questionarmos se a firma A, dado o preço e a localização do seu oponente, poderia se realocar: para responder a isso $\frac{\partial \pi_A}{\partial a} > 0$. Isso significa que A poderia aumentar seus lucros, movendo-se em direção a empresa B. Obviamente A ganharia uma maior parcela do mercado.

Nesse caso, as firmas tendem a se mover para o centro, o que é chamado na literatura de princípio da diferenciação mínima. Movendo-se ao centro as firmas produzem produtos menos diferenciados.

Proposição 7.7. *No jogo da cidade lienar de Hotelling, não há equilíbrio quando as firmas usam o preço e a localização como estratégias.*

7.3.3 Custo de transporte quadrático

Assumimos uma estrutura quadrática para os custos de transporte.

$$U_x = \begin{cases} -p_A - t(x-a)^2, \text{se compra de A} \\ -p_B - t(x-(L-b))^2, \text{ se compra de B} \end{cases}$$

Utilizaremos um jogo de dois períodos em que as empresas definem a localização no primeiro período e escolhem os preços no segundo.

t=2

1. Para os parâmetros locacionais a e b, encontramos o equilíbrio de Nash-Bertrand seguindo os mesmos passos para derivar p_A e p_B;

2. Substitua os preços de equilíbrio nas funções de lucro para obter essas funções tendo como os parâmetros a e b.

t=1

Maximize as funções de lucros das firmas em relação a a e a b. Prove que para um dado b $\frac{\partial \pi_A}{\partial a} < 0$, isso significa que a firma A poderia escolher $a = 0$. Similarmente, a firma B poderia se localizar no ponto L.

7.3.4 A abordagem circular

Verificarmos anteriormente que não há equilíbrio em que as firmas conjuntamente decidem sobre os preços e a localização. Uma forma de solucionar esse problema é considerar que a cidade está distribuída no circulo unitário, em que os consumidores estão distribuídos na circunferência.

Considere como exemplo uma empresa de ônibus que promove o seu serviço com o agendamento de horários diários.

Firmas

Esse modelo não considera explicitamente como as empresas irão se localizar. No entanto, assume-se um comportamento de competição monopolística em que o número de consumidores N é endogenamente determinado. Todas as N firmas possuem a mesma tecnologia. Denotamos F como o custo fixo, c como o custo marginal, q_i e $\pi_i\left(q_i\right)$ como os níveis de produção e de lucro de cada firma i. Assumimos que:

$$\pi_i\left(q_i\right) = \begin{cases} \left(p_i - c\right) q_i - F, \text{se } q_i > 0 \\ 0, \text{ se se } q_i = 0 \end{cases}$$

Consumidores

Os consumidores estão uniformemente distribuídos dentro do circulo unitário. Denotamos t pelo custo de transporte. Cada consumidor compra uma unidade da marca que minimiza a soma do preço mais o custo de transporte.

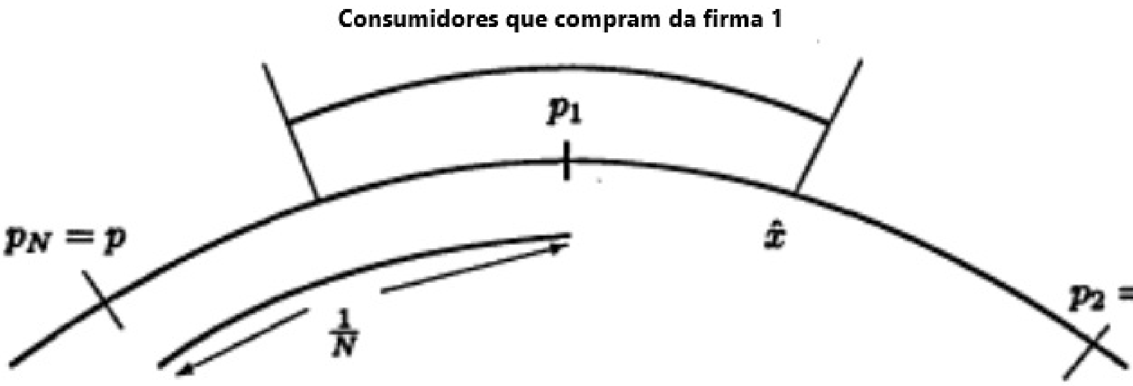
Assumimos que N firmas estão localizadas igualmente uma da outra o que garante que a distância entre duas firmas é $\frac{1}{N}$. A figura abaixo mostra a posição da firma 1 em relação a posição da firma 2 e da firma N. Então assumindo que a firma 2 e a N cobram um preço uniforme p, o consumidor é indiferente se ele comprar de 1 ou de 2 (similarmente da firma N) está localizado a $\hat{x}$ determinado por:

$$p_1 + t\hat{x} = p + t\left(\frac{1}{N} - \hat{x}\right)$$

$$\hat{x} = \frac{p - p_1}{2t} + \frac{1}{2N}$$

Como a firma 1 possui consumidores a sua direita e a sua esquerda, então sua função de demanda é:

$$q_1\left(p_1, p\right) = 2\hat{x} = \frac{p - p_1}{t} + \frac{1}{N}$$



Definição 35. *A tripla* $\{N^o, p^o, q^o\}$ *é um equilíbrio se:*

1. Firmas: cada firma se comporta como monopolista de sua marca, ou seja, dada a demanda para a marca i $q_1\left(p_1, p\right) = 2\hat{x} = \frac{p-p_1}{t} + \frac{1}{N}$ *e dado que todas as outras firmas cobram* $p_j = p^o$, $j \neq i$ *cada firma escolhe* p^o *para:*

$$\underset{p_i}{max} \pi_i\left(p_i, p^o\right) = p_i q_i\left(p_i\right) - \left(F + cq_i\right) = \left(p_i - c\right)\left(\frac{p^o - p_1}{t} + \frac{1}{N}\right) - F$$

2. Livre entrada: A livre entrada de novas firmas (marcas) irá resultar em lucro econômico zero. $\pi_i\left(p_i, p^o\right) = 0\, \forall i = 1, 2, ..., N$

A condição de primeira ordem para o problema de maximização da empresa i é:

$$\frac{\partial \pi_i\left(p_i, p^o\right)}{\partial p_i} = \frac{p^o - 2p_i}{t} + \frac{1}{N} = 0$$

Para um equilíbrio simétrico:

$$p_i = p^o = c + \frac{t}{N}$$

Para encontrarmos N:

$$\pi_i\left(p_i, p^o\right) = 0 \rightarrow \left(p^0 - c\right) - F = 0$$

$$N = \sqrt{\frac{t}{F}}$$

Então:

$$p^o = c + \sqrt{tF} \text{ e } q^o = 1/N^o$$

Bem-estar

Gostaríamos de saber se o livre mercado produz um nível de variedade produtivo maior ou menor que o nível ótimo encontrado no nosso modelo. Antes de definirmos a função de bem estar social da economia calcularemos os custos de transportes agregados denotados por T. A figura com a descrição circular da cidade mostra que o perímetro é $\frac{1}{2N}$ e a distância de cada lado da localização da firma 1. Como há N firmas e cada uma está a $\frac{1}{N}$ de distância das outras duas (uma de cada lado), então há $2N$ intervalos. O custo total de transporte é:

$$T(N) = 2Nt\left(\int_0^{\frac{1}{2N}} xdx\right) = 2Nt\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2N}} = \frac{t}{4N}$$

Definiremos a função de perda da economia como $L(F,t,N)$como a soma dos custos fixos pagos mais o custo de transporte agregado. Formalmente, o planejador social escolhe o número ótimo de marcas N^*a:

$$\underset{N}{min} L(F,t,N) = NF + T(N) = NF + \frac{t}{4N}$$

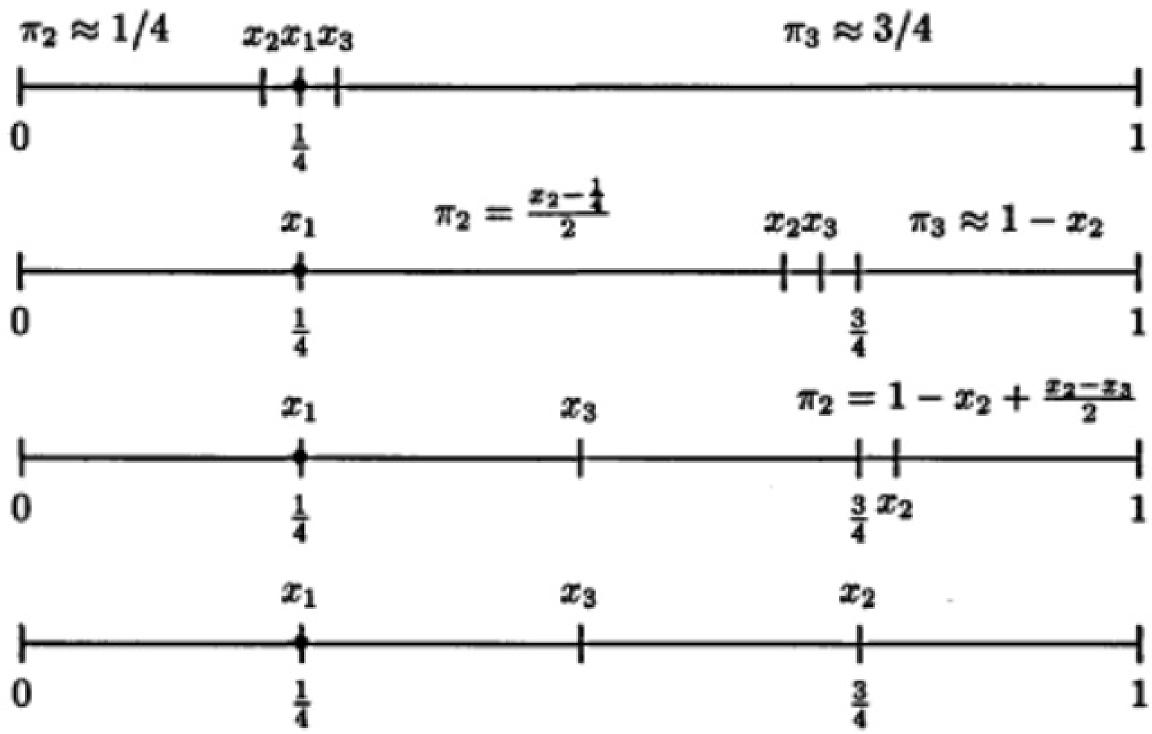
$$\frac{\partial L}{\partial N} = F + \frac{t}{4N^2} = 0 \rightarrow N^* = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{F}} < N^o$$

Portanto, em um modelo de livre entrada mais marcas serão produzidas (potencialmente muitas mais). Note, que há um *trade-off* de bem estar entre economias de escala e o custo agregado de transporte. Isto é um menor número de empresas está associado com um número médio dos custos de produção, mas com um custo de transporte elevado. Um grande número de firmas significa uma menor escala de produção (custo médio mais alto) , mas um custo agregado de transporte menor. A equação acima mostra que é possível aumentar o nível de bem estar reduzindo N.

7.3.5 Entrada sequencial na cidade linear

Consideraremos que os preços são fixos a um nível uniforme estabelecido pelo governo. Considere a reta no intervalo $[0,1]$ em que 3 firmas estão entrando sequencialmente.A firma 1 entra em *t=1* a firma 2 entra em *t=2* e a firma 3 entra em *t=3*.

Seja $x_i \in [0,1]$ a estratégia de localização escolhida pela firma i. Seja $\epsilon > 0$ um número pequeno representando a menor medida de distância possível. Solucionar o jogo de três períodos é bastante complicado. Na verdade, assumimos que a firma 1 já se moveu e está localizada no ponto $x_1 = 1/4$. A figura abaixo mostra a localização da firma:



Terceiro período

A firma 3 decide a sua localização x_3 após a firma 1 e a firma 2 já estarem localizadas. As localizações da firma 3 correspondem as 3 partes superiores na figura acima. Temos que avaliar algumas situações possíveis:

$x_2 = 1/4 - \epsilon$: Nesse caso a firma 3 estaria localizada a $x_3 = 1/4 + \epsilon$. Aqui $\pi_3 = 3/4$ enquanto que $\pi_2 = x_2 + 0.5\,(0.25 - x_2) < 1/4$.

$1/4 < x_2 < 3/4$: Nesse caso a firma 3 estaria localizada a direita da firma 2 ao ponto $x_3 = x_2 + \epsilon$. Aqui $\pi_3 = 1 - x_2$ enquanto que $\pi_2 \cong (x_2 - 1/4)/2 < 1/4$. Ou seja, a firma 2 compartilha $[x_1, x_2]$ no intervalo com a firma 1.

$x_2 \geq 3/4$: Nesse caso a firma 3 se localizaria entre a firma 1 e a firma 2 a qualquer ponto $x_1 < x_3 < x_2$. Sem perda de generalidade, assumimos que: $x_3 = (x_2 + 1/4)/2$. Aqui, $\pi_3 = (x_2 - 1/4)/2$ e $\pi_2 = 1 - x_2 + \frac{x_2 - x_3}{2} = \frac{15 - 12x_2}{16}$.

Segundo período

A firma 2 sabe que no terceiro período decisão de localização da firma 3 será influenciada pela sua própria escolha de localização. Assim, a firma 2 calcula a função de melhor resposta da firma 3. Como a firma 2 toma a regra de decisão da firma 3 como dada e escolhe x_2 que maximiza seus lucros. Claramente a firma 2 não estará localizada a $x_2 = 1/4 - \epsilon$. Como essa localização resulta no lucro máximo de $\pi_2 = 1/4$, ela coletará um lucro alto de acordo com a sua localização, como descrito abaixo.

Se a firma 2 está localizada a $1/4 < x_2 < 3/4$ temos que mostrar que $x_3 = x_2 + \epsilon$ e $\pi_2 = (x_2 - 1/4)/2 < 1/4$. No entanto, se a firma 2 está localizada a $x_2 \geq 3/4$ mostraremos que $\pi_2 = \frac{15-12x_2}{16}$ que é maximizado a $x_2 = \frac{3}{4}$ o lucro da firma 2 é : $\pi_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$. Em resumo o ENPS é atingido quando:

$$x_2 = \frac{3}{4}; \pi_2 = \frac{1}{8}; x_3 = \frac{1}{2} \text{ e } \pi_3 = \frac{1}{4}$$

8 Concentração, fusões e barreiras a entrada

Uma das principais razões para estudarmos organização industrial é a concentração de empresas na mesma indústria. Nesse sentido, abordaremos três pontos principais:

1. Medidas de concentração;

2. Barreiras a entrada;

3. Fusões.

8.1 Medidas de concentração

As medidas de concentração podem ser usadas pelo sistema legal que julga os conflitos entre as firmas e o regulador sobre as possíveis fusões.

Definição. (**Concentração de Mercado**) A concentração de mercado pode ser definida pelo número de firmas numa indústria e a distribuição da produção entre essas empresas.

Considere N o número de empresas na indústria e Q o produto agregado. Seja q_i o produto da firma i $\forall$ $i = 1, ..., N$. Então, $Q = \sum_{i=1}^{N} q_i$. Por simplicidade, ignoraremos os possíveis problemas de agregação. Tome $s_i = \frac{100q_i}{Q}$ como a parcela do mercado da empresa i. Note que $s_i \in [0, 100]$.

8.1.1 O Índice HH (Herfindahl-Hishaman)

O índice HH é uma função convexa de s_i. No entanto, é sensível a parcela de mercado entre as firmas:

$$I_{HH} = \sum_{i=1}^{N} (s_i)^2 \tag{8.1}$$

8.1.2 Índice de entropia

O índice de entropia (E) é considerado como uma medida inversa de concentração, e é calculado de acordo com a seguinte expressão:

$$E = \sum_{i=1}^{N} s_i \times log\left(\frac{1}{s_i}\right) \tag{8.2}$$

Sendo que $E \in [0, logN]$ em que zero denota um nível de monopólio e $logN$ o nível mínimo possível de concentração.

8.1.3 Índice de instabilidade

Em um mercado competitivo, grau de concentração das empresas pode ser muito volátil. O Índice de Instabilidade (I) é a medida de concentração que calcula a alteração das quotas de mercado, entre dois períodos.

$$I = 0.5\times \sum_{i=1}^{N} \left| s_{it+1} - s_{it} \right| (2.1) \tag{8.3}$$

em que s_{it+1} representa a quota de mercado da empresa i no período *t+1* e s_{it} representa a quota de mercado da empresa i no período t. Note que $I \in [0, 1]$.

8.2 Multiprodução - Economias de Escala e de Variedade

Definição. (multiprodução) A multiprodução pode ser definida quando uma mesma empresa produz diversos bens.

A multiprodução pode ser de dois tipos: proporção constante e com mudança de proporções. Por exemplo, o cultivo de batata durante seis meses e centeio nos outros seis meses. Não há problema de decisão de proporção.Quando há mudança de proporções é necessário tomar decisões, não apenas de quanto produzir de cada bem (economias de escala), como também se a produção dos bens deve se manter conjunta (economias de variedade).

O custo adicional de produzir um bem a mais, é definido como custo incremental e é calculado da seguinte forma:

$$CTI_i\left(q\right) = CT\left(q\right) - CT\left(q_{N-i}\right)$$

sendo, $CTI_i\left(q\right)$ o custo incremental do bem i, $CT\left(q\right)$o custo de produção de todos os bens e $CT\left(q_{N-i}\right)$ é o custo de produção de todos os bens exceto o bem i. A equação que permite determinar o custo médio incremental para um dado bem, é então apresentada por:

$$CMedI_i\left(q\right) = \frac{CTI_i\left(q\right)}{q_i}$$

sendo, $CMedI_i\left(q\right)$ o custo médio incremental do bem i .

Definição. Quando tem-se economias de escala (ou rendimentos crescentes à escala), quanto maior for a produção, menor serão os custos médios.

Contudo, produzir unidades adicionais (infinitamente) não significa que se obterá sempre rendimentos crescentes. Assim , o ponto ótimo de produção é atingido, quando o custo de produzir mais uma unidade é igual ao custo médio de produzir todos os bens. Avalia-se agora, para cada bem a existência do aproveitamento potencial de economias de escala.

Definição. Designa-se de *economias de escala próprias do bem i* ($S_i(q)$), e são avaliadas de acordo com a expressão abaixo:

$$S_i(q) = \frac{CMedI_i(q)}{CMgI_i(q)}$$

O termo do denominador representa o custo marginal incremental do bem i. Se $S_i(q) > 1$ então existem economias de escala própria para o bem i. No cálculo das economias de escala globais S_N , pondera-se as economias de escala próprias S_i pelo peso relativo do bem i α_i entre os diferentes bens j que a empresa produz, como segue:

$$S_N = \alpha_i \times S_i \text{ com } \alpha_i = \frac{q_i \times CMgI_i(q)}{\sum q_j \times CMgI_j(q)}$$

Então, se $S_N > 1$, verificam-se economias de escala globais.

Definição. (economias de variedade) As economias de variedade fundamentam a propriedade da subaditividade. Essa propriedade salienta que a produção conjunta de dois bens diferentes, i e j, partilha os custos de produção e permite aproveitar sinergias.

Isto significa que o custo da produção conjunta será menor, do que o custo de produzir cada um dos bens separadamente.

$$V_N = \frac{CTI_i + CTI_j}{CT_q}$$

Se $V_N < 1$ então há economias de variedade. No caso de $V_N > 1$ existem deseconomias de escala, isto é, os bens i e j não devem ser produzidos de forma conjunta Por padrão, esse tipo de resultados revela que os bem analisados são de natureza tecnológica diferente, uma vez que não partilham dos mesmos custos de produção.

8.3 Fusões

Por simplicidade, descreveremos uma fusão quando duas empresas se unem e possuem apenas um único (novo) proprietário. Essas fusões, podem ser divididas basicamente em três formas:

- Horizontais: empresas da mesma indústria, produzindo produtos idênticos ou similares e vendendo no mesmo local geográfico;

- Verticais: quando uma empresa que produz um fator intermediário se une com aquela que é responsável pela produção do bem final. Alternativamente, quando duas empresas que possuem um relacionamento de cliente/fornecedor se unem.

- Conglomerado: quando as empresas que não produzem produtos da mesma linha (produtos que são pouco correlacionados) se unem sob a mesma propriedade.

Nesse sentido precisamos entender o que são empresas correlacionadas:

- Extensão de produto: as firmas são funcionalmente relacionadas, seja na produção ou na distribuição de suas mercadorias;
- Extensão de mercado: as firmas produzem os mesmos bens, mas vendem em localidades diferentes;
- Outro conglomerado: as firmas são essencialmente, não relacionadas em relação a sua produção.

Por quais razões as fusões ocorrem?

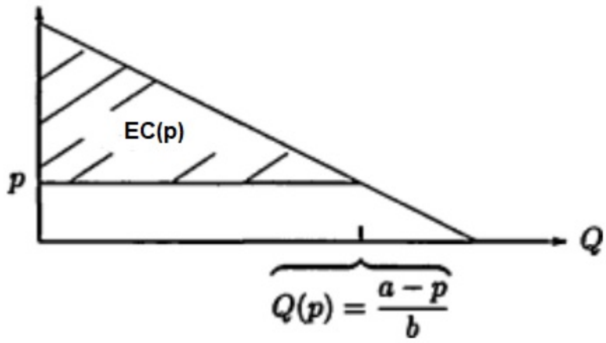
A fusão tende a aumentar o lucro das firmas unidas em decorrência da modificação do grau de concentração do mercado. As empresas unem a sua estrutura de capital, ativos e outros fatores de produção e assim podem aumentar o seu tamanho e reduzirem os seus custos de produção, aumentando os seus lucros. Essencialmente, há disparidade de juízo de valor de acordo com as condições de incerteza do do mercado. Pode haver interesses relacionados ao prestígio associado com a administração de um grande império corporativo.

8.3.1 Integração horizontal

Nem sempre uma fusão leva a uma redução na competição em um mercado. Considere que uma empresa de custo alto se una com uma de custo baixo. Essa fusão aumenta o nível de bem-estar, apesar de promover um aumento na concentração de mercado.

Considere um modelo de Cournot. Seja $c_1 = 1$ e $c_2 = 4$. A demanda desse mercado é $p = 10 - Q$. Lembre que nessa estrutura de mercado temos que $q_i = \frac{\alpha - 2c_i + c_j}{3b}$ e $\pi_i = \frac{(\alpha - 2c_i + c_j)^2}{9b^2}$ então: $q_1 = 4$ e $q_2 = 1$ e $p = 10 - 5 = 5$. Os lucros serão: $\pi_1 = 16$ e $\pi_2 = 1$. O excedente do consumidor é dado por $EC = \frac{(a-p)^2}{2} = \frac{25}{2}$.

Figura 8.1: Excedente do Consumidor



O nível de bem estar é $W^C = EC\,(5) + \pi_1^C + \pi_2^C = 29.5$. Para uma fusão entre as duas empresas temos um monopólio multiplanta. A nova firma fundida deveria fechar a firma 2 então:

$$\pi^M = (10 - Q)\,Q - Q \text{ então } Q^* = 4.5, p^* = 5.5 \text{ e } \pi^M = 81/4.$$

Temos então: $EC(5.5) = 81/8$ e $W^M = EC(5.5) + \pi^M = 30.375$

$$I_{HH}^C = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{17}{25}\right) = 0.68 \times (100)^2 = 6.800 \tag{8.4}$$

Proposição 8.1. *Sob a estrutura de mercado de Cournot, uma fusão leva a aumento na concentração de mercado, mas não necessariamente implica numa redução do nível de bem estar.*

Esse resultado não se sustentaria numa competição *a la Bertrand*.

8.3.2 Fusão vertical

Definição. (Fusão Vertical) Uma fusão vertical é definida como uma união entre um produtor de um bem final que usa um bem intermediário como fator de produção.

Competição downstream

Utilizaremos o termo *downstream* para classificar a empresa que é produtora do bem final. Considere uma função de demanda $p = \alpha - (q_1 + q_2)$, com $\alpha > 0$ e q_i é o nível de produção de cada uma das empresas. Suponha que as firmas competem *a la Cournot:*

$$q_i = \tfrac{\alpha - 2c_i + c_j}{3} \text{ e } \pi_i = \tfrac{(\alpha - 2c_i + c_j)^2}{9} \tag{8.5}$$

$$Q = \frac{2\alpha - (c_1 + c_2)}{3} \text{ e } p = \frac{\alpha + c_1 + c_2}{3} \tag{8.6}$$

Competição upstream antes da fusão

Para evitarmos uma tradução dúbia ou incorreta, o termo *upstream* será utilizado para as empresas que produzem o bem intermediário. Suponha que essas firmas competem *a la Bertrand.* Assuma que os custos variáveis são nulos. Essas empresas vendem o seu produto para as enquadradas como *downstream.*

$$q_1 = q_2 = \frac{\alpha}{3} \text{ e } \pi_1 = \pi_2 = \frac{\alpha^2}{9} \tag{8.7}$$

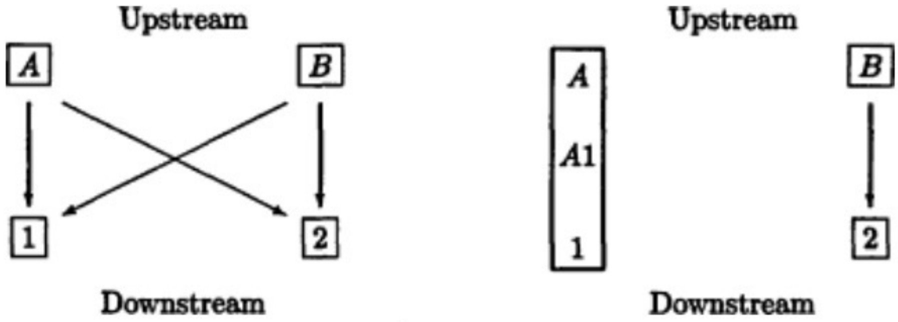
e

$$\pi_A = \pi_B = 0 \text{ (downstream)}$$

Fusão entre as empresas downstream e upstream

Suponha que a firma A se funda com a firma 1.

Figura 8.2: Produtores downstream e upstream



A firma A1 (nova) não vende o bem intermediário para a firma 2. Desse modo, a firma B torna-se um monopólio no mercado de fatores de produção e maximiza seus lucros escolhendo o preço para o seu produto intermediário c_2 que é igual ao custo de produção da empresa downstream 2. Assim, o lucro da firma upstream B é o seu preço c_2 vezes o nível de produção da firma downstream 2 dado em (1). Formalmente, a firma 2 soluciona:

$$\underset{c_2}{Max}\pi_B = c_2 q_2 = \frac{c_2\left(\alpha - 2c_2 + c_1\right)}{3} = \frac{\alpha}{4} \tag{8.8}$$

Substituindo $c_1 = 0$ e $c_2 = \frac{\alpha}{4}$ em (4) e (5) então temos que:

$$q_1 = \frac{5\alpha}{12}, q_2 = \frac{\alpha}{6}, Q = \frac{7\alpha}{12} \text{ e } p = \frac{5\alpha}{12} \tag{8.9}$$

$$\pi_{A1} = pq_{A1} = \frac{25\alpha^2}{144} \text{ e } \pi_2 = \left(p - c_2\right) q_2 = \frac{\alpha^2}{36} \tag{8.10}$$

Proposição. *Uma fusão entre as empresas upstream e downstream aumenta o lucro da nova empresa e reduz o nível de produção da firma downstream que não se fundiu.*

Anunciaremos a próxima proposição:

Proposição. *Temos o seguinte:*

i) O lucro combinado das empresas que fazem a fusão aumenta após elas se unirem;

ii) uma fusão não fecha o mercado para as outras empresas, mas há certamente uma redução nos seus lucros;

iii) acreditamos que a integração vertical é uma forma de organização mais eficiente:

$$\pi_B + \pi_2 = \frac{\alpha^2}{24} + \frac{\alpha^2}{24} = \frac{10\alpha^2}{144} < 0 + \frac{\alpha^2}{9} \tag{8.11}$$

O lado esquerdo representa a soma dos lucros entre as empresas B e 2 antes da fusão da empresa A com a 1. Note que π_2 cai numa magnitude maior que o aumento de π_B , o que ocorre pela queda acentuada na parcela do mercado da firma 2.

8.3.3 Fusões horizontais entre firmas que produzem bens complementares

Daremos um exemplo simples. Considere um computador de mesa (desktop). Esse equipamento é formado pelo gabinete (CPU) que será denotado por X e pelo monitor Y. Considere que o preço do sistema (computador) é $p_s = p_X + p_Y$. Seja a demanda agregada igual a:

$$Q = \alpha - p_s = \alpha - (p_X + p_Y) \tag{8.12}$$

sendo $\alpha \in R_{++}$.

Note que X e Y são complementos perfeitos, então a escolha de X e Y por parte do consumidor se dá de uma função de utilidade $Min\{X, Y\}$ o que implica que $X = Y$.

Produtoras independentes

Suponha que os equipamentos sujam produzidos por empresas distintas. Considere o problema de maximização dos lucros da produtora de CPUs:

$$\underset{p_x}{Max} \pi_X = p_X X(p_X) = p_X [\alpha - (p_X + p_Y)] \tag{8.13}$$

Então $p_X^* = {(\alpha - p_X^*)}/{2}$. O problema da produtora de monitores é análogo e teremos $p_Y^* = {(\alpha - p_X^*)}/{2}$. Como os bens são complementares perfeitos: $p_Y^* = p_X^* = {\alpha}/{3}$ e $Q^* = {\alpha}/{3}$. Dessa forma teremos que:

$$\pi_X = \pi_Y = {\alpha^2}/{9} \tag{8.14}$$

Monopólio na produção de todos os componentes

Suponha que X e Y façam uma fusão. Considere que esse mercado se torne monopolizado.

$$\underset{p_s}{Max} \pi_{XY} = p_s (\alpha - p_s)$$

De acordo com as condições de primeira ordem teremos que:

$$p_s = {\alpha}/{2}; Q = {\alpha}/{2}; \pi_{XY}^M = {\alpha^2}/{4} \tag{8.15}$$

A partir da equação (14) teremos a seguinte proposição.

Proposição. *Uma fusão entre empresas que produzem bens complementares deveria:*

(i) reduzir o preço dos sistemas $p^M < p_X + p_Y$;

(ii) aumenta o número de computadores vendidos $Q^M > Q$

(iii) o lucro do monopólio é maior que o das duas firmas quando elas produzem separadamente: $\pi_{XY} > \pi_X + \pi_Y$.

A fusão de duas firmas que produzem bens complementares pode aumentar o nível de bem estar social. Mas, e se os bens fossem substitutos perfeitos? Quais seriam os efeitos? Em linhas gerais, o monopólio reduziria a quantidade produzida, aumentaria o preço e resultaria numa indústria mais concentrada e com lucros estritamente maiores.

8.4 Barreiras à entrada

Quais seriam as principais fontes de barreiras à entrada:

1. Vantagem em termos da estrutura de custos das firmas já estabelecidas;
2. Economias de escala;
3. Vantagens em relação a produção das empresas: reputação, boa qualidade do produto;
4. Efeitos políticos;
5. Experiência na produção (conhecimento do mercado consumidor);
6. Fidelidade as marcas.

Concentração e custos fixos numa estrutura de mercado não competitiva

Considere uma indústria composta por marcas distintas, ou seja, os produtos são diferenciados. Indexamos cada empresa por $i = 1, ..., N$ e denotaremos $q_i > 0$ a quantidade consumida e p_i o preço do bem produzido pela firma i.

Consumidores

Há um consumidor representativo nessa economia. Esse consumidor exibe um tipo de preferência a qual ele prefere consumir uma variedade de marcas em relação a uma só. A utilidade desse consumidor é representada pela função CES.

$$u\left(q_1, ..., q_N\right) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{q_i}$$

É importante observamos que: $\lim_{q_i \to 0} \frac{\partial u}{\partial q_i} = \lim_{q_i \to 0} \frac{1}{2\sqrt{q_i}} = +\infty$. Isso indica que as curvas de indiferença desse consumidor são convexas em relação à origem. O consumidor dispõe da renda I que é composta pelo salário recebido e a soma dos lucros das firas, caso esse consumidor seja proprietário ou acionista de uma delas.

$$\sum_{i=1}^{N} p_i q_i \leq I \equiv L + \sum_{i=1}^{N} \pi_i\left(q_i\right)$$

O salário é normalizado para 1, então p_i, I e π_i são denominadas em unidades de trabalho (divididos por w). O objetivo do consumidor é maximizar a sua utilidade sujeito a seguinte restrição orçamentária.

$$L\left(q_i, p_i, \lambda\right) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{q_i} + \lambda\left[I - \sum_{i=1}^{N} p_i q_i\right]$$

Tomando a derivada do Lagrangeano em relação a q_i teremos:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{1}{2\sqrt{q_i}} = \lambda p_i$$

Consequentemente:

$$p_i\left(q_i\right) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{q_i}}$$

Assim podemos encontrar a função de demanda inversa:

$$q_i\left(p_i\right) = \frac{1}{4\lambda p_i^2}$$

A partir dela podemos encontrar a elasticidade preço da demanda:

$$\eta = \frac{\partial q_i}{\partial p_i}\frac{p_i}{q_i} = -2$$

Firmas

Suponha que as firmas possuam tecnologias idênticas com retornos crescentes a escala:

$$CT\left(q_i\right) = \begin{cases} F + q_i \text{ se } q_i > 0 \\ 0 \text{ se } q_i = 0 \end{cases}$$

Definição. A tripla $\{N^{mc}, q_i^{mc}, p_i^{mc}\}$ para $i = 1, ..., N^{mc}$ é chamada de competição monopolística se:

(i) Firmas: se comportam como um monopólio, em relação a própria marca. $\pi_i = p_i\left(q_i\right) - \left(F + cq_i\right)$;

(ii) Consumidores: os consumidores maximizam a sua utilidade, resultando no sistema de equações exposto anteriormente;

(iii) Livre entrada: as firmas possuem $\pi_i\left(q_i^{mc}\right) = 0$;

(iv) Restrição de recursos: a demanda por trabalho é igual a oferta: $L = \sum_{i=1}^{N} \left(F + cq_i\right)$

Lembrando do problema de maximização de lucros do monopolista;

$$\underset{q}{Max}\pi = RT\left(q\right) - CT\left(q\right)$$

$$\underset{q}{Max}\pi = p\left(q\right)q\left(p\right) - CT\left(q\left(p\right)\right)$$

A condição de primeira ordem em relação a q:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = p^{'}\left(q\right)q\left(p\right) + p\left(q\right) - c^{'}\left(q\left(p\right)\right) = 0$$

$$c^{'}\left(q\left(p\right)\right) = p^{'}\left(q\right)q\left(p\right) + p\left(q\right)$$

Multiplique e divida por p os dois lados:

$$c^{'}\left(q\left(p\right)\right) = p^{'}\left(q\right)q\left(p\right)\frac{p\left(q\right)}{p\left(q\right)} + 1$$

$$c^{'}\left(q\left(p\right)\right) = p\left(q\right)\left[1 + \frac{p^{'}\left(q\right)q\left(p\right)}{p\left(q\right)}\right]$$

$$c^{'}\left(q\left(p\right)\right) = p\left(q\right)\left[1 + \frac{\partial p\left(q\right)}{\partial q\left(p\right)}\frac{q\left(p\right)}{p\left(q\right)}\right]$$

Note que:

$$\frac{\partial p\left(q\right)}{\partial q\left(p\right)}\frac{q\left(p\right)}{p\left(q\right)} = \frac{1}{\eta}$$

Então:

$$c^{'}\left(q\left(p\right)\right) = p\left(q\right)\left[1 + \frac{1}{\eta}\right]$$

Ao solucionarmos o problema com as informações acima teremos que:

$$c^{'}\left(q_i\right) = p_i\left[1 + \frac{1}{-2}\right] = \frac{p_i}{2} = R_{mg}\left(q_i\right)$$

Desse modo, temos que $c = {}^{p_i}/_{2}$. A condição de lucro zero implica que:

$$\pi_i\left(q_i^{mc}\right) = \left(p_i^{mc} - c\right)q_i^{mc} - F = \left(2c - c\right)q_i^{mc} - F = 0$$

$$q_i^{mc} = {}^{F}/_{c}$$

Assim o número de empresas é: $N\left[F + c\frac{F}{c}\right] = L$ então $N = {}^{L}/_{2F}$ e $L > 2F$. O índice HH pode ser computado do seguinte modo:

$$I_{HH} = N^{mc}\left(\frac{100}{N^{mc}}\right)^2 = \frac{20000F}{L} \quad (8.16)$$

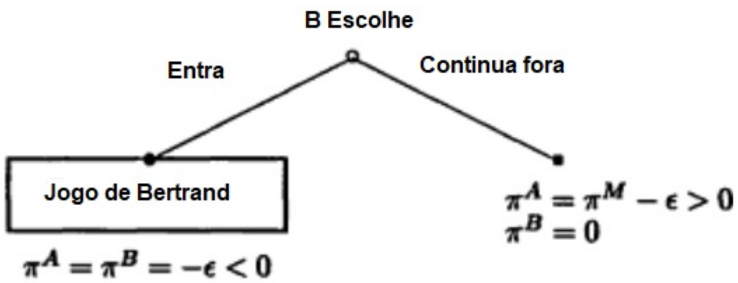
Note que se os custos fixos aumentam o I_{HH} também aumenta.

8.5 Custos irrecuperáveis e barreiras a entrada

Os custos irrecuperáveis (*sunk costs*) são aqueles que não podem ser recuperados como parte do investimento. Alguns exemplos são: pesquisas de mercado, taxas e impostos relativos a causas judiciais etc.

Imagine um mercado com duas empresas A e B, sendo essa última uma entrante potencial. Se B decide entrar nesse mercado, ela deve gastar ε reais nesse processo. A firma A possui um lucro $\pi^A = \pi^M - \varepsilon$. Considere esse jogo da entrada na forma extensiva:

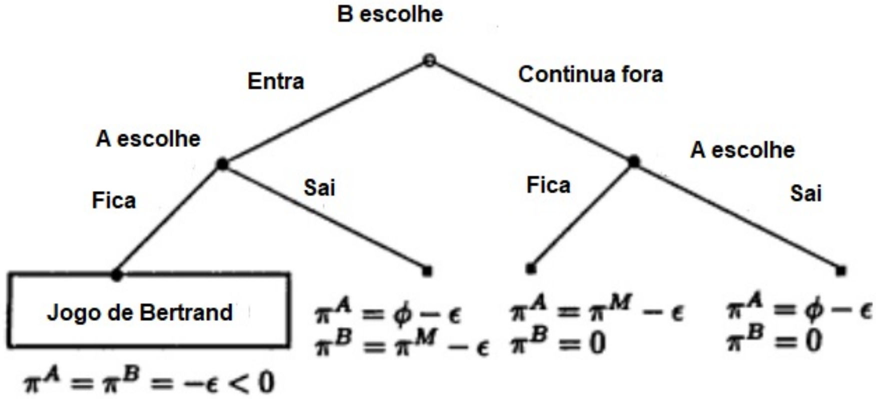
Figura 8.3: Custos Irrecuperáveis e Barreiras à Entrada



Proposição. *Para qualquer custo irrecuperável de entrada* $\varepsilon \in \left]0, \pi^M\right[$ *existe um único equilíbrio de Nash perfeito de subjogos (ENPS) quando A lucra* $\pi^A = \pi^M - \varepsilon$ *e* $\pi^B = 0$.

Considere uma nova situação que a empresa poderia receber uma parcela $\phi > 0$ caso decida sair. Por exemplo, quando $\phi \leq \varepsilon$, então podemos ver que ϕ pode ser considerado como o montante do gasto original da empresa a ser recuperado com a saída do mercado.

Figura 8.4: Custos Irrecuperáveis com Recuperação Parcial dos Custos



Proposição. *Há um único ENPS descrito na figura anterior. Quando B entra a firma A sai do mercado. Formalmente, ((SAI,FICA),ENTRA) é o único ENPS.*

8.6 Impedimento a entrada

Vejamos alguns tipos de impedimento a entrada:

- Entrada bloqueada: além do incumbente (firma já estabelecida no mercado) nenhum outra empresa acharia lucrativo entrar nesse mercado;
- Entrada impedida: o incumbente modifica o seu comportamento para impedir a entrada;
- Entrada acomodada: a entrada ocorre e o incumbente modifica as suas ações levando em conta que a entrada de fato ocorrerá.

8.6.1 Manutenção da capacidade

O postulado Bain-Sylos indica que a firma incumbente manteria o mesmo nível de produção mesmo após a entrada de uma nova firma concorrente.

Considere um jogo do tipo líder-seguidora (Stackelberg) que as empresas decidem o quanto de capital podem acumular na sua capacidade produtiva. No primeiro período, a firma 1 deve escolher o seu nível de investimento/capacidade $k_1 \in [0, +\infty[$. No período 2 a firma 2 escolhe se entrará escolhendo num nível de capacidade $k_2 > 0$ ou caso opte por não entrar $k_2 = 0$.

Por simplicidade, assumimos que as empresas são idênticas, exceto pelo fato que a firma 2 deve pagar um custo de entrada ($E \geq 0$). O lucro das empresas no final do segundo período deve ser:

$$\pi_1(k_1, k_2) = k_1(1 - k_1 - k_2)$$
$$\pi_2(k_1, k_2) = \begin{cases} k_2(1 - k_1 - k_2) - E \text{ se a entrada ocorre} \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases} \tag{8.17}$$

Solucionaremos esse jogo por indução retroativa.

Segundo período

A firma 2 toma $\bar{k_1} = k_1$ como dado e escolhe k_2 para maximizar o lucro em (16). A firma 2 entra e paga o custo E, ou não entra. Considere que a firma 2 decida entrar:

$$\frac{\partial \pi_2\left(\bar{k_1}, k_2\right)}{\partial k_2} = 1 - 2k_2 - \bar{k_1} = 0 \text{ então } k_2 = \frac{1 - \bar{k_1}}{2} \tag{8.18}$$

Substituindo na função de lucros da empresa 2:

$$\pi_2\left(\bar{k_1}, k_2\right) = \frac{\left(1-\bar{k_1}\right)^2}{2} - E$$

Note que $\pi_2 > 0$ se, e somente se $\bar{k_1} < 1 - 2\sqrt{E}$. A função de melhor resposta da empresa 2 é:

$$k_2 = R_2\left(\bar{k_1}, E\right) = \begin{cases} \frac{1-\bar{k_1}}{2} \text{ se } \bar{k_1} < 1-2\sqrt{E} \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases} \tag{8.19}$$

Primeiro período

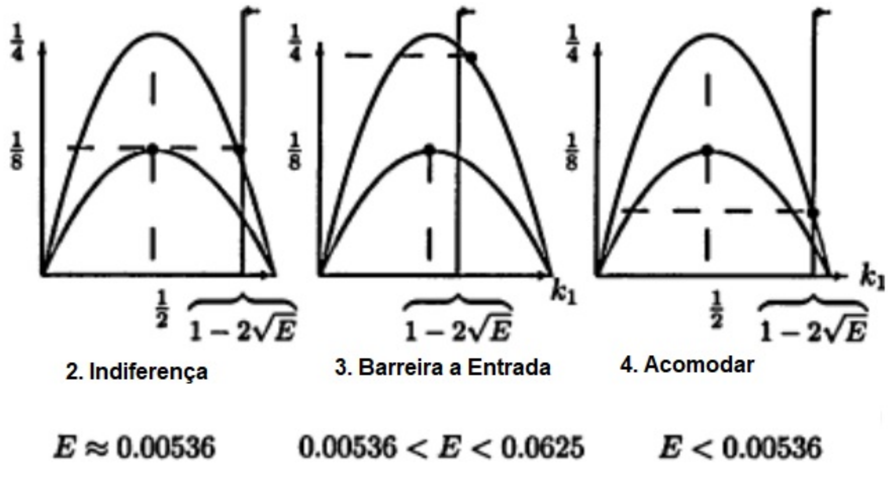
A empresa 1 sabe que deve escolher k_1 em *t=1*. Essa empresa ainda sabe o quanto essa escolha afetará a decisão da empresa 2. A firma 1 também sabe que a função de melhor resposta da empresa 2 é descontínua quando $k_1 = 1 - 2\sqrt{E}$.

Assim a firma 1 pode induzir a firma 2 a alterar a sua decisão considerando pequenas variações em torno de $k_1 = 1 - 2\sqrt{E}$. Temos que o lucro da empresa 1 é:

$$\begin{array}{c} \pi_1^S\left(k_1, k_2\right) = \frac{k_1(1-k_1)}{2} \text{ quando 2 entra no mercado.} \\ \pi_1^M\left(k_1\right) = k_1\left(1-k_1\right) \end{array} \tag{8.20}$$

Na figura 4 as curvas superiores representam a situação quando a firma 2 não entra no mercado. A curva menos alta indica o lucro da empresa líder quando a entrada ocorre. O nível de impedimento a entrada da empresa 2 se dá quando $k_1 = 1 - 2\sqrt{E}$ que é marcado uma linha vertical sólida indicando que para $k_1 \geq 1 - 2\sqrt{E}$ a firma 1 é monopolista.

Figura 8.5: Níveis de Lucro da Empresa Incumbente



1. Entrada Bloqueada: Esse caso não aparece na figura acima. Se $1 - 2\sqrt{E} < 0.5$ o custo de entrada é muito alto. Nesse caso a escolha da capacidade de monopólio ($k_1 = 0.5$) é suficiente para barrar a entrada.

2. Indiferença: Qual o nível de E que tornaria a firma 1 indiferente entre acomodar e barrar a entrada? Precisamos comparar o lucro da empresa 1 quando $k_1 = 0.5$, isto é, o lucro de monopólio $\pi_1^M(k_1) = 1/8$ ao lucro obtido por essa firma quando ela barra a entrada fazendo $k_1 = 1 - 2\sqrt{E}$. O lucro de monopólio avaliado a esse nível é: $\pi_1^M\left(1 - 2\sqrt{E}\right) = 2\sqrt{E} - 4E$. Então

$$1/8 = 2\sqrt{E} - 4E \tag{8.21}$$

   Essa equação implica que $E \approx 0.0053$.

3. Barreira a entrada: Quando o custo de entrada está entre $0.00536 < E < 0.0625$.

4. Acomodar: Quando o custo é muito baixo a firma 1 deve aumentar k_1 a um nível muito alto para barrar a entrada. Se $E < 0.00536$ barrar a entrada não é lucrativo e acomodar a entrada resulta em um nível mais elevado de lucro para a firma 1.

Proposição. *A firma incumbente não pode impedir a entrada investindo em larga capacidade. De modo mais geral, o investimento no excesso de capacidade não pode servir como uma ferramenta para impedir a entrada.*

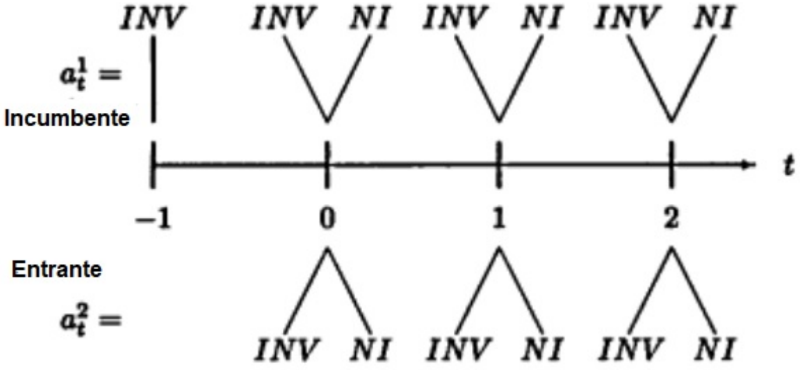
8.6.2 Investimentos na substituição de capital

Imagina que o capital deprecia ao longo do tempo, sendo então necessário uma taxa de reinvestimento.

Considere uma indústria com duas firmas, F1 (incumbente) e F2 a entrante. Se F1 possui capital em um certo período, então a empresa recebe um lucro de monopólio dado por H em uma período de tempo. Se ambas possuem capital, cada uma recebe os lucros de duopólio, dados por L.

Suponha que em cada período $t = 0, 1, 2, ...$ cada firma pode investir F em capital com duração finita. Durante esse período a firma pode produzir qualquer montante de um produto homogêneo. Indique essa ação como $a_i^t \in \{INV, NI\}$(investir ou não investir). A figura abaixo, ilustra o caminho o o tempo de ações tomadas pelas duas empresas:

Figura 8.6: Substituição de Capital e Barreira a Entrada



Na figura acima, a F1 investe em capital no período $t = -1$. O jogo começa em $t = 0$ em que ambas podem investir em capital em qualquer período.

Suposição: 1.

O capital dura por dois período de tempo. No segundo período, o capital se desintegra completamente, não pode ser revendido e possui um valor de sucata igual a zero.

2. O lucro de duopólio é insuficiente para sustentar duas firmas na indústria, enquanto que o lucro do nível de monopólio é suficientemente alto em comparação ao custo de investimento no capital. $2L < F < H$**.**

A F1 investe em capital em t e usa esse recurso para produzir em t e em *t+1* enquanto que o capital se deprecia após o segundo período. O jogo procede do seguinte modo: No período zero, se F2 investe em capital, cada firma ganha L. Se F2 não entra então F1 ganha H em *t=0.* Seja $0 < \rho < 1$ a taxa de desconto intertemporal. A firma maximiza a soma dos lucros descontados:

$$\Pi^i = \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t \left[R_t^i - C_t^i \right]$$

Em que $R_t^i = H$ se, e somente se a firma i possui capital no período t e $R_t^i = L$ se ambas investem em capital nesse período. Se $C_t^i = F$ se a firma i investe em capital no período t e $C_t^i = 0$ se nenhum investimento for empreendido pela firma i no período t.

Proposição. *Sob as condições impostas na suposição 1.*

1. Se F2 não puder entrar, então F1 investe em capital somente nos períodos ímpares. Isto é:

$$a_i^t = \begin{cases} INV \ \ para \ t = 1, 3, 5... \\ NI \ \ para \ t = 2, 4, 6... \end{cases}$$

2. Se F2 entra, e $\rho \to 0$ e satisfaz:

$$\frac{F}{H} < \rho < \left(\frac{F - L}{H - L} \right)^{0.5} \tag{8.22}$$

Então as seguintes estratégias constituem um ENPS:

$$a_i^t = \begin{cases} INV \ \ se \ a_{t-1}^j = NI \ i,j = 1,2, i \neq j, t = 0,1,2,... \\ NI \ \ caso \ contrário \end{cases} \tag{8.23}$$

Assim, nesse equilíbrio a entrada é impedida tendo a F1 investindo em cada período de tempo.

Demonstração. Olharemos as estratégias de equilíbrio enquanto a F1 investe em cada t e F2 não investe. Observe que como F1 investe em cada t e ainda possui capacidade produtiva em *t+1* a F2 desvia e investe em *t*. Isso resultará *L-F* em *t*, *L-F* em *t+1* e *H-F* em cada período de tempo posterior. Se F2 não desvia ela não investirá em *t*, se

$$\Pi^2 = (1+\rho)(L-F) + \rho^2 \frac{H-F}{1-\rho} < 0 \text{ ou } \rho^2 < \frac{F-L}{H-L}$$

Se a F1 desvia, parando o investimento em *t-1*, ela não terá capacidade em t e F2 ganhará *H-F* a *t*. Assim, F2 entrará. Por fim, se F1 para de investir em *t-1* ela receberá H em t-1 e zero depois disso. Desse modo, para que o investimento de F1 seja contínuo,

$$H < \frac{H-F}{1-\rho} < 0 \text{ ou } \rho > \frac{F-L}{H-L}$$

Portanto, as estratégias especificadas em (22) constituem um equilíbrio se (21) é satisfeita. A ideia geral dessa proposição é que F1 tem custos para barrar a entrada de F2 □

8.7 Economia Judo

Mostraremos que a entrante potencial em um mercado pode adotar a estratégia "judo" que se refere que a entrante investirá num nível de capacidade limitado.

Considere um jogo de dois estágios em que a firma potencialmente entrante escolherá:

(a) se entrará;

(b) sua capacidade produtiva, k; e

(c) seu preço p^e.

No segundo estágio a firma incumbente escolhe p^I. Por suposição, essa companhia possui uma capacidade não limitada. Suponha que essas firmas produzem produtos homogêneos em um único mercado que possui a curva de demanda dada por $p = 100 - Q$.

Ainda por simplicidade, assumimos que todos os consumidores preferem a marca mais barata. No entanto, os consumidores preferem a marca incumbente a preços iguais. Formalmente, seja q^I a quantidade demandada da incumbente e q^ea quantidade demandada da entrante caso ela entre. Então, para um nível de investimento suficientemente baixo de capacidade investida pela entrante, *k*, cada firma se depara com as seguintes curvas de demanda:

$$q^I = \begin{cases} 100 - p^I \text{ se } p^I \leq p^e \\ 100 - k - p^I \text{ se } p^I > p^e \end{cases} \quad \text{e} \quad q^e = \begin{cases} k \text{ se } p^I > p^e \\ 0 \text{ se } p^I \leq p^e \end{cases} \tag{8.24}$$

Suponha que no primeiro estágio a entrante escolha k e p^e. No segundo estágio a firma incumbente poderá barrar a entrada colocando $p^I = p^e$ ou acomodar atribuindo $p^I > p^e$. Se a entrada é barrada então:

$$\pi_I^D = p^e \left(100 - p^e\right)$$

Caso contrário:

$$\pi_A^I = p^I \left(100 - k - p^I\right)$$

A incumbente escolherá $p^I > p^e$ que:

$$Max\, \pi_A^I = p^I \left(100 - k - p^I\right)$$

então teremos que:

$$p_A^I = \frac{(100-k)}{2}; q_A^I = \frac{(100-k)}{2}; \pi_A^I = \frac{(100-k)^2}{4}$$

.

Comparando com o lucro ao barrar a entrada:

$$\pi_D^I = p^e \left(100 - p^e\right)$$

Então temos que: $\pi_A^I \geq \pi_D^I$ ou seja:

$$\frac{(100-k)^2}{4} \geq p^e \left(100 - p^e\right) \tag{8.25}$$

Se a entrada for acomodada a entrante ganha $\pi^e = p_e k > 0$.

Proposição. *Há um nível de capacidade k e um preço p_e atribuídos pela entrante que farão com que o incumbente ache lucrativo acomodar a entrada.*

8.8 Compra espacial precedente

Considere uma empresa que possui dois restaurantes, um de comida chinesa (C) e outro de pratos japoneses (J). Suponha que há dois consumidores que "diferenciam" que a utilidade é diferenciada levemente em relação a esse tipo de culinária. A função de utilidade desse consumidor é dada por:

$$U^C = \begin{cases} \beta - p^C \text{ se compra comida C} \\ \beta - \lambda - p^J \text{ se compra comida J} \end{cases}$$
$$U^J = \begin{cases} \beta - \lambda - p^C \text{ se compra comida C} \\ \beta - p^J \text{ se compra comida J} \end{cases} \tag{8.26}$$

O nível de satisfação por comer é dado por β e $\lambda > 0$ denota a "leve" desutilidade de comer a comida que é menos preferida em relação a outra. Por simplicidade, consideramos $\beta \in]\lambda, 2\lambda[$ e que os custos de operação dos restaurantes são nulos.

Ainda considere que os dois restaurantes são de propriedade de uma única firma (F1, por exemplo) então o dono do monopólio poderia cobrar preços $\beta = p^J = p^C$ em cada restaurante e o monopólio lucraria $\pi_1 = 2\beta$ (note que β zera o EC do consumidor que prefere a comida C ou J).

Entrada no mercado de comida chinesa

Suponha que uma nova empresa (F2) com um diferente dono surja no mercado. Assumindo competição o preço da comida chinesa cairá para zero. Lembre que $p_1^C = p_2^C = Cmg = 0$. Como essa entrada afetaria o preço de monopólio? Com a nova empresa no mercado, os consumidores iriam preferir comprar comida chinesa, mesmo aqueles que gostam mais de comida japonesa. Portanto, o preço máximo que o monopólio poderia cobrar pela comida japonesa seria $p^J = \lambda$. Claramente, para esse preço o consumidor inclinado pela comida japonesa poderia comprá-la como:

$$U^J(J) = \beta - p^J = \beta - \lambda \geqslant \beta - \lambda - p^C = U^J(C)$$

Como $p^C = 0$ o consumidor que prefere a comida japonesa é indiferente. O lucro do monopolista após a entrada de uma nova firma é $\pi_1 = \lambda$.

O incumbente retira o restaurante chinês

Nessa condição, o mercado fica sobre uma estrutura de duopólio, com firmas vendendo produtos diferenciados.

Observação. Considere que há uma substitutibilidade entre essas refeições. Imagine que a restrição orçamentária do consumidor é: $m = q^C p^C + q^J p^J$. Se um dos bens é mais barato, o consumo será restrito a ele. Se os preços são iguais, $\left(\beta = p^J = p^C\right)$, o consumidor será indiferente, ou seja: $q^C = q^J = \frac{m}{p^C + p^J} = \frac{m}{2\beta}$. Considere que $m = 2\beta$, portanto $q^C = q^J = 1$.

Lema. *O único equilíbrio no jogo de duopólio dos restaurantes consiste:*

i) cada consumidor efetuará a compra no seu restaurante preferido;

ii) os preços de equilíbrio são $p_1^J = p_2^C = \beta$.

Demonstração. Se o restaurante japonês deseja atrair os consumidores orientados a comprar a comida chinesa ele deveria atribuir seu preço$p^J = p^C - \lambda = \beta - \lambda$. Nesse caso, $\pi_2 = 2(\beta - \lambda)$. Quando ele não faz isso, $\pi_2 = \beta$. Então, $2\beta - 2\lambda > \beta \to 2\lambda > \beta$. Como $\beta \in]\lambda, 2\lambda[$ não há incentivo que justifique essa escolha. O mesmo argumento vale para o restaurante chinês. □

Proposição. *Quando ocorre a entrada de uma nova empresa no mercado de restaurantes chineses, o monopolista maximizaria o seu lucro fechando o restaurante que possuía nesse mercado.*

Demonstração. O lucro da firma incumbente quando ela opera em dois mercados é $\pi_1 = \lambda$. Quando ela opera apenas no restaurante japonês o lucro é β . Logo, $\beta > \lambda$, então sempre será melhor operar em um único mercado. □

8.9 Limitar preços como sinalização de custos

Estudaremos se limitar preços pode servir como um sinal para a entrante potencial. Consideraremos que a empresa que almeja entrar no mercado não conhece a estrutura de custos do incumbente.

Demanda, firmas e horizonte temporal

Suponha que o horizonte temporal seja definido *t=1,2.* A demanda do mercado é dado por $p = 10 - Q$. A F1 é a incumbente e deve escolher o nível de produção no primeiro período (q_1). A F2 escolhe se entrará ou não no mercado quanto *t=2.*

Suposição 2: Em t=2, se a entrada ocorre, então ambas firmas competem por quantidade. Caso a entrada não ocorra F1 obtém lucros de monopólio.

Custos e informação

A F2 possui um custo $c_2 = 1$, mais um custo fixo $F = 9$ caso entre em *t=2.* Essa estrutura de custos é de conhecimento comum. Em contraste, a estrutura de custos de F1 é conhecida por ambas as firmas. A possível entrante sabe a probabilidade em que as funções de custo de F1 estão distribuídas.

$$c_1 = \begin{cases} 0 \text{ com } 0.5 \\ 4 \text{ com } 0.5 \end{cases} \tag{8.27}$$

Jogo de dois períodos

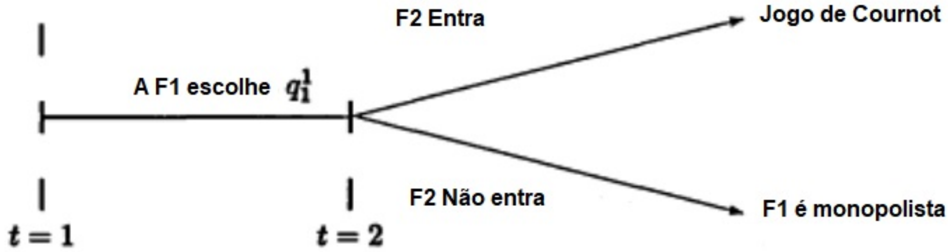
Em *t=1*, F1 lucra $\pi_1 = (10 - q_1^1)\, q_1^1 - c_1 q_1^1$. Em *t=2*, F2 observa q_1^1 e decide se entrará ou não.

Tabela 8.1: Nível de Lucros para *t=2*

	F2	
F1	Entra	Não Entra
Baixo (0)	$\pi_1^C(0) = 13; \pi_2^C(0) = -1.9$	$\pi_1^m(0) = 25; \pi_2(0) = 0$
Alto (4)	$\pi_1^C(4) = 1; \pi_2^C(4) = 7$	$\pi_1^m(4) = 9; \pi_2(0) = 0$

A figura abaixo resumo o *timing do jogo:*

Figura 8.7: Jogo de dois períodos de barreira a entrada



Solucionando o jogo

Se F1 possui custo alto, F2 maximizará o seu lucro esperado:

$$E\pi_2^C = 0.5\pi_2^C(0) + 0.5\pi_2^C(4) = \frac{-1.9}{2} + \frac{7}{2} \cong \frac{5}{2} = 2.5 > 0$$

Na verdade o tipo de F1 pouco importa para F2, o que realmente vale são suas crenças a respeito da estrutura de custos de F1.

Se F1 é de alto custo ela tomará as seguintes decisões:

$Max\pi_1^m = (10 - q_1^1)\, q_1^1 - 4q_1^1$ o que implica que $q_1^m = 3$ e $p_1^m = 7$. Então $\pi_1^m = 9$.

Considere a entrada de F2:

$Max\pi_1^m = (10 - q_1 - q_2)\, q_1 - 4q_1$. Na estrutura de Cournout teremos que: $q_1^C = 1$ e $q_2^C = 4$ e$p^C = 5$. Então $\pi_1^C = 1$ e $\pi_2^C = 7$. Finalmente $\pi_1 = \pi_1^m + \pi_1^C = 9 + 1 = 10$.

Vejamos se F1 for de custo baixo:

$Max\pi_1^m = (10 - q_1^1)\, q_1^1$ o que implica que $q_1^m = 5$ e $p_1^m = 5$. Então $\pi_1^m = 25$. Na estrutura de Cournout teremos que: $q_1^C = {}^{11}/_3$ e $q_2^C = {}^{8}/_3$ e$p^C = {}^{11}/_3$. Então $\pi_1^C = 13$ e $\pi_2^C = -1.9$. Finalmente $\pi_1 = \pi_1^m + \pi_1^C = 25 + 13 = 38$.

Proposição. *Uma firma estabelecida de baixo custo deveria produzir* $q_1^1 = 5.83$ *e a entrada não ocorrerá em t=2.*

Demonstração. A F1 de baixo custo deve fazer algo "heroico", ou seja, que F1 de custo alto não faria de forma alguma. "Intuição": Suponha que F1 de alto produza a quantidade de concorrência perfeita (*p=CMg*) em *t=1. Nesse caso* $q_1^1 = 6$ e o lucro será zero. Então nesse caso, é melhor acomodar a entrada no segundo período:

$$\pi_1^A + \pi_1^m(4) < \pi_1^m(4) + \pi_1^C(4)$$

$$0 + 9 < 9 + 1$$

A empresa de alto custo não ofertaria uma quantidade igual a seis. Agora considere que a F1 é de baixo custo. Como a F2 sabe que a incumbente não ofertará $q_1^1 = 6$, mas qual seria a quantidade que a empresa de baixo custo poderia ofertar para barrar a entrada? A resposta é algo menor que 6, mas superior a quantidade ofertada na estrutura de monopólio. Note que a empresa de custo alto seria indiferente entre barrar a entrada e acomodar se:

$$\pi_1^B + \pi_1^m(4) = \pi_1^m(4) + \pi_1^C(4)$$

$$\pi_1^B + 9 = 10$$

$$\left(10 - q_1^1\right) q_1^1 + 9 = 10$$

$$q_1^1 \cong 5.83$$

Nesse caso os lucros seriam praticamente iguais. Vejamos,que se a firma de baixo custo produzir $q_1^1 = 5.83$, então $\pi_1^m(0)_{q_1^1=5.83} = 24.31$ em t=1 e o lucro de monopólio em t=2 é igual a 25. Então:

$$\pi_1^m(0)_{q_1^1=5.83} + \pi_1^m(0) > \pi_1^m(0) + \pi_1^C(0)$$

$$24.31 + 25 > 25 + 13$$

$$49.31 > 38$$

Assim, a empresa incumbente não permitirá a entrada e produzirá $q_1^1 \in [5.83, 8.5[$. □

Nota: 8.5 deixa F1 de custo baixo indiferente entre sinalizar em t=1 ou permitir a entrada.

8.10 Mercados contestáveis

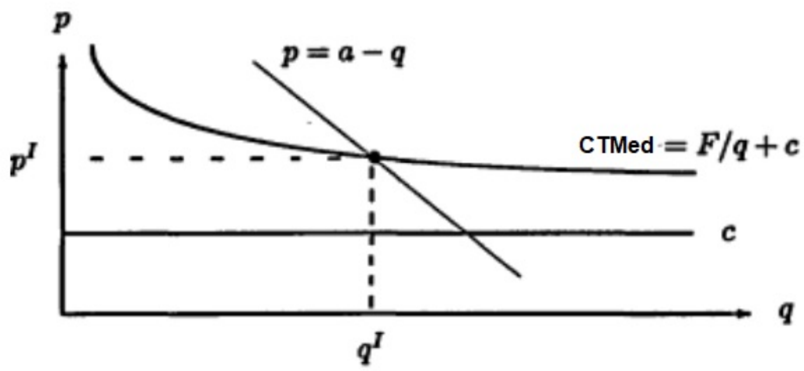
Imagine uma estrutura de mercado na qual a empresa incumbente é constantemente ameaçada pela entrada de outras firmas. A principal suposição desse modelo é que não custos irrecuperáveis.

Assuma uma indústria de produtos homogêneos em que há uma firma incumbente e entrantes potenciais. Seja $CT(q_i) = F + cq_i$ e a demanda $p = a - Q$.

Definição. (i) Uma configuração da indústria é dada pelo par $\left(p^I, q^I\right)$ que se referem ao preço e a quantidade cobrados pela incumbente. (ii) Essa configuração é viável se: $p^I = a - q^I$ e $p^I q^I \geq F + cq^I$. (iii) Essa configuração é sustentável se nenhum entrante potencial pode fazer lucros reduzindo p^I. Não existe p^e que pode satisfazer $p^e \leq p^I, q^e \leq a - p^e$ e $p^e q^e > F + cq^e$. (iv) uma configuração da indústria é um equilíbrio em um mercado contestável se ele é sustentável.

No mercado contestável a incumbente cobra um $p^I = CTMed$. Obviamente essa empresa obtém lucros positivos.

Figura 8.8: Equilíbrio em um mercado contestável



Essa estrutura de mercado pode ser utilizada para descrever uma indústria multiproduto, ou seja, a empresa incumbente pode possuir economias de escopo. No entanto, a suposição que não há custos de entrada é bastante forte.

9 Pesquisa e Desenvolvimento

9.1 Classificação do processo de inovação

Classificaremos o processo de inovação de acordo com a magnitude da redução de custo gerado pelo P&D.

Assumimos inicialmente que todas as empresas possuem tecnologias idênticas o que significa que elas produzirão com algum custo $c_0 > 0$. Se as firmas competem *a la Bertrand* temos $p_0 = c_0$ e a quantidade total produzida será Q_0.

Suponha que apenas uma das empresas possua a seguinte tecnologia de P&D: A firma pode construir um laboratório de pesquisa que conduz a uma redução do custo $c < c_0$.

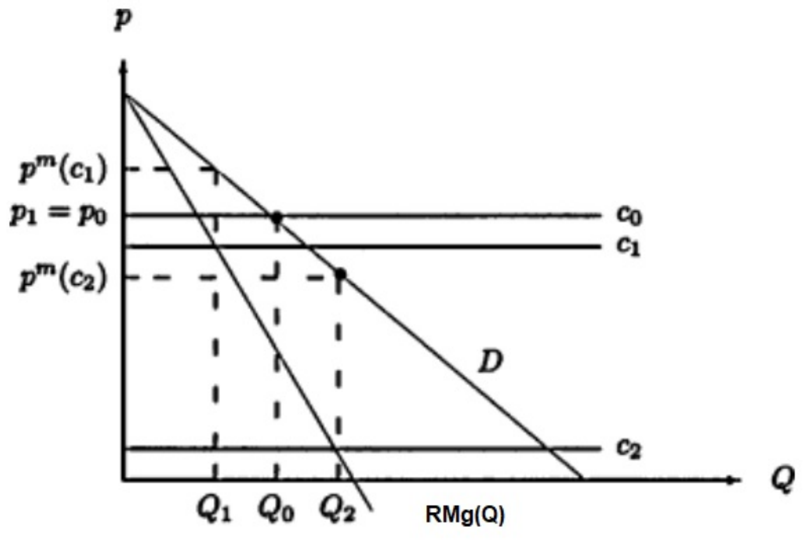
Definição. Seja $p^m(c)$ o preço que seria cobrado por uma firma monopolista cujo o custo unitário é dado por c. Então,

1. A inovação é grande (drástica) se $p^m(c) < c_0$. Isto é, se a inovação reduz o custo a um nível associado ao preço de monopólio que é menor que custo de produção das demais firmas competidoras.

2. A inovação é pequena ou não drástica se $p^m(c) > c_0$.

A figura 1 expressão as possíveis classificações do processo de inovação:

Figura 9.1: Classificação do Processo de Inovação



A redução do custo de c_0 para c_1 é chamada de pequena. A redução de custo não é suficientemente grande implicando que a inovação não faz com que a empresa inovadora cobre o preço de monopólio. Na verdade a firma inovadora cobrará um preço $p_I = c_0 - \varepsilon \approx c_0$ e venderá Q_0. O inovador venderá para todo o mercado e obterá um lucro $\pi_I = (c_0 - c_I) Q_0$.

A redução de custo de c_0 para c_2 é significativa. A empresa pode remover todos os seus rivais do mercado e cobrará $p_2^m(c_2) < c_0$. Assim, a inovação grande reduz o preço de mercado e aumenta a quantidade vendida para Q_2.

9.2 Corrida para inovação

Assuma que uma nova descoberta traduza-se em um preço que pode ser visto como o valor de uma patente associado com alguns ganhos de lucros de monopólio.

Considere uma indústria com duas firmas que estão buscando (pesquisando) uma nova tecnologia para a produção de um novo equipamento. A descoberta não é certa e cada firma pode investir um montante de R\$ I no laboratório de pesquisa. O *payoff* do investimento em P&D é o seguinte:

Suposição 1: *Uma vez que a firma investe R\$ I no laboratório, há uma probabilidade* α *da descoberta de uma tecnologia que resultará num lucro R\$V se a firma descobre sozinha (se uma delas). O lucro será R\$ V/2 se ambas descobrirem e zero se não for descoberto.*

9.2.1 Equilíbrio na corrida por P&D

Seja $E\pi_k(n)$ o lucro esperado da firma k decorrente do investimento em inovação quando o número total de firmas é *n=1,2*. Seja $i_k \in \{0, I\}$ o gasto da firma k.

Uma única firma empreendendo em P&D

Se uma única firma investe em P&D ela descobre (inova) com uma probabilidade α.

$$E\pi_1 = \alpha(V - I) + (1 - \alpha)(-I) = \alpha V - I$$

Igualando $E\pi_1 = 0$ teremos:

$$i_1 = \begin{cases} I \text{ se } \alpha V \geq I \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases} \tag{9.1}$$

Duas firmas investindo em P&D

Há dois pontos importantes a serem considerados sobre a decisão da firma. (i) Há incerteza tecnológica (se o produto será ou não descoberto); (ii) há incerteza de mercado (se o produto será descoberto pela rival).

Quando duas empresas (investem) em P&D, o lucro esperado de cada firma k é dado por:

$$E\pi_k\left(2\right) = \underbrace{\alpha\left(1-\alpha\right)V}_{\text{somente } k \text{ descobre}} + \underbrace{\alpha^2\frac{V}{2}}_{\text{ambas descobrem}} - I \tag{9.2}$$

Considere a seguinte tabela de probabilidades:

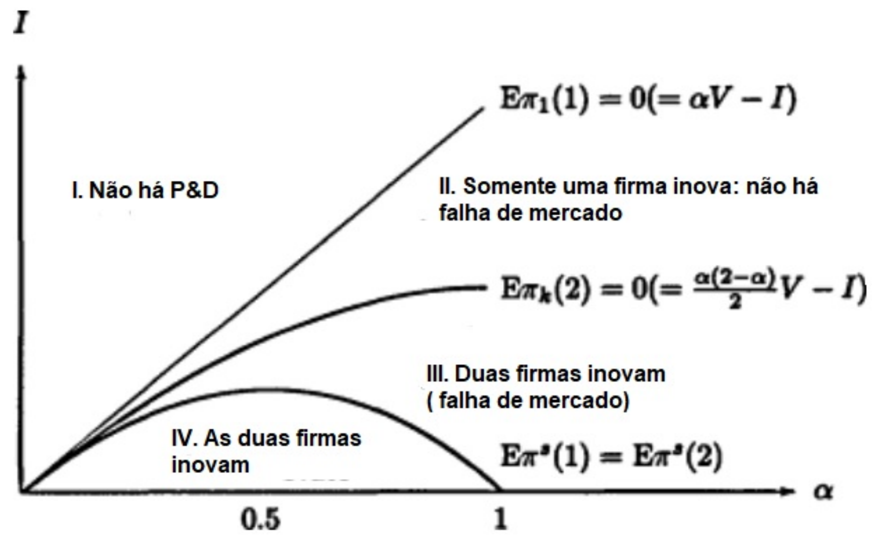
Tabela 9.1: *Probabilidades de Investimento*

F1	Inova (α)	Não Inova $(1-\alpha)$
Inova (α)	α^2	$\alpha\left(1-\alpha\right)$
Não Inova $(1-\alpha)$	$\alpha\left(1-\alpha\right)$	$\left(1-\alpha\right)^2$

Igualando (2) a zero implica numa condição suficiente para ambas investirem em P&D:

$$i_1 = i_2 \text{ se } \frac{\alpha\left(2-\alpha\right)V}{2} \geq I \tag{9.3}$$

Figura 9.2: Corrida por P&D: competição de duas firmas



9.2.2 Nível social ótimo de P&D

Investigaremos o número de firmas que maximiza o nível de bem estar social. O aumento de n aumenta as chances de ocorrerem novas descobertas, mas também aumenta a probabilidade do custo agregado com P&D crescer. Denotaremos $E\pi^S\left(n\right)$ o lucro esperado quando n firmas investem em P&D e o bem estar associado a essa lucratividade esperada.

Quando somente uma firma investe em P&D:

$$E\pi^{S}(1) = \alpha V - I = E\pi_1(1)$$

Assim, quando há somente uma firma o valor social esperado do P&D coincide com o lucro esperado de F1. Quando as duas firmas investem temos que:

$$E\pi^{S}(2) = \underbrace{\alpha(1-\alpha)V}_{\text{somente 1 descobre}} + \underbrace{\alpha^2\frac{V}{2}}_{\text{ambas descobrem}} - 2I$$

Comparando $E\pi^{S}(2)$ com $E\pi^{S}(1)$ temos que $E\pi^{S}(2) \geq E\pi^{S}(1)$ se, e somente se $\alpha(1-\alpha)V \geq I$.

- **Região I:** A combinação de um alto custo de inovação com uma baixa probabilidade de descoberta torna não lucrativo que uma única firma inove. Se não há inovação, não há benefícios sociais.
- **Região II:** As combinações de custo e da probabilidade de descoberta deixam espaço para apenas uma empresa realizar P&D, mantendo o lucro esperado não negativo. Como o custo é relativamente alto (em comparação com a probabilidade de descoberta), não há benefícios sociais em ter uma segunda empresa envolvida em P&D.
- **Região III:** Um custo de inovação relativamente baixo torna lucrativo para uma segunda empresa se envolver em P&D. No entanto, do ponto de vista do bem-estar da sociedade, o custo de duplicar o esforço de P&D ($2I$) é maior do que os benefícios da sociedade pelo aumento da probabilidade de obter a descoberta como resultado de ter uma segunda empresa engajada em P&D. Este é um caso de falha de mercado que ocorre porque as empresas não levam em conta como sua P&D afeta o lucro de suas empresas rivais.
- **Região IV:** Essas combinações envolvem um baixo custo de inovação, tornando benéfico para as empresas e para a sociedade se engajar na corrida de P&D, apesar da duplicação de custos de P&D.

Proposição. *A falha de mercado ocorre somente na região III em que o custo de inovação assume um valor intermediário e as duas firmas investem. Formalmente,*

$$E\pi^{S}(1) > E\pi^{S}(2) \;\; \textit{mas} \; E\pi_k(2) > 0 \; \textit{quando}$$

$$\alpha(1-\alpha)V < I < {}^{\alpha(2-\alpha)V}/_{2}$$

9.2.3 Data esperada da descoberta

Suponha que a corrida descrita na seção anterior é repetida até que uma firma faça a descoberta do produto.

Lema. *Seja* $\delta \in \left]0,1\right[$ *. Então:*

$$\sum_{t=1}^{\infty} t\delta^{t-1} = \frac{1}{(1-\delta)^2}$$

Demonstração. Recorde que a soma infinita dos termos de uma progressão geométrica se dá do seguinte modo: $S_n = {}^{a_1}/_{1-q}$. Em que a_1 é o primeiro termo e q é a razão. Note que

$$1 + 2\delta + 3\delta^2 + 4\delta^3 + ...$$

$$\left(1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + ...\right) + \left(\delta + \delta^2 + \delta^3 + ...\right) + \left(\delta^2 + \delta^3 + \delta^4 + ...\right) + ...$$

$$\frac{1}{1-\delta} + \frac{\delta}{1-\delta} + \frac{\delta^2}{1-\delta} + ...$$

$$\frac{1}{(1-\delta)^2}$$

□

Seja $T(n)$ a data incerta quando pelo menos uma firma descobre o produto, dado que $n \in \{1,2\}$. Seja $ET(n)$ a data esperada dessa descoberta.

Uma única firma

Quando somente uma firma investe em P&D a probabilidade que a descoberta seja realizada em $T(1) = 1$ é α. A probabilidade que F1 descubra em *t=2* é $\alpha(1-\alpha)$ e assim por diante. Então:

$$ET(1) = 1\alpha + 2\alpha(1-\alpha) + 3\alpha(1-\alpha)^2 + ...$$

$$ET(1) = \frac{\alpha}{[1-(1-\alpha)]^2} = \frac{1}{\alpha} \tag{9.4}$$

Duas firmas

A probabilidade que nenhuma das firmas descubra a uma data particular é $(1-\alpha)^2$. A probabilidade que pelo menos uma das firmas descubra é: $[1-(1-\alpha)]^2 = \alpha(2-\alpha)$. Então, $T(2) = 1 = \alpha(2-\alpha)$, isto é, pelo menos uma empresa descobriu em *t=1*. Logo,

$T(2) = 2 = (1-\alpha)^2 \alpha(2-\alpha)$, ou seja, a probabilidade de nenhuma empresa ter descoberto em *t=1* vezes a chance de pelo menos uma empresa descobrir na data corrente.

$$ET(2) = \alpha(2-\alpha)1 + (1-\alpha)^2 \alpha(2-\alpha)2 + (1-\alpha)^4 \alpha(2-\alpha)3 + ...$$

$$\alpha(2-\alpha)\sum_{t=1}^{\infty} t\left[(1-\alpha)^2\right]^{t-1} = \frac{1}{\alpha(2-\alpha)} \tag{9.5}$$

Note que $ET(2) < ET(1)$ o que indica que a abertura de mais laboratórios de pesquisa reduz o tempo da descoberta.

9.3 Cooperação em P&D

Nessa seção avaliaremos um jogo de dois estágios em que *t=1* as firmas determinam de modo não cooperativo, primeiramente e então cooperativamente o quanto irão investir em P&D. As firmas competem *a la Cournot* e a função de demanda é dada por $p = 100 - Q$.

Processo inovativo

Seja x_i o total empreendido de P&D pela firma i. Adicionalmente, considere $C_i(x_1, x_2)$ o custo unitário da empresa i o qual assume-se ser uma função do investimento em P&D de ambas as firmas. Formalmente, considere:

$$C_i(x_1, x_2) = 50 - x_i - \beta x_j \text{ sendo } i \neq j \text{ e } 0.18 < \beta < 1 \tag{9.6}$$

Definição. Dizemos que as tecnologias de P&D exibem efeitos de transbordamentos se $\beta > 0$.

Como última suposição, consideramos que P&D é custoso para as empresas. O custo para a empresa i operar um laboratório de P&D é dado por $TC_i(x_i)$.

Suposição 2: Os laboratórios de pesquisa operam com retornos decrescentes de escala, isto é: $TC_i(x_i) = {(x_i)^2}/{2}$.

9.3.1 P&D não cooperativo

Período dois

A competição ocorre *a la Cournot* no segundo período após a inovação ocorrer então:

$$\pi_i(c_1, c_2)_{t=2} = \frac{(100 - 2c_i + c_j)^2}{9} \tag{9.7}$$

Primeiro período

No primeiro período a firma escolhe o seu nível de P&D considerando a escolha da rival. Inserindo (6) em (7) teremos que:

$$\underset{x_i}{Max}\pi_i = \frac{1}{9}\left[100 - 2\left(50 - x_i - \beta x_j\right) + 50 - x_i - \beta x_j\right]^2 - \frac{\left(x_i\right)^2}{2} \tag{9.8}$$

Dado que as funções de *payoff* são simétricas então $x_1 = x_2 = x^{mc}$. Então teremos que:

$$x = \frac{50\left(2 - \beta\right)}{4.5 - \left(2 - \beta\right)\left(1 + \beta\right)} \tag{9.9}$$

9.3.2 P&D cooperativo

Se o P&D for cooperativo na modalidade de uma *joint-venture*, por exemplo, as firmas escolhem conjuntamente os níveis de x_i e x_j:

$$\underset{x_1,x_2}{Max}\prod = \pi_1 + \pi_2$$

Note que $x_1^C = x_1^C = x^C$. Então teremos que:

$$x^C = \frac{50\left(\beta + 1\right)}{4.5 + \left(1 + \beta\right)^2} \tag{9.10}$$

Proposição. *Podemos elencar os seguintes pontos:*

1. A cooperação aumenta o lucro das firmas;

2. Se o P&D possui um efeito de transbordamento alto, então os níveis de P&D cooperativos são mais alto que aqueles não cooperativos. Formalmente, se $\beta > 0.5$ então $x^C > x^{mC}$;

3. Se o efeito de transbordamento de P&D é pequeno então os níveis de P&D cooperativos são mais baixos que os não cooperativos. Formalmente, se $\beta < 0.5$ então $x^C < x^{mC}$ e nesse caso $Q^C < Q^{mC}$.

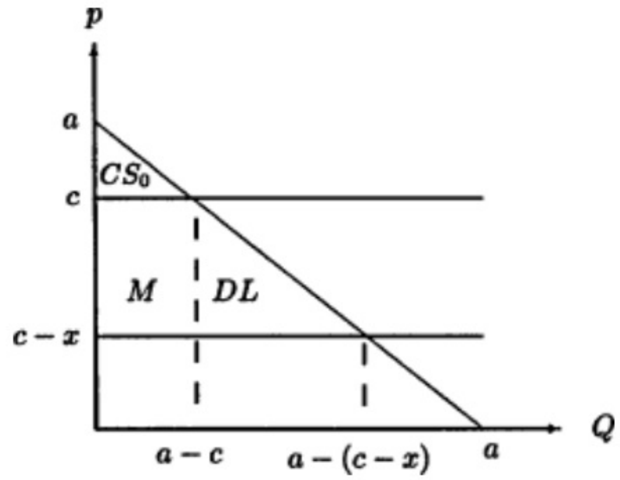
Demonstração. Para a parte 1, se $x^C \neq x^{mC}$ as firmas aumentarão os seus lucros cooperando. Para 2 e 3 é necessário comparar (9) com (10). Na estrutura de mercado de Cournot, a quantidade agregada aumenta com o declínio dos custos de produção. □

9.4 Patentes

Uma patente é um documento legal, garantido pelo governo ao investidor que permite explorar unicamente a invenção por um número específico de anos. Há diversos tipos de patentes, como patentes para um novo produto, para um novo processo ou substância nova. Para uma invenção ser classificada como valorosa ela precisa: i) ser nova; ii) útil e; iii) não trivial.

Veremos um método simples para calcular a duração ótima de uma patente. Considere uma empresa capaz de investir em P&D. O custo de empreender em P&D, reduz o custo unitário para $c > 0$ para $c - x > 0$. Assumimos que a inovação é pequena e que $p = c$. A curva de demanda é dada por $p = a - Q$ sendo $a > c$.

Figura 9.3: Ganhos e Perda da Lei de Proteção das Patentes



Na figura 3 a área M mede o ganho do inovador, devido ao lucro obtido com a inovação. No Brasil o prazo referente a patente pode variar entre 15 a 20 anos, salvo exceções. Para mais detalhes o leitor é convidado a ver o texto da Lei 9.279 de 1996. A área DL representa o peso morto resultante dos lucros de monopólio obtidos pelo detentor da patente. Assumindo que os lucros são distribuídos entre os consumidores via dividendos, após o tempo da patente expirar o preço de equilíbrio cai para $c - x$. Assim o ganho da sociedade é a soma *M+DL* como os direitos de monopólio serão removidos.

$$M(x) = (a - c)\, x \text{ e } DL = \frac{x^2}{2} \tag{9.11}$$

Desenvolveremos um modelo simples para entender como funciona esse processo.

9.4.1 Escolha de P&D de acordo com o tempo de duração das patentes

Seja $\pi(x, T)$ o lucro presente do inovador para a escolha de P&D ao nível x. O inovador toma T como dado e escolhe em $t = 1$ o nível de x para:

$$\underset{x}{Max}\, \pi(x, T) = \sum_{t=1}^{T} \rho^{t-1} M(x) - TC(x) \tag{9.12}$$

Lema. *Seja* $\sum\limits_{t=1}^{T} \rho^{t-1} = \sum\limits_{t=0}^{T-1} \rho^{t} = 1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + ...$

$$= \left(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + ...\right) + \left(\rho + \rho^2 + \rho^3 + ...\right)$$

$$= \frac{1}{1-\rho} - \rho^T \left(\rho + \rho^2 + \rho^3 + ...\right)$$

$$= \frac{1}{1-\rho} - \frac{\rho^T}{1-\rho}$$

$$= \frac{1-\rho^T}{1-\rho}$$

Então teremos que:

$$\underset{x}{Max}\pi\left(x,T\right) = \frac{1-\rho^T}{1-\rho}\left(a-c\right)x - \frac{x^2}{2}$$

O que implica que o nível ótimo de P&D do inovador é:

$$x^I = \frac{1-\rho^T}{1-\rho}\left(a-c\right) \tag{9.13}$$

Proposição. *Podemos dividir essa proposição em três partes:*

1. o nível de P&D aumenta com o tempo de duração da patente. Formalmente x^I *aumenta com* T*.*

2. o nível de P&D aumenta com o aumento na demanda e decresce com o aumento no custo unitário. Formalmente, x^I *aumenta com um aumento em* a *e com um decréscimo em* c*.*

3. o nível de P&D aumenta com um aumento no fator de desconto ρ *ou com a queda em* r*.*

Devemos lembrar que $\rho = \frac{1}{1+r}$.

9.4.2 Tempo ótimo de duração de patentes

Suponha que o formulador de política pública maximiza o bem estar social escolhendo o tempo ótimo de duração da patente.

$$\begin{gathered} \underset{T}{Max}W\left(T\right) = \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1}\left[CS_0 + M\left(x^I\right)\right] + \sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} DL\left(x^I\right) - \frac{\left(x^I\right)^2}{2} \\ s.a \\ x^I = \frac{1-\rho^T}{1-\rho}\left(a-c\right) \end{gathered} \tag{9.14}$$

como

$$\sum_{t=1}^{\infty} \rho^{t-1} = \rho^T \sum_{t=1}^{\infty} \rho^t = \frac{\rho^T}{1-\rho}$$

Usando (11), (14) pode ser escrita do seguinte modo:

$$\begin{gathered}\underset{T}{Max}W\left(T\right)=\tfrac{CS_0+(a-c)x^I}{1-\rho}-\tfrac{1-\rho-\rho^T}{1-\rho}\tfrac{\left(x^I\right)^2}{2}\\ s.a\\ x^I=\tfrac{1-\rho^T}{1-\rho}\left(a-c\right)\end{gathered} \tag{9.15}$$

Como T é um número natural, podemos usar cálculo numérico para acharmos T^*.

Proposição. *O tempo ótimo de patente é finito. Formalmente, $T^* < \infty$.*

É suficiente mostrarmos que o nível de bem estar sob um período de proteção de patente excede esse nível por um tempo de vida finito ($T = \infty$). Dividiremos a prova em duas partes.

Demonstração. Parte 1: Para $\rho < 0.5$ quando $T = 1$, $x^I\left(1\right) = \left(a - c\right)$ assim:

$$W\left(1\right)=\frac{CS_0+\left(a-c\right)^2}{1-\rho}-\frac{\left(a-c\right)^2}{2}\frac{\left(1-2\rho\right)}{\left(1-\rho\right)}=\frac{CS_0}{1-\rho}+\frac{\left(a-c\right)^2}{2}\frac{\left(1+2\rho\right)}{\left(1-\rho\right)} \tag{9.16}$$

quando $T = \infty$ temos que $x^I\left(\infty\right) = \frac{(a-c)}{(1-\rho)}$. Note que $0 < \rho < 1$ então quando $T \to \infty$ isso implica que $\rho^T \to 0$.

$$W\left(\infty\right)=\frac{CS_0}{1-\rho}+\frac{\left(a-c\right)^2}{\left(1-\rho\right)^2}-\frac{\left(a-c\right)^2}{2\left(1-\rho\right)^2} \tag{9.17}$$

Note que se $W\left(1\right) > W\left(\infty\right)$ então $W\left(1\right) - W\left(\infty\right) > 0$. Se $W\left(1\right) - W\left(\infty\right) = 0$ então $\rho = 0.5$. Se $\rho < 0.5$ vale que $W\left(1\right) > W\left(\infty\right)$.

Parte 2:

Se $\rho >> 0.5$ podemos aproximar T sendo uma variável contínua. Diferenciando (15) em relação a T e igualando a zero teremos:

$$T^*=\frac{ln\left[3+\sqrt{6+\rho^2-6\rho-\rho}\right]-ln(3)}{ln\rho}<\infty$$

Ao invés de verificar a condição de segunda ordem, observe que para *T=1:*

$$\frac{\partial W\left(1\right)}{\partial T}=\frac{CS_0}{1-\rho}+\frac{\left[\left(a-c\right)^2\rho\left(1-5\rho\right)ln\rho\right]}{2\left(1-\rho\right)^2}>0$$

portanto temos que $\rho > 0.2$. □

9.5 Lançamento de uma invenção

Nos questionamos aqui por qual razão seria lucrativo licenciar uma tecnologia após ter gastos em P&D para um competidor que não o fez. Considere um modelo de Cournot em que a F1 inventou uma inovação do tipo $c_1 = c - x$ e $c_2 = 0$.

Sem licenciamento

As firmas jogam Cournot $\pi_1^C(c_1, c_2) > \pi_2^C(c_1, c_2)$ e $q_1^C(c_1, c_2) > q_2^C(c_1, c_2)$.

Com licenciamento

Suponha que F2 negocie com F1 para a aquisição de um licenciamento. Considere uma taxa paga por unidade de F2 para F1. A empresa 2 compra essa tecnologia e produz $c_2 > c_1$ e paga ϕ para F1. Isso é equivalente a um jogo a la Stackelberg em que F1 é a líder e F2 é a seguidora.

Claramente, F1 coloca $\phi = (c_2 - c_1) - \varepsilon \approx c_2 - c_1 = x$. A F1 cobra uma taxa quase igual a redução de custo associada a tecnologia licenciada. Desse modo, F2 se depara como custo $c_2^1 = c_1 + \phi = c_2 - \varepsilon = c_2$. Portanto, no modelo de Cournot F2 não altera a quantidade produzida e o seu lucro não muda. Em contraste, o lucro de F1 fica do seguinte modo:

$$\pi_1(c_1, c_2) = \pi_1^C(c_1, c_2) + \phi q_2^C(c_1, c_2)$$

Proposição. *Temos que:*

1. Em um ambiente de Cournot, o licenciamento reduz os custos de todas as empresas e,

2. Em um ambiente de Cournot, o bem estar, aumenta quando as firmas licenciam inovações que são redutoras de custo.

9.6 Governos e Corridas Internacionais por P&D

Avaliaremos o papel do governo nas políticas de P&D. Raramente o ente público deixa esse tipo de política totalmente a cargo do setor privado (livre mercado).

9.6.1 Subsidiando o desenvolvimento de um novo produto

Suponha um jogo (BA) com apenas duas nações e duas grandes empresas. A europeia Airbus e a americana Boing.

Tabela 9.2: *Jogo das empresas de engenharia aeronáutica*

	Airbus	
Boing	Produz	Não Produz
Produz	-10, -10	50,0
Não Produz	0, 50	0,0

Proposição. *No jogo das empresas aeronáuticas há dois EN (Produz, Não Produz) e (Não Produz, Produz).*

Suponha que a União Europeia subsidie a produção da empresa Airbus para o desenvolvimento de uma grande aeronave. O subsídio consiste em 15 milhões de Euros.

Tabela 9.3: *Jogo BA com subsídio governamental*

	Airbus	
Boing	Produz	Não Produz
Produz	-10, 5	50,0
Não Produz	0, 65	0,0

Proposição. *O único EN desse jogo é a Airbus produzindo e a Boing não produzindo.*

9.6.2 Subsidiando o processo de inovação

Considere dois países produzindo um bem homogêneo. A demanda mundial por esse bem é $p = a - Q$. Assuma que o custo de pré inovação de cada firma é $0 < c < a$.

Seja x_i o total de P&D subsidiado pelo governo no país i. Assumimos que quando o governo investe em P&D ao nível x_i, o custo unitário de produção da firma i que produz nesse país é reduzido para $c - x_i$ para *i=1,2*. Adicionalmente, assumimos que o custo total para o governo é $TC_i\left(x_i\right) = \frac{x_i^2}{2}$.

Considere um jogo a la Cournot o que implica que o lucro agregado de cada firma é:

$$\pi_i\left(c_1, c_2\right) = \frac{\left(a - 2\left(c - x_i\right) + c - x_j\right)^2}{9} = \frac{\left(a - c + 2x_i - x_j\right)^2}{9}$$

O nível de bem estar do país i é dado por:

$$W_i = \pi_i\left(c_1, c_2\right) - TC_i\left(x_i\right) = \frac{\left(a - c + 2x_i - x_j\right)^2}{9} - \frac{x_i^2}{2}$$

A condição de primeira ordem indica que o governo do país i atribui seus níveis de P&D em resposta as decisões do país *j:*

$$x_i = R\left(x_j\right) = 4\left(a - c\right) - 4x_j \; j, i = 1, 2 \text{ e } i \neq j$$

Proposição. *Se inicialmente o mundo é caracterizado por não ter intervenção governamental, é sempre benéfico pelo menos para algum dos países subsidiar P&D. O aumento no lucro oriundo das exportações com a redução do custo dado pelo P&D domina o custo desse tipo de investimento:*

$$x_1^n = x_2^n = \frac{4\left(a - c\right)}{5}$$

E então finalizamos com a seguinte proposição:

Proposição. *Em um EN de um jogo de investimento em P&D de dois governos, cada um deles subsidiará a empresa que está localizada em seu país. Os níveis de equilíbrio de P&D com subsídio, aumentam a demanda mundial (a) e decai com o custo de produção inicial (c).*

10 Economia da compatibilidade e dos padrões

Começaremos esse capítulo com uma definição:

Definição. 1. As marcas de um produto são compatíveis se elas podem trabalhar conjuntamente, no sentido que o produto de uma marca pode ser operado ou usado por outras marcas. Nesse caso, dizemos que as marcar operam no mesmo (com o mesmo) padrão.

2. As marcas são consideradas como *downward* se um modelo novo é compatível com um antigo, mas o contrário necessariamente não ocorre.

3. Dizemos que as preferências dos consumidores exibem *externalidades de redes* se a utilidade de cada consumidor aumenta com o número de outros consumidores que compram a mesma marca.

Os exemplos são diversos: computadores, celulares, softwares etc. Para ilustramos a significância da escolha do padrão de compatibilidade sobre o lucro das empresas, mostramos uma indústria com duas firmas que podem operar no padrão α ou β.

Tabela 10.1: *Jogo da Padronização*

	FB	
FA	α	β
α	a,b	c,d
β	d,c	b,a

Considere a, b, ce d os lucros das firmas Por suposição, esses parâmetros serão positivos.

Proposição. *1. Se $a, b > max\{c, d\}$ então a indústria produz em um único padrão, ou seja, (α, α) e (β, β) são ENs.*

2. Se $c, d > max\{a, b\}$ então a indústria produz dois padrões distintos, isto é, (α, β) e (β, α) são EN.

10.1 Externalidades de Rede

10.1.1 A demanda interdependente por serviços de comunicação

Considere um grupo de um continuum de usuários de telefone indexados por $x \in [0, 1]$. Interpretamos os índices da seguinte forma:

1. Os consumidores que gostam muito do sistema de telefonia são representados por um valor baixo de x. Esses consumidores possuem a disposição à pagar elevada;

2. Os consumidores que possuem um x elevado, possuem um pequeno desejo de se inscreverem no serviço de telefonia.

Denotamos $n \in [0,1]$ como o número total de consumidores os quais estão inscritos no sistema de telefone e o p o preço de inscrição. A utilidade do consumidor x é definido da seguinte forma:

$$U^X = \begin{cases} n\,(1-x) - p \text{ se o consumidor se inscreve} \\ 0 \text{ se o consumidor não se inscreve} \end{cases} \tag{10.1}$$

Inicialmente, olharemos para um consumidor particular $\widehat{x}$ que é indiferente entra as alternativas disponíveis:

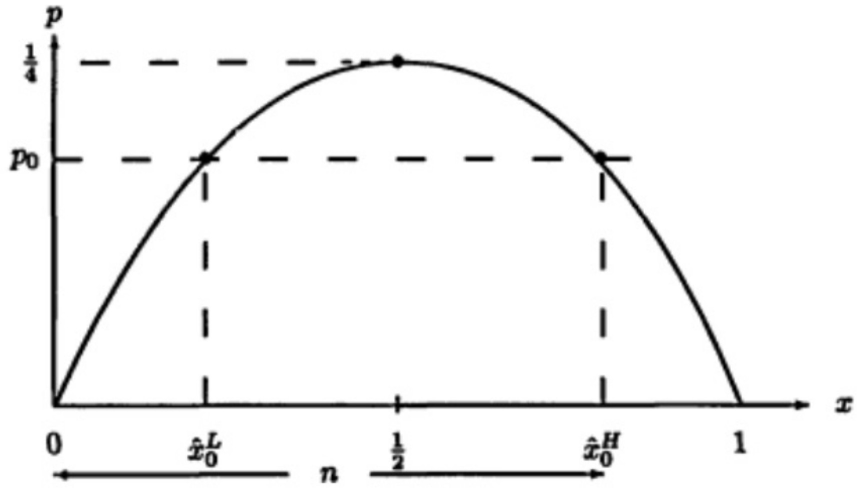
$$n\,(1-\hat{x}) - p = 0$$

Como $\hat{x} = n$ temos que:

$$\hat{x}\,(1-\hat{x}) - p = 0 \text{ ou } p = \hat{x}\,(1-\hat{x}) \tag{10.2}$$

Note que $p = -\hat{x}^2 + \hat{x}$, então p é côncava para baixo.

Figura 10.1: Demanda pelos serviços de telecomunicação



$\hat{x}_0^L$ é definido como a massa crítica para o dado preço p_0, um aumento na demanda levaria o número de inscritos para $\hat{x}_0^H$.

O problema da empresa de telefone monopolista

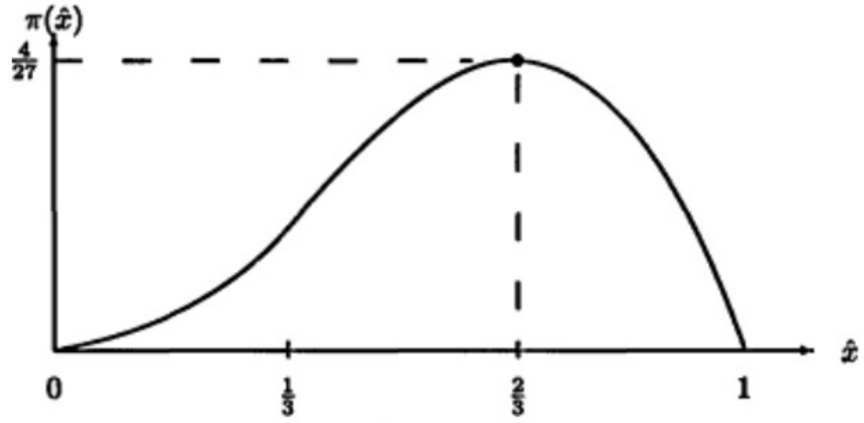
Suponha que há somente uma firma ofertando os serviços de telefonia. Para os gaúchos mais antigos, algo como a CRT. Perguntaremos agora qual é o preço que maximiza o lucro do monopolista:

$$\underset{\hat{x}}{Max}\pi\left(\hat{x}\right)=p\left(\hat{x}\right)\hat{x}=\hat{x}\left(1-\hat{x}\right) \tag{10.3}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial\hat{x}}=2\hat{x}-3\hat{x}^2=0 \text{ e } \frac{\partial^2\pi}{\partial\hat{x}^2}=2-6\hat{x}=0 \tag{10.4}$$

Então $\hat{x}=0$ ou $\hat{x}={}^2/_3$.

Figura 10.2: Função de lucros na presença de externalidade de redes



Proposição. *Uma monopolista maximiza o preço de inscrição atribuindo-o de tal modo que o número de usuários exceda metade da população de consumidores, mas é menor do que o total da população.*

10.1.2 O trade-off entre a padronização e a variedade da produção

Nessa seção assumiremos que há duas marcas e produtos heterogêneos. As preferências dos consumidores são heterogêneas em relação as marcas.

Assumimos que há um continuum de consumidores, normalizamos a população para 1 e assumimos que $a \in \,]0,1[$ preferem a marca A em relação a B e que $a+b=1$. As utilidades desses consumidores são dadas por:

$$U^A=\begin{cases} x_A \text{ Compra A} \\ x_B-\delta \text{ Compra B}\end{cases} \text{ e } U^B=\begin{cases} x_A-\delta \text{ Compra A} \\ x_B \text{ Compra B}\end{cases} \tag{10.5}$$

Consideramos $x_A+x_B=1$ o total de consumidores de cada tipo. O parâmetro δ reflete o montante extra de dinheiro que o consumidor deseja pagar pela marca definida.

Definição. Se $x_A=1$ e $x_B=0$ o produto está padronizado na marca A. Se $x_A=0$ e $x_B=1$ o produto está padronizado em B. Se $x_A,x_B>0$ o produto é produzido com padrões incompatíveis.

Uma alocação de compradores entre as marcas x_A e x_B é um equilíbrio, se nenhum comprador poderia se beneficiar trocando da marca que escolheu para a outra, dado que todos os outros consumidores farão o mesmo.

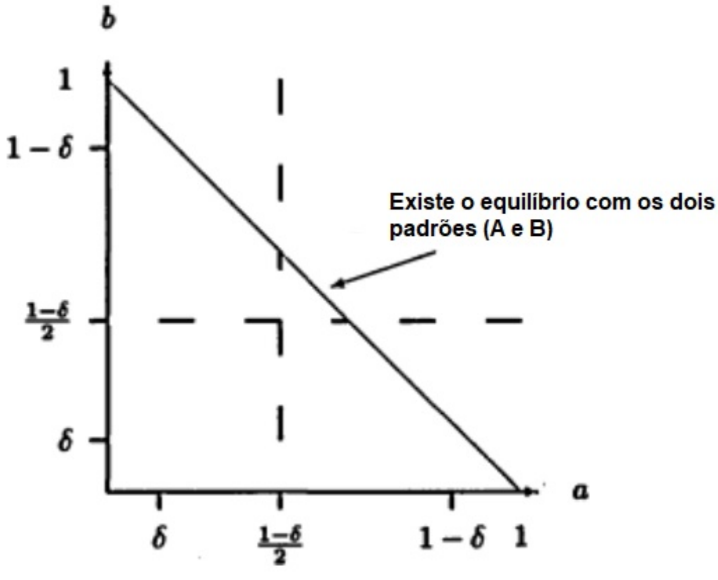
Proposição. *1. Se $\delta < 1$ então há dois equilíbrios: um que o produto A é o padrão $x_A = 1$ e outro que B é o padrão $x_B = 1$.*

2. Se $\delta > 1$, não há padrão por um único tipo.

Note que se $x_A = a$ e $x_B = b$ também é um equilíbrio. Nesse equilíbrio o consumidor do tipo A não trocaria para B se $a > b - \delta$. Como $b = 1 - a$,temos que $a > \frac{1-\delta}{2}$. Similarmente, o tipo B não trocaria para A se $b > \frac{1-\delta}{2}$.

Proposição. *Se o número de consumidores de cada tipo é suficientemente grande, então existe um equilíbrio de padrão duplo. Formalmente, $a, b > \frac{1-\delta}{2}$ então $x_A = a$ e $x_B = b$ é um equilíbrio.*

Figura 10.3: Equilíbrio com compatibilidade



Essa figura ilustra a perda de utilidade do consumir a marca menos preferida. Essa perda aumenta com o acréscimo de δ. Se $\delta > 1$ então o equilíbrio com o duplo padrão sempre existe.

Eficiência e escolha de uma marca

Definimos a função de bem estar social como a soma das utilidades dos consumidores $W = \alpha U^A + bU^B$.

$$W = \begin{cases} a + b\,(1-\delta) \text{ Se A é o padrão} \\ a^2 + b^2 \text{ Se os padrões são incompatíveis} \\ a\,(1-\delta) + b \text{ Se B é o padrão} \end{cases} \tag{10.6}$$

Proposição. *Se há mais consumidores orientados ao uso da marca A do que da marca B, então a padronização por A é socialmente desejada.*

Vejamos agora sob quais condições o equilíbrio de incompatibilidade é preferível em relação a padronização por uma única marca.

Proposição. *1. Se o efeito de preferência de rede é forte em relação a desutilidade em consumir menos da marca preferida $\delta < 1$ então o equilíbrio de incompatibilidade é socialmente ineficiente.*

2. Se $\delta > 1$, a incompatibilidade é socialmente ótima se $a < \frac{\delta}{2}$ e $b < \frac{\delta}{2}$.

Note que a incompatibilidade é preferida do que a padronização A se:

$$a^2 + b^2 > a + b\,(1-\delta)$$

Temos que $a + b = 1$ e portanto:

$$a^2 + b^2 > 1 + \delta b$$

$$\delta > \frac{1 - a^2 - b^2}{b}$$

Se $b = 1 - a$:

$$\delta > \frac{1 - a^2 - (1-a)^2}{(1-a)}$$

$$\delta > \frac{2a\,(1-a)}{(1-a)}$$

$$\delta > 2a \text{ ou } a < \frac{\delta}{2}$$

Similarmente o mesmo procedimento pode ser feito para b. Então temos que:

$$\delta > 2b \text{ ou } b < \frac{\delta}{2}$$

Como $\delta < 1$ essas condições não podem ser garantidas simultaneamente:

$$a + b < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} < 1$$

Proposição. *Existe um equilíbrio em que a indústria adota o padrão da marca menos preferida.*

Considere $a = b = 0.5$ e $\delta = 0.06$. De acordo com a quarta proposição dessa seção um equilíbrio de incompatibilidade de padrões existe se:

$$a, b > \frac{1 - \delta}{2}$$

Então:

$$0.5 > \frac{1 - 0.6}{2} = 0.2$$

Como $\delta < 1$ a incompatibilidade é ineficiente.

Proposição. *Um equilíbrio em que a indústria produz duas marcas incompatíveis não é socialmente eficiente.*

Proposição. *Se a compatibilidade $x_A = a$ e $x_B = b$ é eficiente então o equilíbrio de incompatibilidade existe e é único.*

Demonstração. Se a incompatibilidade é eficiente então $\delta > 1$ como $a, b > 0$ a quarta proposição dessa seção implica que a incompatibilidade é um equilíbrio. Adicionalmente, a terceira proposição implica que um equilíbrio em que a indústria é padronizada em uma única marca não existe. □

10.2 Abordagem dos serviços de apoio

10.2.1 Efeitos de rede sem externalidades de rede

Considere que os consumidores podem escolher livremente entre as duas marcas A ou B. Cada consumidor possui Y reais para poder gastar em uma unidade de hardware. Seja p_i o preço do computador $i = A, B$. O gasto esperado do consumidor é $E_i = Y - p_i$.

Denotaremos por N_i como o número de pacotes de softwares que pode rodar na máquina i. Os consumidores são uniformemente indexados no intervalo $[0, 1]$ de acordo com a sua preferência pela marca B. Definimos a utilidade de um consumidor do tipo δ:

$$U^A = \begin{cases} (1-\delta)\sqrt{N_A} \text{ se o usuário é do tipo A} \\ \delta\sqrt{N_B} \text{ se o usuário é do tipo B} \end{cases} \tag{10.7}$$

A função de utilidade descreve as preferências que exibem o amor pela variabilidade do software.

Figura 10.4: Distribuição das preferências do consumidor

O consumidor será indiferente quando:

$$\left(1-\hat{\delta}\right)\sqrt{N_A}=\hat{\delta}\sqrt{N_B} \tag{10.8}$$

Note que um usuário de A possui $\delta < \hat{\delta}$ e o de B $\delta > \hat{\delta}$. Defina o número total de usuários de A como $\delta_A \equiv \hat{\delta}$ e consequentemente $\delta_B \equiv 1-\hat{\delta}$. Teremos que:

$$\frac{\delta_B}{\delta_A}=\frac{\sqrt{N_B}}{\sqrt{N_A}} \tag{10.9}$$

Proposição. *A marca com uma parcela de mercado mais alta é possui uma grande variedade de softwares disponíveis. Formalmente, se $\delta_A > \delta_B$, se, e somente se $N_A \geq N_B$.*

A indústria de software

Suposição 1: O número de pacotes de software (variedade) adaptado ou suportado por cada marca é proporcional ao gasto agregado de consumidores que compram a marca específica de software.

$$N_A=\hat{\delta}E_A=\hat{\delta}\left(Y-p_A\right) \text{ e } N_B=\hat{\delta}E_B=\hat{\delta}\left(Y-p_B\right)$$

Isso significa que:

$$\frac{\delta_B}{\delta_A}=\frac{Y-p_B}{Y-p_A}$$

$$\frac{1-\hat{\delta}}{\hat{\delta}}=\frac{Y-p_B}{Y-p_A}$$

$$\hat{\delta}\left[\left(Y-p_B\right)+\left(Y-p_A\right)\right]=Y-p_A$$

$$\hat{\delta}=\frac{Y-p_A}{2Y-\left(p_A+p_B\right)} \tag{10.10}$$

Efeitos de rede

Proposição. *Um aumento no preço de hardware A* (p_A) *irá:*

1. Diminuir o número de usuários de A (δ_A *cai);*

2. Aumentar o número de usuários de B (δ_B*sobe);*

3. Diminuir a variedade de softwares dentro da máquina A (N_A *cai) e aumentar a variedade de softwares B* (N_B *sobe);*

4. Diminuir o bem estar dos usuários de A e aumentar o dos usuários de B.

Demonstração. A parte 1 segue diretamente de (10) como:

$$\frac{\partial\hat{\delta}}{\partial p_A} = \frac{p_B - Y}{\left[2Y - (p_A + p_B)\right]^2}$$

Como $Y \geq p_i$ então $\frac{\partial\hat{\delta}}{\partial p_A} \leq 0$.

A parte 2 segue que se p_A aumenta $\delta_A = \hat{\delta}$ cai logo $\delta_B = 1 - \hat{\delta}$ aumenta. Isso implica que N_A deve cair e N_B aumentar.

$$N_A = \hat{\delta}\left(Y - p_A\right) \rightarrow \hat{\delta} = \frac{N_A}{Y - p_A}$$

$$N_B = \left(1 - \hat{\delta}\right)\left(Y - p_B\right) \rightarrow N_B = \frac{\left(Y - p_A - N_A\right)}{Y - p_A}\left(Y - p_B\right)$$

$$N_B = 1 - \frac{N_A\left(Y - p_B\right)}{Y - p_A}$$

$$\frac{\partial N_B}{\partial p_A} = \frac{N_A\left(Y - p_B\right)}{\left(Y - p_A\right)^2} > 0$$

Com o aumento de p_A, então N_A cai e diminui a utilidade do usuário A, enquanto que N_B aumenta aumentando a utilidade de B.

$$\frac{\partial N_A}{\partial p_A} = -\hat{\delta} < 0$$

□

10.2.2 Compatibilidade parcial

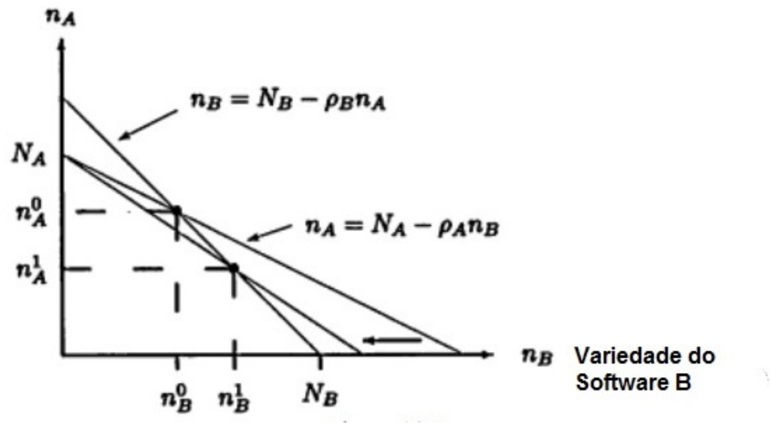
Definição. Uma marca de computador é parcialmente compatível com $\rho_i \in [0, 1]$ sendo o grau de compatibilidade da marca j sendo uma fração ρ_i do total de software escrito para a marca *j pode funcionar no computador da marca i.*

O padrão de pacotes de software escritos especificamente para a máquina i é denotado por $n_i, i = A, B$. Seja $j, i = A, B$ e $i \neq j$. Portanto, o número de pacotes de software disponíveis para o usuário da marca i é igual a:

$$N_A = n_A + \rho_A n_B \text{ e } N_B = n_B + \rho_B n_A \tag{10.11}$$

Suponha que $n_A, n_B > 0$. Por simplicidade deixaremos N_A e N_B constantes.

Figura 10.5: Variedade de tipos de um software específico



Proposição. *Quando há duas indústrias de software, cada uma produzindo uma marca específica, um aumento no grau de compatibilidade da máquina A com o software escrito para a máquina B.*

1. Reduzirá a variedade de softwares especificamente escritos para a máquina A (n_A cai);

2. Aumentará a variedade de software especificamente escritos para a máquina B (n_B aumenta);

3. Reduzirá o total da variedade de software disponível para os usuários de A e aumentará a variedade total de software disponível para os usuários B (N_A cai e N_B aumenta).

10.3 Abordagem de componentes

10.3.1 O modelo básico

Considere um produto que pode ser decomposto em duas partes (complementos perfeitos). Por exemplo, um computador de mesa pode ser decomposto em uma CPU e um monitor. Denotaremos a CPU por X e o monitor por Y.

Firmas e Compatibilidade

Há duas firmas. Ambas podem produzir os dois componentes de um computador. Note que o consumidor pode combinar os produtos das diferentes firmas.

Definição. 1. Os componentes são incompatíveis se forem produzidos por diferentes produtores não podem ser usados conjuntamente. Isso é, os sistemas X_AY_B e X_BY_A não existem no mercado.

2. Os componentes são compatíveis se forem produzidos por empresas diferentes, mas funcionam em conjunto. Ou seja, X_AY_B e X_BY_A estão disponíveis no mercado.

Consumidores

Há três tipos de consumidores: AA, AB e BB. Denotamos os preços de X e de Y da seguinte forma: p_i^Y e p_i^X com $i = A, B$. Denotaremos a utilidade do consumidor $i, j = A, B$ por:

$$U_{ij} = \begin{cases} 2\lambda - \left(p_i^X + p_j^Y\right) \text{ se compra} X_iY_i \\ \lambda - \left(p_j^X + p_j^Y\right) \text{ se compra } X_jY_j \\ \lambda - \left(p_i^X + p_i^Y\right) \text{ se compra } X_iY_i \\ -\left(p_j^X + p_i^Y\right) \text{ se compra } X_jY_i \\ 0 \text{ se não compra} \end{cases} \tag{10.12}$$

Considere $\lambda > 0$.

10.3.2 Sistemas incompatíveis

Suponha que os componentes são incompatíveis. Há somente dois tipos de sistemas vendidos no mercado X_AY_A e X_BY_B. Seja $p_A = p_A^X + p_A^Y$ e $p_B = p_B^X + p_B^Y$.

Definição. Um equilíbrio com componentes não compatíveis é um par de preços p_A^I e p_B^I e o par de quantidades q_A^I e q_B^I tal que para um dado p_j^I a firma i escolhe p_i^I para $\underset{p_i}{Max}\pi_i\left(p_i, p_j^I\right)$ sujeito a q_i = número de consumidores maximizando U_{ij} escolhendo o sistema $i, j = A, B$ para $i \neq j$.

Lema. *Não existe um equilíbrio em que somente uma firma vende para todos os consumidores.*

Demonstração. Se A vende para todos os consumidores então $p_A = 0$. Mas, a esse preço $\forall\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, B atribui $p_B = \varepsilon$ e o consumidor B compraria X_BY_B. □

Proposição. *Há três equilíbrios:*

1. A firma A vende X_AY_A para AA, AB e B vende X_BY_B para o consumidor BB. Nesse equilíbrio $p_A^I = \lambda, q_A^I = 2, p_B^I = 2\lambda$ e $q_B^I = 1$;

2. A firma B vende X_BY_B para BB e AB enquanto a firma A vende somente para AA. Nesse equilíbrio, $p_A^I = \lambda, q_A^I = 1, p_B^I = \lambda$ e $q_B^I = 2$;

3. Nesse equilíbrio A vende X_AY_A para AA e B vende X_BY_B o consumidor AB não é atendido $p_A^I = p_B^I = 2\lambda$ e $q_A^I = q_B^I = 1$.

Em qualquer equilíbrio o nível de lucros das firmas é dado por $\pi_A^I = \pi_B^I = 2\lambda$.

Demonstração. Como os dois primeiros equilíbrios são simétricos é suficiente olharmos unicamente para o primeiro. A firma A não pode aumentar os seus lucros reduzindo seu preço a um nível ao qual poderia vender as três consumidores (cortando B), Isto é:

$$\pi_A^I = 2\lambda \geq 3\left(p_B^I - 2\lambda\right) \tag{10.13}$$

Similarmente, temos que mostrar que B não pode aumentar o seu lucro reduzindo seu preço p_B para p_A em que poderia vender para os dois tipos de consumidores disponíveis BB e AB:

$$\pi_B^I = p_B^I \geq 2p_A^I \tag{10.14}$$

De fato, poderíamos checar uma terceira possibilidade em que B desvia reduzindo o seu preço para um nível que todos os consumidores (total de 3) comprassem o sistema $X_B Y_B$. No entanto, tal desvio não é lucrativo como a firma B atribui $p_B = p_A - 2\lambda = \lambda - 2\lambda < 0$.

Note que nossos candidatos ao equilíbrio satisfazem (13) e (14). Nenhuma firma acharia lucrativo desviar, o aumento do seu preço. Se a firma B aumenta o seu preço acima de 2λ o consumidor BB não comprará $X_B Y_B$ e o mesmo ocorre com A.

Temos que mostrar que os consumidores AA , AB e BA maximizam a sua utilidade escolhendo AA e o consumidor BB maximiza escolhendo $X_B Y_B$. Para fazer isso precisamos calcular o nível de utilidade de equilíbrio para esses consumidores:

$$U_{AA}^I = 2\lambda - p_A^I = \lambda;\ U_{BB}^I = 2\lambda - p_B^I = 0;\ U_{AB}^I = \lambda - \lambda = 0 \tag{10.15}$$

É simples ver que AA não compraria BB. Como o sistema BB resultaria num nível de utilidade $-p_B^I = -2\lambda < U_{AA}^I$. De modo similar BB não compraria AA, $-p_A^I = -\lambda < U_{BB}^I$. Também AB não compraria BB, como $p_B^I > p_A^I$ e ambos resultam num nível de utilidade λ. Finalmente, para mostra que $p_A^I = p_B^I = 2\lambda$ constitua o terceiro equilíbrio, note que se A reduz o seu preço para $p_A = \lambda$, o consumidor AB compra AA e teremos o primeiro equilíbrio. Como em todos os equilíbrios o nível de lucro da firma A é $\pi_A^I = 2\lambda$ um desvio não ocorrerá. □

Definimos o excedente do consumidor como a soma das utilidades dos consumidores:

$$EC^I = U_{AA}^I + U_{BB}^I + U_{AB}^I = \lambda \tag{10.16}$$

O bem estar da economia se dá pela soma dos lucros das firmas do excedente do consumidor:

$$W^I = EC^I + \pi_A^I + \pi_B^I = 2p_A^I + p_B^I + \lambda = 2\lambda + 2\lambda + \lambda \tag{10.17}$$

10.3.3 Sistemas compatíveis

Considere que as empresas desenvolvem os seus produtos para que eles sejam compatíveis com os das demais.

Definição. Um equilíbrio de componentes compatíveis é dado pelo conjunto de preços p_A^X, p_A^Y, p_B^X e p_B^Y e as quantidades vendidas q_A^X, q_A^Y, q_B^X e q_B^Y tal que para um dado p_j^X e p_j^Y a firma i escolhe p_i^X e p_i^Y para $Max\pi_i\left(p_i^X, p_i^Y, p_j^X, p_j^Y\right)$ sujeito a q_i^X e q_i^Y maximizando (12) escolhendo os componentes X_i e Y_i respectivamente.

Proposição. *Existe um equilíbrio em que cada consumidor compra o sistema que considera ideal. Nesse equilíbrio todos os componentes são igualmente precificados ao nível* $p_A^X = p_A^Y = p_B^X = p_B^Y = \lambda$ *e os lucros das firmas são* $\pi_A^C = \pi_B^C = 3\lambda$.

Demonstração. Como a firma A vende os dois componentes de X e algum componente de Y, enquanto que a firma B vende os dois componentes de Y e alguns componentes de X, os preços de equilíbrio deveriam estar a níveis tal que as empresas poderiam não achar lucrativo a redução de preço de um componente com o propósito de vendê-lo para consumidores adicionais. Por exemplo, no equilíbrio, a firma A vende o componente $X_A$para os consumidores AA e AB. Reduzindo o preço de Y_A para $p_B^Y - \lambda$ induziria ao consumidor BB comprar o componente Y de A. Contudo, reduzindo o preço de um componente a zero não é possível constituir um desvio da maximização dos lucros. Por simetria, a firma B não achará lucrativo reduzir seu preço $p_A^X - \lambda = 0$. Finalmente, como todos os preços são iguais cada consumidor irá comprar sua marca preferida resultando nos seguintes níveis de utilidade de equilíbrio:

$$u_{AA}^C = u_{AB}^C = u_{BB}^C = 2\lambda - \lambda - \lambda = 0 \tag{10.18}$$

Por essa razão, nenhuma firma acharia lucrativo aumentar o preço de um consumidor e esse não pagaria mais que 2λ pelo sistema. □

Assim, quando todos os componentes são compatíveis o EC agregado, o lucro das firmas e o nível de bem estar social são dados por:

$$EC^C = 0; \pi_A^C = \pi_B^C = 3\lambda; W^C = EC^C + \pi_A^C + \pi_B^C = 3\lambda \tag{10.19}$$

10.3.4 Compatibilidade e incompatibilidade

Proposição. *Os consumidores nunca estarão em uma situação melhor do que quando as firmas produzem produtos compatíveis.*

Proposição. *As firmas lucros superiores quando produzem um padrão compatível do que quando elas produzem um padrão incompatível.*

Proposição. *O nível de bem estar é mais elevado quando as empresas produzem bens compatíveis.*

Proposição. *Em um jogo de dois estágios, um ENPS resulta na produção de componentes compatíveis.*

11 Propaganda

A literatura econômica distingue a propaganda em dois tipos: persuasiva e informativa. A primeira visa atingir ou atuar diretamente sobre as preferências dos consumidores. Já a informativa, conduz apenas algumas informações básicas sobre o produto para o consumidor.

11.1 Propaganda persuasiva

11.1.1 Propaganda e produtor monopolista

Considere um monopólio em que uma empresa vende somente um produto:

$$Q\left(A,p\right)=\theta A^{\alpha}p^{\beta} \text{ sendo } \theta>0, 0<\alpha<1 \text{ e } \beta<-1 \tag{11.1}$$

O parâmetro A indica o gasto em propaganda, Q e p são respectivamente a quantidade e o preço do produto. A quantidade demandada é estritamente crescente A. Denotamos por $\eta_A\left(A,p\right)$ e $\eta_B\left(A,p\right)$ como as elasticidades da demanda em relação a propaganda e ao preços:

$$\eta_A\left(A,p\right)=\frac{\partial Q}{\partial A}\frac{A}{Q}=\alpha \text{ e } \eta_B\left(A,p\right)=\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{p}{Q}=\beta \tag{11.2}$$

Seja c o custo unitário desse produto. O monopolista possui duas variáveis de escolha (A,p):

$$\underset{A,p}{Max}\pi\left(A,p\right)=pQ-cQ-A=\theta A^{\alpha}p^{\beta+1}-c\theta A^{\alpha}p^{\beta}-A \tag{11.3}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial p}=\left(\beta+1\right)\theta A^{\alpha}p^{\beta}-c\theta\beta A^{\alpha}p^{\beta-1}=0 \tag{11.4}$$

$$\left(\beta+1\right)=c\beta p^{-1}$$

Então:

$$p=\frac{\beta}{\left(\beta+1\right)}c \text{ ou } \frac{p-c}{p}\frac{-1}{\beta} \tag{11.5}$$

A condição de primeira ordem em relação a A:

$$\frac{\partial\pi}{\partial A}=\alpha\theta A^{\alpha-1}p^{\beta+1}-c\alpha\theta A^{\alpha-1}p^{\beta}-1=0$$

$$\frac{\alpha}{A}\left(p-c\right)Q=1 \tag{11.6}$$

$$\frac{p-c}{p}=\frac{1}{\theta\alpha A^{\alpha-1}p^{\beta+1}} \tag{11.7}$$

Igualando (5) e (7):

$$-\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\theta\alpha A^{\alpha-1}p^{\beta+1}}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{\theta A^{\alpha-1}p^{\beta+1}}=\frac{A^M}{Q^M p^M} \tag{11.8}$$

A equação (8) é conhecida como a condição de *Dorfman-Steiner*.

Proposição. *Um monopolista maximizador de lucro escolhe os níveis de preço e de propaganda tal que a taxa de gasto em propaganda em proporção a receita é igual (em valor absoluto) a razão das elasticidades:*

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{A^M}{Q^M p^M}$$

Um monopólio deveria aumentar a propaganda quando a demanda se torna mais elástica em relação a propaganda ($\alpha \to 1$) ou menos elástica em relação ao preço ($\beta \to 0$).

11.1.2 Propaganda persuasiva, muito ou pouca?

A propaganda persuasiva é definida como um método que aumenta a demanda pelo produto. Considere uma versão simplificada da função de demanda (1) em que:$\theta = 64, \alpha = 0.5$ e $\beta = -2$.

$$Q\left(A,p\right)=64A^{0.5}p^{-2} \text{ ou } p=\frac{8A^{0.25}}{Q^{0.5}} \tag{11.9}$$

Tome $c = 1$ e:

$$\underset{A,p}{Max}\pi\left(A,p\right)=pQ-cQ-A=64A^{0.5}p^{-1}-64A^{0.5}p^{-2}-A \tag{11.10}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial p}=-64A^{0.5}p^{-2}-128A^{0.5}p^{-3}=0$$

$$p=2 \tag{11.11}$$

Inserindo na função de demanda:

$$Q\left(A,2\right)=64A^{0.5}2^{-2}=16\sqrt{A}$$

Tomando a condição de primeira ordem em relação a A:

$$\frac{\partial \pi}{\partial A} = 32A^{-0.5}p^{-1} - 32A^{-0.5}p^{-2} - 1 = 0 \tag{11.12}$$

Usando (11) :

$$16A^{-0.5} - 8A^{-0.5} = 1$$

$$16A^{-0.5} = 1$$

$$A = 64$$

Teremos que:

$$Q^M(64, 2) == 16\sqrt{64} = 128$$

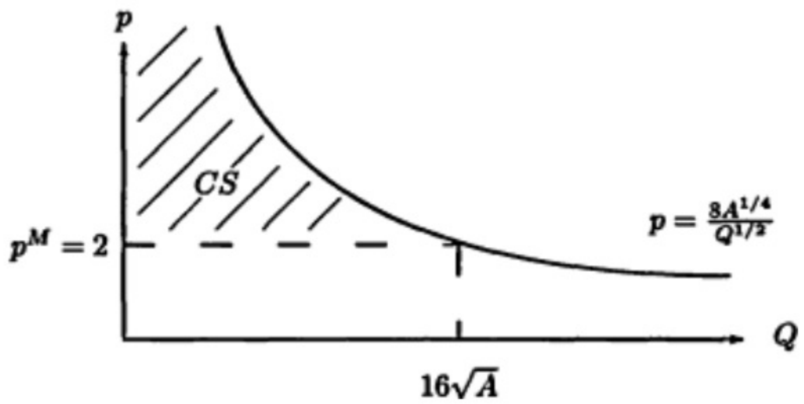
Agora podemos calcular o excedente do consumidor:

$$EC(A) = \int_0^{16\sqrt{A}} 8A^{0.25}Q^{0.5}dQ - pQ \tag{11.13}$$

$$EC(A) = 2 \times 8A^{0.25}\left[Q^{0.5}\right]_0^{16\sqrt{A}} - 2 \times 16\sqrt{A}$$

$$EC(A) = 64\sqrt{A}$$

Figura 11.1: Excedente do Consumidor: Propaganda Persuasiva



Considerando que $p = 2$ então:

$$\pi(A, 2) = 2Q(A) - c(A) - A = 32\sqrt{A} - 16\sqrt{A} - A \tag{11.14}$$

O planejador social maximiza o nível de bem estar e escolhe A:

$$\underset{A}{Max} W(A) = EC(A) + \pi(A, 2) = 48A^{0.5} - A \tag{11.15}$$

$$\frac{\partial W(A)}{\partial A} = 24A^{-0.5} - 1 = 0 \tag{11.16}$$

$$A = 576$$

Proposição. *Dada uma estrutura de mercado de monopólio o nível de propaganda persuasiva está abaixo do nível socialmente desejado.*

11.2 Propaganda informativa

Considere um mercado com um único consumidor e um único produto. Assuma que p é exógeno, isto é, o preço pode ser regulado pelo governo.

Seja m o benefício recebido pelo consumidor pela compra de uma unidade do produto. Adicionalmente assumimos que a função de utilidade desse consumidor é dada por:

$$u = \begin{cases} m - p \text{ se compra} \\ 0 \text{ se não compra} \end{cases} \tag{11.17}$$

Há duas firmas vendendo esse produto ao preço p. Por simplicidade assumimos que o único custo que as empresas incorrem é o de fazer propaganda. O consumidor pode receber até dois anúncios das firmas. Se ele receber um anúncio o consumidor comprará o produto da firma que ele recebeu, se não receber duas empresas ele pagará $p/2$ para cada uma delas. O lucro da firma i possui a seguinte estrutura:

$$\pi_i = \begin{cases} p - A \text{ se recebe a propaganda da firma } i \\ p/2 - A \text{ se ambas} \\ -A \text{ se } i \text{ envia, mas não foi recebido} \\ 0 \text{ se } i \text{ não envia, mas não vende} \end{cases} \tag{11.18}$$

Imagine um anúncio de TV. Nem sempre o consumidor irá assisti-lo. O mesmo ocorre com e-mails que caem diretamente na caixa de *spam* $0 < \delta < 1$ a probabilidade que a mensagem enviada por uma certa empresa seja recebida pelo consumidor. Portanto o lucro esperado é:

$$E\pi_i = \begin{cases} \delta(1-\delta)(p - A) + \delta^2 (p/2 - A) - (1-\delta) A \text{ ambas} \\ \delta(p - A) - (1-\delta) A \text{ somente uma} \\ 0 \text{ se nenhuma} \end{cases} \tag{11.19}$$

Proposição. *Para um dado valor de p, $p \leq m$.*

1. pelo menos uma firma irá incorrer no custo de propaganda se, e somente se: ${}^{p}/_{A} \geq {}^{1}/_{\delta}$

2. as duas firmas irão incorrer em custos de propaganda: ${}^{p}/_{A} \geq {}^{2}/_{\delta(2-\delta)}$

O problema do planejador social é decidir o número de firmas que realizam propaganda com o objetivo de maximizar o nível de bem estar social. Note que se as duas firmas realizarem propaganda a probabilidade de que pelo menos uma venda é: $\delta^2 + 2\delta(1-\delta) = 2\delta - \delta^2 = \delta(2-\delta)$. Formalmente a função de bem estar esperado:

$$EW = \begin{cases} \delta(2-\delta)\, m - 2A \text{ ambas} \\ \delta m - A \text{ somente uma} \\ 0 \text{ se nenhuma} \end{cases} \tag{11.20}$$

Vamos supor que $m = p$ implicando que todo o excedente do consumidor é absorvido pelos lucros das empresas. Nesse caso, $m = p$ é melhor termos duas firmas anunciando do que uma. Para isso, usando (20):

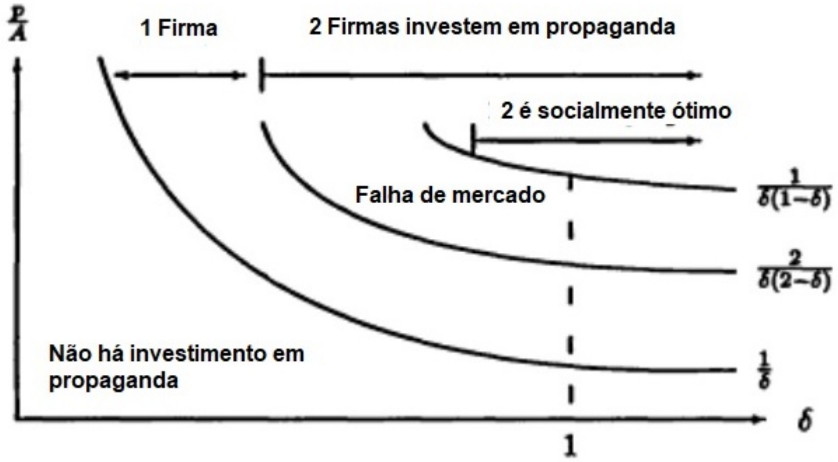
$$\frac{2}{\delta(2-\delta)} < \frac{p}{A} < \frac{1}{\delta(1-\delta)}$$

Proposição. *Em um modelo que alguns anúncios não chegam até o consumidor, existe um intervalo de parâmetro que muitas firmas investem em propaganda do ponto de vista do nível de bem estar social. Formalmente, se $p = m$ esse intervalo é dado*

$$\delta(2-\delta)\, p - 2A > \delta p - A \to \frac{p}{A} > \frac{1}{\delta(1-\delta)}$$

Imagine que a tecnologia melhore e é razoável considerar que $\delta \to 1$. Nesse caso, $\frac{1}{\delta(1-\delta)} \to +\infty$ isso significa que para quaisquer valores de $p = m$ e A sempre existe um δ suficientemente próximo de 1 tal que não é ótimo termos duas firmas fazendo publicidade.

Figura 11.2: Equilíbrio com o número de firmas fazendo propaganda



11.3 Propaganda direcionada

11.3.1 Firmas e Consumidores

Há duas empresas e dois grupos de consumidores. Há N consumidores que estão fazendo a compra pela primeira vez e são chamados de consumidores inexperientes. Além disso, há E consumidores que já compraram o produto antes e podem ser considerados como experientes.

Assumimos que o grupo de consumidores experientes esta dividido em dois subgrupos. Aqueles que preferem a marca 1 (θ) e os que preferem a marca 2 $(1-\theta)$.

11.3.2 Métodos de propaganda

A firma pode usar uma propaganda persuasiva ou informativa. Cada firma escolhe s^i de um conjunto de ação $S = \{P, I\}$. Por suposição, uma firma não pode escolher os dois modos de realizar a propaganda. Por simplicidade, assumimos que a escolha dos métodos de propaganda é a única variável de escolha disponível para as firmas. Nesse modelo, ignoramos os preços e as firmas buscam maximizar o número de compradores que consomem a sua marca. Se $\prod =< \pi_1, \pi_2 >$ o vetor de lucros temos que:

Suposição 1:

1. *A propaganda persuasiva atrai somente os consumidores inexperientes. Formalmente, se a firma i escolhe* $s^i = P$*, então:*

(a) se a firma j não usa a propaganda persuasiva então todos os consumidores inexperientes compram a marca i, isto é, $\pi^i = N$ *se* $s^j \neq P$*;*

(b) se ambas usam P, então todos os consumidores inexperientes são igualmente divididos entre as duas firmas: $\pi^i = {}^N\!/_2$ *se* $s^j = P$*.*

2. *I atraí somente os consumidores experientes que são orientados de acordo com a marca. Formalmente, se a firma 1 escolhe* $s^1 = I$ *então* $\pi^1 = \theta E$ *e se a firma 2 escolhe* $s^2 = I$ *então* $\pi^2 = (1-\theta)\,E$*.*

A tabela 1 demonstra o nível de lucro de cada empresa e o lucro agregado da indústria:

Tabela 11.1: *Lucros das empresas*

Lucro/Resultado	$< P, P >$	$< P, I >$	$< I, P >$	$< I, I >$
π^1	${}^N\!/_2$	N	θE	θE
π^2	${}^N\!/_2$	$(1-\theta)\,E$	N	$(1-\theta)\,E$
$\pi^1 + \pi^2$	N	$N + (1-\theta)\,E$	$N + \theta E$	E

Proposição. *1. Uma condição necessária para ambas usarem P é que o número de consumidores do tipo $N > E$. Nesse caso $< P, P >$ é um único equilíbrio se:*

$$\frac{N}{2} > \theta E \rightarrow \frac{N}{2E} > \theta > 1 - \frac{N}{2E}$$

2. Uma condição necessária para ambas usarem I é que $E > 2N$. Então $< I, I >$ é o único equilíbrio se:

$$\theta E > N \rightarrow \frac{N}{E} < \theta < 1 - \frac{N}{E}$$

3. Se a primeira empresa não é popular entre os usuários do tipo E, então a firma um usará P e a firma 2 usa I. Formalmente, $< P, I >$ é um equilíbrio se $\theta < min\left\{\frac{N}{E}, 1 - \frac{N}{2E}\right\}$.

4. Se a firma 1 é suficientemente popular entre E, então a firma 1 usa I e a firma 2 usa P. Formalmente, $< I, P >$ é um equilíbrio se $\theta > max\left\{\frac{N}{2E}, 1 - \frac{N}{E}\right\}$.

Demonstração. Parte 1: Olharemos para a firma 1. Nesse equilíbrio $\pi^1(P, P) = {}^N\!/_2$. Se a firma 1 desvia e escolhe $s^1 = I$ então $\pi^1(I, P) = \theta E$. Portanto, um desvio não será lucrativo para a firma 1 se ${}^N\!/_2 > \theta E$ ou ${}^N\!/_{2E} > \theta$. De modo análogo, a firma dois não desviará se ${}^N\!/_{2E} > 1 - \theta$ ou $\theta > 1 - {}^N\!/_{2E}$, com o propósito dessa região ser não vazia, temos que $1 - {}^N\!/_{2E} > {}^N\!/_{2E} \rightarrow E < N$.

Parte 2: $\pi^1(I, I) = \theta E$. Se a firma 1 desvia e escolhe $s^1 = P$ então $\pi^1(P, I) = N$. Assim, a firma não desviará se $\theta E > N$ ou se $\theta > {}^N\!/_E$ ou $\theta < 1 - {}^N\!/_E$. Com o objetivo de mantermos essa região não vazia teremos que ${}^N\!/_E < 1 - {}^N\!/_E$ o que implica que $E > 2N$.

Parte 3: Para a firma 1, $\pi^1(P, I) = N$. Se a firma desvia para $s^1 = I$, então $\pi^1(I, I) = \theta E$. Assim, a firma 1 não desviará se $N > \theta E$ ou se $\theta < {}^N\!/_E$. Para a firma 2 $\pi^2(P, I) = (1 - \theta) E$. Se a firma 2 desvia para $s^2 = P$ então $\pi^2(P, P) = {}^N\!/_2$. Assim, a firma não desviará se $(1 - \theta) E > {}^N\!/_2$ou $\theta < 1 - {}^N\!/_{2E}$ assim temos que $\theta < min\left\{\frac{N}{E}, 1 - \frac{N}{2E}\right\}$.

Parte 4: É análoga a 3 então a prova é deixada como exercício para o leitor. □

11.4 Comparação de propaganda

11.4.1 O uso estratégico de comparação para propaganda

A comparação da propaganda consiste que a marca que faz a propaganda tem suas características comparadas com as outras rivais. Assuma que cada firma possui duas ações possíveis $S = \{A, C\}$em que C significa que a empresa usa a estratégia de realizar a comparação.

Suposição 2:

1. O plano de propaganda A atrai somente os consumidores experientes;

2. O plano C atraí unicamente os consumidores que são orientados (experientes) para para a marca que faz a comparação.

Proposição. *1. A estratégia C é usada somente por ambas as firmas quando a maioria dos consumidores potenciais são experientes. Isso é, $E > 2N$.*

2. A estratégia C não será usada se o número de consumidores inexperientes é suficientemente grande tal que $E < N$.

3. A estratégia C é usada pela firma popular (mais conhecida) entre os usuários experientes. A firma usará C quando a fração de consumidores que experimentaram e gostaram da sua marca é suficientemente grande.

11.4.2 Propaganda e preços

Observaremos que a alta intensidade de propaganda está associada com um menor preço, mas necessariamente num mercado com a concentração reduzida.

Assuma que há um monopolista, que a demanda no período 0 é $Q = a_0 - p$, em que a_0 está positivamente relacionado com o nível de propaganda em $t = 0$. Seja A o custo de propaganda e a função de custo do monopolista dada por:

$$CT\left(A, Q\right) = \begin{cases} A + c_H Q \text{ se } Q \leq Q^* \\ A + c_L Q \text{ se } Q > Q^* \end{cases} \tag{11.21}$$

Em $t = 0$, $\pi^M = pQ - CT = \left(a_0 + Q\right) Q$. A quantidade de monopólio será $Q^M = \frac{a_0 - c_H}{2}$ e $p^M = \frac{a_0 + c_H}{2}$. Em $t = 1$ o monopolista gasta $A_1 > A_0$, assumimos que um alto nível de propaganda aumenta a procura para $Q = a_1 - p$, sendo $a_1 > a_0$. Então $Q_1^M = \frac{a_1 - c_L}{2}$ e $p_1^M = \frac{a_1 + c_L}{2}$.

Proposição. *O preço de monopólio $p_1^M < p_0^M$, se, e somente se $c_H - c_L > a_1 - a_0 > 0$.* A propaganda reduz o preço de monopólio, se e somente se a redução no custo marginal associado com um alto nível de produção excede o nível de alteração na demanda.

12 Qualidade, Durabilidade e Garantias

Analisaremos a qualidade no sentido da diferenciação de produtos e da sua durabilidade. Separamos a durabilidade da qualidade do produto por causa da sua dimensão temporal. Esse fato apresenta um impacto direto na frequência das compras repetidas pelos consumidores. É bastante complicado medirmos o que determina a qualidade do produto e qual é (ou quais são) as suas dimensões. Em outras palavras, a qualidade pode ter um caráter bastante subjetivo que está diretamente relacionado as preferências do consumidor.

12.1 Renda Pessoal e Qualidade de Compra

Iremos analisar brevemente, como o nível de renda pessoal afeta a qualidade das marcas compradas por indivíduos que estão em diferentes níveis de renda. Considere uma indústria com duas firmas que produzem com um nível de qualidade (k) distinto. Definimos H como a marca de alta qualidade e L como baixa qualidade.

$$k = H$$
$$k = L \, (H > L > 0)$$

Há dois consumidores I_1 e I_2 . Sabemos que o consumidor I_1 possui a renda mais elevada que o consumidor I_2, assim classificamos o primeiro como o consumidor de alta renda. Cada consumidor compra apenas uma unidade do produto. O nível de utilidade de cada consumidor é dado por:

$$U_i = \begin{cases} H \left(I_i - p_H\right) & \text{se ele compra a marca H} \\ H \left(I_i - p_L\right) & \text{se ele compra a marca L} \end{cases} \tag{12.1}$$

Proposição. *(1) Se consumidor de baixa renda compra o produto de alta qualidade então o consumidor de alta renda certamente comprará esse produto. (2) Se o consumidor de alta renda compra o produto de baixa qualidade, então o consumidor de baixa renda definitivamente comprará o produto de baixa qualidade.*

Demonstração. **Parte (1).** Seja $U_i\left(k\right)$ a utilidade do consumidor i quando ele compra a marca com qualidade k. Desejamos mostrar que:

$$U_1\left(H\right) = H\left(I_1 - p_H\right) > L\left(I_i - p_L\right) = U_L\left(H\right)$$

Conforme a equação (1) como o consumidor 2 compra o produto de alta qualidade então teremos que:

$$U_2\left(H\right) = H\left(I_2 - p_H\right) > L\left(I_2 - p_L\right) = U_2\left(L\right)$$

Assim:

$$(H - L)\, I_2 > (Hp_H - Lp_L)$$

Como $I_1 > I_2$ temos que:

$$(H - L)\, I_1 > (H - L)\, I_2 > (Hp_H - Lp_L)$$

Portanto:

$$H\,(I_1 - p_H) > L\,(I_1 - p_L)$$

Agora demonstraremos a **Parte (2)**:

$$U_2\,(L) = L\,(I_2 - p_L) > H\,(I_2 - p_H) = U_2\,(H)$$

De acordo com a equação (1):

$$U_1\,(L) = L\,(I_1 - p_L) > H\,(I_1 - p_H) = U_1\,(H)$$

Portanto:

$$(H - L)\, I_1 < (Hp_H - Lp_L)$$

Como $I_1 > I_2$ então:

$$(H - L)\, I_2 < (Hp_H - Lp_L)$$

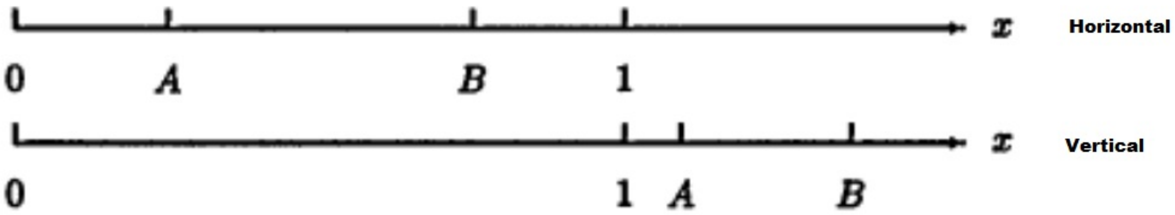
□

12.2 Qualidade como diferenciação de produto

O modelo de Hotteling pode ser classificado como um modelo de diferenciação horizontal pelo simples fato que as firmas estão localizadas na mesma rua que os consumidores. Há sempre consumidores que classificam as marcas diferentemente. Nesse modelo assumimos que todas as marcas são igualmente precificadas, então o consumidor que está mais próximo de A do que a firma B deveria comprar a marca A e assim por diante.

Definição. A diferenciação é dita *horizontal* se quando o nível da característica do produto é aumentada no espaço do produto, então existe um consumidor cuja utilidade aumenta e há outro consumidor que a utilidade cai. Diz-se que a diferenciação é vertical se todos os consumidores se beneficiam quando o nível do produto característico é aumentado no espaço de produção. Por outro lado, a diferenciação é horizontal se existir um consumidor cuja utilidade aumenta enquanto a utilidade de outro consumidor diminui, quando o nível do produto característico aumenta no espaço de produção.

Figura 12.1: Diferenciação Horizontal *vs.* Vertical



Na figura 1 todos os consumidores estão localizados no espaço *[0,1]* e $p_A = p_B$. Na primeira reta todos os consumidores próximos de A preferem essa marca em relação a B. Enquanto que os indivíduos que estão localizados próximos a B preferem esta marca em relação a A. Na segunda reta, todos os consumidores preferem a marca A em relação a B.

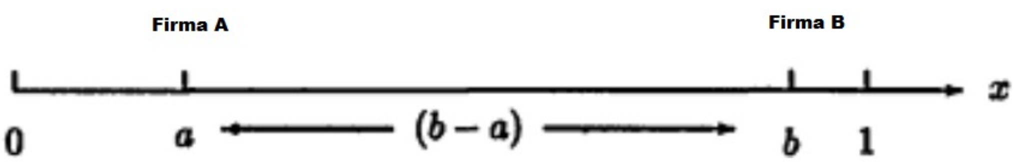
12.3 Um modelo modificado de diferenciação vertical

Nesse modelo todos os consumidores possuem a sua marca "ideal" que está localizada no ponto 1 do intervalo *[0,1]*. Há um continuum de consumidores que estão uniformemente distribuídos nesse intervalo. Há duas empresas, denotadas por A e B e ambas estão localizadas nos pontos a e b $0 \leq a \leq b \leq 1$. A utilidade do consumidor localizado no ponto x, $x \in [0,1]$ e comprando a marca *i=A,B* é definida por:

$$U_x(i) = \begin{cases} ax - p_A & i{=}A \\ bx - p_B & i = B \end{cases} \tag{12.2}$$

Temos que p_A e p_B como os preços cobrados pelas firmas.

Figura 12.2: Diferenciação Vertical no Modelo Modificado



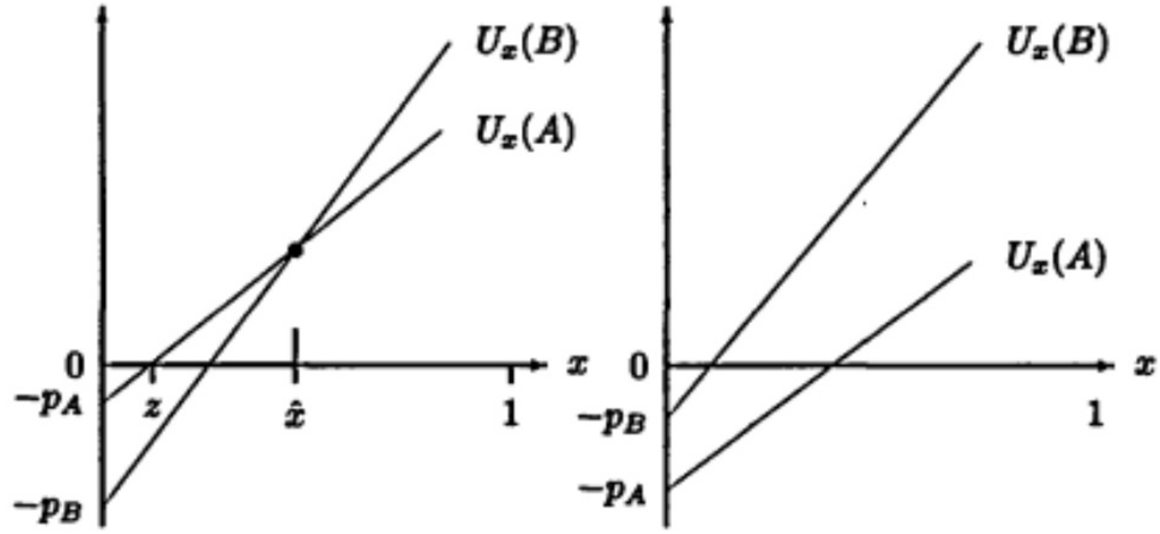
Definimos um jogo de dois períodos. No primeiro período a empresa escolhe a sua localização e no segundo escolhe o preço. Seja $\hat{x}$ o consumidor que é indiferente entre comprar da firma A ou da firma B. Assumimos que tal consumidor existe e que $\hat{x}$ se localiza entre as duas firmas $a \leq \hat{x} \leq b$ a localização desse consumidor é determinada por:

$$U_{\hat{x}}(A) = a\hat{x} - p_A = b\hat{x} - p_B = U_{\hat{x}}(B) \tag{12.3}$$

O número de consumidores comprando da firma A é $\hat{x}$ enquanto o número de consumidores comprando de B é $(1-\hat{x})$. Resolvendo a equação (3) teremos que:

$$\hat{x} = \frac{p_A - p_B}{b-a} \text{ e } (1-\hat{x}) = 1 - \frac{p_A - p_B}{b-a} \tag{12.4}$$

Figura 12.3: Determinação do consumidor indiferente entre as marcas A e B



Nota: Na figura da esquerda $p_A < p_B$ e na figura da direita $p_A > p_B$.

Todos os consumidores localizados em $[0, \hat{x}]$ ganham utilidade ao comprar a marca A do que a marca B. Do mesmo modo, todos os consumidores localizados em $[\hat{x}, 1]$ ganham mais utilidade se comprarem a marca B. Se assumirmos uma utilidade de reserva zero todos esses consumidores são indexados no intervalo $[0, z]$. Na figura da direita como $p_A > p_B$ todos os consumidores preferem comprar a marca B.

Dadas as localizações das firmas (a e b) no segundo período cada firma toma o preço da sua rival como dado e escolhe o nível de preço que maximiza o seu nível de lucro. Formalmente:

$$\begin{array}{c} \text{Max}\pi_A\left(a,b,p_A,p_B\right) = p_A\hat{x} = p_A\left(\frac{p_B - p_A}{b-a}\right) \\ \text{Max}\pi_B\left(a,b,p_A,p_B\right) = p_B\left(1-\hat{x}\right) = p_B\left[1-\left(\frac{p_B-p_A}{b-a}\right)\right] \end{array} \tag{12.5}$$

Definição. A quádrupla $\left(a^e, b^e, p_A^e\left(a,b\right), p_B^e\left(a,b\right)\right)$ é dita um equilíbrio para a indústria verticalmente diferenciada se:

Segundo período: Para qualquer localização das firmas (a e b), $p_1^e\left(a,b\right)$e $p_2^e\left(a,b\right)$ constituem um equilíbrio de Nash.

Primeiro período: Dadas as funções de preço do segundo período $p_A^e\left(a,b\right)$e $p_B^e\left(a,b\right)$ e $\hat{x}\left(p_1^e\left(a,b\right), p_2^e\left(a,b\right)\right)$, então $\left(a^e, b^e\right)$ é um equilíbrio de Nash de localização.

Agora resolveremos o modelo começando pelo segundo período:

$$\frac{\partial \pi_A}{\partial p_A} = \frac{p_B - 2p_A}{b-a} = 0 \rightarrow p_B = 2p_A \tag{12.6}$$

$$\frac{\partial \pi_B}{\partial p_B} = 1 - \frac{2p_B - p_A}{b-a} = 0$$

Usando o resultado da primeira equação na segunda teremos que:

$$b - a = 2p_B - p_A$$

$$b - a = 2\left(2p_A\right) - p_A$$

$$\frac{b-a}{3} = p_A$$

Consequentemente:

$$\frac{2}{3}\left(b-a\right) = p_B \tag{12.7}$$

Proposição. *A firma que produz a marca de alta qualidade cobra um preço mais alto, mesmo que o custo de produção da firma de baixa qualidade seja o mesmo que o da firma de alta qualidade.*

Podemos substituir os preços na equação (5) para obtermos:

$$\begin{gathered} \pi_A\left(a,b\right) = \tfrac{b-a}{9} \\ \pi_B\left(a,b\right) = \tfrac{4}{9}\left(b-a\right) \end{gathered} \tag{12.8}$$

Agora nos movemos para o primeiro período, a firma A deveria escolher produzir um nível com a qualidade mais baixa possível $a^e = 0$*, enquanto que a firma B deveria escolher a qualidade mais alta possível* $b^e = 1$*. Esse resultado é conhecido como o princípio da diferenciação máxima.*

Proposição. *Em um modelo de qualidade verticalmente diferenciada cada firma escolhe a máxima diferenciação em relação a sua rival.*

No modelo de diferenciação vertical de qualidade o princípio da diferenciação máxima pode ser aplicado. A razão para esse diferenciação é que em produtos verticalmente diferenciados cada firma se especializa na produção de um produto de uma determinada qualidade para um grupo específico de consumidores. O princípio da diferenciação máxima implica que as firmas podem aumentar o seu poder de mercado focando-se no grupo de consumidores alvo.

12.4 Estrutura de Mercado, Qualidade e Durabilidade

Swan (1970a,b, 1971) demonstrou que não relação entre o pode de monopólio e a durabilidade. Esse resultado é conhecido como resultado da independência de Swan. Uma pequena ilustração do achado de Swan será apresentada nessa seção. Consideraremos uma empresa que vende lâmpadas e olharemos para a durabilidade desse produto.

12.4.1 Estrutura da Economia

Para fazermos isso, considere um consumidor que vive por apenas dois períodos. Assumimos que esse consumidor está disposto a pagar o montante $V > 0$ para cada período. A firma possui uma tecnologia de produção para lâmpadas que duram apenas 1 período, definidas por curta durabilidade, e para a produção de lâmpadas que duram pelos dois períodos, sendo essas as de longa durabilidade.

O custo de produzir a lâmpada de curta durabilidade é c^S e a de alta é c^L. Sabemos que:

$$c^S \in \left]0, V\right[, c^L \in \left]0, 2V\right[\text{ e } c^L > c^S$$

Por simplicidade ignoramos o fator de desconto intertemporal e analisaremos o equilíbrio sob duas estruturas extremas de mercado: competição perfeita e monopólio.

12.4.2 Monopólio

Suponha que o monopolista venda lâmpadas do tipo "S". A cada período o consumidor pragará *V*. Por cada período o monopolista cobra um preço $p^S = V$. Então a função de lucro dessa firma seria:

$$\pi^S = 2\left(V - c^S\right) \tag{12.9}$$

Se o monopolista vende a lâmpada L o preço a ser cobrado é $p^L = 2V$.

$$\pi^L = 2V - c^L \tag{12.10}$$

Assim, o monopolista produzirá as duas lâmpadas se $\pi^S \geq \pi^L$.

Proposição. *O monopolista minimizaria o custo de produção de lâmpadas por unidade. Formalmente o monopolista produz* S *se* $2c^S < c^L$ *e* L *se* $2c^S > c^L$.

12.4.3 Competição Perfeita

Teremos que $p^S = c^S$ e $p^L = c^L$. O consumidor que desejar ter iluminação pelos dois períodos de tempo, compraria as lâmpadas do tipo L se:

$$2V - p^L > 2\left(V - p^S\right)$$

$$2p^S - p^L > 0$$

$$c^S > 0.5c^L$$

Assim, podemos nos referirmos ao resultado da independência de Swan pela seguinte proposição:

Proposição. *(1) A durabilidade das lâmpadas independem da estrutura de mercado.*

(2) As firmas deveriam escolher o nível de durabilidade que minimiza o custo de produção por unidade de tempo.

12.5 O Dilema entre Inovação e Durabilidade

A questão central que estamos discutindo se refere sob quais condições as firmas irão produzir equipamentos com excesso de qualidade. Também, desejamos entender sob quais as condições as empresas encontram formas lucrativas de produzirem bens duráveis, sendo que as empresas que ingressarem com uma nova tecnologia terão dificuldade de vender e introduzir o seu produto no mercado devido ao excesso de oferta de bens fabricados com a tecnologia antiga. Mostraremos um modelo de dois períodos com a suposição simplificadora que cada período possui apenas uma firma comercializando o produto. Abaixo mostraremos a estrutura da economia.

12.5.1 Consumidores

No período *t=1* há somente um consumidor que procura comprar serviços de computação para os dois períodos de sua vida. No período *t=2* há somente um consumidor adicional que ingressa no mercado e compra o serviço por apenas um período. Assumimos V_t como o ganho advindo da qualidade da tecnologia. Seja p_t o preço correspondente. A utilidade de cada consumidor no período t é:

$$U_t = \begin{cases} V_t - p_t & \text{se o produto é comprado} \\ 0 & \text{se não ocorre a compra} \end{cases} \tag{12.11}$$

12.5.2 Firmas

Nesse modelo há duas firmas. A firma 1 que opera exclusivamente no primeiro período e é dotada por uma tecnologia antiga provendo um nível de qualidade v^o. A firma 2 (potencial entrante em *t=2*) pode produzir o produto com a tecnologia antiga v^o. Contudo essa empresa possui a capacidade de atualizar (melhorar) a tecnologia ao nível $v^n > v^o$ tendo que arcar com um custo de inovação *I>0*.

O custo de produção independe do nível tecnológico, mas depende da durabilidade do produto. Podemos pensar que os produtos com uma maior durabilidade usem insumos mais caros. Também supomos que o produto "não durável" resista por apenas um período. O custo de produção deste produto pode ser expresso por c^{nd}. Sem nenhuma perda de generalidade podemos assumir que $c^{nd} = 0$.

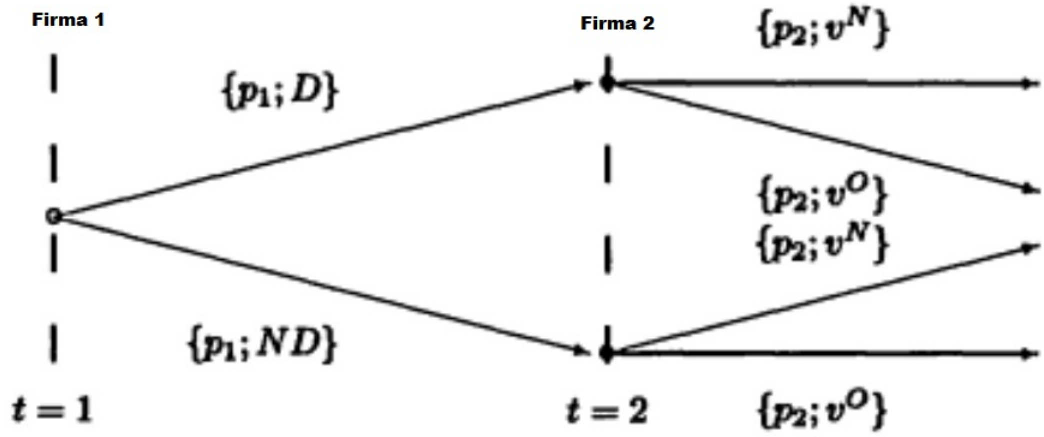
Temos que o jogo de dois períodos e duas firmas pode ser descrito do seguinte modo:

1. Em *t=1* a firma 1 vende a tecnologia antiga e decide que cobrará p_1 e se produzirá um bem durável ou não durável;

2. Em *t=2* a firma 2 escolherá se irá produzir um bem não durável e decidirá que tipo de tecnologia irá empregar.

A figura abaixo ilustra esse jogo de dois períodos:

Figura 12.4: Jogo de Inovação e Durabilidade



Produção em *t=2* se *t=1* (ND)

$$p_2 = \begin{cases} v^n & \text{se } 2\left(v^n - v^o\right) \geqslant I \\ 0 & \text{se } 2\left(v^n - v^o\right) < I \end{cases}$$
$$\pi_2 = \begin{cases} 2v^n - I & \text{se } 2\left(v^n - v^o\right) \geqslant I \\ 2v^o & \text{se } 2\left(v^n - v^o\right) < I \end{cases} \tag{12.12}$$

Se o custo de inovação é suficientemente baixo a firma 2 investirá e venderá o produto com a tecnologia nova.

Produção em *t=2* se *t=1* (ND)

Se em *t=1* a empresa 1 vende o bem durável então no período 2 o consumidor antigo já possui o produto com a tecnologia v^o. Portanto a firma 2 possui duas possibilidades:

1. Ela pode precificar seu produto com a nova tecnologia com um valor extremamente baixo, isto é: $p_2^L = v^n - v^o$. Isso induz o consumidor antigo a descartar o seu produto de tecnologia antiga e comprar um produto novo. Nesse caso, temos que: $\pi_2^L = 2\left(v^n - v^o\right) - I$.

2. Alternativamente, a empresa pode precificar $p_2^H = v^n$ tal que somente os novos consumidores comprassem o produto com a nova tecnologia, enquanto que os consumidores antigos continuariam usando o produto durável. Assim: $\pi_2^L = v^n - I$.

Comparando π_2^L com π_2^H temos que:

Proposição. *Suponha que a firma 1 venda um bem durável no período 1 (para o consumidor de t=1). Então em t=2, a firma 2 vende o produto de nova tecnologia se:*

$$I \leq max\left\{2\left(v^n - v^o\right), v^n\right\}$$

Se $v^n > 2v^o$ a firma 2 vende seu produto de nova tecnologia para ambos os consumidores. Se $v^n < 2v^o$ a firma 2 vende seu produto de nova tecnologia apenas para o consumidor novo.

Escolha da durabilidade em *t=1*

Em *t=1* a firma 1 escolhe p_1e se produzirá um bem durável ou não. Se a firma 1 vende um bem não durável (11) isso implica que o preço máximo que a firma 1 pode cobrar por vender no primeiro período é de $p_1^{nd} = v^o$. Nesse caso, $\pi_1^{nd} = v^o - c^{nd} = v^o$.

Caso contrário, se a firma 1 vende um bem durável (11) implica que o preço máximo dado por $p_1^D = 2v^o$, como nesse caso o produto provê um serviço de v^o para os dois períodos. Assim, $\pi_1^D = 2v^o - c^d$.

Proposição 12.1. *A firma 1 produz um bem durável se $v^o > c^d$. Caso contrário ela produzirá um bem não durável.*

12.5.3 Durabilidade, Inovação e Bem-Estar

A função de bem-estar social pode ser escrita do seguinte modo:

$$W = U_1 + U_2 + \pi_1 + \pi_2 \tag{12.13}$$

As funções U são os níveis de utilidade dos consumidores nos períodos 1 e 2. As funções π_i representam os lucros. De acordo com a análise anterior podemos ter três possíveis equilíbrios:

1. A firma 1 produz um bem durável ou não durável;

2. A firma 2 inova e adota a tecnologia nova ou ela não inova;

3. A combinação das duas possibilidades anteriores.

Suposição 1: $v^o > c^d$ e $2v^n > I > max\left\{2\left(v^n - v^o\right), v^n\right\}$. Em *t=1* seria mais lucrativo para a firma 1 produzir o bem durável. O custo de inovação $I \in \left]2\left(v^n - v^o\right), v^n\right[$.

Proposição. *Considerando o* ***pressuposto 1***

(1) A firma 1 produz um bem durável, a inovação não irá ocorrer, e somente o produto com a tecnologia antiga será vendido; e

(2) Esse resultado é dominado do ponto de vista de bem-estar por um resultado onde a firma 1 produz um bem não durável ao invés de um bem durável.

Demonstração. Como $v^o > c^d$ isso implica que a firma 1 produz o bem durável no período 1. Por contradição suponha que a firma 2 inove. Então se a firma 2 vende para ambos os consumidores $\pi_2^L = 2\left(v^n - v^o\right) - I{<}0$ pelo pressuposto 1. Do mesmo modo, se a firma 2 inova e vende somente para o consumidor 2 $\pi_2^H = v^n - I < 0$, também pelo pressuposto 1 uma contradição. Assim, a firma 2 não inovará o que prova a primeira parte.

Para provarmos a segunda parte, primeiro calcularemos o bem-estar social sob esse resultado, isto é, a firma 1 produz um bem durável e a firma 2 não inova.

$$p_1 = 2v^o, \pi_1 = 2v^o - c^d, p_2 = v^o, \pi_2 = v^o \text{ e}$$
$$U_1^1 = U_1^2 = U_2 = 0$$

$$W^D = 3v^o - c^d \tag{12.14}$$

Suponha por alguma razão que a firma 1 é forçada a produzir um bem não durável. Ainda considerando o pressuposto 1 temos que a firma 2 não inovará. Nesse caso:

$$p_1 = v^o, \pi_1 = v^o, p_2 = 2v^o, \pi_2 = 2v^o \text{ e}$$
$$U_1^1 = U_1^2 = U_2 = 0$$

$$W^{ND} = 3v^o$$

$$W^{ND} > W^D \tag{12.15}$$

Algumas considerações sobre o modelo: □

- Como a durabilidade é cara (custosa) para a economia, o planejador social poderia aumentar o bem estar social ofertando o produto com a mesma qualidade, mas sem a durabilidade.

- Instituições que regulam a qualidade deveriam permitir produtos de curta durabilidade em um mercado onde a tecnologia se altera rapidamente.

12.6 O mercado de limões

Analisaremos mercados onde os compradores e os vendedores não possuem o mesmo montante de informação. Em particular, estamos falando de um mercado onde há assimetria de informação.

12.6.1 Um modelo de carros usados

Essa seção segue o paper clássico de Akerlof (1970). Iremos considerar uma economia com quatro possíveis tipos de carros: carros novos em bom estado, carros novos ruins chamados de limões, carros usados em bom estado e carros usados ruins, também chamados de limões.

$$N^G = \text{valor de um carro novo}$$
$$N^L = \text{valor de um carro novo (limão)}$$
$$U^G = \text{valor de um carro usado (bom)}$$
$$U^L = \text{valor de um carro usado (limão)}$$

Pressuposto 1.2:

1. O valor de um carro novo do tipo limão e de um carro velho deste tipo é zero. $N^L = U^L = 0$.
2. A metade de todos os carros (novos e usados) são limões;
3. Os carros novos são preferidos em relação aos usados. $N^G > U^G > 0$.

O valor esperado de um carro novo e de um carro usado são dados por:

$$\begin{gathered} EN = 0.5N^G + 0.5N^L = 0.5N^G \\ EU = 0.5U^G + 0.5U^L = 0.5U^G \end{gathered} \tag{12.16}$$

Claramente $EN > EU$ ou alternativamente:

$$0.5\left(N^G - U^G\right) > 0$$

$$N^G > U^G$$

Há 4 tipos de agentes nessa economia:

1. Revendedores de carros novos que vendem esses produtos por um preço exogenamente denotado por p^N. Não há conhecimento sobre a qualidade dos carros novos, assim todos são vendidos pelo mesmo preço.

2. Indivíduos que não possuem seus próprios carros são chamados de compradores.

3. Os donos de carros usados (de boa qualidade) são chamados de vendedores.

4. Os donos de carros usados ruins (limões), também são chamados de vendedores.

Define-se p^U como o preço dos carros usados. Como os compradores não conseguem diferenciar um carro usado de boa qualidade de um limão, todos os carros são vendidos pelo mesmo preço. Cada consumidor maximiza o valor esperado de um carro menos o seu preço:

$$V^b = \begin{cases} EN - p^N & \text{se compra um carro novo} \\ EU - p^U & \text{se compra um carro antigo} \end{cases} \tag{12.17}$$

A utilidade de um vendedor de um carro usado em boas condições e compra um carro novo é:

$$V^{b,G} = \begin{cases} EN - p^N + p^U & \text{se compra um carro novo e vende o antigo} \\ U^G & \text{se ele mantém o seu carro usado} \end{cases} \tag{12.18}$$

Finalmente a utilidade de um vendedor de um limão (vende seu carro usado por p^U) e compra um carro novo por p^N é dado por:

$$V^{s,L} = \begin{cases} EN - p^N + p^U & \text{se compra um carro novo e vende o antigo} \\ U^L & \text{se ele mantém o seu carro usado (limão)} \end{cases} \tag{12.19}$$

12.6.2 O problema dos compradores

Os compradores não são proprietários de nenhum veículo e portanto devem decidir se irão comprar um carro novo ou um usado. Assim, os compradores irão comprar um carro usado se:

$$EU - p^N + p^U \geq EN - p^N$$

Ou se p^U satisfaz:

$$p^U \leq EU - EN + p^N = \frac{U^G - N^G}{2} + p^N \tag{12.20}$$

12.6.3 O problema do vendedor de limões

O dono de um limão tem a opção de manter o seu carro (ganhando utilidade igual a zero) ou vendendo seu carro usado e comprando um carro novo. O dono de um limão venderá seu carro se:

$$EN - p^N + p^U \geq 0$$

$$p^U \geq p^N - EN = p^N - \frac{N^G}{2} \tag{12.21}$$

12.6.4 O problema do vendedor de carros usados bons

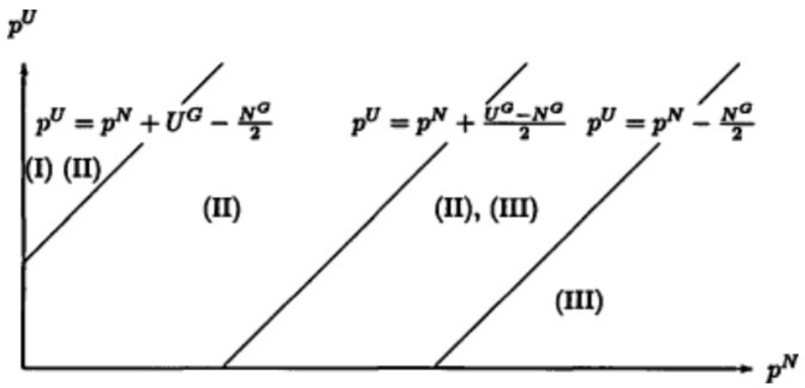
O dono do carro usado bom pode manter o seu veículo ou vendê-lo e comprar um carro novo. O dono do carro bom venderá seu carro se:

$$U^G \leq EN - p^N + p^U$$

$$p^U \geq p^N + U^G - EN = p^N + U^G - \frac{N^G}{2} \tag{12.22}$$

Proposição. *Os carros usados bons nunca serão vendidos. Ou seja, os limões tiram os carros usados em bom estado do mercado.*

Figura 12.5: Mercado de Limões



Nota: A figura assume que $U^G > 0.5N^G$.

Agora faremos as caracterizações das seguintes regiões:

(I) O dono carro usado bom vende seu veículo;

(II) O vendedor do carro usado ruim vende o seu carro;

(III) Região em que os compradores demandam por carros usados.

Veja as equações (20) e (22):

$$p^U = \text{ (compradores de carros usados)}$$

$$p^U = U^G - \frac{N^G}{2} + p^N \text{(vendedores de carros usados em bom estado)}$$

Subtraia a primeira equação da segunda:
$p^U - p^U = 0$ o que implica que $U^G = 0$. Em outras palavras:

$$U^G - \frac{N^G}{2} + p^N \leq p^U \leq \frac{U^G - N^G}{2} + p^N$$

Se p^U é menor que (20) ele não pode ser maior (22) visto de a equação (22) é maior do que a (20). Os carros novos podem ser vendidos por algumas motivações em particular, isto é, quando desejam se mudar (de estado, cidade ou país).

12.7 Jogos de Sinalização de Qualidade

Nessa subseção analisaremos o problema em que o potencial entrante não conhece o custo de produção do incumbente (aquele que já está no mercado), e esse último tem que sinalizar (deve) seu custo de produção pelo preço que cobrava antes da ameaça da nova entrada.

Nosso objetivo é demonstrar que uma firma monopolista pode sinalizar a qualidade que ela vende um produto escolhendo um certo preço e impondo uma restrição na quantidade a ser vendida. Suponha que há um continuum de consumidores homogêneos. Sem perda de generalidade podemos normalizar esse número para 1. Cada consumidor compra pelo menos uma unidade do produto e sabe que o produto pode ser produzido em dois níveis de qualidade: alto ($k = H$) e baixo ($k = L$) sendo *H>L>0.* Para um dado preço p a utilidade de cada consumidor é dada por:

$$U = \begin{cases} H - p & \text{se a marca é a de alta qualidade} \\ L - p & \text{se a marca é a de baixa qualidade} \\ 0 & \text{se o consumidor não compra o produto} \end{cases} \tag{12.23}$$

12.7.1 Monopolista

Denote c_H pelo custo de produção unitário se o produtor é de alta qualidade e c_L se ele produz um bem de baixa qualidade. $c_H > c_L \geqslant 0$.

Suposição 1.3:

1. O monopolista é um produtor de alta qualidade;

2. Os custos de produção são suficientemente baixos a valoração atribuída pelos consumidores. $L > c_H$.

3. O monopolista pode escolher o preço p e a quantidade produzida $q \in [0, 1]$

Queremos resolver o seguinte problema: Como um produtor (de alta qualidade) convence os consumidores que ele é desse tipo?

Proposição. *Existe um par de preços e um nível de quantidade que convence os consumidores (sem deixar dúvidas) que a marca que ele está comprando é a de alta qualidade. Formalmente, se o monopolista atribuí:*

$$p^m = H \ \ e \ q^m = \frac{L - C_L}{H - C_L}$$

Então:

(a) os consumidores poderão inferir que a marca é de alta qualidade;

(b) q^m *consumidores irão comprar o produto e* $1 - q^m$ *não comprarão devido a falta de oferta.*

Demonstração. O monopolista deve mostrar que um produtor de baixa qualidade não deveria escolher p^m e q^m com os parâmetros que maximizam a sua função lucro. Se o monopolista fosse um produtor de baixa qualidade ele poderia claramente vender para todos os consumidores pelo preço p=L e possuir um lucro $\pi^L (L, 1) = 1 (L - C_L)$. O ponto é se o monopolista de baixa qualidade pudesse escolher p^m e q^m. Suponha que ele faça isso, então:

$$\pi^L (p^m, q^m) = (p^m - C_L) q^m = (H - C_L) \frac{(L - C_L)}{(H - C_L)} = L - C_L = \pi^L (L, 1)$$

Usando esse nível de preços e qualidade um monopolista de alta qualidade está apto a demonstrar que se ele fosse um produtor de baixa qualidade ele poderia obter o mesmo lucro especificando p=L e vendendo para todos os consumidores ao invés de especificar p^m e q^m. Assim, cortando os lucros ao nível que o monopolista de baixa qualidade poderia coletar sob informação perfeita, o produtor de alta qualidade convence os consumidores que ele não é um produtor de baixa qualidade, então ele poderia fazer o mesmo nível de lucro. Podemos ainda nos perguntarmos se seria lucrativo para o monopolista de alta qualidade sinalizar para os consumidores. Para respondermos calcularemos o nível de lucro de um monopolista de alta qualidade quando ele escolhe p^m ou q^m. Assim:

$$(p^m - C_H) q^m$$

$$\pi^H(p^m, q^m) = (p^m - C_H)\, q^m = (H - C_H)\,\frac{(L - C_L)}{(H - C_L)} < H - C_H$$

Comparando esse nível de lucro com o de informação perfeita podemos calcular o custo de relevar-se (sinalizar) a informação. A resposta para nossa pergunta depende se:

$$(H - C_H)\, q^m = (H - C_H)\,\frac{(L - C_L)}{(H - C_L)} \geq (L - C_H)$$

$$q^m \frac{(H - C_L)}{(L - C_L)} = 1 \geq (L - C_H)$$

$$q^m \frac{(H - C_L)}{(L - C_L)} = \frac{1}{(L - C_H)} \geq 1$$

$$q^m = \frac{(L - C_L)}{(L - C_L)\,(L - C_H)} \tag{12.24}$$

Essa desigualdade é sempre mantida visto que $H > L > C_H > C_L$. □

12.8 Garantias

Não discutiremos por quais razões as garantias não são ilimitadas, mas a intuição da motivação para isso está no que conhecemos como *risco moral.*

Suposição 4: *1. O produto pode ser totalmente funcional ou defeituoso. Um produto defeituoso não possui valor para o comprador e não pode ser revendido como sucata.*

2. No ato da compra nem os compradores, nem mesmo os vendedores sabem se o produto específico é defeituoso.

3. O vendedor possui duas opções sobre a venda do produto:

(a) o produto pode ser vendido sem a garantia. Nesse caso, se o produto específico possui algum defeito o comprador perde o valor total do produto.

(b) o produto pode ser vendido com a garantia de substituição por defeito sem prejuízo para o consumidor. Se ao substituir o produto, esse novo item também apresenta defeito o monopolista é obrigado a substituí-lo novamente e assim por diante.

12.8.1 Garantias sob assimetria de informação

Considere um produto cujo o valor para o consumidor é V se o produto é funcional e zero caso seja defeituoso *V>0.*

Há uma probabilidade conhecida do produto ser funcional. Denotamos essa probabilidade por $\theta \in]0, 1[$. Desse modo, há uma probabilidade $1 - \theta$ do produto ser defeituoso. Supomos que tanto o comprador quanto o vendedor possuem conhecimento sobre a confiabilidade do produto, ou seja, o produto é confiável com uma probabilidade exógenamente dada.

$$U \equiv \begin{cases} V - p \text{ se compra com garantia} \\ \theta V - p \text{ se compra sem garantia} \\ 0 \text{ se não compra} \end{cases} \tag{12.25}$$

Assuma que $\theta V > c$. O monopolista possui a opção de vender o produto com ou sem garantia.

Sem garantia

Sem garantia o preço máximo que o monopolista pode cobrar é o valor esperado do produto:

$$p^{NW} = \theta V \text{ e } \pi^{NW} = \theta V - c \tag{12.26}$$

Garantia

Lema. *O custo esperado de uma unidade de produção para a firma prover o produto com garantia de substituição é* $^{c}/_{\theta}$.

Demonstração. O custo de produção é c. Se o produto é defeituoso esse custo aumenta na proporção $(1-\theta)\,c$. Se a substituição do produto ocorre e o novo produto também apresenta defeito então o custo esperado aumenta $(1-\theta)^2\,c$ e assim por diante. Então:

$$c + (1-\theta)\,c + (1-\theta)^2\,c + ... = {}^{c}/_{\theta} \tag{12.27}$$

□

O Lema anterior implica que o custo esperado de produção $c \to 0$ quando $\theta \to 1$ e $c \to \infty$ quando $\theta \to 0$ nesse último caso o produto é substituído infinitamente. Desse modo, o preço máximo a ser cobrado pelo monopolista é o seguinte:

$$p^{W} = V \text{ e } \pi^{W} = V - \frac{c}{\theta} \tag{12.28}$$

Ao compararmos (26) com (28) concluímos que $\pi^{W} > \pi^{NW}$ se $V > \frac{c}{\theta}$.

Proposição. *Sob assimetria de informação a confiabilidade do parâmetro* θ *é de comum conhecimento, desta forma o monopolista sempre irá produzir com garantia.*

Quando o monopolista provém a garantia, o monopólio aumenta (pode) o seu preço em $(1-\theta)\,V$ acima do preço sem garantia. O custo associado a esse aumento é:

$$\frac{c}{\theta} - c = \frac{(1-\theta)\,c}{\theta} < (1-\theta)\,V = p^W - p^{NW}$$

Ao prover a garantia e considerando que o monopolista extraí todo o excedente do consumidor, ele pode aumentar o seu preço mais do que o aumento no custo associado com a substituição de um produto com uma certa possibilidade de falha.

12.8.2 O papel das garantias sob informação assimétrica

Analisaremos um duopólio onde uma firma possui um produto confiável e outra produz um não confiável. Nesse mercado, o consumidor não possui qualquer conhecimento sobre qual firma produz o produto confiável.

Considere que o produtor de alta qualidade vende o produto (funcional, operativo) com a probabilidade θ_H e o produtor de baixa qualidade produz com θ_L o produto de alta qualidade. Ainda considere que $0 < \theta_L < \theta_H < 1$.

Sem Garantia

Do ponto de vista do consumidor os produtos são homogêneos antes da realização da compra. O equilíbrio será dado por um preço estabelecido por uma competição *a la Bertrand*. Os preços são iguais ao custo unitário assim não há lucros:

$$p^{NW} = c \text{ e } \pi_i^{NW} = 0 \; i = H, L$$

Garantia como um sinal

Proposição. *Seja $V > c$ o produtor de alta qualidade pode pressionar o produtor de baixa qualidade para fora do mercado atribuindo o preço de mercado $p^W = \frac{c}{\theta L}$ e provendo o produto com garantia. Nesse caso, o consumidor irá comprar somente o produto que considera mais confiável e o produtor (H) fará lucros estritamente positivos.*

Demonstração. Usando a equação (27) calculamos que:

$$\pi_L^W\left(p^W\right) = p^W - \frac{c}{\theta L}$$

Agora, mostraremos que o consumidor preferirá comprar o produto com a garantia do que um produto não confiável mesmo com um preço mais baixo:

$$\pi_H^W\left(p^W\right) = p^W - \frac{c}{\theta H} = \frac{c}{\theta L} - \frac{c}{\theta H} > 0$$

Finalmente, a utilidade do consumidor ao comprar o produto mais confiável excede a utilidade da compra do produto menos confiável sem a garantia, mesmo que o produto menos confiável possua o preço mais baixo possível:

$$U_H^W = V - p^W = V - \frac{c}{\theta L} > U_L^W = \theta_L V - c$$

$\square$

13 Estratégias de apreçamento

13.1 Tarifa de duas partes

13.1.1 Visitações ao clube

Suponha que o consumidor recebe utilidade (ganha utilidade) entre visitar um clube e consumir outros bens. Assumimos que Q como o número de visitas ao clube. Ainda, seja m o montante de recurso gasto no consumo de outros bens. Ainda consideramos que:

- I é a renda do consumidor;
- ϕ (anuidade) ou (taxa associativa);
- p é o preço por visitação.

A restrição orçamentária do consumidor é dada por:

$$m + \phi + pQ \leq I \tag{13.1}$$

Seja $U : R^2 \to R$ em que:

$$U(Q, m) = m + 2\sqrt{Q} \tag{13.2}$$

Essa função de utilidade representa preferências quase lineares. O consumidor maximiza sua função de utilidade sujeito a restrição (1). A função Lagrangiana é a seguinte:

$$L(Q, m, \lambda) = m + 2\sqrt{Q} + \lambda\left[I - (m + \phi + pQ)\right] \tag{13.3}$$

Assim temos a seguinte função de demanda:

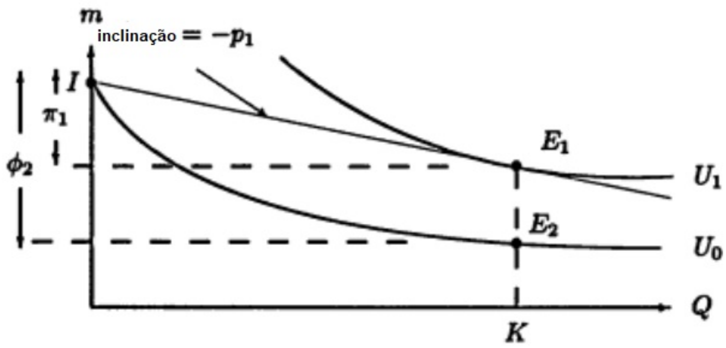
$$p = Q^{-0.5} \text{ ou } Q = p^{-2} \tag{13.4}$$

13.1.2 Não há taxas anuais

Suponha que o clube possua uma capacidade limitada ($k > 0$). Suponha que $\phi = 0$. Então o lucro do monopolista é:

$$\pi = pQ = \sqrt{Q} \tag{13.5}$$

Figura 13.1: Preferências com a função de utilidade quase linear



Proposição. *De acordo com as preferências dadas em (2) o clube monopolista atribui o preço tal que a demanda para visitas é igual ao total da sua capacidade.*

Assim teremos que:

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{k}}, Q_1 = k \text{ e assim } \pi_1 = \sqrt{k}$$

Demonstração. As preferências em (2) resultam em uma curva de demanda elástica (4) implicando que o lucro do clube aumenta com o número de visitas. Sem taxas de anuidade o bem estar do consumidor deve aumentar quando comparado com uma alocação em que não há visitas □

13.1.3 Taxas anuais

Calcularemos a anuidade máxima que um clube pode cobrar pelo número k de visitas que tornaria a compra atrativa para o consumidor.

$$max\pi\left(\phi\right) = \phi \text{ s.a. } I - \phi + 2\sqrt{k} \geq I \equiv U_0 \tag{13.6}$$

Implicando que: $2\sqrt{k} = \phi$ e por construção $\phi \leq \phi_2$. Assim temos que: $\pi_2 = 2\sqrt{k}$.

Proposição. *Uma taxa fixa por um conjunto de visitas resulta em um lucro mais alto para o clube do que qualquer lucro gerado com um preço por unidade sem a cobrança da taxa de anuidade.*

$$\pi_2 = \pi\left(\phi = \phi_2, p = 0\right) = 2\sqrt{k} > \sqrt{k} = \pi\left(\phi = 0, p = {}^1\!/\!\sqrt{k}\right) = \pi_1$$

13.1.4 Tarifa de duas partes

Há duas razões básicas que explicariam o motivo do clube não cobrar exatamente ϕ_2 .

1. Pequenos erros ao estimar a localização exata de U_0.

2. Os consumidores possuem preferências heterogêneas assim uma alta cobrança poderia induzir a uma participação parcial.

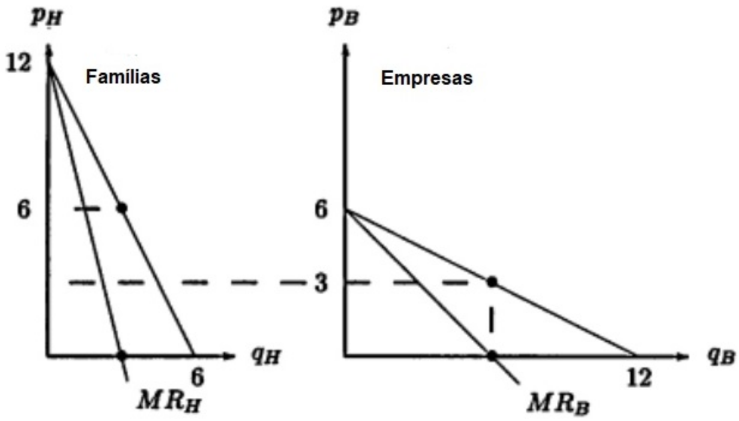
13.2 Apreçamento não uniforme

O apreçamento não uniforme é uma tarifa para um ou mais bens que o desembolso dos consumidores não aumenta proporcionalmente com a quantidade de bens que é comprada. Suponha que estejamos avaliando a curva de demanda para dois grupos por chamadas de telefone local.

$$p_H = 12 - 2q_H \text{ (Famílias)}$$

$$p_B = 6 - {}^{q_B}/_2 \text{ (Empresas)}$$

Figura 13.2: Apreçamento não uniforme e discriminação de preços



Nota: *MR* é a receita marginal

O monopólio em dois segmentos de mercado deve atribuir a quantidade a ser vendida:

$$RMgH\left(Q_H\right) = RMgB\left(Q_B\right) = CMg\left(Q_H + Q_B\right) = 0$$

Podemos observar que:

$$\left.\begin{aligned} RTH &= 12q_H - 2q_H^2 \\ RTB &= 6q_B - q_B^2/2 \end{aligned}\right. \text{(funções de receita total)}$$

Tomando as derivadas em relação as quantidades e calculando as receitas marginais (RMg):

$$\left.\begin{aligned} RMgH &= 0; q_H = 3 \text{ e } p_H = 6 \\ RMgB &= 0; q_B = 6 \text{ e } p_B = 3 \end{aligned}\right. \text{(discriminação perfeita de preços)}$$

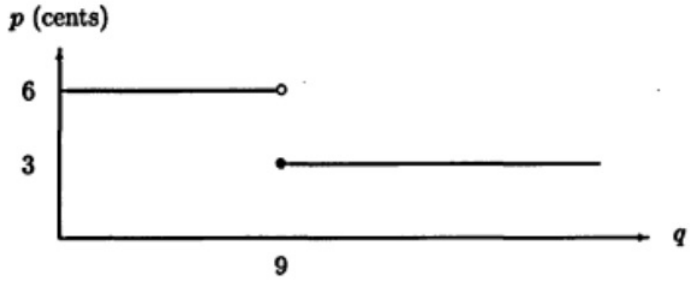
É importante mencionar que a discriminação de preços é ilegal.

Proposição. *Considere o preço por chamada ilustrado na figura abaixo:*

(i) Programa de cobrança regular: Pague 6 centavos por chamada;

(ii) Desconto por quantidade: Pague uma taxa reduzida de 3 centavos por chamada, mas compre um "pacote" de pelo menos 9 chamadas.

Figura 13.3: Apreçamento não uniforme



Demonstração. Quando $p_H = 6$ então $Q_H = 3$ e $p_B = 3$ então $Q_B = 6$. Devemos mostrar que as famílias não se beneficiam do esquema de desconto por quantidade. Se as famílias adotassem o esquema regular então: $EC(6) = {(6 \times 3)}/{2} = 9$. Se as famílias adotarem o esquema de desconto por quantidade então elas seriam forçadas a comprarem 9 chamadas e usariam apenas 6. $EC_F\,(\text{desconto}) = {(12 \times 6)}/{2} - (3 \times 9) = 9 = EC_F\,(6)$.

Desse modo, as famílias são indiferentes entre os dois planos. Ao preço de 6 as empresas compram zero unidades no programa de cobrança regular. No entanto, se elas escolherem o plano com desconto. $EC_B\,(\text{desconto}) = {[(6-1.5) \times 9]}/{2} + (1.5 \times 9) - (3 \times 9) = 6.75$. Desse modo, as empresas vão escolher o esquema de pagamento por desconto. $\square$

O sistema de apreçamento não uniforme resulta em um lucro mais elevado do que o sistema de apreçamento convencional:

$$\pi^{NU} = 6 \times 3 + 3 \times 9 = 45$$

Sobre o apreçamento uniforme o monopolista cobra um único preço p em ambos os mercados. Sendo $Q = q_B + q_H$ se os preços são iguais então:

$$6 - {}^{q_B}\!/_2 = 12 - 2q_H$$

$$Q = 18 - 2.5p$$

O lucro do monopolista é:

$$\pi = (18 - 2.5p)\, p$$

Tomando a condição de primeira ordem em relação ao preço:

$$p^* = \frac{18}{5} \text{ então } Q^* = 9$$

$$\pi^U = 9 \times \frac{18}{5} = 32.5 < \pi^{NU} = 45$$

Assim as famílias preferem o esquema de pagamento regular enquanto que as empresas estritamente preferem o esquema por desconto. Se o montante mínimo de chamada fosse 10.

$$EC_H\,(\text{desconto}) = {}^{(12\times 6)}\!/_2 - (3 \times 10) = 36 - 30 = 6 < 9 = EC_F\,(6)$$

$$EC_B\,(\text{desconto}) = {}^{(6-1)\times 10}\!/_2 + (1 \times 10) - (3 \times 10) = 5 > 0$$

$$\pi^{NU} = 6 \times 3 + 3 \times 10 = 48$$

13.3 Apreçamento Peak-Load

Esse tipo de apreçamento tende a ser lucrativo e eficiente quando a demanda é periódica e quando a capacidade de investimento é irrevogável no curto prazo. Há três fatores que caracterizam esse tio de apreçamento:

1. O nível que a demanda oscila entre os períodos;

2. O capital deve ser alugado ou arrendado por um longo período. A firma deve se comprometer em avançar ou aumentar a capacidade da planta.

3. O produto da firma não pode ser armazenado.

Considere uma empresa aérea numa única rota alta *(H)* e baixa *(L)*.

13.3.1 Passageiros sazonais

Seja p^H, Q^H, p^L e Q^L o preço e a quantidade das passagens nas estações alta e baixa respectivamente:

$$p^H = A^H - Q^H \text{ e } p^L = A^L - Q^L, A^H > A^L > 0 \tag{13.7}$$

13.3.2 Capacidade de assentos e estrutura de custos da empresa

Seja $r > 0$ o custo unitário de capacidade. A empresa aluga a aeronave com capacidade de k passageiros. O custo total de investimento na capacidade da aeronave é rk. Denotamos c como o custo operacional por passageiro.

$$\begin{gathered} CT\left(Q^H, Q^L, k\right) = c\left(Q^H + Q^L\right) + rk \\ 0 < Q^H, Q^L \leq k \end{gathered} \tag{13.8}$$

13.3.3 Estrutura de maximização de lucros do monopolista

Proposição. *Suponha que a demanda na baixa temporada é significativamente menor que a da alta estação. Então, o lucro da empresa monopolistas é determinado por:*

$$\begin{gathered} RMg^H\left(Q^H\right) = c + r \text{ e } RMg^L\left(Q^L\right) = c \\ Q^H > Q^L \text{ e } p^H = \tfrac{A^H+c+r}{2} > \tfrac{A^H+c}{2} = p^L \end{gathered}$$

Demonstração. Suponha que $Q^H = k$, isto é, na alta temporada a empresa voa com toda sua capacidade teremos:

$$RT^H = p^H Q^H = A^H Q^H - Q^{H^2}$$

$$RMg^H = A^H - 2Q^H$$

$$CMg^H = c + r \text{ se, e somente se } k = Q^H$$

$$CMg^H = RMg^H \text{ então } c + r = A^H - 2Q^H$$

$$Q^H = \frac{A^H - c - r}{2} \text{ então } p^H = A^H - Q^H = \frac{A^H + c + r}{2}$$

$$RT^L = A^L Q^L - Q^{L^2}$$

$$RT^L = A^L - 2Q^L$$

$$CMg^L = c$$

$$CMg^L = RMg^L = A^L - 2Q^L = c$$

$$Q^L = \frac{A^L - c}{2}$$

$$p^L = \frac{A^L + c}{2}$$

Portanto, $p^H > p^L$, se, e somente se $p^H - p^L > 0$. $\frac{A^H+c+r}{2} - \frac{A^L+c}{2} > 0$ então $\frac{A^H-A^L}{2} - \frac{r}{2} > 0$. Pela equação (7) temos que $A^H > A^L$ e $r > 0$ □

13.3.4 Peak-Load sobre longos períodos

Suponha que a empresa aérea necessitasse investir em sua capacidade por n anos com $n > 1$ tal que essa capacidade se manteria para n baixas e n altas estações.

Proposição. *O monopolista maximizador de lucros sobre o apreçamento sazonal a estrutura de produção sob n baixa e n alta estações é determinada por:*

$$RMg^H\left(Q^H\right) = c + {}^{r}/_{n} \ e \ RMg^L\left(Q^L\right) = c$$

Se o monopólio espera que a capacidade deveria ser mantida por n estações, o custo efetivo de capacidade unitária em cada período deveria ser tomado com ${}^{k}/_{n}$. Negligenciamos os mercados cujas agendas (esquemas) de demanda quando os preços sazonais induzem os consumidores a substituir o consumo de alta estação pelo de baixa.

13.4 As firmas poderiam controlar as "temporadas"?

A maioria das firmas controla a quantidade demandada em cada período simplesmente ajustando os preços relativos em diferentes períodos/estações.

Consideremos uma indústria vendendo o seu produto em dois períodos dia (D) e noite (N). Seja p_D o preço do serviço durante o dia e p_N é o preço do serviço vendido durante à noite.

Consumidor e a demanda sazonal

Consideramos um continuum de consumidores indexados e distribuídos uniformemente no intervalo fechado $[a, b]$ sendo$b > a \geq 0$ e $b > 1$. A utilidade do consumidor $\delta, \delta \in [a, b]$

é assumida:

$$U^\delta \equiv \begin{cases} \beta\delta - p_D \text{ se o serviço D é comprado} \\ \beta - p_N \text{ se ela compra o serviço N} \\ 0 \text{ se não compra nada} \end{cases} \tag{13.9}$$

$\beta > 0$ é a utilidade reserva para o serviço noturno.

Definição. Os serviços no turno do dia e da noite são:

1. **Verticalmente diferenciados:** se $p_D = p_N$ todos os consumidores escolhem comprar somente o serviço oferecido durante o dia;

2. **Horizontalmente diferenciados:** se, dados $p_D = p_N$ os consumidores indexados por um alto δ escolhem comprar o erviço oferecido durante o dia enquanto que aqueles indexados por um baixo δ escolhem compra o serviço noturno.

Usando (9) podemos ver que todos os serviços são verticalmente diferenciados se $a \geq 1$ como $\beta\delta \geq \beta$. Quando $a \in [0, 1[$ os dois serviços são horizontalmente diferenciados. Denote $\hat{\delta}$ por aquele consumidor indiferente $\hat{\delta}$ pode ser determinado por:

$$\beta\hat{\delta} - p_D = \beta - p_N$$

$$\beta\left(\hat{\delta} - 1\right) = p_D - p_N$$

$$\hat{\delta} = \frac{\beta + p_D - p_N}{\beta} \tag{13.10}$$

Produção dos serviços

Denotaremos n_D como o número de consumidores que compra o serviço durante o dia e n_N aqueles que compram durante à noite:

$$n_D + n_N \leq b - a \text{ (número total de consumidores)}$$

Seja k a capacidade de produção de serviços de uma empresa. O número de usuários desses serviços não pode exceder a capacidade.

$$n_D \leq k \text{ e } n_N \leq k$$

Seja r o custo unitário da capacidade de produção. Seja $c_N \geq 0$ e $c_D \geq 0$ os custos operacionais da produção dos serviços.

Estrutura de custos do monopólio

Assumimos que todos os consumidores foram atendidos, então teremos que:

$$n_D = \hat{\delta} - a \text{ e } n_N = b - \hat{\delta}$$

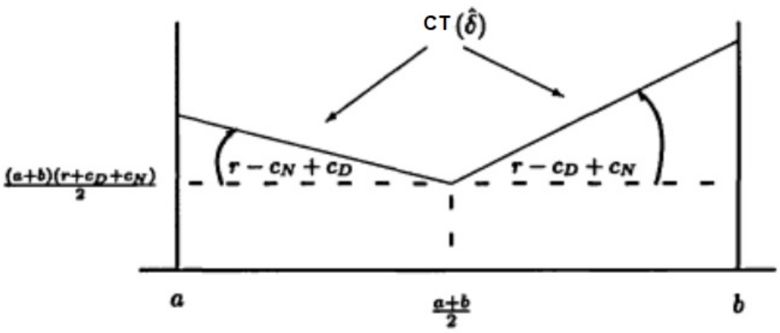
A função de custo total do monopolista pode ser expressa por:

$$CT\left(\hat{\delta}\right) = r \times max\left\{\hat{\delta} - a, b - \hat{\delta}\right\} + n_D c_D + n_N c_N \tag{13.11}$$

A figura assume que: $r > |c_D - c_N|$então teremos que:

$$CT\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)(r + c_D + c_N)$$

Figura 13.4: Estrutura de custos do monopolista



Quando o mercado é igualmente dividido $\hat{\delta} = {}^{(b-a)}/_{2}$ e a capacidade necessária é $k = {}^{(b-a)}/_{2}$. Note que o consumidor é indiferente se $\hat{\delta} = {}^{(b+a)}/_{2}$. Sabemos que:

$$n_D + n_N = b - a \leq 2k \text{ pontanto } k = {}^{(b-a)}/_{2}$$

A função de receita marginal do monopólio para um consumidor indiferente é:

$$\begin{cases} \text{Se } n_D > n_N \text{ou se } \hat{\delta} < {}^{(b+a)}/_{2}\text{temos que :} \\ \frac{\partial CT(\hat{\delta})}{\partial \hat{\delta}} = c_N - (c_D + r) = RMg\left(\hat{\delta}\right) \\ \text{Se } n_N > n_D \text{ou se } \hat{\delta} > {}^{(b+a)}/_{2}\text{temos que :} \\ \frac{\partial CT(\hat{\delta})}{\partial \hat{\delta}} = (c_N + r) - c_D = RMg\left(\hat{\delta}\right) \end{cases} \tag{13.12}$$

Receita do monopólio

O monopólio almeja extrair o máximo do EC. Assim a empresa cobraria $p_N = \beta$ e $p_D = \beta\hat{\delta}$. Para o consumidor indiferente a função de receita do monopolista é:

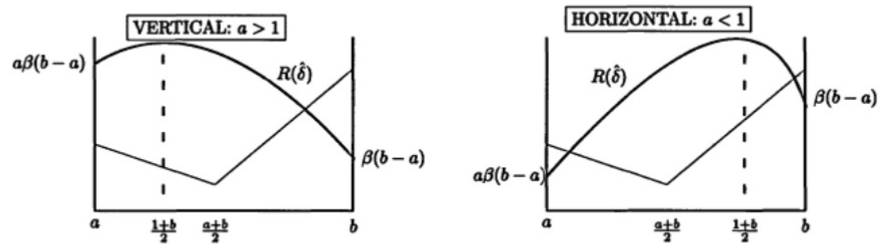
$$RT\left(\hat{\delta}\right) = p_N n_N + p_D n_D = \beta\left(\hat{\delta} - a\right) + \beta\hat{\delta}\left(b - \hat{\delta}\right) \tag{13.13}$$

Então a receita marginal:

$$RT\left(\hat{\delta}\right) = \beta\left(1 + b\right) + 2\beta\hat{\delta} \tag{13.14}$$

Teremos os seguintes gráficos:

Figura 13.5: Funções de Receita



Se $a > 1$ a receita é maximizada a esquerda do consumidor médio. Todos os consumidores preferem os serviços diurnos em relação aos noturnos e o monopólio cobrará preços tal que a maioria dos usuários sejam do período diurno.

Estratégia de maximização dos lucros do monopolista

A figura anterior revela que sob a diferenciação vertical o monopolista nunca escolherá o preço do serviço tal que o consumidor indiferente poderia se alocar a direita do consumidor médio.

Definição. O período do dia chamado de pico é definido por $\hat{\delta} < {}^{(b+a)}/_2$. Se $\hat{\delta} > {}^{(b+a)}/_2$ o período de pico será o noturno.

Proposição. *Se os serviços são verticalmente diferenciados o monopolista escolherá o período diurno como aquele de pico. Se os serviços são horizontalmente diferenciados então o monopolista escolherá o período noturno como o de pico.*

Proposição. *Dado que $r > |c_D - c_N|$ o monopolista escolherá os preços que maximizam o lucro total de tal modo:*

1. Sob diferenciação vertical:

$$\hat{\delta} = Min\left\{\frac{\beta\left(1 + b\right) + r + c_D - c_N}{2\beta}, {}^{a+b}/_2\right\}$$

2.Sob diferenciação horizontal:

$$\hat{\delta} = Max\left\{\frac{\beta\left(1+b\right)-r+c_D-c_N}{2\beta}, {}^{a+b}\!/_2\right\}$$

Demonstração. Tome $\pi\left(\hat{\delta}\right)=\beta\left(\hat{\delta}-a\right)+\beta\hat{\delta}\left(b-\hat{\delta}\right)-r\times max\left\{\hat{\delta}-a,b-\hat{\delta}\right\}+\left(b-\hat{\delta}\right)c_D+\left(\hat{\delta}-a\right)c_N$. O lucro é maximizado quando a receita marginal se iguala ao custo marginal. Sob diferenciação vertical $\hat{\delta} < {}^{(b+a)}\!/_2$ teremos que:

$$\hat{\delta} = \frac{(1+b)}{2} + \frac{(c_D+r)-c_N}{2\beta}$$

Já sob diferenciação horizontal, $\hat{\delta} > {}^{(b+a)}\!/_2$:

$$\hat{\delta} = \frac{(1+b)}{2} + \frac{c_D-(c_N+r)}{2\beta}$$

$\square$

14 Táticas de marketing

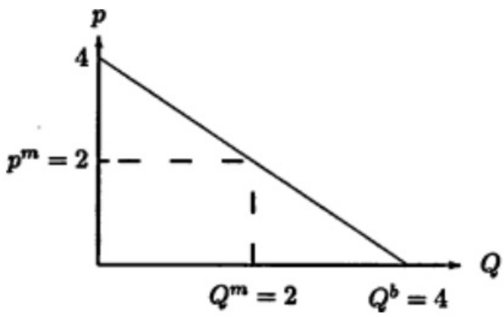
14.1 Bundling e Tying

O termo *bundling* pode ser traduzido como a venda por pacotes. É importante notar que o preço unitário não necessita ser o mesmo para cada unidade comprada. Já o *tying,* significa que a firma oferece a venda por pacotes contendo pelo menos dois produtos distintos.

14.1.1 Como o agrupamento pode ser lucrativo?

Suponha que o monopolista possua a seguinte função de demanda $Q(p) = 4-p$. A função de receita será $RT(p) = 4p - p^2$. Assumindo que não há custos para a produção o lucro do monopolista será maximizado ao cobrar-se o preço $p = 2$ e a quantidade $Q(2) = 2$.

Figura 14.1: Monopólio na modalidade de *bundling*



Suponha que o monopolista agrupe 4 unidades em um único pacote e venda pelo preço de 8. O problema do consumidor é comprar o pacote ou não comprar nada. Se ele compra o pacote o seu $EC = \frac{4\times4}{2} = 8$. O lucro do monopolista será $\pi^{mB} = 8$.

Proposição. *O monopolista no regime de bundling poderia extrair todo o EC e portanto obteria um lucro maior do que o do monopolista no regime de unbundling. Portanto, o monopolista no regime de bundling ganha o mesmo lucro como o monopolista discriminador de preços.*

14.1.2 Como o *tying* pode ser lucrativo?

Considere um monopolista que vende os bens X e Y. Há dois consumidores denotados por $i = 1, 2$ que pelo menos compram uma unidade de cada produto e valoram de forma diferente cada produto.

Denote V_X^i como o valor dado pelo consumidor i ao produto X (o preço máximo que o consumidor i está disposto a pagar pelo produto X). Similarmente, V_Y^i denota o mesmo para o produto Y.

Tabela 14.1: Valoração do consumidor

	X	Y
C_1	$V_X^1 = H$	$V_Y^1 = L$
C_2	$V_X^2 = L$	$V_Y^2 = H$

Nota: $H > L > 0$

Supomos que os consumidores comprem produtos somente para o seu consumo e não para os comercializarem.

No *tying*

Quando a política de *tying* não é permitida o monopolista possui duas opções:

1. Atribui um preço baixo e vende ambos os produtos para os dois consumidores;
2. Atribui um preço alto para ambos os bens e vende uma unidade para cada consumidor.

Supomos que $p_X = p_Y = L$. Então, ambos os consumidores compram ambos os bens resultando em um lucro de $\pi^{NT} = 4L$. Agora, $p_X = p_Y = H$ nesse caso o consumidor 1 compra somente o bem X e o consumidor 2 compra somente o bem Y. Assim, $\pi^{NT} = 2H$. Comparando os dois níveis de lucro temos:

$$p_X^{NT} = p_Y^{NT} = \begin{cases} H \text{ se } H > 2L \\ L \text{ se } H < 2L \end{cases} \quad \text{e } \pi^{NT} = \begin{cases} 2H \text{ se } H > 2L \\ 4L \text{ se } H < 2L \end{cases} \tag{14.1}$$

Quando H é alto o monopolista poderia aumentar o preço a um nível mais alto e vender somente duas unidades. Quando H está próximo de L o monopólio poderia reduzir o preço e vender somente 4 unidades.

Tying

Suponha que o monopolista decida somente vender uma unidade do bem X e uma unidade do bem Y pelo preço $p^T = H + L$ e extraí todo o EC. O lucro $\pi^{NT} = 2\,(H + L)$.

Proposição. *Um monopólio vendendo dois produtos a consumidores heterogêneos (os quais as preferências são negativamente relacionadas) obtém um lucro mais elevado vendendo um pacote (tied) do que quando os componentes são vendidos separadamente. Formalmente, para cada* $H > L > 0$ *teremos que* $\pi^T > \pi^{NT}$.

14.1.3 Tying misto

Tabela 14.2: Valoração do consumidor - tying misto

	X	Y
C_1	$V_X^1 = 4$	$V_Y^1 = 0$
C_2	$V_X^2 = 3$	$V_Y^2 = 3$
C_3	$V_X^3 = 0$	$V_Y^3 = 4$

Sem tying

(1) Se $p_X = p_Y = 3$ o consumidor 1 compra X e o consumidor 3 compra Y. O consumidor 2 compra uma unidade de cada um dos produtos. O lucro será $\pi^{NT} = 3 \times 4 = 12$.

(2) Se $p_X = p_Y = 4$ o consumidor 1 compra X e o consumidor 3 compra Y. O consumidor 2 não compra. O lucro será $\pi^{NT} = 4 \times 2 = 8$.

Tying puro

O monopolista vende pacotes contendo uma unidade de X e uma unidade de Y por um único preço denotado por p^T.

(1) Se $p^T = 4$ todos os consumidores compram o pacote tying O lucro será $\pi^T = 3 \times 4 = 12$.

(2) Se $p^T = 6$. Esse preço excede as valorações dos consumidores 1 e 3. Então somente o consumidor 2 compra uma unidade. O lucro será $\pi^T = 12$.

Tying misto

O monopolista vende o pacote $(X, Y) = (1, 1)$ por $p^{MT} = 6$ ou vende individualmente por $p_X = p_Y = 4$. Nesse caso, o consumidor 2 compra o pacote e os consumidores 1 e 3 compram uma unidade de X e outra de Y respectivamente. $\pi^{MT} = 1 \times 6 + 2 \times 4 = 14$. Note que $\pi^{MT} > \pi^T$.

Proposição. *O tying misto pode resultado num lucro estritamente maior do que as estratégias de NT (sem tying) e PT (tying puro).*

14.1.4 Tying e encerramento

Suponha que os consumidores do exemplo anterior desejam comprar um sistema que combina uma CPU com um monitor. Há duas firmas, X e Y que produzem CPUs e uma firma Z, que produz monitores. Assumimos que os componentes são compatíveis. As preferências dos consumidores são descritas pela seguintes funções de utilidade:

$$U^1 = \begin{cases} 3 - p_X - p_Z \text{ se compra X e Z} \\ 1 - p_Y - p_Z \text{ se compra Y e Z} \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases}$$
$$U^2 = \begin{cases} 1 - p_X - p_Z \text{ se compra X e Z} \\ 3 - p_Y - p_Z \text{ se compra Y e Z} \\ 0 \text{ caso contrário} \end{cases} \tag{14.2}$$

Firmas independentes

Suponha que as firmas que produzem as marcas X, Y e Z sejam independentes (de proprietários distintos).

Proposição. *Quando a indústria é decomposta em 3 firmas independentes:*

1. o seguinte vetor de preços constitui um EN-Bertrand $p_X = p_Y = 2, p_Z = 1$. *Nesse equilíbrio a firma produzindo X vende 1 unidade ao consumidor 1, a firma que produz Y vende uma unidade ao consumidor 2 e a firma que produz Z vende duas unidades. Temos que:* $\pi_X = \pi_Y = \pi_Z = 2$.

2. O equilíbrio acima não é único.

Demonstração. Se Z aumenta o preço, nenhum consumidor poderia comprar qualquer sistema. Como todos os consumidores já comprar uma unidade de Z, a firma Z não pode aumentar seu lucro reduzindo o seu preço. Se a firma X deseja retirar a empresa Y do mercado ela deveria estabelecer $p_X = 0$ e assim não aumentaria os seus lucros. Essa estratégia não é válida para as empresas X e Y (Parte 1). Observe que as seguintes triplas são também um equilíbrio: $(p_X, p_Y, p_Z) = (1,1,2), (p_X, p_Y, p_Z) = (0,0,3)$ e $(p_X, p_Y, p_Z) = (3,3,0)$. □

Supomos que X compra a firma Z. Se isso ocorre X vende X e Z (tyied) em um único pacote. Chamaremos essa nova firma de XZ seu preço de p_{XZ}.

Proposição. *1. Atribuindo* $p_{XZ} = 3$ *a firma XZ retira a firma Y do mercado. A estratégia tying pode ser uma ferramenta para o encerramento de uma empresa competitiva.*

2. O encerramento de Y não é lucrativo para XZ. O lucro de XZ é menor do que a soma dos lucros de X e Z separadamente.

Demonstração. Suponha que Y atribua $p_Y = 0$. Quando $p_{XZ} = 3$ ao comprar XZ $U^2 = 3 - p_{XZ} = 0$. Assim, a firma Y não produz e o consumidor 2 não é atendido. Nesse equilíbrio $\pi_{XZ} = 3$. A soma de π_X e π_Z antes da fusão é $\pi_X + \pi_Z = 4 > 3 = \pi_{XZ}$. □

Definição. Suponha que a firma X compre a empresa Z. Então a firma X é dita $\varepsilon-$ encerrada para a firma Y, se para um dado ε pequeno, existe um EN em preços p_{XZ} e p_Y que deixaria a firma Y com um lucro de $\pi_Y = \varepsilon$.

Proposição. *1. Seja $\varepsilon > 0$ um número tão pequeno quanto se queira. Os preços $p_{XZ} = 3 - \varepsilon$ e $p_Y = \varepsilon$ constituem um equilíbrio de $\varepsilon-$ encerramento.*

2. Um equilíbrio de $\varepsilon-$ encerramento resulta em um nível de lucro mais alto para a empresa encerrada do que o equilíbrio de encerramento dado na proposição anterior.

Demonstração. Claramente esses preços constituem um EN. Para demonstrar a vantagem em termos de lucro desse equilíbrio, observe que a firma XZ vende para ambos consumidores e ganha $\pi_{XZ} = 2(3 - \varepsilon)$. Contudo sob o encerramento total a firma XZ vende somente para um único consumidor obtendo $\pi_{XZ} = 3$. Assim, para um ε suficientemente pequeno, o equilíbrio $\varepsilon-$ encerramento é mais lucrativo para a empresa XZ. □

14.1.5 Tying e a segmentação do mercado internacional

Considere uma economia mundial com dois países e com somente um consumidor em cada país. Há um único produto que é produzido e distribuído por uma única empresa.

Esse monopolista mundial possui duas opções: i) vende diretamente para a o consumidor local; ii) abre a concessionária e vende o produto e o serviço na modalidade de *tying.*

A função de utilidade do consumidor no país $k = 1, 2$ é dada por:

$$U_k = \begin{cases} \beta_k + \sigma - p_k^s \text{ se compra o produto e o serviço} \\ \beta_k - p_k^s \text{ se compra apenas o produto} \\ 0 \text{ caso não compre} \end{cases} \tag{14.3}$$

Considere que β_k mede o montante máximo que o consumidor k está disposto a pagar (sem considerar o serviço). Assim, cada consumidor trata o produto em conjunto com o serviço doméstico e o produto sem o serviço doméstico como verticalmente diferenciados para $p_k^s = p_k^{ns}$ cada consumidor poderia comprar somente o produto em conjunto com o serviço.

Suposição: *O consumidor no país 1 está disposto a pagar um preço mais alto para o produto básico comparado ao consumidor no país 2. Formalmente, temos que: $\beta_1 > \beta_2$.*

Denotamos $w \geq 0$ como os custos associados a provisão do serviço pela concessionária.

Não há tentativas de segmentar o mercado

Suponha que o monopolista vende o produto diretamente para cada consumidor. Desse modo, ele não amarra (to tie) qualquer serviço com o produtor local. Não há custos de transportes então existe uma pequena arbitragem entre os países e portanto o monopólio deveria cobrar preços idênticos em ambos:

$$p_k^{ns} = \begin{cases} \beta_2 \text{ se } \beta_1 < 2\beta_2 \\ \beta_1 \text{ se } \beta_1 > 2\beta_2 \end{cases} \quad \pi_k^{ns} = \begin{cases} 2\beta_2 \text{ se } \beta_1 < 2\beta_2 \\ \beta_1 \text{ se } \beta_1 > 2\beta_2 \end{cases} \tag{14.4}$$

Se a valoração dos bens por parte dos consumidores for tão diversa $\beta_1 < 2\beta_2$ então poderia ser lucrativo para o monopólio atribuir o preço mais baixo e vender duas unidades. Se a valoração dos consumidores é bastante diversa, então o monopólio internacional poderia aumentar o preço e vender somente um único produto no país 1.

Segmentando o mercado

Suponha que o monopólio internacional abre "franquias" em cada país e a venda do produto está amarrada ao serviço local. O vendedor local pode produzir manuais, prover treinamento e um serviço de manutenção para o produto. Como os serviços de manutenção para o produto. Como os serviços locais não são comercializados internacionalmente o monopólio pode cobrar um preço distinto em cada país. Teremos que:

$$p_k^s = \beta_k + \sigma \text{ e } \pi^s = \beta_1 + \beta_2 + 2\left(\sigma - w\right) \tag{14.5}$$

Proposição. *Uma condição suficiente para o monopólio internacional segmentar o mercado internacional em dois nacionais pela provisão dos serviços é:* $\beta_1 > \beta_2 + 2\left(\sigma - w\right)$*.*

Há espaço para a arbitragem após a segmentação?

Os preços dados em (5) diferem-se por país. Seja $p_1^s > p_2^s$. Mostraremos que o consumidor 1 que valoriza bastante o produto nacional não terá benefícios em viajar ao país 2 e comprar o produto $\beta_2 + \sigma$ ao invés de comprá-lo diretamente no país 1, sem considerar a parcela cobrada pelo serviço.

Agora, o consumidor com alto preço (alta valoração) não se beneficiará em comprar o produto com o serviço no país 2 e assim usará o produto no país 1 sem o serviço se:

$$\beta_1 - p_2 < \beta_1 + \sigma - p_1 \text{ implicando que } p_1 - p_2 < \sigma$$

Se a utilidade de fazer isso é menor que a utilidade de comprar do concessionário local com o serviço incluso no pacote a um preço mais alto. Substituindo (5) nessa condição teremos que:

$$p_1^s = \beta_1 + \sigma$$

$$p_2^s = \beta_2 + \sigma$$

$$p_1^s - p_2^s = \beta_1 - \beta_2$$

$$p_1^s - p_2^s = \beta_1 - \beta_2 < 0$$

$$p_1^s - p_2^s = \beta_1 - \beta_2 < \sigma \tag{14.6}$$

Proposição. *Se a valorização do serviço pelos consumidores é maior do que as diferenças entre os dois consumidores na valorização do produto básico ($\beta_1 - \beta_2 < \sigma$), então o monopólio internacional será bem sucedido em segmentar o mercado em dois mercados nacionais no sentido que o diferencial dos preços de equilíbrio entre esses dois mercados nacionais não gerará atividades de arbitragem.*

14.1.6 Tying como diferenciação de produto

Analisaremos como táticas de tying são usadas por firmas competindo por preços em mercados de produtos homogêneos. Consideraremos duas firmas que produzem produtos idênticos. As firmas podem vender o produto com ou sem a prestação do serviço. Podemos entender o serviço como os contratos de reparos (suporte), garantias, ajuda na operação do serviço e assim por diante. Essas empresas vendem exclusivamente pela Internet e poderiam ser exemplos de companhia que vendem o produto nessas condições.

Seja p^s o preço quando o serviço está amarrado (tied) e p^n quando não está. Os consumidores atribuem o mesmo valor básico β ao produto. Os serviços acrescentam utilidade de forma distinta para os consumidores.

Além disso, os consideramos que os consumidores estão uniformemente distribuídos no intervalo $s \in [0,1]$. Cada consumidor compra pelo menos uma unidade do produto. Assumimos que β é suficientemente grande em relação a utilidade reserva dos consumidores.

$$U^s = \begin{cases} \beta - p^n \text{ se compra o produto sem o serviço} \\ \beta + s - p^s \text{ compra os dois} \end{cases} \tag{14.7}$$

O serviço amarrado é verticalmente diferenciado do produto básico no sentido que ambos são vendidos pelo mesmo preço e cada consumidor prefere consumir o serviço agregado com o produto. Seja $m > 0$ o custo de produção unitário do produto básico e $w > 0$ o custo de produção dos serviços (que é influenciado pela taxa de salários no setor de serviços).

Por simplicidade, assumiremos que $w < 2$. Essa condição é necessária e suficiente para garantir que cada firma terá uma parcela do mercado maior do que zero. Dessa forma, teremos um jogo com dois estágios:

1. Cada firma decide se venderá o produto com ou sem os serviços;

2. A competição se dará *a la Bertrand*;

Suponha que a firma amarre (tied) a venda do seu produto com os serviços. Como os produtos são homogêneos elas vendem ao preço uniforme $p^n = m$ ambas as empresas apresentam lucro zero e o mercado é dividido arbitrariamente por elas. Caso elas usem a estratégia "to tie" o preço será $p^s = m + w$. Novamente o lucro será zero e o mercado pode ser arbitrariamente dividido entre as duas firmas.

Somente uma firma usa a estratégia amarrar (to tie)

A condição para a divisão do mercado é $\beta + \hat{s} - p^s = \beta - p^n$, sendo $\hat{s}$ o tamanho do mercado da empresa que não usa a estratégia do tipo *tie*, enquanto que $1 - \hat{s}$ é a parcela do mercado da empresa que usa a estratégia *to tie*:

$$\hat{s} = \begin{cases} 1 \text{ se } p^s - p^n \geq 1 \\ p^s - p^n \text{se } 0 < p^s - p^n \leq 1 \\ 0 \text{ se } p^s \leq p^n \end{cases} \tag{14.8}$$

O lucro da firma que usa a estratégia *to tie* é dado por $\pi^T = (p^s - m - w)(1 - \hat{s})$ e a firma que não usa essa estratégia possui um lucro $\pi^{NT} = \hat{s}(p^n - m)$. Um equilíbrio no segundo estágio se dá quando uma firma usa a estratégia amarrar e a outra não é o par $(\overline{p}^s, \overline{p}^n)$ tal que para um dado $\overline{p}^n$ a firma que agregou a escolha de $\overline{p}^s$ para maximizar $\pi^s = (p^s - m - w)(1 - \hat{s})$ satisfazendo a equação (8). O mesmo ocorre para $\pi^n = (p^n - m)\hat{s}$ também satisfazendo a equação (8).

Escolheremos arbitrariamente $\hat{s} = p^s - p^n$ e substitua nas funções de lucro. Essa escolha se dá por duas razões: i) se $\hat{s} = 1$, então teremos que $\pi^s = 0$ e $\pi^n = (p^n - m)$ sendo $p^n > m$. ii) se $\hat{s} = 0$ então teremos que $\pi^n = 0$ e $\pi^s = (p^n - m - w)$ sendo $p^n > m + w$. Nesses dois casos, a estrutura do mercado estaria na forma de monopólio. Teremos então que:

$$\pi^s = (p^s - m - w)(1 - p^s + p^n) \text{ e } \pi^n = (p^n - m)(p^s - p^n)$$

Tomando as condições de primeira ordem em relação aos respectivos preços teremos:

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \pi^s}{\partial p^s} &= 1 - 2p^s + p^n + m - w = 0 \\ \tfrac{\partial \pi^n}{\partial p^n} &= p^s - 2p^n - m = 0 \end{aligned} \tag{14.9}$$

Portanto as funções de reação para os preços podem ser escritas do seguinte modo:

$$p^s = \begin{cases} p^n \text{ se } p^n > 1+m+w \\ 0.5\left[1+m+w+p^n\right] \text{se } w+m \leq p^n \leq m+w+1 \\ \left[1+p^n, +\infty\right] \text{ se } p^n < m+w-1 \end{cases}$$
$$\text{e} \tag{14.10}$$
$$p^n = \begin{cases} p^s - 1 \text{ se } p^s > m+2 \\ 0.5\left[m+p^s\right] \text{se } m \leq p^s \leq m+2 \\ \left[p^s, +\infty\right] \text{ se } p^s < m \end{cases}$$

Se usarmos as partes intermediárias dadas em (10) poderemos encontrar uma solução interior do seguinte modo:

$$\begin{array}{c} \overline{p}^s = \frac{2}{3}(1+w)+m; 1-\bar{s} = \frac{2}{3}(2-w); \overline{\pi}^s = \frac{1}{9}(2-w)^2 \\ \overline{p}^n = \frac{1}{3}(1+w)+m; \bar{s} = \frac{1}{3}(1+w); \overline{\pi}^n = \frac{1}{9}(1+w)^2 \end{array} \tag{14.11}$$

Proposição. *1. Em um jogo de dois estágios onde as firmas escolhem no primeiro período se vão usar a estratégia (to tie) e apenas uma delas utiliza, ambas fazem lucros positivos;*

2. Um aumento na taxa de salário deveria: a) aumentar a parcela de mercado da firma no tying e diminuir a parcela da firma tying; b) o aumentar os preços de ambos p^n *e* p^s*;*

A provisão socialmente ótima do serviço

O número ótimo de consumidores que compra o produto sem o serviço é denotado por s^* que é obtido quando o preço é igual ao custo marginal. Assim, se $p^n = n$ e $p^s = m + w$ então $s^* = p^s - p^n = w$. Podemos verificar facilmente que $s^* > \bar{s}$, se, e somente se $w > 0.5$.

Proposição. *1. Se a taxa de salário do setor de serviços é alta tal que* $w > 0.5$*, o número de consumidores comprando o produto e o serviço em conjunto excede o nível socialmente ótimo* $s^* > \bar{s}$*;*

2. Se a taxa de salário é baixa, ou seja, se $w < 0.5$*, o número de consumidores de equilíbrio comprando o produto e o serviço em conjunto é menor do que o nível socialmente ótimo* $\bar{s} > s^*$*.*

Demonstração. Provaremos a primeira parte, a segunda será deixada como exercício para o leitor. Para verificarmos essa condição assuma que $\bar{s} = \frac{1}{3}(1+w)$. O maior valor possível para s^* é 1. Então igualando essas duas equações teremos que $w = 2$. Como outro oposto, assuma que $s^* = 0$ fazendo o mesmo procedimento teremos que $w = -1$ o que não faz sentido econômico. Ao assumirmos o menor valor possível para w,ou seja,$w = 0$ temos que $s^* = 1/3$. Ainda é importante observar que se $s^* - \bar{s} > 0$ temos que $s^* = (p^s - p^n = w) - \bar{s} = \left(\frac{1}{3}(1+w)\right) > 0$ o que implica que $w - \frac{1}{3}(1+w) > 0$, isto é, $w > 0.5$. Assim temos que $w \in \,]0, 2]$. $\square$

A proposição (10) é fácil de interpretar. Quando o custo de produção do serviço w é alto, um número menor do produto é socialmente desejável; ou seja, a empresa que vincula o produto ao serviço super produz do ponto de vista social. Isso é interessante, pois sob uma alta taxa de salário esperar-se-ia que as vendas da firma com que adotam a estratégia to tie fossem superadas pela firma (com desconto) que vende sem serviço. No entanto, , a empresa que não presta serviços tira vantagem do alto custo de produção da empresa de serviços e aumenta seu preço, perdendo assim participação de mercado para a empresa de serviços de alto custo.

Além disso, quando $w \to 2$ há uma superprodução da firma que usa a estratégia tie. A firma que não usa essa estratégia, toma vantagem e aumenta o seu preço perdendo uma parcelo do mercado para a firma que possui um alto custo. Definiremos o *mark-up* (margem de lucro) como a taxa de preço de venda menos o custo unitário de produção dividido por esse mesmo custo de produção. Assim para um $w > 0.5$, assim:

$$\frac{\overline{p}^s - (m+w)}{m+w} = \frac{\frac{2}{3}(1+w) + m + (m+w)}{m+w} = \frac{2-w}{3(m+w)}$$

$$\frac{\overline{p}^n - m}{m+w} = \frac{\frac{1}{3}(1+w) + m - m}{m} = \frac{1+w}{3m}$$

$$mark-up^n > mark-up^s$$

$$\frac{1+w}{3m} > \frac{2-w}{3(m+w)}$$

Assim podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição. *Quando $w > 0.5$ e quando a firma 1 usa a estratégia tie, a empresa idêntica que comercializa um produto igual sem a inclusão dos serviços possui uma taxa de mark-up mais alta.*

14.2 Dealership

14.2.1 Distribuindo o produto em um único local

Suponha um mercado com uma demanda linear $p = a - Q$. O fabricante vende um único produto para um único distribuidor. Esse distribuidor é o único vendedor desse produto. Examinaremos os contratos entre o fabricante e o distribuidor.

Mark-up de duplo monopólio

Suponha que o distribuidor possua o custo de d e esse é o seu único custo. Como o distribuidor é o único vendedor desse mercado, ele age de forma monopolística.

$$\underset{Q}{Max}\pi^d = p(Q) - dQ = aQ - Q^2 - dQ \tag{14.12}$$

$$\frac{\partial \pi^d}{\partial Q} = a - 2Q - d = 0$$

Então teremos que:

$$Q^d = \frac{a-d}{2}; p^d = \frac{a+d}{2} \text{ e } \pi^d = \frac{(a-d)^2}{4} \tag{14.13}$$

Note que o preço que o fabricante recebe do distribuidor é d o custo do fabricante é c. A quantidade já foi "escolhida" pelo distribuidor, assim o lucro do fabricante será:

$$\underset{d}{Max}\pi^M = (d-c)\, Q^d = \frac{(d-c)(a-d)}{2} \tag{14.14}$$

$$\frac{\partial \pi^M}{\partial d} = \frac{a-2d+c}{2} = 0$$

$$d^M = \frac{a+c}{2}; p^M = \frac{3a+c}{4} \text{ e } \pi^M = \frac{(a-c)^2}{8} \tag{14.15}$$

Proposição. *Quando o fabricante monopolista atribuí o preço por unidade vendida sendo que esse preço é coletado pelo distribuidor por cada unidade vendida:*

1. O fabricante recebe um lucro superior ao do distribuidor;

2. O fabricante poderia ganhar um lucro mais alto se ele vendesse diretamente. Além disso, o lucro total da indústria é menor do que o lucro ganho por uma única firma monopolista.

Demonstração. Para mostrarmos a parte 1, devemos inserir d^M na função de lucros do distribuidor teremos que:

$$\pi^d = \frac{\left(a - \frac{a+c}{2}\right)^2}{4} = \frac{(a-c)^2}{16}$$

Podemos perceber que:

$$\pi^M = \frac{(a-c)^2}{8} > \pi^d = \frac{(a-c)^2}{16}$$

Para a mostrarmos a parte 2, considere um monopólio sem um distribuidor. O lucro desse monopólio é:

$$\pi^{MND} = \frac{(a-c)^2}{4} > \pi^M + \pi^d = \frac{(a-c)^2}{8} + \frac{(a-c)^2}{16} = \frac{3}{16}(a-c)^2$$

$\square$

Contrato com tarifa de duas partes

Mostraremos como esse tipo de contrato não resultará em nenhuma perda para o fabricante. O problema do monopolista (fabricante) é oferecer um contrato ao distribuidor que seja aceitável e o induza a cobrar o preço de monopólio.

Se o fabricante vende cada unidade de produto ao distribuidor e cobra um preço $d = c$ e ainda o último deve pagar uma taxa de participação ϕ *lump-sum*, essa forma de contrato pode resultar em um lucro de monopólio para o fabricante e nenhuma perda para o distribuidor.

Proposição. *Um contrato com tarifa de duas partes:*

$$d = c \ e \ \phi = \frac{(a-c)^2}{4}$$

Essa composição resulta em um lucro de monopólio para o fabricante e nenhuma perda para o distribuidor.

Demonstração. Sob esse arranjo contratual, o distribuidor maximiza $\pi^d = aQ - Q^2 - dQ - \phi$. Então teremos que $\frac{\partial \pi^d}{\partial Q} = a - 2Q - d = 0$ e $Q^* = \frac{a-d}{2}$. Como $d = c$ a receita do monopólio é $\phi = \frac{(a-c)^2}{4}$. Como $\pi^d = 0$, a receita líquida do distribuidor será: $RL^d = aQ - Q^2 - dQ = Q\,(a - Q - d) = Q\left(a - d - \frac{a-d}{2}\right) = Q\left(\frac{a-d}{2}\right) = \frac{(a-c)^2}{4}$. Essa receita será paga ao fabricante na forma de uma taxa *lump-sum*. □

14.2.2 Manutenção do preço de revenda e propaganda

O preço de revenda é dado por um acordo entre o distribuidor e o fabricante para a manutenção de um "piso", preço máximo ou preço fixo por usuário. Do ponto de vista do distribuidor a manutenção do preço de revenda possui dois objetivos principais:

1. Pode parcialmente resolver a baixa lucratividade da indústria associada ao duplo *mark-up;*

2. Pode induzir aos fabricantes a alocarem recursos para promoverem o produto;

Consideramos um mercado em que a demanda pelo mercado é afetada pelo nível de propaganda agregado da indústria que pode ser denotado por A. Assumimos que a demanda do produto é dada por $p = \sqrt{A} - Q$.

Suponha que o fabricante venda o produto a dois distribuidores que competem em preços. Denotaremos d como o preço unitário ao qual o fabricante vende ao distribuidor. Considere A_i o gasto feito em propaganda pelo distribuidor. Assim o gasto agregado é dado por $A = A_1 + A_2$.

Proposição. *Suponha que o fabricante não se envolva com a publicidade e suponha que ele venda cada unidade do produto para os dois distribuidores ao apreço unitário d. Então para* *qualquer d dado , nenhum distribuidor poderia se envolver na publicidade $A_i = 0, i = 1, 2$ e a demanda cairia para zero, assim não haveria vendas.*

Demonstração. Como as distribuidoras estão num jogo do tipo Bertrand para produtos homogêneos, o preço deveria cair ao custo unitário do distribuidor. Portanto, $p = d$. Para qualquer valor de d, dado que cada distribuidor possui lucro zero, mesmo sem gastar em propaganda consequentemente os distribuidores não se envolvem com publicidade. Mostraremos que o arranjo chamado manutenção do preço de revenda pode eliminar a competição entre os fabricantes e induzi-los a investirem em publicidade. Suponha que o fabricante exija um preço piso para ambos os distribuidores $\left(p^f\right)$. Claramente o fabricante deve atribuir $p^f \geq d$ caso o contrário os distribuidores teriam lucro negativo mesmo sem investirem em publicidade.

Dados p^f e $Q = \sqrt{A_1 + A_2} - p^f$ cada distribuidor escolherá seu nível de propaganda que soluciona:

$$\underset{A_i}{Max} \pi_i^D = \frac{\sqrt{A_1 + A_2} - p^f}{2} \left(p^f - d\right) - A_1$$

$$\frac{\partial \pi_i^D}{\partial A_i} = \frac{\left(p^f - d\right)(A_1 + A_2)^{-0.5}}{2} - 1 = 0$$

$$A_1 + A_2 = \frac{\left(p^f - d\right)^2}{16} \tag{14.16}$$

□

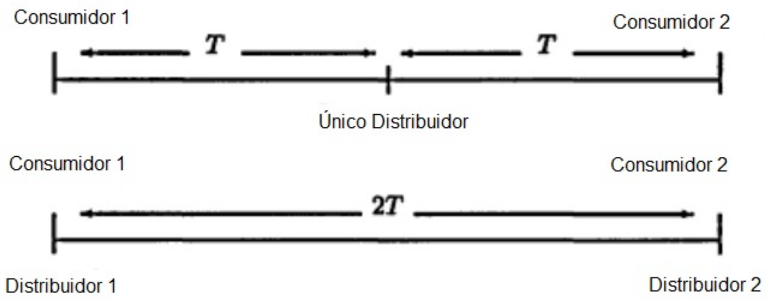
Proposição. *A manutenção do preço de revenda $p^f \geq d$ garante que pelo menos um distribuidor investirá em propaganda. Além disso, o gasto agregado dos distribuidores aumentará com o acréscimo no gap entre o preço mínimo e o preço do distribuidor por unidade vendida $\left(p^f - d\right)$.*

14.2.3 Distribuição territorial

Assumiremos que o custo de produção do fabricante é zero e que ele vende cada unidade do produto a cada distribuidor ao preço d.

Considere que o distribuidor investe um montante $F > 0$ para estabelecer a relação contratual. Considere apenas dois consumidores localizados nos extremos da cidade.

Figura 14.2: *Concessionárias na cidade linear*



O custo de transporte do extremo ao centro é T. O custo de transporte de um lado a outro da cidade é $2T$. Seja B sendo que $B > F + T$ o valor básico que cada consumidor atribuí ao produto.

$$U^s = \begin{cases} B - T - p \text{ se compra do distribuidor central} \\ B - p_i \text{ se compra do distribuidor mais próximo} \\ B - 2T - p_i \text{ se compra do outro lado da cidade} \\ 0 \text{ se não compra} \end{cases} \tag{14.17}$$

Distribuição territorial exclusiva no centro da cidade

O distribuidor compra cada unidade do fabricante pelo preço d e revende p^D. Sendo um monopólio na cidade, essa configuração extraí todo o EC $p^D = B - T$. O distribuidor vende aos dois consumidores $Q^D = 2$ e obtém um lucro $\pi^D = 2\left(p^D - d\right) - F = 2\left(B - T - d\right) - F$. O problema do fabricante é:

$$\underset{d}{Max} \pi^M = dQ^D \text{ s.a } \pi^D = 2\left(B - T - d\right) - F \geq 0$$

$$L\left(d, \lambda\right) = 2d + \lambda\left[2\left(B - T - d\right) - F\right]$$

$$L_d = 2 - 2\lambda \leq 0; d \geq 0; L_d d = 0$$

$$L_\lambda = 2\left(B - T - d\right) - F \geq 0; \lambda \geq 0; L_\lambda \lambda = 0$$

Para as duas restrições estarem ativas precisamos que $d > 0$ e $\lambda > 0$. Por $L_d, \lambda = 1$ e por $L_\lambda, d = B - T - 0.5F$. Então temos que $\pi^M = 2\left(B - T\right) - F$.

Dois distribuidores localizados nas pontas: equilíbrio do jogo

Definição. A cidade é considerada grande se $T > {}^F\!/_4$ e pequena se $T < {}^F\!/_4$.

Definição. O par de preços p_1^D e p_2^D é chamado de *undercut proof equilibrium (UPE):*

$$\pi_1^D = p_1^D - d - F \geq 2\left(p_2^D - 2T - d\right) - F$$
$$\pi_2^D = p_2^D - d - F \geq 2\left(p_1^D - 2T - d\right) - F$$

Cada vendedor (distribuidor) vendendo ao consumidor mais próximo não acha lucrativo "cortar" a empresa rival (vendendo ao preço do rival menos o custo de transporte de atravessar a cidade).

Dois distribuidores: o caso de uma cidade grande

Quando a cidade é muito grande $F < 4T$, mostramos que as firmas não podem aumentar seus lucros engajando-se na política de *undercutting* (sub cotação) porque o subsídio do custo de transporte do consumidor localizado no outro extremo da cidade é muito alto. Portanto, o fornecedor por extrair o aluguel (renda) máxima atribuindo a taxa do distribuidor de $d = B - F$. Assim, cada distribuidor paga o preço máximo $p_i^D = B$ e ganha $\pi_i^D = B - d - F = B - (B - F) - F = 0$ e o fabricante recebe $\pi_i^M = 2d = 2(B - F) - F$.

Precisamos garantir que os preços atribuídos pelos distribuidores $p_i^D = B$ constitui um *UPE.* Isso é facilmente estabelecido observando que:

$$\pi_i^D = B - (B - F) - F \geq 2\left[B - 2T - (B - F)\right] - F$$

$$0 \geq F - 4T$$

$$4T \geq F$$

Dois distribuidores: o caso de uma cidade pequena

Quando a cidade é pequena $F > 4T$ os dois distribuidores competem intensivamente por preço o que resulta em perdas para ambos. Para ver isso, resolvendo as condições *UPE* $p_i^D = d + 4T$. Portanto, $\pi_i^D = p_i^D - d - F = 4T - F < 0$.

Proposição. *Quando a cidade é pequena o fabricante irá conceder somente a um distribuidor localizado no centro cidade.*

Distribuição territorial exclusiva

Proposição. *Suponha que o fabricante conceda a distribuição a duas empresas localizadas nos extremos da cidade. Ao garantir a distribuição territorial exclusiva o fabricante terá um lucro estritamente positivo.*

O fabricante estabelece que o distribuidor 1 vende apenas para o consumidor 1 e o distribuidor 2 vende apenas para o consumidor 2. Ambos vendes nas vizinhanças próximas desses consumidores. Desse modo, cada distribuidor possui um monopólio local e cobra $p_i^D = B$. O problema do fabricante:

$$\underset{d}{Max}\pi^M = 2d \text{ s.a } \pi_i^D = B - d - F \geq 0$$

Implicando que o preço unitário é $d^M = B - F$, assim $\pi^M = 2(B - F) > 0$. Note que embora a distribuição territorial exclusiva aumente os lucros quando comparada ao caso da distribuição competitiva, numa cidade pequena o fabricante poderia aumentar seus lucros concedendo a distribuição a uma única empresa.

$$\pi^M = 2(B - F) < 2(B - T) - F$$

O lado direito da expressão acima consiste no lucro da fabricante sob o esquema de concessão da distribuição por apenas uma empresa.

15 Monitoramento, administração, compensação e regulação

15.1 Provendo incentivos econômicos

O agente

Denotaremos por e o montante de esforço a ser executado pelo agente. Supomos que $e = 2$ (esforço alto) e $e = 0$ (esforço baixo). Assumimos que se o agente não aceitar esse trabalho ele poderá trabalhar em outro lugar, por exemplo, numa empresa pública. Caso isso ocorra, o agente possui um nível de utilidade de 10. Chamamos esse nível de utilidade de utilidade de reserva. Ainda podemos definir a utilidade do agente como $U : R^2 \to R$ sendo $U(w, e) = w - e$.

$$U = \begin{cases} w - e \text{ se o agente exerce esforço } e \\ 10 \text{ caso trabalhe em outro local} \end{cases} \tag{15.1}$$

O principal

Estamos tratando de um exemplo de um restaurante em que o dono contrata um garçom para gerir o estabelecimento. A receita do restaurante depende do nível de esforço do garçom.

$$R(e) = \begin{cases} H \text{ se } e = 2 \\ L \text{ se } e = 0 \end{cases} \tag{15.2}$$

O lucro do restaurante é dado por:

$$\pi = R(e) - w \tag{15.3}$$

O contrato

O objetivo do dono é maximizar o lucro. Assumimos que $(H - L)$ é suficientemente grande tal que o dono do restaurante busca maximizar o salário esperando enquanto induz o garçom a trabalhar duro. Seja w^H o salário que o principal promete pagar ao agente quando a receita é H e seja w^L o salário pago quando a receita é L.

Quais são os valores de w^H e w^L que maximizam o lucro do principal? Primeiramente, w^H deve fornecer uma utilidade maior ao agente do que a utilidade que seria fornecida caso ele trabalhasse em outro lugar:

$$w^H - 2 \geq 10 \text{ (restrição de participação)} \tag{15.4}$$

Mesmo que o agente trabalhe para o restaurante, o contrato deve prover incentivos monetários para que ele se esforce mais. O nível líquido de utilidade quando o agente exerce esforço alto deve ser maior (ou no limite igual) ao nível líquido de utilidade quando ele desempenha esforço baixo.

$$w^H - 2 \geq w^L - 0 \text{ (compatibilidade de incentivos)} \tag{15.5}$$

Para o caso de igualdade (4) $w^H = 12$ e por (5) $w^L = 10$. O lucro seria $\pi^H = H - w^H = H - 2$ e $\pi^L = H - w^L = L - 10$. Devemos assumir que $\pi^H \geq \pi^L$ ou $H - L \geq 2$. Nesse modelo, o principal pode observar o esforço do agente vendo a receita do restaurante.

15.1.1 Provendo incentivos econômicos sob incerteza

A receita do restaurante depende de outros parâmetros que não dependem do esforço do agente. Chamamos essas outras causas de estados da natureza, porque eles estão além do controle do agente e do principal. Em outras palavras, um nível de esforço alto executado pelo agente não necessariamente resulta em uma receita elevada. O aumento no esforço do agente aumenta a probabilidade do evento $R(e) = H$. Formalmente temos que:

$$\begin{aligned} R(2) &= \begin{cases} H \text{ com probabilidade } 0.8 \\ L \text{ com probabilidade } 0.2 \end{cases} \\ R(0) &= \begin{cases} H \text{ com probabilidade } 0.4 \\ L \text{ com probabilidade } 0.6 \end{cases} \end{aligned} \tag{15.6}$$

Faremos uma pequena mudança na função de utilidade do agente que permite incorporar esse ambiente de incerteza:

$$U = \begin{cases} Ew - e \text{ se o agente exerce esforço } e \\ 10 \text{ caso trabalhe em outro local} \end{cases} \tag{15.7}$$

Sendo E o operador de expectativa. $Ew = 0.8w^H + 0.2w^L$ quando $e = 2$ e $Ew = 0.4w^H + 0.6w^L$ quando$e = 0$. A restrição de participação é dada por:

$$0.8w^H + 0.2w^L - 2 \geq 10 \tag{15.8}$$

A restrição de compatibilidade de incentivos:

$$0.8w^H + 0.2w^L - 2 \geq 0.4w^H + 0.6w^L - 0 \tag{15.9}$$

Usando (8) e (9) em igualdade e solucionando o sistema teremos que:

$$w^H = 13 \text{ e } w^L = 8$$

Uma estrutura de incentivos econômicos é eficiente se ela não é custosa para ser implementada. Compare o salário pago quando o monitoramento era perfeito $w^H = 12$ e $w^L = 10$ com aquele pago quando há incerteza $w^H = 13$ e $w^L = 8$. No caso de incerteza, o salário esperado do agente que realiza esforço alto é: $0.8 \times 13 + 0.2 \times 8 = 12$ o que é idêntico ao salário pago sob monitoramento com a restrição de participação.

Esse resultado não é robusto porque nesse exemplo ambos os participantes do contrato são neutros ao risco.

15.1.2 O problema de agência sob informação assimétrica

Assumiremos que cada jogador atribui diferentes probabilidades a cada estado da natureza. O proprietário do restaurante acredita que $R^O(2)$ e $R^O(0)$ são realizadas de acordo:

$$R^O(2) = \begin{cases} H \text{ com probabilidade } 0.8 \\ L \text{ com probabilidade } 0.2 \end{cases} \text{ e } R^O(0) = \begin{cases} H \text{ com probabilidade } 0.4 \\ L \text{ com probabilidade } 0.6 \end{cases} \tag{15.10}$$

As crenças do garçom são:

$$R^W(2) = \begin{cases} H \text{ com probabilidade } 0.7 \\ L \text{ com probabilidade } 0.3 \end{cases} \text{ e } R^W(0) = R^O(0) \tag{15.11}$$

Definição. Sejam dois consumidores denotados por $i = 1, 2$. O consumidor i é mais risco avesso que o consumidor j para $i \neq j$ se quando o consumidor j prefere um montante fixo de dinheiro do que uma loteria então o consumidor i também preferirá o montante fixo de dinheiro.

Em nosso exemplo, o garçom é mais risco avesso do que o dono, pois ele é mais cético quanto a realização do bom estado na natureza. Suponha que $w^H > w^L$. Então, se o garçom exerce esforço igual a dois o salário esperado deve ser:

$$Ew^O = 0.8w^H + 0.2w^L > 0.7w^H + 0.3w^L = \mathrm{E}w^W$$

$$Ew^O > \mathrm{E}w^W$$

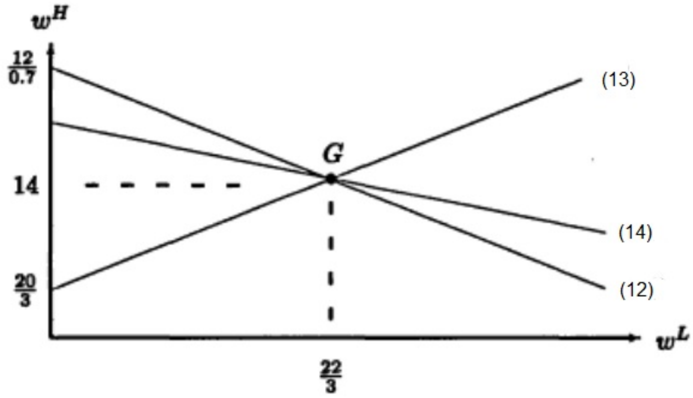
O garçom valora o salário esperado menos que o dono, refletindo que o comportamento do garçom requer uma grande compensação para que ele trabalhe em um ambiente de incerteza. A restrição de participação do garçom é:

$$0.7w^H + 0.3w^L - 2 \geq 10 \text{ ou } w^H = \frac{12 - 0.3w^L}{0.7} \tag{15.12}$$

A restrição de incentivos:

$$0.7w^H + 0.3w^L - 2 \geq 0.4w^H + 0.6w^L - 0 \text{ ou } w^H = \frac{20}{3} + w^L \tag{15.13}$$

Figura 15.1: Contrato ótimo sob assimetria de informação



Finalmente, o dono do restaurante escolhe um contrato w^H e w^L que minimize a folha salarial Ew^O que ele deve pagar ao garçom. Se $H - L$ é suficientemente grande há uma equivalência entre maximizar o lucro esperado e minimizar o salário esperado.

$$\underset{w^H, w^L}{Min} Ew^O = 0.8w^H + 0.2w^L \tag{15.14}$$

Podemos desenhar essa reta no gráfico anterior do seguinte modo: i) fixe um nível de $Ew^O = \bar{E}$ e então:

$$w^H = 1.25\bar{E} - 0.25w^L$$

Proposição. *O salário esperado pelo dono (a folha de pagamento esperada) supera a utilidade de reserva do garçom mais o seu nível de esforço:*

$$Ew^O = 0.8w^H + 0.2w^L = 12.66 > 12$$

Podemos notar que $Ew^O - \left(\bar{U} + e\right)$ pode ser interpretado como o montante pago ao agente (garçom) por ele ser relativamente mais avesso ao risco.

15.2 Produção com equipes

A incapacidade de monitorar o esforço do trabalhador gera uma ineficiência quando o produto da empresa depende do nível de esforço de todos os trabalhadores envolvidos em um certo projeto (chamaremos isso de esforço conjunto da equipe).

Esse tipo de externalidade é comumente chamada de efeito carona (*free-rider effect*), visto que o esforço do grupo depende do esforço individual de cada participante, isto é, se cada membro não é recompensado individualmente ele possui um incentivo a fazer corpo mole.

Considere um laboratório de pesquisa que desenvolve um produto cujo o valor futuro é denotado por V. Nesse laboratório, há N cientistas que estão trabalhando nesse projeto. Denotamos e_i como o nível de esforço empregado por cada pesquisador $i = 1, 2, ..., N$.

$$V = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{e_i} \tag{15.15}$$

Denotamos w_i como a compensação dada ao cientista i após o projeto estar pronto. Assumimos que o valor do produto é distribuído para os trabalhadores de tal forma que:

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = V$$

Por simplicidade todos os cientistas possuem preferências idênticas:

$$U_i = w_i - e_i \, i = 1, 2, ..., N \tag{15.16}$$

Supomos que cada cientista pode observar o esforço dos seus colegas e que eles "conspiram" para maximizarem seus níveis de utilidade. Atribuímos $e_i = e$ e $w_i = {}^{V}\!/\!{}_{N} \forall\, i = 1, ..., N$. Se substituirmos em (16) o nível de esforço que maximiza a utilidade do trabalhador representativo é:

$$\underset{e}{Max}\,(w - e) = \frac{V}{N} - e = \sqrt{e} - e$$

Teremos então que $e^* = 0.25$ e $V^* = N\sqrt{e^*} = {}^{N}\!/\!{}_{2}$.

15.2.1 Divisão igual do mecanismo econômico

Supomos que o administrador da firma recompense os cientistas de acordo com a parcela de participação no valor do produto. Essa parcela é igual para todos. Cada cientista toma o nível de esforço dos seus colegas como dado e escolhe o seu nível de esforço para maximizar a utilidade:

$$\underset{e_i}{Max} U_i = \sum_{i \neq j} \frac{\sqrt{e_j} + \sqrt{e_i}}{N} - e_i \tag{15.17}$$

Então:

$$e^n = e_i = \frac{1}{4N^2} \leq e^* \tag{15.18}$$

Proposição. *Sob a regra de divisão igual*

1. Se o time consiste em um único trabalhador ele proverá o nível ótimo de esforço. Isto é, se $N = 1$, então,$e^n = e^* = \frac{1}{4}$.

2. Se a equipe consiste em mais de um trabalhador, cada um deles deveria empregar menos do que o nível de esforço ótimo. Ou seja, se $N > 1$, então $e^n < e^* = \frac{1}{4}$.

3. Se a equipe é muito grande, menor será o esforço empregado por cada trabalhador (cada um deles terá um grande incentivo a fazer corpo mole). Ou seja, se N aumenta então e^n cai.

Olharemos o efeito da força de trabalho no produto total, bem como, no nível de bem estar social do trabalhador. Substituindo (18) em (15) para e^n que o valor de EN para o produto é:

$$V^n = N\sqrt{e^n} = N\sqrt{\frac{1}{4N^2}} = \frac{1}{2} \tag{15.19}$$

A diferença entre o nível ótimo de produto e seu valor de equilíbrio é:

$$V^* - V^n = {}^{(N-1)}/_{2}$$

Substituindo (18) em (16) teremos o EN para o nível de utilidade de cada trabalhador:

$$U_i = \frac{V^n}{N} - e^n = \frac{1}{2N} - \frac{1}{4N^2} = \frac{2N-1}{4N^2} \tag{15.20}$$

Proposição. *1. Um aumento no número de trabalhadores da equipe aumenta a diferença entre o nível ótimo de produto e o nível de EN. Isto é, $V^* - V^n$ aumenta quando N cresce;*

2. Um aumento no número de trabalhadores, irá reduzir o nível de bem estar de cada trabalhador. Isto é, U_i é decrescente em N;

Demonstração. Parte 1: $\frac{\partial(V^* - V^n)}{\partial N} = {}^{1}/_{2} > 0$, ou seja a diferença é estritamente crescente em N;

Parte 2: Tomamos a derivada de U_i em relação a *N:*

$$\frac{\partial U_i}{\partial N} = \frac{1}{2N^2}\left(\frac{1}{N} - 1\right) \leq 0$$

□

A parte 2 nos mostra que o efeito carona aumenta quando o número de trabalhadores cresce causando um desvio no nível ótimo do produto. O nível ótimo $V^* = \frac{N}{2}$ aumenta quando N cresce, mas o nível de equilíbrio é fixo em $V^n = \frac{1}{2}$.

15.3 Competição e compensação gerencial

15.3.1 Incentivos aos gerentes

O dono de cada firma (pode ser uma única pessoa ou um acionista) nomeia um gerente que está de acordo com o seguinte esquema de compensação:

$$M_i = \mu_i \left[\alpha_i \pi_i + (1 - \alpha_i) R_i\right] = \mu_i \left[(a - q_1 - q_2) q_i - \alpha_i q_i c\right] \tag{15.21}$$

Aqui supomos que o produto é homogêneo e a demanda agregada do mercado é $p = a - Q$, sendo$Q = q_1 + q_2$. Há duas firmas nesse mercado que são indicadas por $i = 1, 2$. Temos que:

$$R_i = pq_i = (a - q_1 - q_2) q_i$$

$$\pi_i = pq_i = R_i - cq_i$$

Ainda restringimos que: $c \in \left]0, a\right[$ e $a \in \left]c, 5c\right[$. Note que essa é uma estrutura de mercado nos moldes do modelo de Cournot. Assumimos ainda que cada gerente recebe uma parcela $\mu_i > 0$ dos lucros e das receitas da firma.

15.3.2 O jogo de dois estágios

No primeiro estágio o dono de cada firma escolhe μ_i e α_i de modo a maximizar o lucro:

$$\pi^O (\mu_i, \alpha_i) = \pi_i - M_i \tag{15.22}$$

Sendo M_i a compensação administrativa. Já no segundo estágio o gerente toma q_j como dado e escolhe o nível de produto da firma i isto é q_i:

$$\frac{\partial M_i}{\partial q_i} = \mu_i \left[(a - 2q_i - q_j) - \alpha_i c\right] = 0$$

$$q_i = \frac{a - q_j - \alpha_i c}{2} \tag{15.23}$$

Embora q_j seja tomado como dado o valor desse parâmetro é simétrico ao de q_i:

$$q_j = \frac{a - q_i - \alpha_j c}{2}$$

Ao resolvermos o sistema de equações teremos que:

$$q_i^* = \frac{a + \alpha_j c - 2\alpha_i c}{2} \text{ e } q_j^* = \frac{a + \alpha_i c - 2\alpha_j c}{2}$$

E então:

$$Q^* = q_i^* + q_j^* = \frac{2a - c\left(\alpha_i + \alpha_j\right)}{3} \tag{15.24}$$

Proposição. *O produto agregado da indústria aumenta quando um dos dois donos diminui o incentivo do seu gerente a maximizar o lucro. Formalmente, Q é decrescente em* α_i*:*

$$\frac{\partial Q^*}{\partial \alpha_i} = -\frac{c}{3} < 0$$

O preço como uma função de α_i e α_j pode ser expresso por:

$$p\left(\alpha_i, \alpha_j\right) = a - Q\left(\alpha_i, \alpha_j\right) = \frac{a + c\left(\alpha_i + \alpha_j\right)}{3} \tag{15.25}$$

Primeiro estágio os donos escolhem a função de objetivo dos gerentes

Note que μ_i não apresenta nenhum efeito na função de compensação dos gerentes. Se os gerentes não possuem outras alternativas de trabalho os donos atribuiriam a μ_i o valor mais baixo possível.

Suponha que $\mu_i = 0$ (por simplicidade) então o dono de cada firma i toma α_j e o produto e as funções de preço e de quantidade como dadas e escolhe α_i que resolve:

$$\underset{\alpha_i}{Max}\ \pi^O\left(\alpha_i, \alpha_j\right) = \left[p\left(\alpha_i, \alpha_j\right) - c\right] q_i \tag{15.26}$$

Tomando a condição de primeira ordem teremos que:

$$\alpha_i = R\left(\alpha_j\right) = \frac{6c - a - \alpha_j c}{4c} \tag{15.27}$$

As funções de melhor resposta do dono possuem inclinação negativa. Isso implica que se o dono da firma 1 encorajar o seu gerente a colocar mais peso na receita do que no seu lucro (reduzindo α_1) o dono da firma 2 poderia responder aumentando o incentivo para seu gerente atribuir um peso maior no lucro do que na receita.

Suponha que a firma 2 é um tipo de Cournot e é administrada diretamente pelo seu dono e portanto somente maximiza o lucro. Isso significa que $\alpha_i = 1$.

Proposição. *Dado que a firma 2 somente maximiza o lucro, o dono da firma 1 não irá maximizar* α_1 *tal que seu gerente irá atribuir o nível de produção igual ao nível de produção da empresa líder. Formalmente quando* $\alpha_2 = 1$ *o dono da firma 1 atribui* $\alpha_1 = \frac{5c-a}{4c}$*. Assim,* $q_1 = \frac{a-c}{2}$*.*

A proposição anterior mostra por quais possíveis razões os gerentes são necessários. Escrevendo um contrato do tipo (21) o dono da firma 1 pode avançar na sua posição estratégica além do que poderia ser atingido se o dono da administrasse a empresa por conta própria. Resolvendo as funções de melhor resposta em (27):

$$\alpha_1 = \frac{6c - a - \alpha_2 c}{4c} \text{ e } \alpha_2 = \frac{6c - a - \alpha_1 c}{4c}$$

Teremos que:

$$\alpha_1 = \frac{6c - a}{5c} \text{ e } \alpha_2 = \frac{6c - a}{5} \tag{15.28}$$

Teremos ainda que:

$$q_2 (\alpha_1, \alpha_2) = \frac{2 (a - c)}{5} \text{ e } Q (\alpha_1, \alpha_2) = \frac{4 (a - c)}{5}$$

Proposição. *Numa indústria onde os donos são separados dos gerentes, o nível de produção excede o nível de equilíbrio no modelo de Cournot:*

$$q_i^e = \frac{2 (a - c)}{5} > q_i^{Cournot} = \frac{(a - c)}{3}$$

A separação dos donos das firmas e dos administradores intensifica a competição entre as empresas. De modo geral, isso reduz o lucro agregado da indústria.

15.3.3 Conluio entre os donos

Suponha que os donos das empresas combinem o esquema de compensação dos gerentes e decidem atribuir um α em comum acordo. Nesse caso, a equação (26) ficaria:

$$\pi_i = \alpha c (a + 3c - 2c\alpha)$$

O dono escolherá α^* que maximize o lucro em conjunto:

$$\underset{\alpha}{Max} \pi = (\pi_1 + \pi_2) = 2\alpha c (a + 3c - 2c\alpha)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \alpha} = 2\alpha c - 8\alpha c^2 + 6c^2 = 0$$

$$\alpha^* = \frac{a + 3c}{4c}$$

Substituindo na funções de quantidade:

$$q_i^* = q_j^* = \frac{a - \alpha c}{2}$$

Teremos:

$$q_1^* (\alpha) = q_2^* (\alpha) = \frac{a - c}{4}$$

Proposição. *No conluio entre os donos há um menor nível de produção e um maior lucro para a firma do que em um mercado sob a competição de Cournot:*

$$q_i^* < q_i^{Cournot} \text{ ou seja,} q_i^*(\alpha) = \frac{a-c}{4} < q_i^{Cournot} = \frac{a-c}{3}$$

15.4 Por qual motivo os executivos recebem salários mais elevados?

Nessa seção mostramos que as firmas podem achar lucrativo pagarem salários de acordo com um ranqueamento de salários. Os salários elevados dos executivos podem prover incentivos para todos os empregados da empresa que com o trabalho duro podem ser promovidos as posições superiores cobiçadas pela maioria dos trabalhadores.

Em particular, sob um monitoramento imperfeito, em que as firmas não conseguem observar o nível de esforço dos trabalhadores, mostramos que pagando de acordo com um ranqueamento de salário isso pode fazer com que os trabalhadores exerçam um nível de esforço mais alto.

Por simplicidade, suponha que há apenas dois trabalhadores e um deles será promovido e se tornará um executivo. Essa promoção está garantida para o trabalhador que apresentar o nível mais alto de esforço.

Denote q_i como o nível de produto do trabalhador i e assumimos que cada trabalhador pode trabalhar duro exercendo um nível de esforço $e_i = e > 0$ ou fazer corpo mole exercendo $e_i = 0$.

O relacionamento entre o nível esforço do trabalhador i e seu nível de produto é assumido pela seguinte relação:

$$q_i \equiv \begin{cases} 0 \text{ se } e_i = 0 & \\ & \left.\begin{matrix} H \text{ com probabilidade } 0.5 \\ 0 \text{ com probabilidade } 0.5 \end{matrix}\right\} \text{ se } e_i = e \\ & \end{cases} \tag{15.29}$$

Quando a firma encontrar o trabalhador que produziu que $q_i = 0$ ela não poderá inferir se o trabalhador está fazendo corpo mole ou se a baixa produtividade é decorrente, digamos, por causa do mau tempo ou de um equipamento defeituoso.

Seja w^E o salário do executivo e w^W a taxa de salário paga aos outros trabalhadores. Suponha que $w^E > w^W$ e que o trabalhador mais produtivo será promovido ao nível salarial de executivo. Se ambos executarem o mesmo nível de esforço, assumimos que a promoção será dada a jogarmos uma moeda justa. Considere $p \in [0, 1]$ a probabilidade do trabalhador i ser promovido.

Lema. *A probabilidade do trabalhador 1 ser promovido a um esquema de pagamento por ranqueamento como executivo é:*

$$p = \begin{cases} {}^{1}/_{2} \ se \ e_1 = e_2 = 0 \\ {}^{1}/_{2} \ se \ e_1 = e_2 = 2 \\ {}^{3}/_{4} \ se \ e_1 = e \ e \ e_2 = 0 \\ {}^{1}/_{4} \ se \ e_1 = 0 \ e \ e_2 = e \end{cases}$$

Demonstração. Quando $e_1 = e_2 = e$ o evento onde $q_1 = q_2 = H$ ocorre com probabilidade de $^1/_4$. Assim, de acordo com essa realização do trabalhador 1 é promovido com probabilidade $^1/_8$. De mogo similar o trabalhador 1 é promovido com probabilidade $^1/_8$ quando a realização de $q_1 = q_2 = 0$. Finalmente, o evento $q_1 = H > q_2 = 0$ ocorre com probabilidade $^1/_4$. Somando, quando $e_1 = e_2 = e$ o trabalhador 1 é promovido com probabilidade $^1/_2$. Quando $e_1 = e > 0 = e_2$ o evento $q_1 = H > q_2 = 0$ ocorre com probabilidade de $^1/_2$, assim, nesse caso o trabalhador 1 é promovido com o probabilidade $^1/_4$. Somando quando $e_1 = e > 0 = e_2$ o trabalhador 1 é promovido com probabilidade $^3/_4$.

Quando $e_1 = 0 < e = e_2$ o evento $q_1 = q_2 = 0$ ocorre com probabilidade de $^1/_2$, assim, nesse caso o trabalhador 1 é promovido com probabilidade de $^1/_4$. □

Assuma que cada trabalhador i toma o nível de esforço de outro trabalhador como dado usando as probabilidades descritas no Lema anterior, a expressão que maximiza a utilidade esperada do trabalhador é dada por:

$$EU_i\left(e_1, e_2\right) = Ew_i - e_i \ i = 1, 2 \tag{15.30}$$

Assumimos que a firma atribui a sua estrutura de salário w^W para o trabalhador que não é promovido por e w^E para aquele que será promovido a executivo. Olharemos então para o EN no nível de esforço dos dois trabalhadores.

Proposição. *1. Se os executivos e trabalhadores recebem o mesmo salário, então nenhum trabalhador se esforçaria em trabalhar. Formalmente, se* $w^E = w^W$ então $e_1 = e_2 = 0$ é o único EN;

2. Se a firma paga ao executivo um salário superior aquele pago ao trabalhador, então ambos os funcionários irão se esforçar em suas atividades. Formalmente, se o salário (estrutura) satisfaz $w^E > 4e + w^W$ então $e_1 = e_2 = e$ é o único EN.

Demonstração. A primeira parte é simples, se o ganho da promoção não for seguido por um aumento salarial, nenhum trabalhador poderia receber esse ganho exercendo esforço. Para a segunda parte, note que $w^E > 4e + w^W$ e isso garante que:

$$EU_1\left(e, e\right) = 0.5w^E + 0.5w^W - e > 0.25w^E + 0.75w^W = EU_1\left(0, e\right)$$

A equação acima implica que o trabalhador 1 (e similarmente o trabalhador 2) não irão desviar do nível de esforço alto como a utilidade esperada de se esforçar mais excede a utilidade esperada de fazer corpo mole. Finalmente, precisamos mostrar que $e_1 = e_2 = 0$ não é um EN:

$$EU_1(0,0) = 0.5w^E + 0.5w^W < 0.75w^E + 0.25w^W - e = EU_1(e,0)$$

A relação acima implica que o trabalhador 1 (e similarmente o trabalhador 2) desviariam da estratégia de fazer corpo mole, considerando que o outro faz corpo mole. □

É claro que numa empresa deve remunerar o CEO (Chief Executive Officer) um montante igual ao seu efeito sobre a rentabilidade igual ao seu efeito sobre a rentabilidade de toda a empresa. Ainda que o custo de medida para cada executivo seja muito alto. Pode-se dizer que aqueles trabalhadores que estão em cargos inferiores são testados (possuem o desempenho testados) "continuadamente". Assim ao executar um torneio por ranqueamento a empresa possui uma probabilidade de mais alta de identificar os trabalhadores que se esforçam mais enquanto incentiva todos os trabalhadores a se empenharem mais.

O modelo dessa seção apresenta uma explicação razoável para a disparidade salarial dentre os trabalhadores de uma mesma empresa. Porém o modelo não consegue explicar essa disparidade salarial quando a firma contrata o seu executivo de fora da empresa.

15.5 Regulando uma firma com o custo desconhecido

Frequentemente, agências governamentais são destinadas a determinarem o preço cobrado por companhias públicas, bem como, empresas de telefonia, eletricidade e gás para os seus clientes.

Sob informação perfeita a agência reguladora simplesmente atribuirá o preço igual ao custo marginal de produção e proverá um subsídio do tipo *lump-sum* para cobrir os custos fixos (se houverem).

De modo geral, a agência reguladora não conhece o custo de produção da empresa regulada e fundamentalmente não sabe os níveis de esforço executados pelos trabalhadores e pelos gerentes. Nesse sentido, numa situação (ambiente) que a informação não é simétrica é pouco provável que a firma reporte o seu verdeiro custo de produção. Nesse caso a empresa possui um grande incentivo a superestimar o seu custo de produção.

Propomos um mecanismo econômico que proveria a firma um incentivo suficiente para que ela revelasse seu verdadeiro custo permitindo ao regulador que o preço seja estabelecido sendo igual ao custo marginal.

Considere uma economia onde a demanda do consumidor por chamadas de telefone é dada por $p = a - Q$. Há apenas uma companhia de telefone produzindo chamadas e a tecnologia usada por essa empresa apresenta retornos constantes de escala. Assumimos que a firma possui custo de produção c, sendo esse custo conhecido pela firma, mas não pela agência reguladora.

Supomos que a agência reguladora realiza uma pesquisa sobre o custo de produzir chamadas telefônicas e encontra que o custo unitário poderia ser c^H com probabilidade p e c^L com probabilidade $1-p$ sendo

$c^H > c^L > 0$ e $0 < p < 1$. Assumimos também que a firma sabe se ela é uma produtora de alto ou baixo custo. Denotamos $\widehat{c} \in \left\{c^L; c^H\right\}$ como o valor do custo relatado pela empresa. Também denotamos c^* como o verdadeiro parâmetro de custo que é conhecido apenas pela firma. Assim, se a firma revela $\hat{c} = c^*$ dizemos que ela está falando a verdade.

O objetivo da agência reguladora é maximizar o valor esperado do bem estar social que é definido como a soma do excedente do consumidor e do lucro da empresa.

Suposição 1: Os instrumentos disponíveis para a agência reguladora são:

1. Definir o preço de mercado $p(\hat{c})$ como função do preço relatado.

2. Determinar um subsídio *lump-sum* para a firma $s(\hat{c})$ como uma função do custo reportado.

15.5.1 Revelação verdeira

Denotamos $\pi(\hat{c}, c)$ o lucro da empresa com o custo de produção c que reporta para a agência reguladora $\hat{c}$. Note que a empresa pode ou não revelar o seu verdeiro custo. Podemos ter $\hat{c} = c$ ou $\hat{c} \neq c$. Para cada valor de c e $\hat{c}$ o lucro da firma é dado por:

$$\pi(\hat{c}, c) = p(\hat{c})\, Q - cQ + s(\hat{c}) = [p(\hat{c}) - c]\,[a - p(\hat{c})] + s(\hat{c}) \tag{15.31}$$

Seja $\pi^*(c)$ o lucro da firma quando ela revela o seu verdadeiro custo $\hat{c} = c$.

$$\pi^*(c) = [p(c) - c]\,[a - p(c)] + s(c) \tag{15.32}$$

15.5.2 Um mecanismo que funciona

Definição. Um mecanismo econômico $p(\hat{c})$ e $s(\hat{c})$ deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. Compatibilidade de incentivos: Se a firma não pode aumentar seus lucros não revelando o seu verdadeiro parâmetro de custo. Isto é, se para cada $\widehat{c} \in \left\{c^L; c^H\right\}$.

$$\pi(\hat{c}, c) \leq \pi(c, c) = \pi^*$$

2. Racionalidade individual: se a firma faz lucros não negativos quando revela o seu verdadeiro parâmetro de custo. Temos que:

$$\pi(c, c) = \pi^* \geq 0$$

No presente caso, um mecanismo $p(\hat{c}), s(\hat{c})$ satisfaz a restrição de compatibilidade de incentivos se:

$$\begin{gathered}\left[p\left(c^H\right)-c^H\right]\left[a-p\left(c^H\right)\right]+s\left(c^H\right)\geq\left[p\left(c^L\right)-c^L\right]\left[a-p\left(c^L\right)\right]+s\left(c^L\right)\\ \text{e}\\ \left[p\left(c^L\right)-c^L\right]\left[a-p\left(c^L\right)\right]+s\left(c^L\right)\geq\left[p\left(c^H\right)-c^L\right]\left[a-p\left(c^H\right)\right]+s\left(c^H\right)\end{gathered}\tag{15.33}$$

Em outras palavras, se a firma é uma produtora de custo alto, então ela não poderá aumentar os seus lucros relatando ser uma firma de custo baixo. O contrário também é válido sob esse mecanismo. Se $p(\hat{c})$ e $s(\hat{c})$ satisfazem a restrição de racionalidade individual :

$$\left[p\left(c^H\right)-c^H\right]\left[a-p\left(c^H\right)\right]+s\left(c^H\right)\geq 0\tag{15.34}$$

$$\left[p\left(c^L\right)-c^L\right]\left[a-p\left(c^L\right)\right]+s\left(c^L\right)\geq 0\tag{15.35}$$

Proposição. *O seguinte mecanismo induz a firma a revelar o seu verdadeiro parâmetro de custo, então ele satisfaz as propriedades de compatibilidade de incentivos e de racionalidade individual e maximiza o bem estar social:*

$$\begin{gathered}p\left(c^H\right)=c^H \text{ e } p\left(c^L\right)=c^L\\ \text{e todos } s\left(c^H\right), s\left(c^L\right)\geq 0 \text{ que devem satisfazer a seguinte condição:}\\ \left(c^H-c^L\right)\left(a-c^H\right)\leq s\left(c^L\right)-s\left(c^H\right)\leq\left(c^H-c^L\right)\left(a-c^L\right)\end{gathered}\tag{15.36}$$

Demonstração. Note que esse mecanismo atinge o princípio da revelação como $s\left(c^H\right)$ e $s\left(c^L\right)$ são não negativos, assim por (36) a firma faz lucros não negativos. Substituindo $p\left(c^H\right)=c^H$ e $p\left(c^L\right)=c^L$ em (34) e (35) temos a expressão (36). Assim, o mecanismo é incentivo compatível e a firma revelará verdadeiramente o seu custo. Agora como a firma revela o seu verdadeiro custo, o bem estar social agregado é maximizado e os consumidores irão pagar preços iguais aos custos marginais. □

Intuitivamente o regulador atribui os preços iguais ao custo unitário como o apreçamento pelo custo marginal é necessário para atingir-se o nível ótimo social. Então o regulador utiliza um subsídio *lump-sum* para induzir a firma a relatar o seu verdadeiro custo. Além disso, como as firmas gostariam de relatar que são produtoras de custo alto para obterem subsídios governamentais mais elevados, um regulador otimizador deve oferecer a firma de custo baixo um subsídio mais alto.

Corolário. *Com o propósito de induzir a firma a revelar o seu verdadeiro custo, o subsídio pago pelo regulador deve ser mais alto quando a firma relata que possui uma estrutura de custo baixo do que quando a firma possui uma estrutura de custo alto.* $s\left(c^L\right)>s\left(c^H\right)$.

Assim o regulador induz o produtor de baixo custo a revelar o seu tipo oferecendo-o um subsídio mais elevado. Isso implica que, em termos gerais, os reguladores deveriam recompensar mais as firmas que são mais eficientes em detrimento das ineficientes.

16 Dispersão de preços e teoria da pesquisa

Essa seção pretende explicar como a dispersão de preços pode persistir em mercados em que os consumidores se comportam de modo racional, ou seja, quando os consumidores buscam o menor preço. Um segundo ponto é explicar como consumidores racionais otimamente procuram por o menor preço em um mercado em que os preços são dispersos.

16.1 Dispersão de preços

Preços de produtos idênticos variam de uma loja para a outra. Uma das possíveis razões que explica essa diferença são os custos de transporte. Também devemos considerar a estratégia de mercado (*marketing*) de cada empresa.

Essas observações não implicam que a lei do preço único é violada, pela simples razão que produtos diferenciados não são homogêneos e portanto não é surpreendente que eles não sejam vendidos pelo mesmo preços.

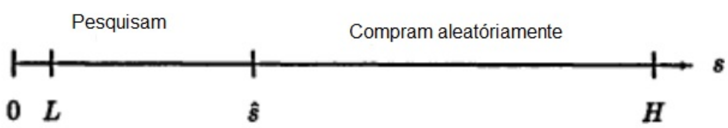
Tentaremos explicar a dispersão de preços introduzindo o custo de obter-se a informação sobre essa variável. Assumimos, que adquirir informações sobre os preços é algo custoso para o consumidor. Assim, os consumidores sempre ponderam o custo de realizar a pesquisa contra a redução esperada no preço devido o processo de busca. Em linhas gerais, o custo da pesquisa está associado a como cada indivíduo valoriza o seu tempo, em termos de horas de trabalho.

Um modelo de busca e dispersão de preço

Seja uma economia com um continuum de consumidores indexados por s no intervalo $[L, H]$ de acordo com o seu custo para ir as compras. Também consideramos que $H > 3L > 0$. Os consumidores indexados por s alto (perto de H) são consumidores que possuem um "valor do tempo" muito alto, ou seja, o custo para procurar o preço mais baixo é alto.

Há três lojas vendendo um único produto que é produzido a custo zero. Uma loja denotada por D é chamada de loja de desconto e vende o produto pelo preço unitário p_D. As outras duas lojas, denotadas por ND são caras e são administradas por um único dono que atribui o preço uniforme p_{ND}, para essas duas lojas.

Figura 16.1: Consumidores com custo de pesquisa variável procurando o preço mais baixo



Consumidores com a variável custo de pesquisa para a busca pelo menor preço. Defina $\overline{p}$ como o preço médio. Formalmente,

$$\overline{p} \equiv \frac{p_D + 2p_{ND}}{3} \tag{16.1}$$

Por suposição, os consumidores não sabem qual é a loja que dá desconto a menos que eles realizem uma pesquisa ao custo s. Contudo os consumidores sabem o preço médio de mercado. Assim, se o consumidor não realiza uma pesquisa, ele sabe que uma compra aleatória resulta no pagamento de $\overline{p}$. Cada consumidor compra apenas uma unidade e deseja minimizar o preço pago pelo produto mais o preço (custo) da pesquisa. Formalmente, denotando por $L^s\left(s,\overline{p}\right)$ a função de perda do consumidor $s, s \in [L, H]$ assumimos que:

$$L^s = \begin{cases} p_D + \alpha s \text{ se o consumidor faz a busca pelo produtor de menor preço} \\ \overline{p} \text{ se ele escolhe aleatóriamente uma loja} \end{cases} \tag{16.2}$$

O parâmetro α mede a importância relativa do custo de pesquisa nas preferências do consumidor. Claramente, como cada consumidor minimiza s, o tipo de consumidor s irá procurar pelo preço mais baixo possível se $p_D + \alpha s \leq \overline{p}$. Caso contrário, se $p_D + \alpha s > \overline{p}$, então comprar aleatoriamente é mais barato.

Definição. Um equilíbrio de dispersão de preços (p_D^e e p_{ND}^e) é definido pelas seguintes propriedades:

1. A loja de desconto não pode aumentar o seu lucro desviando unilateralmente de p_D^e;

2. O dono das duas lojas caras não pode aumentar seu lucro desviando unilateralmente do preço p_{ND}^e;

3. Para cada consumidor $s, s \in [L, H]$, ele procura e compra da loja de desconto, se, e somente se $p_D^e + \alpha s \leq \overline{p}$. Caso contrário, o consumidor compra da primeira loja disponível.

Podemos observar pela definição anterior que haverá algum consumidor $\hat{s}$ que é indiferente entre pesquisar e comprar aleatória mente. Então $\hat{s}$ é:

$$p_D + \alpha\hat{s} = \frac{p_D + 2p_{ND}}{3} \tag{16.3}$$

$$\hat{s} = \frac{2\left(p_{ND} - p_D\right)}{3\alpha} \tag{16.4}$$

Para preços em que $p_{ND} > p_D$ todos os consumidores indexados por $s \in [L, \hat{s}]$ pagam o custo s de pesquisa. Consequentemente todos os consumidores indexados por $s \in]\hat{s}, H]$ compram aleatória mente e pagam o preço médio.

A loja de desconto

Definimos por Eb_D o número esperado de consumidores que comprar na loja de desconto. Para computarmos Eb_D, observe que $p_{ND} > p_D$ e isso implica que $\hat{s} - L$ consumidores irão comprar nessa loja. Além disso, em média, um terço de $H - \hat{s}$ consumidores que compram aleatoriamente chegarão até a loja de desconto (os sortudos).

Assim, como há somente duas lojas, o número esperado de consumidores que compra na loja com desconto é dado por:

$$Eb_D = \hat{s} - L + \frac{H - \hat{s}}{3} = \left(\frac{H}{3} - L\right) + \frac{4\left(p_{ND} - p_D\right)}{9\alpha}$$

A loja de desconto toma p_{ND} como dado e escolhe p_D que maximiza o seu lucro esperado.

$$E\pi_D = p_D Eb_D = p_D\left(\frac{H}{3} - L\right) + \left[\frac{4\left(p_D p_{ND} - p_D^2\right)}{9\alpha}\right] \tag{16.5}$$

Então pela condição de primeira ordem teremos:

$$\frac{\partial E\pi_D}{\partial p_D} = \left(\frac{H}{3} - L\right) + \left[\frac{4\left(p_{ND} - 2p_D\right)}{9\alpha}\right] = 0$$

Então:

$$p_D = \frac{3\alpha\left(H - 3L\right)}{8} + \frac{p_{ND}}{2}$$

$$R\left(p_{ND}\right) = p_D = \frac{3\alpha\left(H - 3L\right)}{8} + \frac{p_{ND}}{2} \tag{16.6}$$

Sendo que $R\left(p_{ND}\right)$ é a função de melhor resposta da loja de desconto em relação ao preço atribuído pelas lojas que não concedem o desconto.

A loja cara

Denotamos por Eb_{ND} o número esperado de consumidores que comprar nas lojas caras. Para calcularmos Eb_{ND}, observe que $H - \hat{s}$ não pesquisam o preço e portanto compram aleatória mente. Uma vez que há somente duas lojas, o número esperado de consumidores é dado por:

$$Eb_{ND} = \frac{2}{3}\left(H - \hat{s}\right) = \frac{2H}{3} + \frac{4\left(p_D - p_{ND}\right)}{9\alpha} \tag{16.7}$$

O dono das lojas caras toma p_D como dado e escolhe p_{ND} de modo a maximizar o seu lucro:

$$E\pi_{ND} = p_{ND} Eb_{ND} = p_{ND}\left(\frac{2H}{3}\right) + \frac{4\left(p_{ND} p_D - p_{ND}^2\right)}{9\alpha}$$

$$\frac{\partial E\pi_{ND}}{\partial p_{ND}} = \left(\frac{2H}{3}\right) + \frac{4\,(p_D - 2p_{ND})}{9\alpha} = 0$$

$$p_{ND} = \frac{3\alpha H + 2p_D}{4}$$

$$R\,(p_D) = p_D = \frac{3\alpha H + 2p_D}{4} \tag{16.8}$$

Sendo que $R\,(p_D)$ é a função de melhor resposta da loja que não dá desconto em relação ao preço atribuído pelas lojas que não concedem o desconto.

Equilíbrio de dispersão de preços

Podemos solucionar o sistema de equações (6) e (8) para encontrarmos os preços de equilíbrio p_D^e e p_{ND}^e.

$$p_D^e = \frac{\alpha\,(2H - 3L)}{2}; p_{ND}^e = \frac{\alpha\,(5H - 3L)}{4} \text{ e } \hat{s}^e = \frac{H + 3L}{6} \tag{16.9}$$

Proposição. *Um aumento no parâmetro que mede o custo de pesquisa* (α)*, aumentará os preços que são cobrados nas duas lojas. A diferença de preços entre as duas lojas* $p_{ND} - p_D$ *aumenta com um acréscimo no custo de pesquisa e vai para zero quando o custo se torna negligenciável.*

Quando o custo de pesquisa é negligenciável a competição aumenta e todos os preços irão cair par ao nível competitivo. De acordo com (5) e (6) o número de consumidores em cada loja é:

$$Eb_{ND} = \frac{2\,(2H - 3L)}{9} > \frac{5H - 3L}{9} = Eb_D \tag{16.10}$$

O número de compradores na loja que concede desconto é maior do que na loja mais cara, já que a loja que concede descontos atraí os consumidores que são informados e também os desinformados.

16.2 Teoria da busca

Analisaremos como os consumidores que possuem um custo de pesquisa estritamente positivo conduzem as suas compras e como eles determinam quantas lojas irão visitar enquanto buscam pelo preço mais baixo.

Considere uma cidade com n tipos de lojas vendendo um produto idêntico. Sem perda de generalidade, assumimos que o preço cobrado por cada loja do tipo $i = 1, 2, ..., n$ é $p_i = 1$. Adicionalmente, assumiremos que os preços são exógenos e que as lojas não alteram seus preços.

Deixe-nos considerar um único consumidor que visita lojas com a proposta de encontrar o preço mais baixo.

Suposição 1: *1. O consumidor conhece a distribuição dos n preços, mas não sabe qual é o preço cobrado por uma loja em particular. Isto é, o consumidor saber que no mercado há n preços no intervalo de 1 até n, mas não sabe o preço exato cobrado por cada loja.*

2. O consumidor pesquisa de modo sequencial. O consumidor possui um custo de pesquisa de s, $0 < s < {}^{(n-'1)}/_{2}$ *, a cada período que ele visita uma loja.*

3. O consumidor se comporta como se o número de lojas de cada tipo é grande, no sentido que eles observam a distribuição de preços como constante o que não varia durante o processo de busca sequencial.

A suposição1 descreve um consumidor que visita uma loja e esse indivíduo observa o preço da loja e possuí duas opções: i) comprar o produto pela oferta p; ii) continuar visitando uma loja adicional e pagar o custo de pesquisa s.

Esse tipo de pesquisa é chamada da busca sequencial como o consumidor pode revisar a sua ação após cada tempo ele visita uma loja adicional e recebe uma oferta de preço pelo produto.

16.2.1 A estratégia do preço de reserva

Suponha que nosso consumidor visita uma loja e receba a oferta p. Defina $v(p)$ como a redução esperada de preço pela visitação de uma loja adicional, enquanto se tem um oferta de preço em mãos. Formalmente, como cada preço é realizado com probabilidade ${}^{1}/_{n}$, teremos que:

$$v(p) = \frac{p-1}{n} + \frac{p-2}{n} + ... + \frac{1}{n} \tag{16.11}$$

Em outras palavras, o ganho de uma busca adicional enquanto já se tem uma oferta p em mãos é a redução esperada de preços oriunda da pesquisa adicional, que é o ganho adicional a encontrar um preço uma unidade monetária menor $\frac{p-1}{n}$ mais o ganho esperado de encontrar um preço menor por duas unidades monetárias $\frac{p-2}{n}$ e assim por diante. Suponha que um consumidor visite uma loja e receba a oferta $p = 3$. Qual seria o ganho esperado de uma pesquisa adicional?

$$v(3) = \frac{3-1}{n} + \frac{3-2}{n} = \frac{3}{n}$$

Lema. *A soma dos J números é dada por:*

$$\sum_{j=1}^{J} j = 1 + 2 + 3 + ... + J = \frac{J(J+1)}{2}$$

Demonstração. Seja ϕ a soma $\sum_{j=1}^{J} j$ e considere a seguinte soma:

$$\phi = 1 + 2 + 3 + ... + J$$

Escrevendo essa mesma soma do fim para o início:

$$\phi = J + J - 1 + J - 2 + ... + 1$$

Somando as duas equações e agregando termo a termo de acordo com a posição:

$$2\phi = (J + 1) + (J - 1 + 2) + (J - 2 + 3) + ... + (.J + 1)$$

Note que a soma do lado direito é igual a:

$$2\phi = J\,(J + 1)$$

Assim temos que:

$$\phi = \frac{J\,(J + 1)}{2}$$

$\square$

Lema. *A função $v\,(s)$ definida por (11) pode ser escrita como:*

$$v\,(p) = \frac{p\,(p-1)}{2n}$$

Demonstração. Por (11) $v\,(p) = [1 + 2 + ... + (p-1)]\,n^{-1}$. Então pelo Lema anterior temos que $v\,(p) = \frac{p(p-1)}{2n} = \frac{p^2-p}{2n}$ $\square$

A função $L\,(p)$ resume as opções disponíveis ao consumidor após receber a oferta de preço p de uma loja específica.

$$L\,(p) = \begin{cases} p \text{ se o consumidor compra e paga } p \\ s + p - v\,(p) \text{ se o consumidor procura mais de } 1\times \end{cases} \tag{16.12}$$

A equação (12) mostra que um consumidor minimizador de perdas deveria parar de procurar e comprar o produto sempre que o preço em mãos satisfizer: $p \leq s + p - v\,(p)$. Caso contrário, se $p > s + p - v\,(p)$ o consumidor continua procurando.

Proposição. *Um consumidor com uma oferta p em mãos deve continuar procurando se o preço esperado da redução oriunda de uma pesquisa adicional excede o custo de uma busca adicional. Formalmente, um consumidor continua procurando se, e somente se o preço em mãos p satisfaz $v\,(p) > s$.*

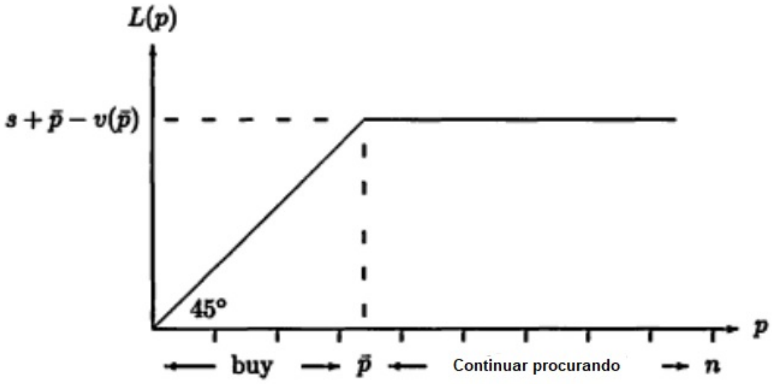
Um consumidor que se comporta de acordo com a proposição acima é dito estar usando uma estratégia de preço reserva.

Definição. Um preço $\bar{p}$ é chamado de preço de reserva do consumidor se $\bar{p}$ satisfaz $v(\bar{p}) > s$.

Na figura 2 o consumidor entra em uma loja e observa o preço p. Se $p \leq \bar{p}$ o consumidor para de procurar e compra o produto. No entanto se o consumidor observa um preço $\bar{p} > p$, então ele vai até a próxima loja e compra ou continua para a próxima a depender de $p \leq \bar{p}$ ou $p > \bar{p}$. Usando a definição anterior e o segundo Lema temos que:

$$v(p) = \frac{\bar{p}(\bar{p}-1)}{2n} = s$$

Figura 16.2: Estratégia de Preço de Reserva



Portanto $\bar{p}^2 - \bar{p} - 2ns = 0$. A solução para essa equação do segundo grau é:

$$\bar{p} = \frac{1+\sqrt{1+8ns}}{2n} \tag{16.13}$$

Proposição. *O preço de reserva do consumidor satisfaz as seguintes propriedades:*

1. Se o custo de pesquisa torna-se negligenciável então o consumidor continuará procurando até receber a oferta do preço mais baixo. Formalmente, se $s \to 0$ então $p \to 0$;

2. Um aumento em s deveria aumentar o preço de reserva do consumidor;

3. Um aumento no número de lojas também deveria aumentar o preço de reserva.

Na literatura, se um consumidor pode (sem custo) retornar a uma loja anterior, isto é, para a proposta de compra recebida anteriormente o consumidor está realizando uma pesquisa com *recall* (retorno).

Proposição. *Mesmo se fosse permitido (sem custo) retornar a loja visitada previamente na busca sequencial, um consumidor nunca retornaria a essa loja.*

Demonstração. Como uma busca ótima implica que o consumidor emprega a estratégia de preço de reserva, um consumidor irá sempre comprar se ele encontrar um preço que satisfaça $p \leq \bar{p}$ e nunca comprará se $p > \bar{p}$. Assim, se um consumidor não comprou em uma loja visitada anteriormente no processo de pesquisa isso significa que a loja cobrou um $p > \bar{p}$ e o consumidor não possui motivos para retornar a ela. □

16.2.2 O número esperado de buscas

Denotamos por σ a probabilidade que um consumidor não irá comprar quando ele visita uma loja. O consumidor nunca comprará quando ele recebe uma oferta $p > \bar{p}$. Isto é, o consumidor não comprará se $p \in \{(\bar{p}+1), (\bar{p}+2), ..., n\}$. Assim há $(n - \bar{p})$ preços que excedem o preço de reserva do consumidor. Como cada preço possui a probabilidade de $1/n$ de ser realizado, a probabilidade que um consumidor não irá comprar em uma loja é:

$$\sigma \equiv \frac{n - \bar{p}}{n} = 1 - \frac{1 + \sqrt{1 + 8ns}}{2n} \tag{16.14}$$

Claramente a probabilidade que o consumidor não compre na primeira loja é σ e a probabilidade dele comprar na segunda visita é $1 - \sigma$. Dessa forma, a probabilidade que o consumidor não compre na primeira visita, mas compre na segunda é $\sigma(1 - \sigma)$ (a distribuição dos preços independente, nesse caso, do tempo).

Qual é a probabilidade do consumidor comprar o produto na terceira visita? É $\sigma^2(1 - \sigma)$. Finalmente qual a probabilidade do consumidor comprar o produto na visita t? A probabilidade é $\sigma^{t-1}(1 - \sigma)$. Para encontrarmos o número de lojas, precisamos somar as probabilidades a cada visita vezes o número de cada visita:

$$\mu = \sum_{t=1}^{\infty} \sigma^{t-1}(1 - \sigma) \tag{16.15}$$

Tomando o limite quando $t \to \infty$ saberemos que:

$$\mu = \frac{1}{1 - \sigma} = \frac{2n}{1 + \sqrt{1 + 8ns}} \tag{16.16}$$

O número de visitas de nosso consumidor é igual a 1 sobre a probabilidade que ele compre em uma única visita em uma loja (σ^{-1}).

17 Indústrias selecionadas

17.1 Estradas públicas e congestionamento

Definimos congestionamento como a interação social onde a participação de cada indivíduo reduz o serviço recebido pelos outros consumidores.

Considere N passageiros, que trabalham na região central de uma grande cidade e necessitam de transporte (ou ser transportados) do subúrbio para essa região todas as manhãs. Considere que há dois métodos para que isso seja feito: viajando de carro ou viajando de transporte público (trem, metrô, ônibus etc.).

Seja t_T o tempo de viagem na modalidade de trem e t_C o tempo de viagem de carro. Normalizaremos $t_T = 1$. Então o número de passageiros que dirige até o centro, dependente exclusivamente daqueles que decidem dirigir um carro. Formalmente:

$$t_C = \alpha + \beta n_C \text{ em que } 0 < \alpha < 1 \text{ e } \beta > 0 \tag{17.1}$$

O parâmetro α indica que o tempo de viagem independe do congestionamento, depende do tempo que é necessário para aquecer um carro, checar o óleo e assim por diante. O parâmetro β mede o efeito do congestionamento no tempo de viagem, que depende da qualidade da estrada, do número de trechos e da iluminação.

Seja v o valor do tempo e n_T o número de passageiros que dirigem um trem e n_C o número de passageiros que dirigem um carro e $n_C + n_T = N$. Suponha que o operador de trem é competitivo então o bilhete do trem é igual ao custo unitário ϕ. O valor da perda monetária para o passageiro que viaja de trem é dotado por:

$$L_T = 1v + \phi \tag{17.2}$$

A perda monetária para o passageiro que dirige um carro é dado por:

$$L_C = v\left(\alpha + \beta n_C\right) \tag{17.3}$$

17.1.1 Equilíbrio numa estrada congestionada

Suporemos que há um número de passageiros suficientemente grande que deseja ir até o centro da cidade, então ignoraremos o efeito marginal (ou sobre) do congestionamento. Cada passageiro, toma $n_C$como dado e minimiza:

$$\underset{T,C}{Min}\, min\left\{L_T, L_C\right\}$$

Como no equilíbrio os passageiros usam os dois tipos de transporte então n_C deve satisfazer:

$$v\left(\alpha+\beta n_C\right)=v+\phi$$

Então:

$$n_C^e=\frac{v\left(1-\alpha\right)+\phi}{\beta v}$$

E um Nsuficientemente grande deve ser maior ou no limite igual a n_C^e.

Proposição. *O número n_C aumenta com ϕ e cai com v.*

Demonstração. A demonstração é simples:

$$\frac{\partial n_C^e}{\partial \phi}=\frac{1}{\beta v}>0 \text{ e } \frac{\partial n_C^e}{\partial v}=-\frac{1}{\beta v^2}<0$$

□

17.1.2 O nível socialmente ótimo de congestionamento

Assumiremos que o objetivo do regulador é minimizar a perda de tempo agregada dos passageiros:

$$L^S=n_T\left(v+\phi\right)+n_C v\left(\alpha+\beta n_C\right) \tag{17.4}$$

O regulador deseja alocar o número de passageiros em cada meio de transporte tal que L^S seja minimizado.

$$\underset{n_C}{Min}L^S \text{ s.a.} 0\leq n_C\leq N \tag{17.5}$$

Então $N-n_C\geq 0$. Lembre que $N-n_C=n_T\geq 0$. Dessa forma teremos que:

$$\frac{\partial L^S}{\partial n_C}=-\left(v+\phi\right)+\left(v\alpha+2\beta v n_C\right)=0$$

$$n_C=\frac{\left(1-\alpha\right)v+\phi}{2\beta v}$$

$$n_C^S=\frac{\left(1-\alpha\right)v+\phi}{2\beta v}=\frac{n_C^e}{2} \tag{17.6}$$

Proposição. *1. O número socialmente ótimo de carros é igual a metade do número de equilíbrio de carros;*

2. Subsidiar a passagem de trem reduzirá o número de carros, mas a taxa de equilíbrio do número $\frac{n_C^e}{n_C^s}$ de carros usados sobre seu nível ótimo de ϕ.

Podemos observar que:

$$\frac{n_C^e}{n_C^s} = \frac{(1-\alpha)\,v+\phi}{2\beta v}\frac{2\beta v}{(1-\alpha)\,v+\phi} = \frac{1}{2} \tag{17.7}$$

17.1.3 Pedágio

Suponha que o regulador cobre uma taxa de pedágio τ de cada passageiro que usa a estrada. Qual seria a taxa que deveria ser cobrada para levar o número de carros ao seu nível ótimo? Calcularemos o número de equilíbrio de passageiros quando há pedágio:

$$v\,(\alpha+\beta n_C)+\tau = v+\phi$$

Então:

$$n_C\,(\tau) = \frac{v\,(1-\alpha)+\phi-\tau}{\beta v} \tag{17.8}$$

Igualando $n_C\,(\tau)$ a n_C^s teremos:

$$\tau^S = \frac{v\,(1-\alpha)+\phi}{2} \tag{17.9}$$

Proposição. *A taxa ótima de pedágio τ^S aumenta com ϕ e com o valor do parâmetro v.*

Note que o aumento em ϕ poderia fazer com que os passageiros substituíssem as viagens de trem por viagens de carro.

Referências

BERTRAND, J. (1883). Reviews of Théories Mathematique de la Richesse Sociale, by Léon Walras; and of Recherches sur les Principles Mathematiques de la Théorie des Richesses, by Augustin Cournot. Journal des Savants 67: 499-508.

CABRAL, L. (1994) Economia Industrial. Lisboa: McGraw-Hill.

COURNOT, A. (1929) [1838]. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. Translated by Nathaniel Bacon. New York: Macmillan.

BOLTON, P.; DEWATRIPONT, M. (2004). Contract Theory, MIT Press.

DA MATA, D. (Org.) ; FREITAS, R. E. (Org.) ; RESENDE, GUILHERME M. (Org.) (2019). Avaliação de políticas públicas no Brasil: uma análise do semiárido. 1. ed. Brasília: IPEA. v. 4. 404p.

FIUZA, E. P. S. (2001). "Estudos Econométricos em Organização Industrial no Brasil". In: LISBOA, M.B. & MENEZES-FILHO, N.A. Microeconomia e Sociedade no Brasil.Rio de Janeiro: FGV e Contracapa.

FIUZA, E. P. S.; MOTTA, R. S. (coords. técs.) (2006). Métodos Quantitativos em defesa da concorrência e regulação econômica. Rio de Janeiro: IPEA.

GIBBONS, R. (1992). Game Theory for Applied Economists. Princeton University Press.

HOTELLING , H. (1929) Stability in Competition. Economic Journal 39: 41-57.

KREPS, D.; SCHEINKMAN, J. (1983). Quantity Precommitment and Bertrand Competition Yield Cournot Outcomes." Bell Journal of Economics 14: 326-337.

MACHO-STRADLER, I. PÉREZ-CASTRILLO, D. (1997). An Introduction to the Economics of Information: Incentives and Contracts. Oxford, Oxford University Press.

MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M. D. ; GREEN, J. R., (1995). Microeconomic Theory, Oxford University Press.

MOTTA, M.; SALGADO, L. H. (2015) . Política de Concorrência: Teoria e prática e sua aplicação no Brasil. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier.

SALANIÉ, B. (2005). The Economics of Contracts. Cambridge, MIT Press.

SHY, O. (1995). Industrial Organization. Cambridge, MIT Press.

SWAN, P. (1970a). Durability of Consumer Goods. American Economic Review 60: 884-894.

SWAN, P. (1970b). Market Structure and Technological Progress: The Influence of monopoly on Product Innovation. Quarterly Journal of Economics 84: 627-638.

SWAN, P. (1971). The Durability of Consumer Goods and the Regulation of Monopoly. Bell Journal of Economics 2: 347-357.

TIROLE, J. (1988). The Theory of Industrial Organization. Cambridge, MIT Press.