Notas de Aula de Economia Matemática

Rodrigo Nobre Fernandez

Pelotas
2024

Prefácio

Esta apostila é um resumo das notas de aula das disciplinas de Introdução à Economia Matemática, Modelos Matemáticos em Economia e Tópicos Especiais em Economia Matemática do curso de Ciências Econômicas da Universidade Federal em Pelotas. Em quase sua totalidade essas notas de aula transcrevem literalmente ou resumem o conteúdo do livro Cálculo: funções de uma e várias variáveis de Morettin *et al.* (2016). Também há alguns trechos do texto referentes a obra de Chiang e Wainwright (2005) e de Simon e Blume (2004). Destaco que essa apostila não tem fins comerciais, o texto serve exclusivamente como material de apoio as aulas. Aproveito e agradeço aos alunos Jean Marcel Del Ponte Duarte, Lúcio Moscareli e Victor Lucas Taveira Mendes Rebelo que colaboraram na construção desse material. Quaisquer erros, comentários, dúvidas e observações devem ser enviados por e-mail para o endereço: rodrigo.fernandez@ufpel.edu.br. ou rodrigonobrefernandez@gmail.com

Sumário

1 Conjuntos

1.1 Noções Gerais

Definição. Conjunto: podemos dizer que um conjunto é uma coleção, classe ou família constituído por elementos.

Exemplos:

- Alunos da sala de aula
- Pontos de uma reta

Normalmente, os conjuntos são designados por letras maiúsculas latinas: A, B, C. Os elementos são designados por letras minúsculas a, b, c... Seja A=*{1,2,3,...}* dizemos que $x \in A$ se x é um número inteiro positivo. Caso contrário $x \notin A$. O método da numeração tabular é usado quando o conjunto possui um número muito elevado de elementos. Esse método consiste em escrever os nomes dos elementos entre chaves.

Exemplo. Alguns conjuntos:

$$A = \{2, 3, 5...\}$$

$$B = \{2, 4\} \text{ - (conjunto binário)}$$

$$C = \{2\} - \text{(conjunto unitário)}$$

$$N^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Sendo N^* o conjunto dos números naturais sem o zero. Nem sempre é possível representarmos os conjuntos do modo anterior. Dessa forma, buscamos uma regra que atenda a todos os elementos que pertencem ao conjunto e ao mesmo tempo não satisfaça aqueles elementos que estão fora. Suponha que P é o conjunto dos números fracionários entre 0 e 1.

$$P = \{x \text{ é fracionário tal que } 0 < x < 1\}$$

ou ainda

$$P = \{x \in F | 0 < x < 1\}$$

Definição. (Conjunto vazio) É o conjunto que não possui elementos. Usamos a notação { } ou $\emptyset$. Usamos a notação {} ou $\emptyset$.

Definição. (Subconjunto) Sejam os conjuntos A e B, se todo elemento de A pertence a B, dizemos que $A \subset B$ (A está contido em B). De modo geral, $\forall x \in A$, $x \in B$, dizemos que A é subconjunto de B.

Exercício. Mostre que para quaisquer conjuntos A e B distintos, se $A \subset B$, $A \cap B = A$

Exemplo. 1.

$$N^* \subset N$$

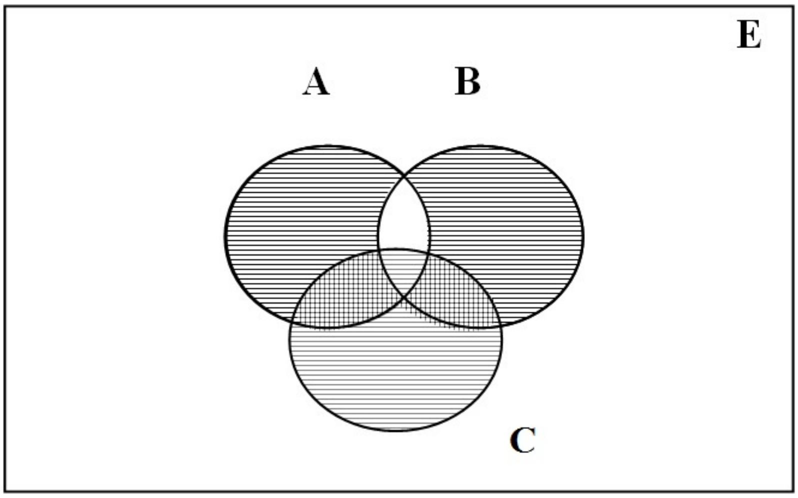
2.

$$\{0, 2, 4, 6, ...\} \subset N$$

Podemos dizer que $A \subset B$ (está contido), mas também $B \supset A$ (B contém A). $1 \in \{1, 2\}$, mas 1 não está contido em {1,2}. No entanto, $\{1\} \subset \{1, 2\}$ já que $\{1\}$ é um conjunto unitário.

Definição. (Conjunto universo) É o conjunto que contém todos os elementos que estamos trabalhando. O **Diagrama de Venn** faz a representação gráfica do conjunto universo E e seus subconjuntos A e B e C.

Figura 1: Diagrama de Venn



Exercício. Mostre que se $A \subset B$ e $B \subset A$ então A=B.

Definição. (Igualdade de conjuntos). Para quaisquer conjuntos A e B, dizemos que A=B se, e somente se, $\forall x \in A$,$x \in B$ e $\forall x \in B$, $x \in A$

Exemplo. a)

$$\{0,1\} = \{1,0\}$$

Note que a ordem não é importante.

b)

$$\{x \in N | x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1,2\}$$

Se a igualdade não for satisfeita, dizemos que $A \neq B$.

1.2 Operações envolvendo conjuntos

Os dois conectivos mais importantes são "ou" e "e". Primeiramente observamos as particularidades do conectivo ou.

- (a) Após os exames, passarei ou serei reprovado.
- (b) Encontrarei Ronaldo ou Lucas

Exemplo. Em "a", ou é exclusivo, pois não poderão acontecer as duas coisas simultaneamente. Já em "b", ou é inclusivo, pois poderei encontrar Ronaldo ou Lucas. Usaremos ou no sentido inclusivo, isto é, dizer p ou q significa p ou q (somente um deles) ou ambos. O conectivo "e" é usado quando liga duas afirmações que devem valer simultaneamente. Assim, dizer "vou ao cinema e ao teatro" significa que irei ao cinema e também ao teatro

Definição. (Intersecção de conjuntos) Chama-se intersecção de dois conjuntos P e Q de um universo E ao conjunto de elementos de E que pertencem simultaneamente a P e Q. Indica-se a intersecção por $P \cap Q$.

$$P \cap Q = \{x \in E \,| x \in P \text{ e } x \in Q\}$$

Exemplo. 1

$$P = \{1,2,3,5\} \text{ e } Q = \{1,3,5,7\} \text{ então } P \cap Q = \{1,3,5\}$$

$$A = \{1,3,5,7,...\} \text{ e } B = \{0,2,4,6,...\} \text{ então } A \cap B = \emptyset$$

Definição. (Conjuntos disjuntos). Sejam A e B dois conjuntos quaisquer, se $A \cap B = \emptyset$, então A e B são chamados disjuntos.

Definição. União de conjuntos: sejam os conjuntos P e Q de um universo E. Chama-se união de P ao conjunto Q, o conjunto de elementos de E que pertencem ao P ou Q. Indica-se: $P \cup Q$.

$$P \cup Q = \{x \in E \,| x \in P \text{ ou } x \in Q\}$$

Exemplo. 1

$$\text{Se } A = \{1,2,3\} \text{ e } B = \{1,3,5\}\text{ ,teremos } A \cup B = \{1,2,3,5\}$$

$$D = \{1,2,5\} \text{ e } F = \{1,2\} \text{ então } D \cup F = D, F \subset D$$

Definição. (Complementar de um conjunto) Dado $P \subset E$, sendo E o universo, diz-se que P^c (complementar de P) o conjunto dos elementos que pertencem a E, mas não pertencem a P.

$$P^c = \{x | x \in E \text{ e } x \notin P\}$$

Exemplo. a)

$$E = \{1,3,5,9,10\} \text{ e } P = \{1,9\}\text{ , então } P^c = \{3,5,10\}$$

$$E = N \text{ e } P = N^*\text{,então } P^c = \{0\}$$

Definição. (Diferença de conjuntos) Sejam P e Q dois conjuntos contidos num universo E. Chama-se diferença P-Q o conjunto de elementos do universo que pertencem a, mas não pertencem a Q.

$$P - Q = \{x \in E | x \in P \text{ e } x \notin Q\}$$

Exemplo. a)

$$P = \{1,3,5,7\} \text{ e } Q = \{5,6,9\}\text{ , então } P - Q = \{1,3,7\}$$

Observação. Observemos que

$$P^c = E - P \text{ e } P - Q = P \cap Q^c$$

1.3 Propriedades das Operações com Conjuntos

$$E^C = \emptyset$$

$$\emptyset^C = E$$

;

$$A \cup A^c = E$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

$$(A^c)^c = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

1.4 Alguns tipos importantes de Conjuntos

Definição. (Conjunto das partes) O Conjunto das partes de um conjunto. Seja $A \subset E$, onde E é o conjunto universo. O conjunto formado por todos os subconjuntos de A é chamado de conjunto das partes de *P(A)*.

Exemplo. 1

$$A = \{1, 2\}\,, \text{então } P(A) = \{\{1\}\,, \{2\}\,, \{1, 2\}\,, \{\emptyset\}\}$$

$$A = \{1\} \text{ então } P(A) = \{\{1\}\,, \{\emptyset\}\}$$

$$A = \emptyset, \text{ então } P(A) = \{\emptyset\} \text{ que não é vazio.}$$

De modo geral, se um conjunto tem n elementos, então seu conjunto das partes terá 2^n elementos.

Definição. (Produto cartesiano.) Dados os conjuntos A e B, chama-se de produto cartesiano de A por B o conjunto dos pares ordenados cujos primeiros elementos pertencem a A e cujos segundos elementos pertencem a B, isto é:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Exemplo. 1

$$A = \{1, 2\} \text{ e } B = \{3, 4\}$$

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

O número de elementos de um produto cartesiano $A \times B$ é igual ao produto do número de elementos de A por B $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$.

Definição. (Diferença simétrica) Sejam dois conjuntos quaisquer A e B contidos num universo E, a diferença simétrica de A,B pode ser definida pela seguinte expressão.

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Exemplo. 1

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ e } B = \{2, 3, 5, 7\} \text{ então } A \triangle B = \{1, 5, 7\}$$

Definição. (Partição.) Dizemos que os conjuntos $A_i, .., A_n$ todos não vazios, formam uma partição do universo E se:

$$A_i \neq \emptyset \forall i = 1, .., n \tag{1}$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j \tag{2}$$

$$A_i \cup A_{i+1} \cup ... \cup A_n = E \forall i = 1, ..., n \tag{3}$$

Exemplo. Seja o universo o conjunto $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dê duas quaisquer partições de E.

$$\text{Seja } A = \{1, 2, 3\} \text{ e } B = \{4, 5, 6\} \text{ então:}$$

i) A e $B \neq \emptyset$
ii)$A \cap B = \emptyset$
iii)$A \cup B = E$

2 Conjuntos Numéricos

Já conhecemos o conjunto dos números inteiros positivos $N^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ e o dos números naturais $N = \{0, 1, 2, ...\}$. No entanto, não podemos efetuar a subtração a-b $\forall a, b \in N$. Introduzimos então o conjunto dos números inteiros, que indicaremos por $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$. Ainda não podemos realizar divisões se a e b não forem múltiplos.

Definição. Números racionais

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} | a \in Z, b \in Z \text{ com } b \neq 0 \right\}$$

Exercício. Mostre que qualquer inteiro a é racional

$$N^* \subset N \subset Z \subset Q$$

Observação. Todo número racional pode ser representado sob a forma decimal

$$\frac{3}{4} = 0,75; \ \frac{1}{2} = 0,5; \ -\frac{3}{5} = -0,6$$

A representação decimal infinita e periódica (dizima periódica)

Exemplo. 1

$$\frac{1}{3} = 0,333...$$

$$\frac{47}{90} = 0,5222...$$

Observação. De um modo geral, é possível dizer que os números representados por decimais infinitos periódicos são racionais

$$\frac{3}{4} = 0,75000$$

$$\frac{1}{2} = 0,50000$$

Exercício. Escreva sob forma de fração a seguinte dízima periódica:

$$x = 0.6666... \ (1)$$
$$10x = 6.666... \ (2)$$

Subtraindo (1) de (2)

$$x = \frac{2}{3}$$

Definição. (Números reais) Considere que q e p sejam números racionais com $q > p$. Entre eles sempre haverá outro número racional, como por exemplo a média entre eles$(p+q)/2$. Entre$p \ e \ (p+q)/2$ também haverá outro número racional como a média deles $(p+\frac{p+q}{2})/2$. Com o raciocínio análogo, podemos concluir que há infinitos números racionais entre eles.

No início, pensou-se que o conjunto Q englobasse todos os números. Todavia, um simples fato atribuído a Aristóteles mostrou a existência de novos números chamados irracionais. Imagine que você deseja determinar a diagonal de um quadrado de lado de medida igual a 1. Pelo teorema de Pitágoras, teremos que

$$d^2 = 1^2 + 1^2, d = \sqrt{2}$$

Demonstração. Vamos provar que $\sqrt{2}$ não é racional. Suponha que $\sqrt{2}$ seja racional, assim $\sqrt{2}$ pode ser expresso por $\frac{a}{b}$ em que a e b são inteiros e primos entre si. Assim,

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \tag{4}$$

Como a é múltiplo de 2, a^2 é par. Consequentemente, a também é par. Assim, a pode ser escrito sob a forma $a = 2k$ (k inteiro). Substituindo tal resultado em (4) teremos:

$$(2K)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2 \tag{5}$$

Pela relação (5), b^2 também é múltiplo de 2, logo é par. Consequentemente, b é par. Ora, concluir que a e b são números pares é um absurdo, pois são primos entre si. Conclusão $\sqrt{2}$ não é racional. Tal número foi chamado de irracional.

$$\sqrt{2} = 1,41421356$$

□

Esse número pode ser expresso por uma decimal infinita, mas não periódica.

Definição. Podemos designar o conjunto I como o conjunto de todos os números irracionais. A união dos conjuntos dos números racionais com o dos números irracionais é o conjunto dos números reais. $R = Q \cup I$

2.1 Equações e Inequações do Primeiro e do Segundo Grau

Definição. Equação do Primeiro Grau

$$ax = b, a \text{ e } b \in R\ x = \frac{b}{a} \forall a \neq 0$$

Exemplo. Resolva a equação: $4x - 12 = 8 - 6x \rightarrow S = \{2\}$

Exemplo. Seja $L\,(x) = 50x - 2000$ a função de lucro em que x é a quantidade vendida. Qual a quantidade que deve ser vendida para que o lucro seja de 5000?

$$5000 + 2000 = 50x$$

$$7000 = 50x$$

$$140 = x$$

Exemplo. O saldo de uma aplicação financeira é dado por $S = 2000 + 40t$, em que t é o número de meses. Após quanto tempo da aplicação o saldo dobra?

$$\text{Se } t = 0 \text{ então } S = 2000.$$

$$\text{Para termos } 2S = 4000 \text{ igualaremos esse valor na equação de saldo.}$$

$$4000 = 2000 + 40t$$

$$2000 = 40t$$

$$50 = t$$

Definição. Inequação do 1º Grau

$$ax < b \text{ ou } ax \leq b \text{ ou } ax > b \text{ ou } ax \geq b$$

Exemplo. $3x - 12 > x + 2$

$$2x > 14$$

$$x > 7$$

$$S = \{x \in R | x > 7\}$$

Exemplo. $2(x - 1) < 5x + 3$

$$2x - 2 < 5x + 3$$

$$-3x < 5$$

$$x > -\frac{5}{3}$$

$$S = \{x \in R | x > -\frac{5}{3}\}$$

Exemplo. Seja $L = 30x - 4000$. Qual x faz com que $L > 11000$?

$$30x - 4000 > 11000$$

$$30x > 15000$$

$$x > 500$$

Definição. Equações do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \ a, b, c \in R \text{ e } a \neq 0$$

Aprendemos que a equação do segundo grau pode ser solucionada pela fórmula de Báskara. Essa fórmula nos relata quais são os possíveis valores de x que garantem que a igualdade acima seja zero. Vejamos como iremos deduzir essa relação:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dividindo a equação anterior por a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \text{ (adicionando} \frac{b^2}{4a^2}\text{)}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{em que } \triangle = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\triangle > 0 \text{ - 2 raízes reais distintas}$$

$$\triangle = 0 \text{ - apenas uma raíz real}$$

$$\triangle < 0 \text{ -não há raízes reais}$$

Exemplo. $x^2 - 4x + 3 = 0$ *S={1,3}*

Exemplo. Incompletas $x^2 - 3x = 0$

$$x(x-3) = 0$$

$$S = \{0, 3\}$$

2.2 Intervalos

Intervalos são subconjuntos de R. Sejam $a, b \in R$ tais que $a < b$, definimos:

Definição. Intervalo aberto

É o conjunto dos valores reais entre a e b (exclui-se os extremos) indicado por *]a,b[*, isto é:

$$]a, b[= \{x \in R | a < x < b\}$$

Definição. Intervalo fechado

É o conjunto de valores reais entre a e b (inclui-se os extremos), indicado por *[a,b]*, isto é:

$$[a, b] = \{x \in R | a \leq x \leq b\}$$

Definição. Semi aberto à direita ou à esquerda.

A desigualdade (estrita) vale para um lado:

esquerda]a,b]

$$= \{x \in R \,|\, a < x \leq b\}$$

direita [a,b[

$$= \{x \in R \,|\, a \leq x < b\}$$

Aberto de a até infinito

$$]a, +\infty[= \{x \in r \,|\, x > a\}$$

Fechado de a até infinito

$$[a, \infty[= \{x \in r \,|\, x \geq a\}$$

Intervalo aberto de $-\infty$ até b

$$]-\infty, b[= \{x \in r \,|\, x < b\}$$

Fechado de $-\infty$ até b

$$]-\infty, b] = \{x \in r \,|\, x \leq b\}$$

Exemplo. Seja $A = [-1, 3[$ e $B = [\frac{1}{2}, \infty[$

a)

$$A \cup B = [-1, +\infty[$$

b)

$$A \cap B = [\frac{1}{2}, 3[$$

c)

$$A^c =]-\infty; -1[\cup [3, +\infty[$$

Definição. (Módulo ou valor absoluto) Dado um número real x, chamados de valor absoluto, ou módulo de x, ao número indicado pelo símbolo $|x|$ e definido por $|x| = x$, se $x > 0$, $-x$ se $x < 0$ ou 0 se $x = 0$

Exemplo. 1

$$|7| = 7$$

$$|-4| = -(-4) = 4$$

$$|-\frac{2}{3}| = -(-\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$$

Observação. Propriedades

1. Se $|x| = k$, então $x = k$ ou $x = -k$, com $k > 0$
2. Se $|x| < k$, então $-k < x < k$, k é uma constante positiva
3. Se $|x| > k$, então $x > k$ ou $x < -k$ em que x é uma constante positiva

Exemplo. a)

$$|x| = 3, \text{então } x = 3 \text{ ou } x = -3$$

b)

$$|x| < 5, \text{ então } -5 < x < 5$$

c)

$$|x| > 7, \text{então } x > 7 \text{ ou } x < -7$$

d)

$$|2x - 3| < 7$$

$$2x < 7 + 3$$

$$2x < 5$$

Mas também

$$2x > -4$$

$$x > -2$$

$$S = \{x \in R| - 2 < x < 5\}$$

3 Funções

Definição. Suponhamos dois conjuntos: um de números $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e um conjunto de 4 pessoas $B = \{$Ari,Rui,Lia,Ester$\}$. Uma relação de A em B pode ser aquela que associa ao número 1 o nome Ari, ao número 2 Ester, Lia ao 3 e Rui ao 4.

Notemos que a correspondência estabelecida determina um conjunto de pares ordenados. $M = \{(1, Ari), (2, Ester), (3, Lia), (4, Rui)\}$. É claro que esta não é a única relação que pode ser estabelecida entre A e B. Façamos corresponder ao número 1 os indivíduos do sexo masculino, e ao número 2 os indivíduos do sexo feminino. $N = \{(1, Rui), (1, Ari), (2, Ester), (2, Lia)\}$. Note que M e N são pares ordenados cujos primeiros elementos pertencem a A e os segundos a B. Em outras palavras: $M \subset A \times B$,$N \subset A \times B$. Como $A \times B$ tem 16 elementos, o conjunto das partes de $A \times B$ possui 2^{16} elementos. Então, podemos estabelecer ao todo, 2^{16} relações de A em B.

Definição. S é uma relação de A em B se S for um subconjunto de $A \times B$.

Exemplo. 1

$$S = \{(x, y) \in A \times B \,|y = x + 1\}$$

$$\text{com } A = \{1, 2\} \text{ e } B = \{2, 3\}$$

$$S = \{(1, 2)\,, (2, 3)\}$$

Exemplo. $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$

$$T = \{(x, y) \in A \times B|y > x\}\}$$

$$T = \{(1, 2)\,(1, 3)\,(1, 4)\,(1, 5)\,(2, 3)\,(2, 4)\,(2, 5)\,(3, 4)\,(3, 5)\}$$

Definição. (Domínio) Seja S uma relação $A \times B$. O domínio de S é o conjunto dos elementos $x \in A$ para os quais existe um $y \in B$ tal que $(x, y) \in S$.

Definição. (Imagem) O conjunto imagem de S é o conjunto dos $y \in B$ para os quais existe um $x \in A$ tal que $(x, y) \in S$.

Exemplo. $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$. $D(S) = A$ e $Img(S) = B$

Definição. (Função) Uma relação f de A em B é uma função se, e somente se:

a) $\forall x \in A\, \exists y \in B$ definido pela relação, chamado imagem de x.

b) A cada $x \in A$ não podem corresponder dois ou mais elementos de B por meio de f.

Observação. Elementos distintos de A podem gerar o mesmo elemento de B, mas o contrário não é válido.

Definição. (Função real de variável real). Seja $f : A \to B$ e $A, B \subset R$, diz-se que f é uma função real de variável real

Definição. (Contradomínio). Seja $f : A \to B$ e $A, B \subset R$,define-se o contradomínio de f pelo conjunto B

Exemplo. $f(x) = 2x$, $f : A \to B$

$$A = N$$

$$B = R_+$$

Exemplo. Uma calculadora é vendida por R$200,00 a unidade. Sendo x a quantidade vendida, a receita de vendas será $200x$. $R(x) = 200x$

$$D = \{0, 1, ...\} = N^*$$

$$Im = \{0, 200, 400, ...\}$$

$$CDm = R_+ \text{ou } N$$

Exemplo. Considere as funções

a)

$$f(x) = \frac{2}{x-3} \to D = \{x \in R |\,]-\infty, 3[\cup]3, \infty[\} \text{ ou } R - \{3\}$$

b)

$$f(x) = \sqrt{x-2} \Rightarrow D = \{x \in R |\, x \geq 2\} = [2, \infty[$$

c)

$$f(x) = x^2 + 5x \Rightarrow D = R$$

d) Exemplo econômico

$$C(x) = 400 + 3x$$

$x \in R_+$ obviamente $C(x) = y \in R_+$

Definição. (Intercepto) São os pontos de intersecção do gráfico com os eixos.

$$f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$$

$$S = \{(0, 2), (1, 0)\,, (-1, 0)\,, (2, 0)\}$$

Definição. (Funções crescentes). Dizemos que f é crescente num intervalo$[a, b]$ se, à medida que aumenta o valor de x, dentro do intervalo, as imagens correspondentes também aumenta.

$$x_1 \text{ e } x_2 \in [a, b] \text{ se } x_1 < x_2 \text{ então } f(x_1) < f(x_2)$$

Definição. (Funções decrescentes). Dizemos que f é decrescente num intervalo $[a, b]$ se, à medida que aumenta o valor de x, dentro do intervalo, as imagens correspondentes vão diminuindo.

$$x_1 \text{ e } x_2 \in [a, b] \text{ se } x_1 < x_2 \text{ então } f(x_1) > f(x_2)$$

Observação. caso a função tenha a mesma imagem em todos os pontos de um intervalo $[a, b]$ dizemos que a função é constante naquele intervalo.

Observação. Uma função crescente ou constante num intervalo, é chamada de não decrescente naquele intervalo. Se a função for constante ou decrescente num intervalo, ela é chamada de não crescente naquele intervalo.

3.1 Pontos de Máximo e de Mínimo

Definição. Máximo (relativo). Seja f uma função definida num domínio D. Dizemos que x_0 é um ponto de máximo relativo se existe um intervalo aberto A, com centro x_0 tal que:

$$f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in A \cap D$$

A imagem $f(x_0)$ é chamada de valor máximo de f.

Definição. Mínimo (relativo). Analogamente x_0 é um ponto de mínimo relativo se existir um intervalo aberto A, com centro x_0 tal que:

$$f(x) \geq f(x_0)\ \forall x \in A \cap D$$

Definição. Máximo absoluto

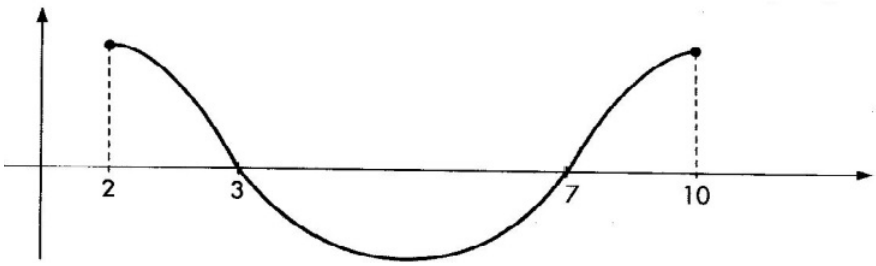
$$f(x) \leq f(x_0)\ \forall x \in D$$

Definição. Mínimo absoluto

$$f(x) \geq f(x_0)\ \forall x \in \cap D$$

3.2 Estudo do sinal de uma função

Estudar o sinal de uma função significa obter os valores de x para os quais $y > 0$ ou $y < 0$ ou $y = 0$. Seja f definida no intervalo *[2,10]* representada na figura abaixo, teremos:



$$y > 0, x \in [2,3[\text{ ou }]7,10]$$

$$y < 0, \text{ para } x \in]3,7[$$

$$y = 0, x = 3 \text{ ou } x = 7$$

3.2.1 Principais funções elementares

Definição. (Função constante) $f(x) = k$

Definição. (Função de primeiro grau) $y = n + mx$. Vamos esboçar o gráfico da função p=a-bq

$$\text{Se } q = 0 \text{ então } ,p = a,$$

$$\text{Se } p = 0 \text{ então,} q = \frac{a}{b}$$

Suponha que $(0,2)$ pertence a gráfico. $2 = a$. Suponha que (4,0) também, então:

$$0 = 2 - 4b, b = \frac{1}{2}$$

$$p = 2 - \frac{1}{2}q$$

Sabendo 2 pontos de $f(x)$, $A(x_1, f(x_1))$ e $B(x_2, f(x_2))$, o coeficiente angular m é dado por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

Exemplo. D$\Rightarrow$ $p^D = 100 - \frac{1}{2}q$

$$p^O = 10 + 0,5q$$

b) Imposto de 3 por unidade

$$p = 10 + \frac{1}{2}q + 3$$

Exemplo. $C = C_0 + C_1 Y$

$$S = Y - C$$

$$S = (1 - C_1)Y - C_0$$

Definição. Função Quadrática

$$Y = ax^2 + bx + c \text{ com } a \neq 0$$

$a > 0 \cup$ côncava para cima
$a < 0 \cap$ côncava para baixo
$x_v = -\frac{b}{2a}$
$y_v = -\frac{\triangle}{4a}$
$\triangle > 0$ tem 2 raízes
$\triangle = 0$ tem 1 raiz
$\triangle < 0$ suas raízes não interceptam o eixo

Exemplo. $y = x^2 - 4x + 3$

a=1, $\cup$

b) interseção com o eixo x

$$x^2 - 4x + 3 = 0, x = 1 \text{ e } x = 3$$

c) interseção com o eixo y

x=0, y=3

d) vértice

$$x_v = \frac{4}{2.1} = 2$$

$$y_v = -\frac{(-4)^2 - 4.1.3}{16 - 12} = -\frac{4}{4} = -1$$

$$f(2) = (2)^2 - 4(2) + 3 \Rightarrow -1$$

Exemplo. Demanda $p\,(q) = 10 - q$ e a função de Custo $C\,(q) = 10 + 3q$

a) obter o p que maximiza o lucro

$$L = q \times p\,(q) - C\,(q)$$

$$L = 10q - q^2 - 10 + 3q$$

Solucionando a equação do segundo grau teremos que:

q=3,5. Lembre-se que não faz sentido econômico termos quantidades negativas. Substituindo q na equação do preço temos que *p=6,5*.

Para essa quantidade o lucro será $L = 2,25$.

b) qual o intervalo que p varia para termos um lucro não negativo?

$$5 \leq p \leq 8$$

Definição. Função exponencial

$$Y = Y_0(1 + k)^x$$

Exemplo. Uma cidade tem 20.000 habitantes e esse número cresce a uma taxa de 0,03 ao ano

a) Qual a população daqui a 10 anos?

$$Y = 20.000(1,03)^{10} = 26.878$$

b) Se daqui a 10 anos o número de habitantes for de 30.000, qual a taxa de crescimento?

$$30.000 = 20.000(1+k)^{10}$$

$$\frac{3}{2} = (1+k)^{10}$$

$$(1,5)^{\frac{1}{10}} = 1+k$$

$$1,0414 = 1+k$$

$$k = 0,0414$$

$$k = 4,14$$

podemos fazer também pelo ln

$$ln3 - ln2 = 10ln(1+k)$$

$$\frac{1}{10}ln(\frac{3}{2}) = ln(1+k)$$

$$0.4 = ln(1+k)$$

Aplicando a função exponencial:

$$e^{0.4} = e^{ln(1+k)}$$

$$1.04 = 1+k$$

$$0.04 \simeq k \text{ ou } 4\% \simeq k$$

Definição. Logaritmos

$$log_a N = y \text{ se, e somente se,} a^y = N$$

(P1) $log_a N.M = log_a M + log_a N$
(P2) $log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_a N$
(P3) $log_a N^{\alpha} = \alpha log_a N$
(P4) $log_a N = \frac{log_{10} M}{log_{10} a}$

Exemplo. a) $log_4 64 = \frac{log_2 64}{log_2 4}$

$$log_2 64 = 2^x \text{ então} 2^x = 64 \text{ logo }, x = 6$$

$$log_2 4 = 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

b) $log_9 512$ sendo $log2$=0,301 e $log3 = 0,477$

$$\frac{log512}{log9} \to log2^9 = 9log2 = 2,709$$

$$log3^2 = 2log3 = 0,954$$

$$log_9 512 \cong 1,84$$

4 Limites

Definição. Sucessão ou sequência

Toda a função real cujo domínio é o conjunto dos números naturais ou parte dele.

Exemplo. $f(n) = \frac{1}{n} \forall n \in N^*$

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)$$

$$f(n) = n \Rightarrow (1, 2, 3, 4, ...)$$

$$f(n) = -(2n-1) \Rightarrow (-1, -3, -5, -7, ..)$$

$$f(n) = (-1)^n.n \Rightarrow (-1, 2, -3, 4, -5, ...)$$

Definição. Convergência

Dizemos que uma sucessão converge para um número fixo se, à medida que n aumenta, o valor de *f(n)* se aproxima desse valor fixo. Uma sucessão$(f(1), f(2), f(3), ...)$ converge para um número fixo a se $\forall$ intervalo I centrado em a existe um número natural k tal que as imagens$f(k+1), f(k+2), f(k+3)...$ pertencem todas a *I*.

Exemplo. Veja: $f(n) = \frac{1}{n}$, à medida que n cresce, a função se aproxima de zero.

Note que $f(n) = n$, à medida que n aumenta, os valores de *f(n)* não convergem para nenhum valor, ou seja, diverge para $+\infty$

$$f(n) = -(2n-1)$$

$$(-1, -3, -5, -7, ...) \to \text{diverge para} - \infty$$

$$\text{Se } f(n) = (-1)^n n, \text{ diverge mas não para mais ou menos } \infty$$

Observação. Se uma sucessão converge para a, mas sempre por valores menores que a, dizemos que a sucessão converge para a pela esquerda.

$(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{n}{n+1}, ...) \to$converge para 1 pela esquerda

O contrário é válido, mas há sucessões que convergem para a oscilando, isto é, tanto pela esquerda como pela direita.

(3,1; 3,01; 3,001; 3+10^{-n}; ...) direita

(2,9; 2,99; 2,999; ...; 3-10^{-n}; ...) esquerda

Exercício. 1

a)

$$(1, 4, 9, 16, 25)\ f(n) = 2^n, \text{diverge para} + \infty$$

b)

$$(-1, 2, -3, 4, -5, 6) \to f(n) = (-1)^n.n \text{ divergente}$$

c)

$$(1, 2, 4, 8, 16, 32, ...) \to f(n) = 2^{n-1} \text{ divergente}$$

d)

$$\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...\right) \to f(n) = \frac{1}{3^{n-1}} \text{converge para } 0$$

2)

a)

$$f(n) = \frac{2}{n} \to 0$$

b)

$$f(n) = \frac{n+1}{2} \to +\infty$$

c)

$$f(n) = \frac{n+1}{n^2+1} \to 0$$

d)

$$f(n) = \frac{2n^2+1}{n^2+1} \to 2$$

e)

$$f(n) = \frac{n^2}{3n} \to 0$$

f)

$$f(n) = \frac{n^2+1}{n} \to \text{divergente}$$

g)

$$f(n) = (1+\frac{1}{n})^4 \to 1$$

h)

$$f(n) = \frac{n-1}{n^2-1} \to 0$$

i)

$$f(n) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$$

j)

$$f(n) = (-1)^n.\left(\frac{n+1}{n}\right) \to \text{divergente}$$

k)

$$f(n) = (-1)^n.\left(\frac{1}{n}\right) \to \text{divergente}$$

l)

$$f(n) = \left(\frac{5n+1}{n}\right) se\ n\ par$$

$$f(n) = \frac{5n-1}{n}\text{se n ímpar}$$

$$f(n) \to 5$$

m)

$$f(n) = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}} \to \frac{4}{3}$$

3)

$$f(n) = \frac{1}{n} \to 0 \text{ e } g(n) = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$$

4)

$$h\,(n) = \frac{1}{n} + \frac{n+1}{2n} \to \frac{3+n}{2n} \to \frac{1}{2}$$

5)

$$h_1(n) = f(n).g(n) = \frac{n+1}{2n^2} \to 0$$

6)

$$h_2(n) = f(n) - g(n) = \frac{1}{n} - \frac{n+1}{2n} = \frac{1-n}{2n} = -1$$

7)

$$h_3(n) = \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{1}{n}.\frac{2n}{n+1} = \frac{2}{n+1} - 1 \to 0$$

4.1 Limite de funções

O conceito de limite possui grande utilidade na determinação do comportamento de funções nas vizinhanças de um ponto fora do domínio, no comportamento de funções quando x aumenta ou diminui muito.

Definição. (**Limite pela direita**) Dada $f(x)$ e um ponto b fixo do domínio, diz-se que o limite da função é L quando x tende a b pela direita $(x \to b)$, se, à medida que x se aproxima de b pela direita (isto é, por valores superiores a b), os valores de $f(x)$ se aproximam de L.

Simbolicamente escrevemos:

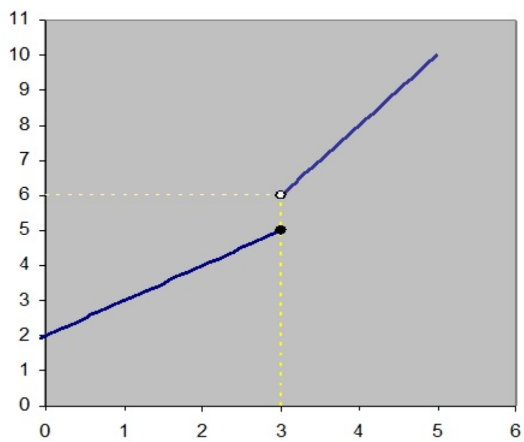
$$\lim_{x \to b^+} f(x) = L$$

Definição. (Limite pela esquerda) O conceito de limite pela esquerda é análogo. Isto é, à medida que x se aproxima de b pela esquerda (valores inferiores a b) os valores de *f(x)* se aproximam de *M*. Simbolicamente temos que:

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = M$$

Observaremos agora o gráfico da seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{se } x \leq 3 \\ 2x, \text{ se } x > 3 \end{cases}$$



Pelo gráfico vemos que quando x se aproxima do ponto 3 pela esquerda, simbolicamente $x \to 3$, vemos que $f(x)$ se aproxima do 5, simbolicamente $f(x) \to 5$. Porém, quando x se aproxima de 3 pela direita, $x \to 3+$, *f(x)* tende para 6, $f(x) \to 6$. Esta é a ideia de limite de uma função.

Definição. (Existência) O limite de uma função no ponto existe quando:

$$\lim_{x \to b^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

Exemplo. Agora considera-se a função

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & se\ x \neq 3 \\ 7 & se\ x = 3 \end{cases}$$

Considerando as mesmas sucessões utilizadas anteriormente, tome o limite desta função quando x tende a 3 pela direita e pela esquerda. Observe que *f(x)* tende a 5 pela direita e pela esquerda.

Exercício. Tome o limite das funções quando a tende ao valor indicado:

$$f(x) = 2x + 1, a = 3 \to 7$$

$$f(x) = \frac{x+5}{x-3}, a = 0 \Rightarrow a^+ \to -\frac{5}{3}; a^- \to -\frac{5}{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & se\ x \leq 2 \\ 7 & se\ x > 2 \end{cases} a = 2 \Rightarrow a^+ \to 7; a^- \to 4$$

$$f(x) = \frac{x-2}{x} a = 2 \to 0$$

4.2 Formas Indeterminadas

Definição. Formas indeterminadas

Agora considera-se essa função

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

Nesta função não é possível calcular *f(3)*, pois seria uma divisão por zero. Porém podemos fatorar a equação e tomar o limite.

$$f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = (x+3)$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = (x+3) = 6$$

Exemplo. 1

$$\lim_{x \to 5} \frac{5-x}{25-x^2} = \frac{1}{10}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-4x+3}{x^3-1} = \frac{2}{3}$$

4.3 Limites Infinitos

O limite de muitas funções, quando a variável independente se aproxima a um valor fixo, tende para mais ou menos infinito. Por exemplo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$$

Temos: $f(1) = 1, f(0,1) = 10, f(0,01) = 100, ...$

Vemos que enquanto x se aproxima de zero pela direita os valores de *f(x)* aumentam e assim *f(x)* tende para mais infinito, ou seja:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \to +\infty$$

Se x tende a zero pela esquerda, *f(x)* fica cada vez menor, então tem-se que:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} \to -\infty$$

Encontre o limite dessa função quando x tende:

a) + infinito

b) - infinito

Exemplo. Vejamos alguns exemplos:

$$f(x) = \frac{4}{x-6} \; a = 6$$

$$f(x) = \frac{x}{2-x} a = 2 \begin{cases} a^+ \to 2 & = -\infty \\ a^- \to 2 & = +\infty \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4x}{(x-3)^2}, a = 3 \to \infty$$

4.4 Limites Extremos no Domínio

Neste caso deseja-se estudar o comportamento da função, quando a variável independente tende para mais ou menos infinito. Isto é, deseja-se estudar problemas do tipo:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \text{ e } \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

Quando temos o limite de funções na forma racional e a variável independente tende para mais ou menos infinito, podemos dividir cada membro pelo maior grau do polinômio e depois aplicar o limite:

$$\lim_{x \to +\infty} f(\frac{x-1}{x^2+3}) = \lim_{x \to +\infty} f(\frac{\frac{x-1}{x^2}}{\frac{x^2+3}{x^2}}) = 0$$

Desejamos tomar o limite da seguinte função:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 9$$

Coloque em envidência o termo de maior grau do polinômio:

$$f(x) = 2x^3 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{2x^2} + \frac{9}{2x^3}\right)$$

Você pode tomar os limites de cada termo:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(2x^3\right) \left[\lim_{x \to \infty} (1) + \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2}{x}\right) - \lim_{x \to \infty} \left(\frac{5}{2x^2}\right) + \lim_{x \to \infty} \left(\frac{9}{2x^3}\right)\right]$$

Resultando em:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty (1 + 0 - 0 + 0) = \infty$$

Alguns exemplos:

Exemplo. $\lim_{x \to \infty} f(x) = (2x^4 - 3x^3 + x + 6)$

$$\lim_{x \to \infty} 2x^4 (1 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{2x^3} + \frac{3}{x^4})$$

$$\lim_{x \to \infty} 2x^4 . \lim_{x \to \infty} (1 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{2x^3} + \frac{3}{x^4}) = \infty$$

Exemplo. 2

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = (2x^3 + 4x^2 - 5x + 9)$$

$$\lim_{x \to \infty} 2x^3 . \lim_{x \to \infty} = (1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{9}{2x^3}) = \infty$$

Outros exemplos:

a)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

b)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

g)

$$\lim_{x\to\infty}e^x=\infty$$

h)

$$\lim_{x\to-\infty}e^x=0$$

p)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x-3}=2$$

s)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x1}{2x^2-5x}=\frac{1}{2}$$

4.5 Funções contínuas

Definição. Uma função $f(x)$ é contínua num ponto b do domínio, se:

$$\lim_{x\to b^+}f(x)=\lim_{x\to b^-}f(x)=f(b)$$

Exemplo. As funções

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2} \text{ e } f(x)=x^2$$

Tomando o limite da primeira função:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=(x+2)=4$$

Note que a função tende a 4 se tomarmos o limite da mesma tendendo a 2 pela direita e pela esquerda. No entanto quando *f(2)* temos uma indeterminação indicando que a função não é contínua no ponto *x=2*. Já no segundo caso, podemos observar que:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=x^2=4$$

Você deve verificar que os limites laterais são idênticos. Quando tomamos o valor de *f(2)=4*, desse modo verificamos que esta função é contínua no ponto *x=2*. Vejamos um último exemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & se\ x \neq 2 \\ 10 & se\ x = 2 \end{cases} \text{ não é contínua para } x \to 2$$

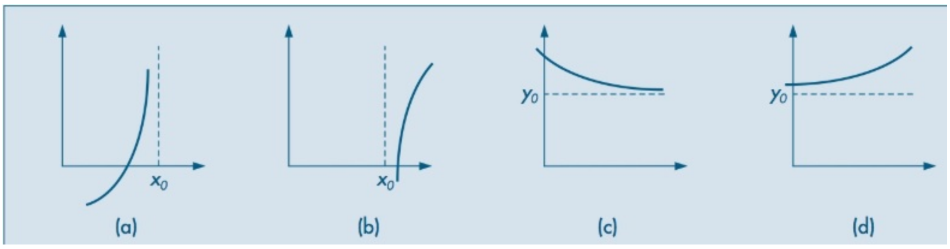
4.6 Assíntotas

Definição. (Assíntota vertical) Se existir um número x_0 tal que um dos limites laterais de $f(x)$quando a função tende a esse valor seja infinito, ou menos infinito, então a reta $x = x_0$ é uma assíntota vertical da função considerada e geralmente x_0 é um ponto de descontinuidade da função.

O conceito de assíntota horizontal é parecido, porém não idêntico.

Definição. (Assíntota horizontal) Se existir um número x_0 tal que um dos limites laterais de $f(x)$ tenda a x_0 quando essa função vai para mais ou menos infinito, então a reta $y = x_0$ é uma assíntota horizontal da função considerada e geralmente x_0 é um ponto de descontinuidade da função.

Exemplo. Seja a função: $f(x) = \frac{5x+3}{x-2}$



$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \infty$ e $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ então a reta *x=2* é uma assíntota vertical de *f(x)* *(gráficos (a) e (b))*

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 5$ *e* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 5$ então a reta *y=5* é uma assíntota horizontal de *f(x).(gráficos (c) e (d))*

Vejamos esse outro exemplo:

Exemplo. 2

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

Temos uma assíntota vertical quando *x=-1*

$$\lim_{x^- \to -1} \frac{x-1}{x+1} = -\infty \text{ e } \lim_{x^+ \to -1} \frac{x-1}{x+1} = +\infty$$

Observaremos o comportamento da função quando ela tende a mais ou menos infinito:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$$

$y = 1$ é uma assíntota horizontal

4.7 Limite de funções exponenciais

Definição. (Limite exponencial fundamental). O próximo resultado é importante em muitos problemas de cálculo e matemática financeira:

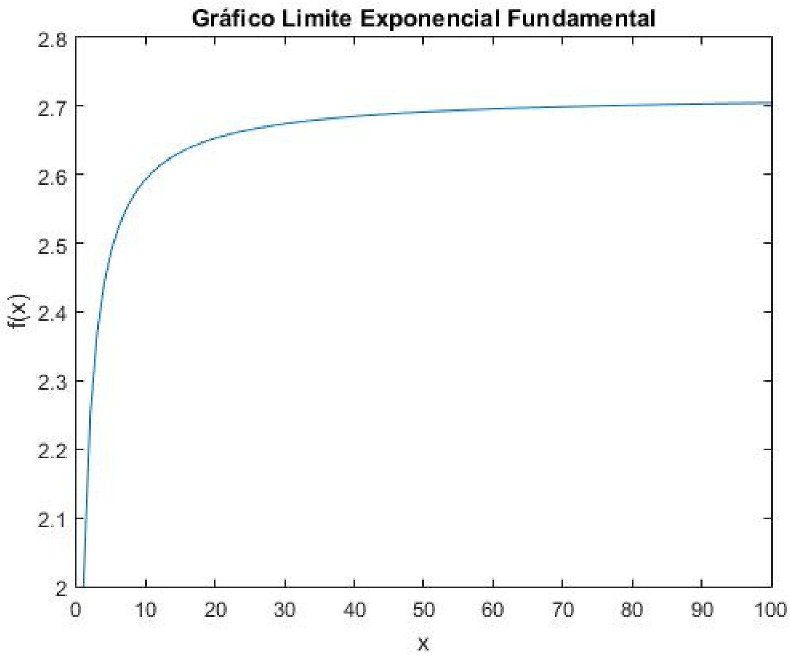
$$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

Vejamos como esse resultado funciona numericamente:

Tabela 1: Limite Exponencial Fundamental - Exemplo Numérico

x	$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
1	2
2	2,25
5	2,48832
10	2,59374246
20	2,653297705
50	2,691588029
100	2,704813829
200	2,711517123
500	2,715568,521
1000	2,716923932
10000	2,718145927
100000	2,718268237
100000000	2,718281786

Agora observe o gráfico dessa função para um x crescendo:



Exemplo. Um investidor possui um montante *M=20.000* e deseja investi-lo a uma taxa de juros anual de 15% ao ano pelo período de 4 anos. Suponha que o rendimento seja exponencial:

$$M = 20000.e^{0,15.4} = 3644,24$$

4.8 Propriedades dos Limites

Propriedade 1: (Limite da Soma). Suponha que:

$$g(x) = f_1(x) + ... + f_n(x) \text{ e que } \lim_{x \to a} f_i(x) = b_i$$

$$\lim_{x \to a}(f_1(x) + ... + f_n(x)) = \lim_{x \to a} f_1(x) + \lim_{x \to a} f_2(x) + ... + \lim_{x \to a} f_n(x)$$

Propriedade 2: (Limite do produto)

$$g(x) = f_1(x).f_2(x).,...,.f_n(x) \text{ e que} \lim_{x \to a} f_i(x) = b_i$$

$$\lim_{x \to a}(f_1(x).f_2(x).,...,.f_n(x)) = \lim_{x \to a} f_1(x).\lim_{x \to a} f_2(x).,...,.\lim_{x \to a} f_n(x)$$

Propriedade 3: (Limite do quociente)

$$g(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \text{ e que } \underset{x \to a}{lim} f_1 = b_1 \text{ e } \underset{x \to a}{lim} f_2 = b_2 \neq 0$$

$$\underset{x \to a}{lim} g(x) = \frac{b_1}{b_2}$$

5 Derivadas

5.1 Conceito de derivada

O conceito de derivada está ligado à taxa de variação instantânea de uma função. Primeiramente, vamos descrever o que é taxa de variação média de uma função. Seja a função $f(x) = x^2$ Vemos que quando x varia de 1 a 2 , f varia de 1 a 4. A taxa de variação de f dada uma variação em x é dada por:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{4-1}{2-1} = 3$$

Isto significa que quando x varia 1 unidade, começando de $x_0 = 1$, f varia 3 unidades. Em geral, para se medir a taxa de variação média de uma função, dada uma variação da variável dependente, utiliza-se:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Fazendo $\Delta x = x_1 - x_0$, podemos escrever o resultado acima como:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

A derivada de uma função num ponto x_0 pertencente ao domínio de f, mede a taxa de variação de f dada uma variação infinitesimal da variável independente x, e é definido da seguinte forma.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Indica-se a derivada de $f(x)$ no ponto x_0 por:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_0} f'(x_0), \frac{df}{dx}(x_0) \text{ ou } \frac{dy}{dx}(x_0)$$

Define-se a função derivada, que representa a derivada num ponto genérico x, da seguinte forma:

1. Calculamos a derivada num ponto genérico;

2. E depois substituímos o ponto x_0 em questão.

Qual a derivada de $f(x) = x^2$ nos pontos $x_0 = 3$, $x_0 = -2$ e para um x genérico?

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x} = \frac{(3+\Delta x)^2-(3)^2}{\Delta x} = \frac{9+6\Delta x+\Delta x^2-9}{\Delta x}$$
$$= \frac{9+6\Delta x+\Delta x^2-9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(6+\Delta x)}{\Delta x}$$
$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} (6+\Delta x) = 6$$

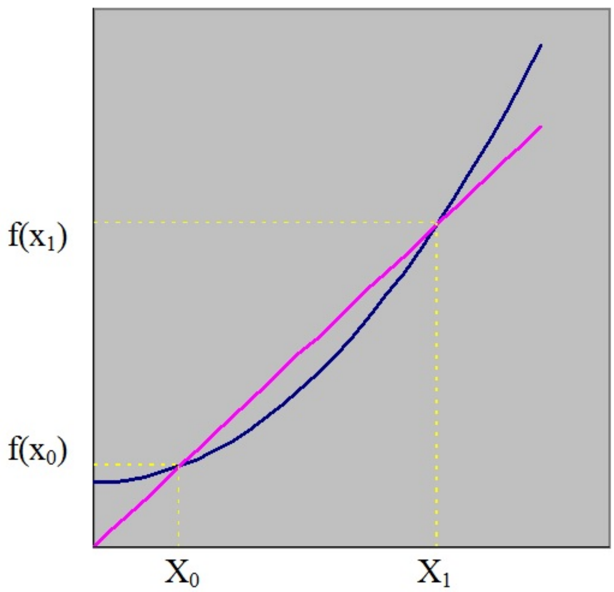
$$f'(-2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-2+\Delta x)-f(-2)}{\Delta x} = \frac{(-2+\Delta x)^2-(-2)^2}{\Delta x} = \frac{4-4\Delta x+\Delta x^2-4}{\Delta x}$$
$$= \frac{4-4\Delta x+\Delta x^2-4}{\Delta x} = \frac{\Delta x(-4+\Delta x)}{\Delta x}$$
$$f'(-2) = \lim_{\Delta x \to 0} (-4+\Delta x) = -4$$

5.2 Interpretação geométrica da derivada

Como vimos, a definição de taxa de varição média de uma função é:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

No gráfico, esta relação equivale à tangente do ângulo correspondente à reta que une os pontos x_0 e x_1.



Se fizermos o ponto x_1 se aproximar de x_0, a reta que era secante à curva fica tangente no ponto x_0.

5.3 Derivadas das principais funções elementares

Função potência

$$f(x) = x^n, \text{ então } f'(x) = nx^{n-1}$$

Função logarítmica (para$x > 0$)

$$f(x) = \ln x, \text{ então } f'(x) = \frac{1}{x}$$

Função seno

$$f(x) = sin(x), \text{ então } f'(x) = cos(x)$$

Função cosseno (para x>0)

$$f(x) = cos(x), \text{ então } f(x) = -sen(x)$$

5.3.1 Propriedades operatórias

$$\text{Se } f(x) = kg(x) \text{ então } f'(x) = kg'(x)$$

$$\text{Se } f(x) = u(x) \pm g(x) \text{ então } f'(x) = u'(x) \pm g'(x)$$

$$\text{Se } f(x) = u(x).v(x) \text{ então } f'(x) = u'(x).v(x) - u(x).v'(x)$$

$$\text{Se } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ então } f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Utiliza-se a regra da cadeia para situações onde temos que derivar funções compostas, isto é, quando a variável independente também é uma função. Por exemplo $f(x) = (x^2 - 1)^3$ Neste caso, podemos pensar$f(x)$ da seguinte forma:

$$g(x) = x^3 \text{ e } v(x) = x^2 - 1$$

Veja que $g(x)$ na verdade é $g(v(x))$. Temos que

$$f'(x) = g'(x).v'(x)$$

Isto é, é a derivada da função "de fora" vezes a derivada da função "de dentro".

5.3.2 Função exponencial

Teorema. *Se $f(x) = a^x$, então $f'(x) = a^x \ln a$, para todo x real (com a>0 e $a \neq 1$).*

Demonstração. Temos $f(x) = a^x$; então aplicando o logaritmo, temos

$$ln\left(f\left(x\right)\right) = xlna$$

Agora derivando de ambos os lados, e aplicando a regra da cadeia do lado direito, temos:

$$\frac{1}{f\left(x\right)}\frac{\partial f\left(x\right)}{x} = lna$$

$$\frac{\partial f\left(x\right)}{x} = f\left(x\right)lna$$

□

Deve-se observar um detalhe adicional quando a é uma função de x. Um exemplo é a função e^x . Veremos como calcular a derivada desta função usando logaritmo. Considere que $g\left(x\right) = e$ e $u\left(x\right) = x$ então $f\left(x\right) = g\left(x\right)^{u(x)}$. Aplicando o logaritmo tem-se que: $lnf\left(x\right) = u\left(x\right)ln\left(g\left(x\right)\right)$. Fazendo a derivada desta função em logaritmo:

$$\frac{1}{f\left(x\right)}\frac{\partial f\left(x\right)}{x} = u\left(x\right)^{'}ln\left(g\left(x\right)\right) + u\left(x\right)ln\left(g\left(x\right)\right)^{'}$$

$$\frac{1}{f\left(x\right)}\frac{\partial f\left(x\right)}{x} = u\left(x\right)^{'}ln\left(g\left(x\right)\right) + u\left(x\right)ln\left(g\left(x\right)\right)^{'}$$

Lembre que $ln\left(g\left(x\right)\right) = lne = 1$ e então a $\frac{\partial ln(g(x))^{'}}{\partial x} = 0$. Inserindo essas informações na expressão acima, tem-se que:

$$\frac{1}{f\left(x\right)}\frac{\partial f\left(x\right)}{x} = u\left(x\right)^{'}$$

$$\frac{1}{f\left(x\right)}\frac{\partial f\left(x\right)}{x} = 1$$

$$\frac{\partial f\left(x\right)}{x} = f\left(x\right)$$

$$\frac{\partial f\left(x\right)}{x} = e^x$$

Em termos gerais, pode-se usar a seguinte expressão para a derivada da função exponencial na forma $e^{u(x)}$:

$$\frac{\partial f\left(x\right)}{x} = f\left(x\right)u\left(x\right)^{'}$$

Isto é, repete-se o valor da função e multiplica-se pela derivada do expoente em relação a x.

5.3.3 Função inversa

Seja f uma função definida no intervalo *[a, b]*, derivável e crescente (ou decrescente) nesse intervalo. Então, se $f'(x) > 0$ (ou $f'(x) < 0)\forall x \in (a, b)$, temos:

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Também escrevemos :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{(\frac{dy}{dx})}$$

Seja $f(x) = x^2 \forall x \in [0, \infty)$

$$f(y) = \sqrt{y}, x = \sqrt{y}, f'(x) = 2x$$

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Seja $f(x) = 3x + 5$, define-se $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(y) = \frac{y-5}{3}, Df^{-1} = \frac{1}{3}$$

5.4 Diferencial de uma função

Consideremos que f é derivável em x_0. A variação sofrida por *f*, quando se passa do ponto x_0 ao ponto $x_0 + \Delta x$, é:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Consideremos a reta PR, tangente ao gráfico de f no ponto $PP = (x_{0,} f(x_0))$ cujo coeficiente angular é $m = f'(x_0)$

$$m = tg\alpha = \frac{RS}{PS} = \frac{\bar{RS}}{\Delta x} \to RS = f'(x_0).\Delta x$$

5.4.1 Diferencial

Definição. (Diferencial) É o valor de RS que depende de Δx no ponto de abscissa x_0 e indicamos por df, assim: $df = f'(x_0).\Delta x$. É fácil perceber que quanto menor Δx mais próximo de df estará Δf.

Observação. $df \cong \Delta x$ para pequenos valores de x

Em outras palavras, a diferencial de uma função pode ser usada para calcular aproximadamente variações de f, para pequenos valores de Δx.

Exemplo. Ex: $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$ e $\Delta x = 0,1$

$$f'(x) = 3x^2, f'(x_0) = 3(2)^2 = 12, \Delta 0,1$$

$$df = 12.0,1 = 1,2$$

Qual o valor de x_1?

$$\Delta x = 0,1; \Delta x = x_1 - x_0; 0,1 = x_1 - 2 \rightarrow x_1 = 2,1$$

Exemplo. Ex: $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ e $\Delta x = 0,01$

É importante destacar que a derivada de $f'(x) = e^u \frac{du}{dx}$.

$$f'(x) = e^x, f'(x) = 1, df = 0,01$$

5.5 Funções marginais

Definição. Chama-se a função marginal de $f(x)$ à função derivada de $f(x)$.

Ex:

$$C(x) = 0,01x^3 - 0,5x^2 + 300x + 100$$

$$Cmg = C'(x) = 0,03x^2 - x + 300$$

Se avaliarmos Cmg para x=10 teremos:

$$Cmg(10) = 0,03(10)^2 - 10 + 300 = 293$$

$$Cmg(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta c}{\Delta x}$$

Se supormos que esse Δx pequeno é igual a 1, então:

$$Cmg(x) \cong C(x+1) - c(x)$$

Assim, o Cmg é aproximadamente igual à variação do custo, decorrente da produção de uma unidade adicional a partir de x unidades.

Exemplo. Seja $R(x) = -4x^2 + 500x$ qual é a receita máxima?

$$Rmg = -8x + 500$$

$$Rmg(10) = -80 + 500 = 420$$

$$Rmg(20) = -160 + 500 = 340$$

Exemplo. $C(y) = 20 + 0,4y^{0,75}$

$$Rmg(y) = 0,3y^{-0,25}$$

$$Rmg(y) = 0,3(16)^{-0,25} = 0,3(2^4)^{-\frac{1}{4}} = 0,15$$

Um aumento de 1 unidade na renda disponível acarreta em um aumento no consumo de aproximadamente 0,15

$$S(y) = y - C = y - 20 - 0,4y^{0,75} = y(1 - 0,4y^{-\frac{1}{4}}) - 20$$

$$S'(y) = 1 - (\frac{4}{10}).\frac{3}{4}.y^{-\frac{1}{4}} = 1 - 0,3y^{-0,25}$$

$$S(16) = 1 - 0,3(16)^{-0,25} = 1 - 0,3(2^4)^{-\frac{1}{4}} = 1 - \frac{3}{10}.\frac{1}{2} = 0,85$$

$$S'(y) = 1 - C'(y)$$

5.6 Elasticidades

A um preço p_0 a quantidade demandada é x_0.Δp é a variação de p a partir de p_0 e Δx é a variação de x a partir de x_0

$$\frac{\triangle p}{p_0} \text{ é a variação \% no preço}$$

$$\frac{\triangle x}{x_0} \text{ é a variação \% na quantidade}$$

Chamamos elasticidade da demanda no ponto (x_0, p_0) o número:

$$\varepsilon = \left| \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{x_0}}{\frac{\Delta p}{p_0}} \right| = \frac{p_0}{x_0}. \left| \lim_{p \to 0} . \frac{\Delta x}{\Delta p} \right|$$

O módulo é introduzido para que a elasticidade resulte em um número positivo, já que em geral $\frac{dx}{dp} < 0$

$$\varepsilon = \frac{p_0}{x_0}.\frac{dx}{dp}$$

$$\varepsilon > 1 \rightarrow elástica$$

$$\varepsilon \in (0,1) \rightarrow inelástica$$

$$\varepsilon = 1 \rightarrow unitária$$

Exemplo. $5x = 10 -$ p, $p = 10 - 5x$, $x = \frac{10-p}{5} \rightarrow x = 2 - 0,2p$, $\frac{dx}{\mathrm{dp}} = -\frac{1}{5}$

$$\text{Se } p = 5 \text{ e } x = 1, \varepsilon = \frac{5}{1}.\left|-\frac{1}{5}\right| = 1$$

Exemplo. $p = \sqrt{100 - x}$, $p^2 = 100x$, $x = 100 - p^2$, se $p = 5$, $x = 75$

$$\frac{dx}{dp} = -2p, \varepsilon = \frac{5}{75}.\left|2p\right| = \frac{5}{75}.\left|2.5\right| = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

5.7 Derivadas sucessivas

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 6x - 4$$

$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 6$$

$$f''(x) = 24x - 4$$

$$f'''(x) = 24$$

$$f''''(x) = 0$$

5.8 Fórmulas de Taylor e Maclaurin

Como encontrar uma série infinita que converge para uma função. Como utilizar essa informação para calcular um valor aproximado da função por meio das somas parciais desta série. Séries de potência

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

Somas parciais S_n da série são polinômios dados por

$$S_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

Para um dado valor de x, as somas parciais $S_0, S_1, S_2...$ formam uma sequência que pode ou não convergir para um número dado. Verifica-se que nas séries de potências as somas parciais convergem para valores de x tais que $-\mathbb{R} < x < \mathbb{R}$. O número $\mathbb{R}$ é chamado de raio de convergência da séries.

Consideraremos $f(x) = a_nx^n$ uma série de potências que convirja para $f(x)$ num certo intervalo de convergência.

$$S_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$$

Para x=0, $f(0) = a_0$

Derivando membro a membro, verifica-se que a série derivada converge para $f'(x)$ no mesmo intervalo de convergência.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ...$$

para x=0, $f'(1) = a_1$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x; x = 0, f''(0) = 2a_2 \Longrightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

$$f'''(x) = 6a_3; x = 0, f'''(0) = 6a_3 \Longrightarrow a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

Procedendo n vezes de modo análogo, vemos que $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $f^{(n)}$ é a derivada de ordem n avaliada no ponto zero.

A série obtida é:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... \to$$

É conhecida como série de Taylor.

Ex: e^1 aprox. de 4ª ordem de e^x

$$e^1 \cong 1 + 1(1^1) + \frac{1}{2}(1^2) + \frac{1}{3}(1^3) + \frac{1}{4}(1^4)$$

Ex: $f(x) = (1 + x)^n$, $f(0) = 1$

$$f'(x) = n(1 + x)^{n-1}, f'(0) = n$$

$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}, f''(0) = n(n-1)$$

$$f'''(x) = m(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}, f'''(0) = n(n-1)(n-2)$$

A aproximação de Taylor de 3ª ordem é

$$(1+x)^n \cong 1 + n.x + \frac{n(n-1)x^2}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{6}$$

Por questões de convergência, em algumas situações costuma-se usar uma série de potência ligeiramente diferente da que acabamos de estudar:

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

Recebe o nome de série de Taylor em torno de x=a, em que a é uma constante.

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + ...$$

$$a_0 = f(a)$$

$$a_1 = \frac{f'(a)}{1!}$$

$$a_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

$$a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$f(x) = f(a) + f'(a)^{(x-a)} + \frac{f''(a)^{(x-a)^2}}{2!} + \frac{f'''(a)^{(x-a)^3}}{3!} + ...$$

Exemplo. Ex: $f(x) = \sqrt{x}$, aproximação de Taylor de 3ª ordem a=4

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(4) = 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f1'(4) = -\frac{1}{32}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{8}x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(4) = \frac{3}{256}$$

$$\sqrt{x} \cong 2 + \frac{1}{4}(x-4) + \frac{(-\frac{1}{32})}{2}(x-4)^2 + \frac{\frac{3}{256}}{6}(x-4)^3$$

$$\sqrt{x} \cong 2 + \frac{(x-4)}{4} - \frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(x-4)^3}{512}$$

Para

$$\sqrt{5} \cong 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{512} \cong 2,24$$

Exemplo. lnx, 4º ordem a=1

$$f(x) = lnx \Rightarrow f(1) = ln1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2$$

$$f''''(x) = -\frac{6}{x^4} \Rightarrow f''''(1) = -6$$

$$lnx \cong 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 - \frac{6}{24}(x-1)^4$$

Para x=2,

$$ln2 \cong 0 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cong 0,7$$

5.9 Regras de L'Hopital

Essas regras permitem o cálculo de limites indeterminados sob a forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ (esse abuso de notação indica que o numerador e o denominador convergem para 0 ou ∞).

Definição. (L'Hopital) Se $f(x)$ e $g(x)$ são deriváveis, tais que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, ou, $\frac{\infty}{\infty}$, então $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, se este último limite existir.

Exemplo. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \infty^0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}lnx = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Aplicando a função exponencial teremos que $e^0 = 1$, então o limite da função é 1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = \frac{3x^2}{e^2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3lnx}{x} = \frac{\frac{3}{x}}{1} = \frac{3}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$$e^0 = 1$$

Exemplo. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x}{1} = 4$$

Exemplo. Limite Exponencial Fundamental

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Aplicando o logaritmo:

$$\lim_{x\to\infty} xln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Por simplificação escreveremos a equação acima do seguinte modo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Tomando as derivadas individualmente:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-1} x^{-2}}{-x^{-2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

Tomando o limite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 1$$

Note que usamos o logaritmo para calcular o limite dessa função. Dessa forma se aplicarmos o exponencial teremos que:

$$e^1 = e$$

5.10 Funções inversas

Exemplo: Função demanda linear

$$x = 3 - 2p$$

$$p = \frac{1}{2}(3 - x)$$

Definição. Qualquer função $f : E_1 \to \mathbb{R}$ onde $E_1 \subset \mathbb{R}$, $g : E_2 \to \mathbb{R}$ é inversa de f se:

1. $g(f(x)) = x$ para cada x no domínio E_1 de f

2. $f(g(z)) = z$ para cada z no domínio E_2 de g

Exemplo. Ex:$x = 3 - 2p$

$$x = 3 - 2.\left[\frac{1}{2}(3 - x)\right]$$

$$x = x$$

Exemplo. Ex: $y = x^3 \to f(x) = x^3$

$$y^{\frac{1}{3}} = x, g(y) = y^{\frac{1}{3}}$$

Exemplo. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$$y(x+1) = x - 1$$

$$y(x+1) + 1 = x - 1 + 1$$

$$y(x+1) - (x+1) = -2$$

$$(y-1)(x+1) = -2$$

$$x + 1 = \frac{-2}{y+1}$$

$$x = \frac{-2}{y+1} - 1$$

$$x = \frac{-(1+y)}{-(1-y)} = \frac{1+y}{1-y}$$

Observação. f deve ser injetora para possuir uma inversa

Ex: Seja $f(x) = x^2$, em todo $\mathbb{R}$ f é não injetora, pois manda x=-2, 2 ao ponto 4. Mas então $g(f(-2)) = g(4) = +2$ não satisfaz a definição de uma inversa. Se restringirmos $D = [0, -\infty]$, então f é injetora e tem inversa bem definida $g(y) = y^{\frac{1}{2}}$, $g(y) : D \to \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

5.11 Funções compostas

Definição. (Função composta) Se g e h são funções no $\mathbb{R}$, então a função obtida aplicando-se primeiro g a um x qualquer e depois aplicando-se h ao resultado de *g(x)* é denominada composição das funções g e h que é denotada por:

$$f(x) = h(g(x)) \text{ ou } f(x) = (hog)(x)$$

Exemplo. Ex: $g(x) = x^2$ e $h(x) = x + 4$

Então

$$hog = h(g(x)) = x^2 + 4$$

$$goh = g(h(x)) = (x + 4)^2$$

Exemplo. Ex: Lucro

$$\Pi(y) = -y^4 + 6y^2 - 5$$

$$f(L) = 5L^{\frac{2}{3}}$$

$$P(L) = \Pi(f(L))$$

$$P(L) = -(5L^{\frac{2}{3}})^4 + 6(5L^{\frac{2}{3}})^2 - 5$$

$$P(L) = -625L^{\frac{8}{3}} + 150^{\frac{4}{3}} - 5$$

As funções de lucro são descritas como funções do nível de produção. Estudar a dependência do lucro com a função de produção $y = f(c)$

5.12 Estudo do sinal

Estudar o sinal de uma função significa obter x para os quais y>0 ou y<0 ou y=0.

Seja $f : [2, 10] \to \mathbb{R}$

$$y > 0 \text{ para } 2 \leq x < 3 \text{ ou } 7 < x \leq 10$$

$$y < 0 \text{ para } 3 < x < 7$$

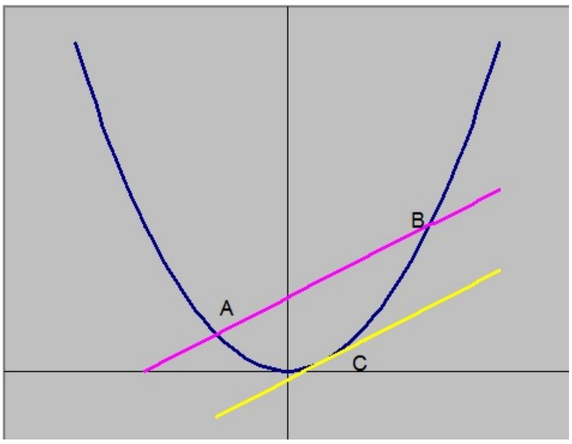
$$y = 0, y = 3 \text{ ou } x = 7$$

6 Aplicações de derivadas

Teorema. *Teorema do valor médio*

Suponha que $f(x)$ seja uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável$]a, b[$. Então, existe um ponto c pertencente ao intervalo$]a, b[$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \to \frac{y - y_0}{x - x_0}$$



Exemplo. Seja $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$, temos que $f(x) = x^2 + 5x$

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{(9 + 15) - (1 + 5)}{3 - 1} = \frac{24 - 6}{2} = 9$$

$$f'(x) = 2x + 5;$$

$$f'(c) = 2c + 5$$

$$f'(c) = 9 \rightarrow 2c + 5 = 9 \rightarrow 2c = 4 \rightarrow c = 2$$

Teorema. *Se para todo $x \in (a, b)$ tivermos $f'(x) > 0$, então f(x) é crescente em todo intervalo (a,b).*

Escolhem-se x_1 e $x_2 \in (a, b)$, $x_2 > x_1$. Se $\exists f'(x)$ em (a, b) então também $\exists f'(x) \in]x_1, x_2]$, então pelo teorema 6.1 $\exists \subset \in (x_1, x_2)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Por hipótese $f'(c) > 0$. Portanto:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

Levando em conta que $x_2 > x_1$, então $x_2 - x_1 > 0$ e $f(x_2) - f(x_1) > 0$ e $f(x_2) > f(x_1)$. Então $f(x)$ será crescente em (a,b).

Se $\forall x \in (a, b)$ tivermos $f'(x) < 0$, então $f(x)$ será decrescente no intervalo (a,b).

Exemplo. $f(x) = x^2 - 4x$

$$f'(x) = 2x - 4$$

A função é decrescente para $x \in (-\infty, 2)$ e crescente para $(2, \infty)$, como ela é contínua para x=2, então concluímos que x=2 é o ponto de mínimo.

6.1 Máximos e mínimos por meio da segunda derivada

Se c interior a D é máximo ou mínimo, a tangente ao gráfico de$f(x)$ é horizontal, consequentemente $f'(c) = 0$. Como saber se c é ponto de máximo ou mínimo? C_0 é max, então nas vizinhanças de c_0 a função é côncava para baixo, $f''(c) < 0$. Analogamente, sendo c_1 um ponto de mínimo, então nas vizinhanças de c_1 a função é côncava para cima e, portanto, $f''(c_1) > 0$

Exemplo. Encontre os pontos de máximo ou mínimo da função

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2\frac{5}{2} + 4x + 3$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 10$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$$

$f(x)$ é crescente em $(-\infty, 1)$ e $(3, +\infty)$ e decrescente em (1,3). Como $f(x)$ é contínua em 1 e 3, então 1 é máximo relativo e 3 é ponto de mínimo relativo. Se restringirmos o domínio para [0,5]:

$$f(0) = 10, f(1) = \frac{34}{3}, f(3) = 10ef(5) = \frac{50}{3}$$

x=5 é um ponto de máximo absoluto e x=0 e x=3 são mínimos absolutos.

Exemplo. Ex: $f(x) = \frac{1}{x^2}; f'(x) = \frac{-1}{2x^3}$

$f(0)\nexists x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ não é contínua para x=0

Ex:

$$C = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 10x + 20$$

Cada unidade é vendida a 31. Qual a quantidade que deve ser produzida e vendida para dar o máximo lucro mensal?

$$\Pi = RT - CT = 31x - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 10x - 20$$

$$\Pi = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 21x - 20$$

$$\Pi' = -x^2 + 4x + 21$$

Π é crescente (-3,7), x=7 é o máximo absoluto.

6.2 Concavidade e Ponto de Inflação

Definição. Dizemos que o gráfico de uma função$f(x)$ derivável é côncavo para cima no intervalo (a, b) se $\forall x \in (a, b)$ o gráfico da função neste intervalo (exceto o ponto de abscissa x) permanece acima da tangente ao gráfico no ponto de abscissa x.

A primeira derivada mede a taxa de variação da função, a segunda derivada mede a taxa de variação da primeira derivada. Se $f''(x) > 0 \forall x \in (a, b)$ o gráfico de $f(x)$ é côncavo para cima em *[a,b]*. Se $f''(x) < 0 \forall x \in (a, b)$ o gráfico de $f(x)$ é côncavo para baixo em [a,b]. Para que c seja ponto de inflexão $f''(x) < 0$ para $x<c$ e $f''(x) > 0$ para $x>c$, ou então $f''(x) > 0$ para $x<c$ e $f''(x) < 0$ para $x>c$. Nessas condições $f''(c) = 0$, pois $f''(x)$ muda de sinal em c.

Exemplo. Ex: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x - 10$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 4$$

A concavidade da função derivada é voltada para cima pois *a=3* ou seja *a>0*. As raízes são: $x \approxeq 0.367$ e $x \approxeq 3.67$. Podemos dizer que: $f\ (x)$ assume valores negativos quando:$0.367 < x < 3.67$. Se x estiver fora desse intervalo os valores da função derivada serão positivos. Ao tomarmos a segunda derivada teremos que:

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$6x - 12 = 0$$

$$x = 2$$

Ou seja, *x=2* é um ponto de inflexão onde a função cúbica troca de concavidade. Se avaliarmos a segunda derivada nas raízes obtidas em $f^{'}\ (x)$ veremos que $f^{''}\ (3.67) > 0$ e $f^{''}\ (0.367) < 0$. Ou seja 3.67 pode ser um candidato a mínimo de $f(x)$ e *0.367* um candidato a máximo. Se aplicarmos esses valores em $f(x)$ teremos que $f(0.367) = -9.21$ e $f(3.67) = -26.7$.

6.3 Estudo completo de uma função

Os elementos necessários para tal fim constam do roteiro a seguir:

a) Determinação do domínio

b) Determinação das interseções com os eixos quando possível

c) Determinação dos intervalos de crescimento e decrescimento e de possíveis pontos de máximo e de mínimo

d) Determinação dos intervalos em que a função é côncava para cima ou para baixo e de possíveis pontos de inflexão

e) Determinação dos limites extremos do domínio e de possíveis assíntotas.

f) Determinação dos limites laterais nos pontos de descontinuidade (quando houver) e possíveis assíntotas.

Exercício. Faça o estudo completo da função $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 5$. Temos:

7 Integrais

Desejamos obter uma $f(x)$ tal que $f'(x) = g(x)$. Dizemos que $f(x)$ é uma primitiva de $g(x)$. Seja $g(x) = 2x$, devemos achar uma função $f(x)$ tal que $f'(x) = 2x$. Esse procedimento é chamado de integração. É claro que $f(x) = x^2$ é uma solução, mas não a única, pois se $f_1(x) = x^2 + 5$, então $f_1'(x) = 2x = g(x)$. Se $f_1(x)$ for outra primitiva de $g(x)$, então $f_1'(x) = g(x)$, logo $f'(x) - f_1'(x) = 0$. Daqui segue-se que $[f(x) - f_1'(x)]' = 0$, ou seja, $f(x) - f_1'(x) = C$, em que C é uma constante. Em resumo, se $f(x)$ e $f_1(x)$ forem duas primitivas de $g(x)$, então elas diferem por uma constante, isto é, $f_1(x) = f(x) + C$.

Definição. A integral definida de $g(x)$ é determinada pelo símbolo $\int g(x)dx$ a uma primitiva qualquer de $g(x)$ adicionada a uma constante arbitrária C. Assim:

$$\int g(x)dx = f(x) + C$$

Em que $f(x)$ é uma primitiva de $g(x)$, ou seja, $f'(x) = g(x)$. Exemplo:

$$\int 2xdx = x^2 + c$$

Exemplo.

1. $$\int 3x^2dx = x^3 + c, \text{ pois } (x^3)' = 3x^2$$

2. $$\int 5dx = 5x + c, \text{ pois } (5x)' = 5$$

3. $$\int e^xdx = e^x + c, \text{ pois } (e^x)' = e^x$$

7.1 Principais Regras de Integração

As integrais indefinidas das principais funções decorrem imediatamente das respectivas regras de derivação:

a) Se $n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq -1$, então $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, pois a derivada de $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ é x^n.

b) $\int \frac{1}{x}dx = lnx + c$, para $x > 0$, pois a derivada do $lnx = \frac{1}{x}$. Se $x < 0$, podemos escrever $ln|x| + c$.

c) Para qualquer real $\alpha \neq -1$, $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ $(x > 0)$.

d) $\int cosxdx = senx + c$, pois a derivada do $senx$ é $cosx$.

e) $\int senxdx = -cosx + c$, pois a derivada do -$cosx$ é $senx$.

f) $\int e^xdx = e^x + c$, pois a derivada de e^x é e^x.

g) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + c$, pois a derivada de arctgx é $\frac{1}{1+x^2}$

h) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsenx + c$, pois a derivada de arcsenx é $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, para $-1 < x < 1$.

i) $\int e^{kx} = \frac{e^{kx}}{k} + c$;

j) $\int dx = x + c$

7.2 Propriedades Operatórias

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx \text{ (P1)}$$

$$\int (f_1(x) - f_2(x))dx = \int f_1(x)dx - \int f_2(x)dx \text{ (P2)}$$

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \text{ (P3)}$$

Exemplo. 1.n

$$\int \frac{(x^2 - 3x + 5)}{x^2}dx = \int dx - 3\int \frac{1}{x}dx + 5\int \frac{1}{x^2}dx$$

$$x - 3ln(x) + \frac{5}{x} + c$$

Exemplo. 1.q

$$\int (3e^x + x^3)dx = 3\int e^x dx + \int x^3 dx$$

$$3e^x + \frac{x^4}{4} + c$$

Exercício. Mostre que $\int 2^x dx = \frac{2^x}{ln2} + c$

A regra é :

$$\int a^{kx} = \frac{a^{kx}}{klna} + c$$

$$g(x) = 2^x$$

$$g'(x) = ln2.2^x$$

$$\frac{g'(x)}{ln2} = g(x)$$

$$\frac{1}{ln2}\int g'(x)dx = \int g(x)dx$$

$$\frac{g(x)}{ln2} = \int g(x)dx$$

7.3 Integral definida

Seja $f(x)$ uma função e $g(x)$ uma de suas primitivas, portanto

$$\int f(x)dx = g(x) + c$$

A integral definida de $f(x)$ dá-se entre os limites de a e b, como a diferença $g(b) - g(a)$ e indicamos simbolicamente:

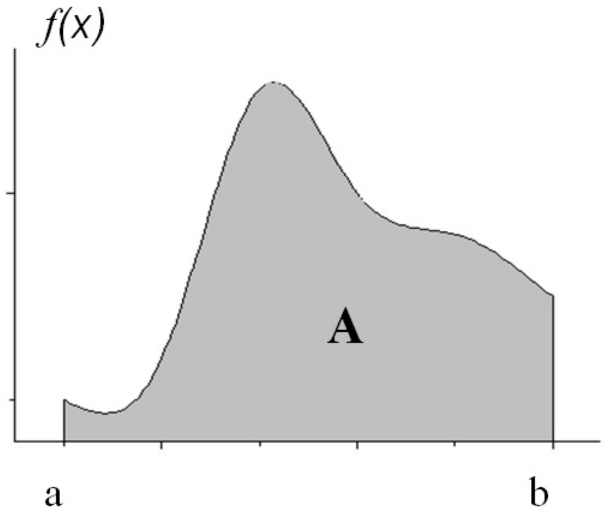
$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a) \rightarrow \text{ Teorema Fundamental do Cálculo}$$

Pode-se indicar como $[g(x)]_a^b$

Exemplo. Ex: 7.3

$$\int_2^5 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_2^5 + c = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = \frac{117}{3}$$

Significado geométrico: Seja $f(x)$ uma função contínua não negativa definida num intervalo $[a, b]$. A integral definida $\int_a^b f(x)dx$ representa a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x)$, o eixo x e as verticais que passam por a e b.



$$f(x) = x^2$$

$$A = \int_1^3 x^2 dx$$

$$[\frac{x^3}{3}]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

Se $f(x)$ for negativa no intervalo $[a, b]$ a área A é dada por:

$$A = \int_b^b f(x)dx$$

Exemplo. Ex. 7.7

$$f(x) = x^2 - 3x$$

$$A_1 = -\int_0^3 (x^2 - 3x)dx = -[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}]_0^3 = \frac{9}{2}$$

$$[\frac{27}{3} - 3\frac{9}{2}] = [\frac{0}{3} - \frac{0}{2}]$$

$$-[9\frac{(1-3)}{2}] \to -9\frac{(2-3)}{2} = \frac{9}{2}$$

$$A_2 = \int_3^4 (x^2 - 3x)dx = [\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}]_3^4 = \frac{11}{6}$$

$$A_1 + A_2 = \frac{19}{3}$$

7.4 Integrais impróprias

Suponha que um dos extremos da nossa integral definida seja $\int_a^\infty f(x)dx$. Nesse caso, por definição:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Desde que o limite exista e seja finito. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ então:

$$\int_2^\infty f(\frac{1}{x^2})dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x^2}dx$$

$$\lim_{b\to\infty}[-\frac{1}{x}]_2^b = \lim_{b\to\infty}[-\frac{1}{b} + \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$$

A área destacada representa a integral $\int_2^\infty f(\frac{1}{x^2})dx$

Analogamente, definem-se:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_k^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

desde que existam nas integrais para c. Essas integrais são utilizadas em estatística para calcularmos as probabilidades como área de um gráfico de uma função densidade de probabilidade.

i) $f(x) \geq 0 \forall x$

ii)$\int_{\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Exemplo. O tempo em minutos entre a passagem de carros em uma estrada é dada pela seguinte função $f(x) = 2e^{-2x}$ para $x \geq 0$. A probabilidade de um carro passar em 15 segundos é calculada do seguinte modo:

$$P = \int_{0}^{0,25} 2e^{-2x}dx = -e^{2x} \int_{0}^{0,25} -(-e^{0}) = -0,6 + 1 \cong 0,4$$

7.4.1 A integral definida (somas parciais)

Se um intervalo $[a, b]$ é dividido em n subintervalos $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ e assim por diante, tal que retângulos são construídos tal que a altura de cada um é igual ao menor valor da função no subintervalo, então a soma das áreas dos retângulos $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ é chamada de soma de Riemann. Se o número de subintervalos aumenta tal que $n \to \infty$ cada subintervalo torna-se infinitesimal $\Delta x_i = dx_i = dx$ e a área sobre a curva pode ser matematicamente expressa

$$A = \lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

7.5 Teorema fundamental do cálculo

O valor numérico de uma integral definida de uma função contínua $f(x)$ no intervalo a a b é dada pela integral indefinida $F(x) + c$, valorada no limite superior da integração b, menos a mesma integral indefinida valorada no limite inferior de integração a. Se c é comum para ambas, a constante de integração é eliminada na subtração.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(x)|_{a}^{b} = F(b) - F(a)$$

7.6 Integrais impróprias e a regra do L'Hopital

Explicaremos esse tópicos utilizando dois exemplos:

Exemplo. 1:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+7} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x+7} \Rightarrow \lim_{b\to\infty} \int \frac{du}{u} = (ln|u| + c)|_1^b$$

$$u = x + 7$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$$

Como $b \to \infty$, $ln|b+7| \to \infty$. A integral diverge e não tem significado. $\lim_{x\to\infty}(ln|b+7| - ln|1+7|)$

Exemplo. 2

$$\int_1^{\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\text{Seja } u = x^2+1, \frac{du}{dx} = 2x, \frac{du}{2x} = dx$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{2x}{u^2} . \frac{du}{2x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b u^{-2} du = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{u}|_1^b$$

$$-\frac{1}{(x^2+1)}\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{2}\right]$$

$$-\frac{1}{b^2+1} \to 0,$$

Então a integral converge para $\frac{1}{2}$.

7.7 Excedente do consumidor e do produtor

Dadas das funções

$$f(q) = 30 - q \text{ (demanda)}$$

$$f(q) = q^2 + 10 \text{ (oferta)}$$

Vamos calcular os excedentes do consumidor e produtor

Equilíbrio

$$30 - q = q^2 + 10$$

$$q^2 + q - 20 = 0$$

$$q = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4.1.(-20)}}{2.1}$$

$$q = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2}$$

$$q_1 = \frac{-1 - 9}{2} = -5$$

$$q_2 = \frac{-1 + 9}{2} = 4$$

$$q = 4, f(4) = 26 \text{ (Demanda) e } f(4) = 26 \text{ (Oferta)}$$

$$EC = \int_0^4 (30 - q)dq - 26.(4)$$

$$EC = 30q\Big|_0^4 - \frac{q^2}{2}\Big|_0^4 - 104$$

$$EC = 120 - 8 - 104 = 8$$

$$EP = 4.26 - \int_0^4 (q^2 + 10 = 104 - \frac{q^3}{3}\Big|_0^4 + 10q\Big|_0^4$$

$$EP = 104 - (\frac{64}{3} + 10) \cong 42,7$$

7.8 Integração por substituição

Seja a diferenciável em relação a x e $g(u)$ uma função composta, temos:

$$u = f(x)$$

$$g(u) = g(f(x))$$

$$\frac{dg(u)}{dx} = \frac{dg(u)}{du}.\frac{du}{dx} \to \frac{dg(f(x))}{df(x)}.\frac{df(x)}{dx} = f(u).\frac{du}{dx}$$

$$\int (f(u).\frac{du}{dx})dx = g(u) + c \to \int f(u)du = g(u) + c$$

Exemplo. 32.a

$$\int \frac{dx}{4+3x} \quad u = 4+3x$$

$$\frac{du}{dx} = 3 \to \frac{du}{3} = dx$$

$$\int \frac{du}{3du} = \frac{1}{3}ln|u| = \frac{1}{3}ln|4+3x|$$

Exemplo. 32.e

$$\int e^{2x+3}dx$$

$$u = 2x+3, \frac{du}{dx} = 2 \to \frac{du}{2} = dx$$

$$\int e^u.\frac{du}{2} = \frac{1}{2}.e^u + c$$

Exemplo. Ex. 32.j

$$\int (x^2+3)^4.2xdx$$

$$x^2+3 = u, \frac{du}{dx} = 2x \to dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int u^4.2x.\frac{du}{2x} \to \frac{u^5}{5} + c = \frac{(x^2+3)^5}{5} + c$$

7.9 Integração por partes

Sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções deriváveis, então pela regra da derivada do produto:

$$[u(x).v(x)]' = u'(x).v(x) + v'(x).u(x)$$

E consequentemente:

$$[u(x).v(x)]' - u'(x).v(x) = v'(x).u(x)$$

Integrando ambos os lados, temos:

$$\int [u(x).v(x)]'dx - \int u'(x).v(x)dx = \int v'(x).u(x)dx$$

$$[u(x).v(x) - \int u'(x).v(x)dx] = \int u(x).v'(x)$$

Exemplo. Ex. 7.13

$$\int x.e^x dx$$

$$u(x) = x, u'(x) = 1$$

$$v(x) = e^x, v'(x) = e^x$$

$$x.e^x - \int 1.e^x dx = \int x.e^x dx$$

$$x.e^x - \int 1.e^x dx = x.e^x - e^x + c$$

Exemplo. Ex. 7.14

$$\int lnx.dx$$

$$u = lnx, u' = \frac{1}{x}$$

$$v = x, v' = 1$$

$$xlnx - \int \frac{1}{x} x dx = \int lnx.dx$$

$$xlnx - \int dx = xlnx - x + c$$

Exemplo. Ex. 35.e

$$\int x^2.e^x dx$$

$$u = e^x, u' = e^x$$

$$v = x^2, v' = 2x$$

$$x^2.e^x - \int e^x 2x = \int x^2.e^x dx$$

Tem-se novamente que integrar por partes:

$$x^2.e^x - \int e^x 2x$$

$$u = 2x, u' = 2$$

$$v = e^x, v' = e^x$$

$$x^2.e^x - [e^x.2x - \int 2.e^x.dx] = \int x^2.e^x dx$$

$$\Rightarrow x^2.e^x - e^x.2x + 2.e^x + c$$

$$e^x[x^2 - 2(x+1)] + c$$

7.10 Integração de funções racionais

$$\frac{N(x)}{Q(x)} = \frac{x+1}{x^3 - x^2}$$

Temos:

$$\frac{x+1}{x^3 - x^2} = \frac{x+1}{x^2(x-1)} = \left[\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x-1}\right]$$

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{x.A_1(x-1) + A_2(x-1) + A_3x^2}{x^2(x-1)}$$

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{(A_1 + A_3).x^2 + (A_2 - A_1)x + A_2}{x^2(x-1)}$$

$$A_1 + A_3 = 0, A_2 - A_1 = 1, -A_2 = 1$$

$$A_3 = 2, A_1 = -2$$

$$\frac{x+1}{x^3-x^2} = \frac{-2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}$$

$$\int \frac{-2}{x}dx - \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{2}{x-1}dx$$

$$-2ln(x) + \frac{1}{x} + 2ln(x-1) + c$$

8 Matrizes e Determinantes

Definição. Matriz

Toda a tabela de números dispostos em filas horizontais (ou linhas) e verticais (ou colunas). Se a tabela tiver m linhas e n colunas, dizemos que a matriz é retangular do tipo $m \times n$.

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo. A letra maiúscula A indica o nome da matriz. Os elementos de uma matriz são expressados entre os colchetes. Cada elemento da matriz é representado por uma letra minúscula sendo referenciado por dois índices O primeiro desses índices representa a linha (i) e o segundo a coluna (j). Vejamos o exemplo da matriz A:

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{1}{2} & 4 \end{bmatrix}$$

Definição. Matriz quadrada

Uma matriz quadrada possui o número de linhas igual ao número de colunas.

Exemplo.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Numa matriz quadrada os elementos b_{ij}tais que $i = j$ são chamados de elementos da diagonal principal. Os elementos b_{ij} tais que $i + j = n + 1$ (n é a ordem da matriz) são chamados de elementos da diagonal secundária.

8.1 Alguns tipos de matrizes

Nula: Todos os seus elementos são igual a zero. Assim, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Simétrica: Uma matriz A é simétrica se $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Antissimétrica: Possui os elementos da diagonal principal nulos e os elementos dispostos simetricamente tem o sinal trocado.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 6 \\ 5 & 0 & 10 \\ -6 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonal: É uma matriz quadrada cujos os elementos que não pertencem a diagonal principal valem zero. Isto é, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Exemplo. :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definição. (Identidade) Toda a matriz quadrada cujos elementos da diagonal principal valem 1 e os restantes valem zero.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição. (Transposta de uma matriz) Se $A_{m \times n}$, define-se a matriz transposta de A por A^T, a matriz cujas colunas são ordenadamente iguais às linhas de A, isto é, se a_{ij} é um elemento genérico de A, e b_{ij} é um elemento genérico de B, então $b_{ij} = a_{ij} \forall i, j$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} \text{então: } A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Se A é simétrica, então $A = A^T$ e $(A^T)^T = A$

8.2 Operações com matrizes

8.2.1 Adição

Sejam A e B duas matrizes $m \times n$, a soma das matrizes $A+B$ é a matriz C cujos elementos são as somas dos elementos correspondentes de A e B, isto é: $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} \forall i, j$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$
$$A \quad + \quad B \quad = \quad C$$

Definição. (Matriz Oposta). Dada a matriz A do tipo $m \times n$ que possui elementos a_{ij}, chamamos $-A$ a matriz oposta de $(B = -A)$ cujos elementos $b_{ij} = -a_{ij}$

Propriedades da adição de matrizes

Sejam A, B e C matrizes quaisquer com dimensão $m \times n$. São validadas as seguintes propriedades:

1. Comutativa: $A + B = B + A$
2. Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. Existência do elemento neutro: $A + 0 = A$
4. Existência do elemento oposto: $A + (-A) = 0$
5. $(A + B)^T = A^T + B^T$

8.2.2 Subtração

Sejam A e B matrizes $m \times n$, chamamos de diferença entre A e B $(A - B)$ a soma de A com a oposta de B. Isto é: $A - B = A + (-B)$

Definição. (Multiplicação por escalar) Dada a matriz A e o número real r, obtemos o produto $r.A$ multiplicando todas as entradas de A por r.

$$r = 10\; A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} rA = 10 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix}$$

$$rA = 10 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix}$$

8.2.3 Multiplicação de matrizes

Seja $A_{m \times p}$e $B_{p \times n}$, o produto A por B (AB) é a matriz $C_{m \times n}$ cujo elemento genérico c_{ij} é dado por:

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + ... + a_{ip}.b_{pj}$$

Observação. Observe que devemos multiplicar os elementos da linha i de A pelos da coluna j de B, elemento por elemento e realizar a soma dos seus produtos. Além disso, só é possível realizar a multiplicação de A por B se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.

Exemplo. .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1.(2) + 3.1 & 1.(7) + 3.(6) \\ 4.(2) + 2.1 & 4.(7) + 2.(6) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 10 & 40 \end{bmatrix}$$

A multiplicação matricial não é comutativa, ou seja, $AB \neq BA$

Seja $A \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 13 & 8 \end{bmatrix}$$

Propriedades da multiplicação

Sejam A, B e C matrizes de tipos convenientes de modo que existam os produtos e as somas indicadas. São válidas as seguintes propriedades:

1. Associativa: $(AB).C = A.(BC)$
2. Distributiva: $A.(B + C) = AB + AC$ $(B + C).A = BA + CA$
3. Se K é um escalar, então $(KA).B = A.(KB) = K(AB)$
4. Se A e B são $m \times n$ então: $A.I_n = A$ e $I_m.B = B$
5. $(AB)^T = B^T.A^T$

8.3 Determinantes

O determinante de uma matriz é usado principalmente para a resolução de sistemas de equações lineares. Em Economia, o determinante de uma matriz nos fornece uma informação extremamente importante para os problemas de otimização. Vejamos alguns casos particulares:

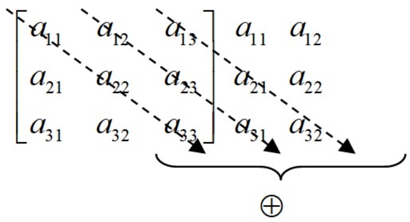
Seja $A_{2\times2}$ então o determinante de A pode ser definido como o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

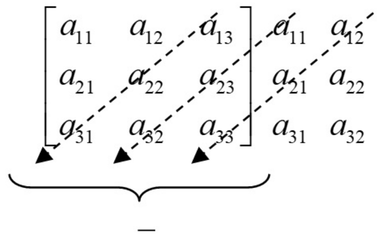
Seja $A_{3\times3}$, usaremos aqui a regra proposta pelo matemático **J.P. Sarrus:**

Escrevemos a matriz e repetimos a direita as duas primeiras colunas. Seguindo as setas, obtemos os termos precedidos pelo sinal de +:



$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{23}a_{21}a_{32}$$

Para os produtos que possuem o sinal negativo:



$$-(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Observação. A Regra de Sarrus funciona exclusivamente para matrizes 3×3.

Exemplo. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$(3.4.1) + (2.2.1) + (1. - 2.1) - ((1.4.1) + 2. - 2.3 + 12.2.1)$$

$$(12 + 4 - 2) - [4 - 12 + 2]$$

$$14 + 6 = 20$$

8.3.1 Cofator

Seja M uma matriz quadrada de ordem n ($n \geq 2$) e a_{ij}, e indicamos por A_{ij}, o produto de $(-1)^{i+j}$ pelo determinante da matriz que se obtém suprimindo-se a linha i e a coluna j de M. Seja $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. O cofator de $a_{21} = 5$ é igual a $(-1)^{i+j} = 2 + 1 = 3$ vezes o determinante da matriz M.

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = (-1).|4| = -4$$

Definição. Podemos definir $M_{ij} = detA_{ij}$ como o *(i,j)-ésimo* menor de A e o escalar $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ o *(i,j)-ésimo* ***cofator*** de A. Usando o conceito de cofatores o determinante de uma matriz $A_{n\times n}$ pode ser calculado do seguinte modo:

$$detA = a_{11}c_{11} + ... + a_{1n}c_{1n}$$

$$detA = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + ... + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}$$

Exemplo. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -5 \end{bmatrix} = 1A_{11} + 2A_{21} + 3A_{32} + 4A_{41}$

$$(-1)^{1+1}(1)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$+(1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix} + (1)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1.(20) + 2(18 + 32 - 8 + 60) + (27 + 8 - 12)(+15) - 1(36 - 6)$$

$$= 20 - 204 + 38 - 30 = -176$$

Alternativamente, se $n \geq 2$ o determinante de A é a soma dos produtos dos elementos da primeira coluna pelos seus respectivos cofatores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21} + a_{31}c_{31} + a_{41}c_{41}$$

$$1.(-1)^{1+1}. \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+1}. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$
$$+3(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} + 4(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$20 + 4 - 144 - 56 = -176$$

Teorema. *Teorema de Laplace*

O determinante de uma matriz de ordem $n \geq 2$ é igual a soma dos produtos de uma fila (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores.

Exemplo. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ = Escolhendo a linha 3:

$$2.(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \\ 6 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2.(26) = 52$$

28.c

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 2.(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 2.(12 - 0) = 24$$

9 Sistema de Equações Lineares

Podemos pensar num sistema linear num conjunto de equações cujas incógnitas possuem expoente igual a 1. O exemplo mais simples é aquele que abordamos nas aulas de introdução a economia, isto é, um sistema de oferta e demanda:

$$p + 2x = 110 \text{ - Equação da Oferta}$$

$$p - x = 20 \text{ - Equação da Demanda}$$

O ponto de equilíbrio do mercado é aquele em que essas duas retas se interseccionam.

Definição. Equação Linear

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \text{ ou seja } a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

Sendo $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ é denominado de termo independente.

Definição. Sistema Linear

É um conjunto de equações lineares nas mesmas incógnitas.

$$x + 2y + 3z = 14$$

$$x - 2y + z = 1$$

$$3x + 4y - z = 7$$

Exemplo. Sistema homogêneo

$$x + 2y + z = 0$$

$$3x - y + z = 0$$

Esse sistema é dito homogêneo porque todos os termos independentes são nulos.

Definição. (Solução de um sistema linear). Define-se o conjunto solução de um sistema linear toda sequência de números $\alpha_i \forall i = 1, ..., n \in S$ que colocados respectivamente nos lugares de x_i, $\forall_i = 1, ..., n$ fazem que todas as equações se transformem em sentenças verdadeiras.

Exemplo. .

$$x + y = 7$$

$$x - y = 3$$

O par ordenado (5,2) é uma solução desse sistema.

Classificação:

1. Se um sistema possui ao menos uma solução ele pode ser classificado como possível, caso contrário diremos que é impossível ou indeterminado;

2. Se o sistema for possível e tiver apenas uma solução, chamaremos o sistema de determinado;

3. Se for possível e tem $n \geq 2$ soluções o chamaremos de indeterminado.

Observação. Todo o sistema homogêneo é possível, pois admite sempre a solução nula.

Exemplo. .

$$x + y = 10$$

$$2y = 6$$

$$\underset{2\times 2}{\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}} \underset{2\times 1}{\overset{x}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}} = \underset{2\times 1}{\overset{b}{\begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}}}$$

Exemplo. A possui posto = 2 e o posto de A = nº de incógnitas

$$x + y = 1$$

$$x + y = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

É claramente impossível.

Exemplo. .

$$x - y = 0$$

$$2(x - y) = 0$$

Possível e indeterminado, pois admite várias soluções sendo $(x = y)$.

9.1 Regra de Cramer

Considere o seguinte sistema de equações:

$$ax + by = m$$

$$cx + dy = n$$

Utilizamos o método da adição para solucionarmos esse sistema. Multiplicaremos a primeira equação por d e a segunda por $-b$, e obteremos:

$$adx + dby = dm$$

$$-bcx - bdy = -bn$$

Somando as duas equações teremos:

$$x(ad - bc) + y(db - bd) = dm - bn$$

$$x = \frac{dm - bn}{ad - bc}$$

$$y = \frac{an - mc}{ad - bc}$$

Lembrando a definição do determinante de ordem 2:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} m & b \\ n & d \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \text{ e } y = \frac{\begin{bmatrix} a & m \\ c & n \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$$

Assim observamos que:

- O denominador das frações é o determinante da matriz dos coeficientes $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, simbolicamente indicado por D;
- O numerador da fração x é o determinante da matriz dos coeficientes $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ substituindo-se a coluna dos coeficientes de x pela coluna dos termos independentes. Esse determinante é indicado por D_x. Assim: $D_x \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}$.

- O numerador da fração y é o determinante da matriz dos coeficientes substituindo-se a coluna dos coeficientes de y pela coluna dos termos independentes. $D_y = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}$ e $y = \frac{D_y}{D}$

Teorema. ***(Regra de Cramer)*** *Um sistema linear de n equações com n incógnitas e seja D o determinante da matriz dos coeficientes. Se $D \neq 0$, então o sistema será determinado, e o valor de cada incógnita é dado por uma fração que tem D no denominador e, no numerador o determinante da matriz dos coeficientes, substituindo-se a coluna dos coeficientes dessa incógnita pela coluna dos termos independentes do sistema.*

Exemplo. a)

$$x + 2y = 5$$

$$3x - y = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$detA = -7$

$$D_x = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -9$$

$$x = \frac{-9}{-7} = \frac{9}{7}$$

$$D_y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -13$$

$$y = \frac{= 13}{-7} = \frac{13}{7}$$

9.2 Sistemas Escalonados

A regra de Cramer é simples e extremamente recomendada para sistemas com 3 equações ou 3 incógnitas. O uso desse teorema não é recomendado para sistemas maiores devido a complexidade dos cálculos envolvidos no processo de solução. O método do escalonamento foi desenvolvido por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e aprimorado por Wilhelm Jordan (1842-1899). Consideremos um sistema linear em que, cada equação, há pelo menos um coeficiente não nulo. Diremos que o sistema está na forma escalonada se o número de coeficientes nulos antes do primeiro coeficiente não nulo aumenta para a equação.

Exemplo. 1

$$x + 3y + z = 6$$

$$y - z = 7$$

$$2z = 5$$

Esse sistema está na forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Exemplo. 2

$$x + 2y - z = 10$$

$$4y + 5z = 6$$

$$y - z = 0$$

Esse sistema não está na forma escalonada.

9.3 Escalonando um Sistema

Podemos dizer que dois sistemas são equivalentes se eles possuem a mesma solução. O que faremos é transformar um sistema S em outro equivalente na forma escalonada. Para isso, usaremos os dois teoremas a seguir:

Teorema. *Multiplicando-se os membros de uma equação qualquer de um sistema S por um número $k \neq 0$, obteremos um sistema S' equivalente a S.*

Teorema. *Substituindo-se uma equação de um sistema S pela soma membro a membro dela com outra, obteremos um novo sistema S' equivalente a S.*

Não existe uma regra de bolso ou receita de bolo para escalonarmos um sistema. Você deve observar as equações e verificar quais delas são mais fáceis de serem simplificadas. Vejamos o seguinte exemplo.

$$x + 2y + z = 9 \ (1)$$

$$2x + y - z = 3 \ (2)$$

$$3x - y - 2z = -4(3)$$

Substituímos a eq. (2) pela soma dela com a primeira multiplicada por -2.

$$x + 2y + z = 9$$

$$-3y - 3z = -15$$

$$3x - y - 2z = -4$$

Substituímos a terceira equação pela soma dela com a primeira multiplicada por -3:

$$x + 2y + z = 9$$

$$-3y - 3z = -15$$

$$-7y - 5z = -31$$

Dividimos a segunda equação por -3:

$$x + 2y + z = 9$$

$$y + z = 5$$

$$-7y - 5z = -31$$

Substituímos a eq. (3) pela soma dela com a segunda multiplicada por 7:

$$x + 2y + z = 9$$

$$y + z = 5$$

$$2z = 4$$

Exemplo. 2

$$x + y + z = 4 \text{ L(1)}$$

$$3x + 4y + 2z = 10 \text{ L(2)}$$

$$2x - 3y + 7z = 18 \text{ L(3)}$$

Substitua L_2por $L_2 - 3.L_1$

$$x + y + z = 4$$

$$y - z = -2$$

$$2x - 3y + 7z = 18$$

Substitua L_3 por $L_3 - 2.L_1$

$$x + y + z = 4$$

$$y - z = -2$$

$$-5y + 5z = 10$$

Substitua L_3por $L_3 + 5L_2$

$$x + y + z = 4$$

$$y - z = -2$$

$$0y + 0z = 0$$

A última equação é satisfeita para quaisquer valores de x, y e z e pode ser suprimida do sistema. Como o número de equações é menor que o número de incógnitas o sistema é indeterminado.

Exemplo. 3

$$2x - y + 4z = 1 \ (L_1)$$

$$2x + 7y + 3z = 0 \ (L_2)$$

$$16y - 2z = 3 \ (L_3)$$

Substitua L_2 por $L_2 - L_1$

$$2x - y + 4z = -1$$

$$8y - z = 1$$

$$16y - 2z = 3$$

Substitua L_3por $L_3 - 2.L_2$

$$2x - y + 4z = 1$$

$$8y - z = 1$$

$$0y + 0z = 1$$

A última equação não é satisfeita para nenhum valor de x, y e z então podemos concluir que o sistema é impossível.

Podemos solucionar o sistema fazendo o seguinte procedimento:

Exemplo. 4.b

$$x - y + 2z = 2$$

$$2x + y - z = 3$$

$$4x - y + z = 3$$

Substitua L_2por $L_2 - 2L_1$

$$x - y + 2z = 2$$

$$3y - 5z = -1$$

$$4x - y + z = 3$$

Substitua L_3pela $L_3 - 4L_1$

$$x - y + 2z = 2$$

$$3y - 5z = -1$$

$$3y - 7z = -5$$

Substitua L_3 por $L_3 - L_2$

$$x - y + 2z = 2$$

$$3y - 5z = -1$$

$$-2z = -4$$

O sistema está escalonado
Agora façamos o seguinte:

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right|$$

$L_3/-2$

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right|$$

$L_2 + 5L_3$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 2 & |2 \\ 0 & 3 & 0 & |9 \\ 0 & 0 & 1 & |2 \end{array}\right|$$

$L_1 + L_2 - 2L_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & |1 \\ 0 & 1 & 0 & |3 \\ 0 & 0 & 1 & |2 \end{vmatrix}$$

$S = (1, 3, 2)$

Podemos ampliar a matriz dos coeficientes para calcularmos a solução.

Definição. Matriz Inversa

Dada uma matriz A de ordem n, com determinante diferente de zero, podemos provar que existe uma única matriz B, tal que $AB = BA = I_n$. Damos a matriz B o nome de inversa de A e a indicamos por A^{-1}.

Exemplo. 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Essa matriz possui inversa, pois seu determinante (-2) é diferente de zero.

Exemplo. 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Como o determinante é diferente de zero, A possui inversa. No entanto, não conhecemos a inversa de A e podemos usar a definição de matriz inversa para calculá-la.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A.A^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a + c & 2b + d \\ 5a + 3c & 5b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2a + c = 1 \ 2b + d = 0$$

$$5a + 3c = 0 \ 5b + 3d = 1$$

$$c = 1 - 2a \ (1)$$

$$5a + 3(1 - 2a) = 0$$

$$5a + 3 - 6a = 0$$

$$3 = a$$

$$C = 1 - 2(3) = -5$$

$$d = -2b$$

$$5b + 3(-2b) = 1$$

$$d = -2.(-1) = 2$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Note que $A.A^{-1} = I$

Poderíamos escrever a matriz $\hat{A}$, sendo ela, a matriz A amplificada e assim efetuarmos o escalonamento:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 5 & 3 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} = \hat{A}$$

devemos deixar o lado esquerdo de $\hat{A}$ idêntico a uma matriz identidade, Vejamos os passos:

Multiplique L_1por 0.5:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & | & 1/2 & 0 \\ 5 & 3 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Substitua L_2por $L_2 - 5.L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & | & -5/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos L_2por 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & | & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & | & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$L_1.2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$L_1 = L_1 - L_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & | & 6 & -2 \\ 0 & 1 & | & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$L_1 = L_1/2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 3 & -1 \\ 0 & 1 & | & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

9.3.1 Cálculo da matriz inversa usando cofatores

Definição. Seja $A_{n\times n}$ com determinante diferente de zero. Seja $Cof(A)$ a matriz dos cofatores de A. Dizemos que $Adj(A) = [Cof(A)]^T$, isto é, a matriz adjunta de A é a matriz transposta da de cofatores.

Teorema. *Seja $A_{n\times n}$ uma matriz não singular. Então:*

a) $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}.adj(A)$

b) *Vale a regra de Cramer. Formalmente a única solução $X = (X_1, ..., X_n)$ do sistema $A_X = b$ de tamanho $n \times n$ é: $X_i = \frac{detB_i}{detA}$ para $i = 1, ..., n$ onde B_i é a matriz A com lado direito b substituindo a i-ésima coluna de A.*

Exemplo. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $COF(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}.\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

10 Espaço n-dimensional

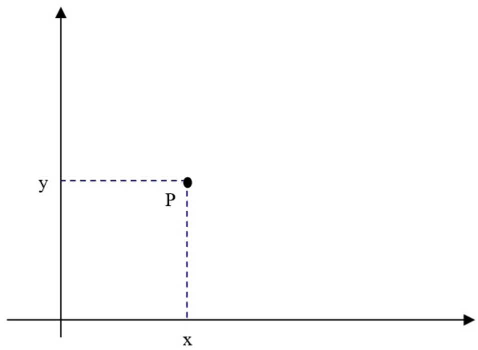
Como vimos anteriormente, observações simultâneas de duas variáveis podem ser representadas por pares ordenados. Inicialmente estudaremos o conjunto formado por todos os pares ordenados de números reais, ou simplesmente o $\mathbb{R}^2$.

Esse espaço pode ser definido do seguinte modo:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Um elemento de $\mathbb{R}^2$, isto é, um ponto P de abcissa x e ordenada y pode ser visualizado no plano cartesiano:

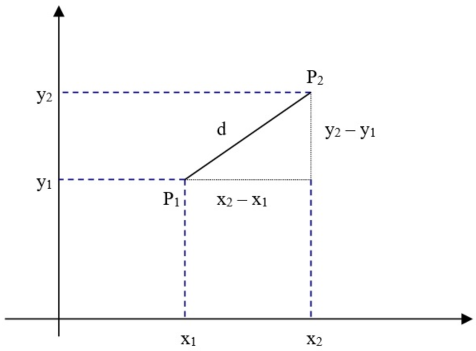


Definição. (Relação em $\mathbb{R}^2$). Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2x + 2\}$ a representação geométrica do conjunto A é uma reta. Chama-se relação binária, ou simplesmente relação no $\mathbb{R}^2$, todo subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

10.1 Distância entre dois pontos

Seja (x_1, y_1) e (x_2, y_2) dois elementos de $\mathbb{R}^2$, representados geometricamente por P_1e P_2. A distância entre eles é o número:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Suponha que desejássemos tomar a distância do ponto $P_1(x_1, y_1)$ em relação a origem. Define-se a origem como $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Usando a fórmula anterior teríamos:

$$d(P_{1,}P_0) = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2}$$

$$d(P_1, P_0) = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Definição. (Norma em $\mathbb{R}^2$). É a distância de um vetor em $\mathbb{R}^2$(ou $\mathbb{R}^n$) em relação a origem.

Propriedades

1. $||u|| \geq 0$
2. $||ru|| = |r|\ ||u||$
3. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ (desigualdade triangular)

Definição. (Produto interno) Seja $u = (u_1, u_2)$ e $v(v_1, v_2)$ dois vetores em $\mathbb{R}^2$(essa definição vale para $\mathbb{R}^n$). O produto interno euclidiano ou escalar de u e v denotado por $u.v$ é o número:

$$u.v = u_1v_1 + u_2v_2 \text{ ou seja } \sum_{i=1}^{n} u_iv_i$$

10.2 Espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$

O conjunto formado por triplas ordenadas de números reais é denominado $\mathbb{R}^3$ e é indicado $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c)|\alpha \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}$$

Todo subconjunto de $\mathbb{R}^3$é uma relação. Toda relação nesse subconjunto pode ser obtida por meio da seguinte equação:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Sendo que a, b, c e $d \in \mathbb{R}$ e a, b e c não nulos simultaneamente. Por exemplo, vejamos a equação:

$$2x + 3y + z - 6 = 0$$

$$(0,0,6) \to P_1$$

$$(0,2,0) \to P_2$$

$$(3,0,0) \to P_3$$

Para obtermos estes 3 pontos usamos sempre duas variáveis com o seu valor nulo.

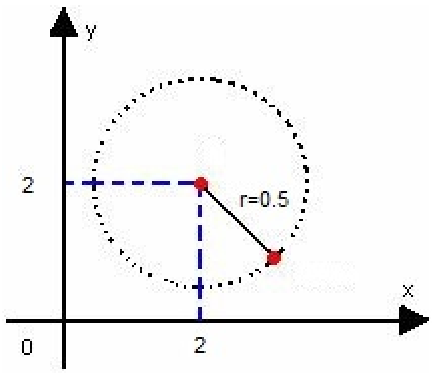
10.3 O conjunto $\mathbb{R}^n$

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, o conjunto formado pela ênuplas ordenadas (sequência de n elementos) de reais é chamado de espaço *n-dimensional* $\mathbb{R}^n$. A distância, norma e produto interno vistos anteriormente valem também (estão definidas) para o $\mathbb{R}^n$.

Definição. (Bola Aberta) Se $C \in \mathbb{R}^n$ e r é um número real positivo, chama-se de Bola Aberta de centro C e raio r ao conjunto de pontos de $\mathbb{R}^n$ cuja distância até C é menor que r.

$$B(c,r) = \{P \in \mathbb{R}|d(P,C) < r\}$$

Seja $C(2,2)$ de $\mathbb{R}^2$ e $r = 0.5$, a representação geométrica da Bola Aberta é:



Note que a fronteira não está incluída na bola aberta.

Definição. (Ponto Interior) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$, um elemento P de $\mathbb{R}^n$é chamado de ponto interior de A se existe uma bola aberta com centro P contida em A. P é um ponto interior de A se $\exists\ r > 0$, tal que $B(P, r) \subset A$.

Seja

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x < 1 \text{ e } y \leq 1\}$$

O ponto $P(0.5, 1)$ é ponto interior, mas $P(1, 1)$ não é.

Definição. (Conjunto Aberto) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. A é aberto se $\forall P \in \mathbb{R}^n$ e $P \in A$, P é um ponto interior de A

Definição. (Ponto de Fronteira) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto de A que não é interior é dominado de ponto de fronteira.

Exemplo. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq L\}$

Se *L=1*, a combinação de x^2 e y^2 ,que são iguais a 1, são pontos de fronteira de B.

11 Funções de duas variáveis

Funções são extremamente importantes para expressarmos relações entre duas ou mais variáveis. Em economia vislumbramos a relação entre a quantidade produzida e o preço de um produto por uma função de demanda, como segue:

$$q = f(p, R)$$

A função de demanda por pão (por exemplo), depende do seu preço e da renda dos consumidores. Outra função muito utilizada é aquela que tenta captar o nível de satisfação de um indivíduo ao consumir $x = (x_1, x_2)$ unidades. Note que $x \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto que representa uma cesta de consumo e pode ser definido do seguinte modo:

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0\}$$

Seja $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a seguinte função:

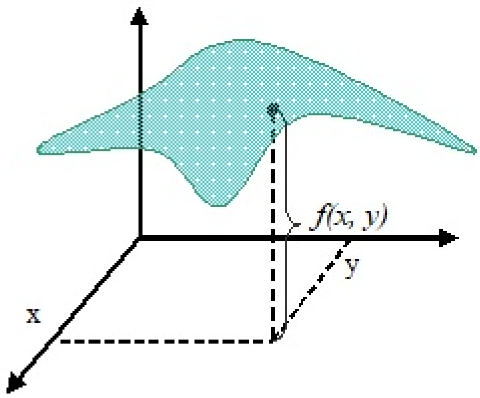
$$U(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

Esse indivíduo consome quantidades x_1e x_2 que resultam em um nível específico de satisfação. Expressamos o domínio de $U(x_1, x_2)$ como o conjunto X, pois não desejamos e nem faria sentido econômico o consumo de unidades negativas. Destaca-se que a função de utilidade "gera" um número real que mensura o nível de satisfação do consumidor.

11.1 Gráfico de função de duas variáveis

O gráfico de uma função de duas variáveis pode ser definido do seguinte modo:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x, y) \text{ e } (x, y) \in D\}$$



Vimos que o gráfico será representado no espaço tridimensional de tal forma que a cada par (x, y) do domínio corresponda uma cota $Z = f(x, y)$. Pode ser extremamente complicado desenharmos o gráfico de uma função de duas variáveis. Uma alternativa mais simples é utilizarmos os pontos do domínio que têm a mesma cota. Tais pontos, formam uma curva denominada de curva de nível. No exemplo de $U(x_1, x_2)$ escolheríamos x_1 e $x_2$que gerassem o mesmo nível de utilidade. Suponha que $\overline{U}(x_1, x_2) = 1$, então há diversas combinações de x_1e x_2 que levam a esse nível de utilidade.

Exemplo. $\overline{U}(x_1, x_2) = 1$

$$\alpha = 0,5$$

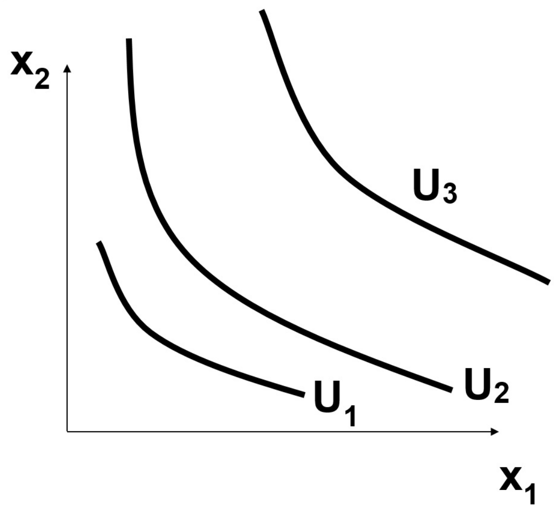
$$1 = x_1^{0,5}.x_2^{0,5}$$

$$(1)^2 = (x_1^{0,5}.x_2^{0,5})^2$$

$$1 = x_1.x_2$$

$$\frac{1}{x_2} = x_1$$

Vejamos graficamente a representação das curvas de nível:



Exemplo. Seja uma circunferência $f(x,y) = x^2 + y^2$ $c = 1,\ c = 4$ $c = 9$

$c = 1$, $x^2 + y^2 = 1 \rightarrow$ circunferência de centro (0,0) e raio 1

$c = 4$, $x^2 + y^2 = 4 \rightarrow$ circunferência de centro (0,0) e raio 2

$c = 9$, $x^2 + y^2 = 9 \rightarrow$ circunferência de centro (0,0) e raio 3

11.2 Limite e Continuidade

A noção de limite é análoga a que vimos anteriormente. O limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende ao ponto (x_0,y_0) é o número L (se existir) do qual se aproxima $f(x,y)$ quando (x,y) se aproxima de (x_0,y_0) por qualquer caminho, sem no entanto ficar igual a (x_0,y_0):

$$\lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Definição. (Continuidade) Se L é igual a $f(x_0, y_0)$, dizemos que f é contínua em (x_0, y_0), caso contrário, f é dita descontínua em (x_0, y_0).

Exemplo. $f(x, y) = x + y$

$$\lim_{(x,y)\to(3,5)} f(x, y) = 8$$

Podemos dizer que f é contínua em $(2, 3)$.

Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y + 2, & \text{se } (x, y) \neq (1, 1) \\ 6, & \text{se } (x, y) = (1, 1) \end{cases}$$

Então:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x, y) = 4 \ \neq f(1, 1) = 6$$

Portanto $f(x, y)$ não é contínua em $(1, 1)$.

Exemplo. $f(x, y) \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 2 \\ 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$

Veja se $f(x, y)$ é contínua em $(2, 1)$

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)^+} f(x, y) = 1 \text{ e } \lim_{(x,y)\to(2,1)^-} f(x, y) = 2 -> \text{Note que o limite não existe!}$$

Teorema. *São contínuas em todos os pontos do seu domínio as funções:*

a) polinomiais em x e y;

b) racionais em x e y,

$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \ \forall x, y$

$f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{xy-1} \ \forall x, y$ tais que $xy \neq 1$

Teorema. *Se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são contínuas em (x_0, y_0), então também serão contínuas em (x_0, y_0) as funções:*

a) $f(x, y) + g(x, y)$

b) $f(x, y) - g(x, y)$

c) $K.f(x, y) \ K \in \mathbb{R}$

d) $f(x, y).g(x, y)$

e) $\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \ (g(x_0, y_0) \neq 0)$

f) $af(x,y)$ $(a > 0)$

g) $logf(x,y)$ $(f(x_0,y_0) > 0)$

h) $cosf(x,y)$

i) $senf(x,y)$

12 Derivadas para funções de duas variáveis

A ideia central da derivação parcial é entendermos o comportamento de uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada uma mudança marginal em seus parâmetros. Seja $f(x_1, x_2)$ que depende de x_1e x_2, observamos o comportamento dessa função mantendo x_2 fixo e efetuando uma pequena variação em x_1. Em outras palavras, podemos mostrar essa pequena variação algebricamente:

$$x_1 + \Delta x_1 \to \text{variação em } x_1$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{\Delta x_1}$$

Pode ser chamada como a taxa média de variação de f em relação a x_1. Se existir o limite de $\frac{\Delta f}{\Delta x_1}$ quando Δx_1 tende a zero, denominamos a derivada parcial de f no ponto (x_1, x_2) em relação a x_1. Simbolicamente podemos indicar:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, x_2) \text{ ou } f_{x_1}(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = f_{x_1}(x_1, x_2) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

Exemplo. $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(4,5) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial x_2}(4,5)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(4,5) = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(4 + \Delta x_1, 5)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{2(4 + \Delta x_1) + 3.(5) - 2.(4) - 3.5}{\Delta x_1}$$

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{2\Delta x_1}{\Delta x_1} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(4,5) = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{f[4, (5 + \Delta x_2)]}{\Delta x_2} = \lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{2(4) + 3.(5 + \Delta x_2) - 2.(4) - 3.(5)}{\Delta x_2}$$

$$\lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{3\Delta x_2}{\Delta x_2} = 3$$

De modo mais simples, tome a derivada da função em relação a x_1 e considere x_2 como um termo constante:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2\forall x_1 \ ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3\forall x_2$$

Chamamos as derivadas acima de função derivada parcial. Vejamos mais exemplos:

Exemplo. 1: $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$f_x = 2x \text{ e } f_y = 2y$$

Exemplo. 2: $f(x, y) = x^3 + y^2 + 2xy$

$$f_x = 3x^2 + 2y$$

$$f_y = 2y + 2x$$

Exemplo. 3: $f(x, , y) = ln(x^2 + 2xy)$

$$f_x = \frac{1}{x^2 + 2xy}.(2x + 2y)$$

$$f_y = \frac{1}{x^2 + 2xy}.(2x)$$

Exercício. Seja $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função de demanda por batata semanalmente em um supermercado. Temos que x é o preço unitário por kg e y o preço unitário do arroz. Podemos identificar essa relação de acordo com a seguinte expressão:

$$q(x, y) = 1000 - 2x^2 + 15y$$

Desejamos calcular $\frac{\partial q}{\partial x}(3, 4)$ e $\frac{\partial q}{\partial y}(3, 4)$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -4x \text{ e } \frac{\partial q}{\partial y} = 15$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -12$$

A interpretação é a seguinte:

$\frac{\partial q}{\partial x}(3,4) = -12$ representa aproximadamente $\frac{\partial q}{\partial x}(3,4)$ para pequenos valores de Δx. Se admitirmos $\Delta x = 1$ teremos $\Delta f \cong -12$, ou seja, um aumento de uma unidade no preço do kg da batata (de 3 para 4) corresponde a uma diminuição de aproximadamente $12kg$ na demanda de batata, mantido o preço do arroz constante em 4. Podemos fazer o mesmo raciocínio para $\frac{\partial q}{\partial y}(3,4)$. Para pequenos valores de Δy, teremos $\Delta f \cong 15$. Na verdade, para qualquer variação em Δy teremos $\Delta f \cong 15$. Isto é, a um aumento de 1 unidade no preço do arroz (por exemplo $\Delta y = 1$) isso corresponde a um aumento na demanda de batata de aproximadamente 15kg, mantido tudo mais constante.

12.1 Diferencial de uma função

Seja f uma função definida de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (x_0, y_0) um ponto do seu domínio. Seja Δf a variação sofrida por $f(x,y)$ ao passarmos no ponto $(x_0 + \Delta x\ ,\ y_0 + \Delta y)$, isto é:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x\ ,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Dizemos que f é diferenciável no ponto (x_0, y_0) se Δf puder ser escrita sob a forma:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \Delta x ln_1(\Delta x, \Delta y) + \Delta y ln_2(\Delta x, \Delta y)$$

As funções $ln_i \to 0$ quando $(\Delta x, \Delta y) \to 0$.

A parcela $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}.(x_0, y_0).\Delta y$ é chamada de **diferencial (ou diferencial total)** de f e é indicada por df, no caso de f ser diferenciável.

Teorema. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se as derivadas parciais de f em relação a seus dois parâmetros são contínuas num conjunto aberto A, então f é diferenciável em todos os pontos de A.*

Exemplo. $f(x,y) = 2x^2 + 4y^3$

$$df = 4x.\Delta x + 12y.\Delta y$$

Note que as derivadas parciais dessa função são contínuas.

$$f(x,y) = \frac{2x}{x-y} \text{ tendo o domínimo: } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq y\}$$

$$f_x = \frac{2}{x-y} = 2x.(x-y)^2 = \frac{2}{(x-y)}.(1 - \frac{x}{(x-y)}) = \frac{-2y}{(x-y)^2}$$

$$f_y = \frac{2x}{(x-y)^2}$$

$$df = \frac{-2y}{(x-y)^2}.\Delta x + \frac{2x}{(x-y)^2}.\Delta y$$

Exemplo. 27.b

$f(x,y) = ln(2x^2 + 3y^2)$
$fx = \frac{1}{2x^2+3y^2}.4x$
$f_y = \frac{1}{2x^2+3y^2}.6y$
$df = \frac{1}{2x^2+3y^2}(4y.\Delta x + 6y.\Delta y)$

Exemplo. 33

I é fixo

$$Y(G,T) = \frac{C_0 + I + G - bT}{1-b}$$

$$Y(G,T)\ \frac{C_0 + I}{1-b} + \frac{G}{1-b} - \frac{-b}{1-b}.T$$

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{1-b} \text{ e } \frac{\partial Y}{\partial T} = \frac{-b}{1-b}$$

$$dY = \frac{1}{1-b}.2\ \frac{b}{1-b}.2$$

$$dY = \frac{2}{1-b}(1-b)$$

$$dY = 2$$

$$Y(G,T,I)$$

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial G}.\Delta G + \frac{\partial Y}{\partial T}.\Delta T$$

$$\frac{\partial Y}{\partial I} \to \Delta I$$

$\Delta I = 0$, por isso não o consideramos.

Exercício. Exercício 14.4 d - Simon e Blume (2004)

O quão grande precisa ser $\triangle L$ para que a diferença entre $Q\left(1000 + \triangle L, 216\right)$ e sua aproximação linear $Q\left(1000, 216\right) + \left(\partial Q/\partial L\right)\left(1000, 216\right)\triangle L$ difira por mais que duas unidades?

R:

Para solucionar esse exercício é necessário aumentar $\triangle L$ e subtrair

$$Q\left(1000+\triangle L,216\right)-\left[Q\left(1000,216\right)+\left(\partial Q/\partial L\right)\left(1000,216\right)\triangle L\right]$$

.Primeiramente calcularemos o valor da função de produção:

$$Q\left(1000,216\right)=9\left(1000\right)^{\frac{2}{3}}\left(216\right)^{\frac{1}{3}}=5400$$

Em seguida calcularemos a derivada parcial em relação a L:

$$\partial Q/\partial L=9\left(\frac{2}{3}\right)K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{1}{3}}=6\left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Avaliando a derivada em (1000,216):

$$\left(\partial Q/\partial L\right)\left(1000,216\right)=6\left(\frac{216}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}=3.6$$

A fórmula do diferencial fica:

$$Q\left(1000,216\right)+\left(\partial Q/\partial L\right)\left(1000,216\right)\triangle L=5400+3.6\triangle L$$

Variaremos L em intervalos de 10 unidades:

$Q\left(1000+\triangle L,216\right)$	$Q\left(1000,216\right)+\left(\partial Q/\partial L\right)\left(1000,216\right)\triangle L$	$\triangle L$	Diferencial - Produção
$Q\left(1010,216\right)=5435.94$	$Q\left(1000,216\right)+\left(\partial Q/\partial L\right)\left(1000,216\right)10=5436$	10	0.06
$Q\left(1020,216\right)=5471.76$	$Q\left(1000,216\right)+\left(\partial Q/\partial L\right)\left(1000,216\right)20=5472$	20	0.23
$Q\left(1030,216\right)=5507.46$	$Q\left(1000,216\right)+\left(\partial Q/\partial L\right)\left(1000,216\right)30=5508$	30	0.53
$Q\left(1040,216\right)=5543.05$	$Q\left(1000,216\right)+\left(\partial Q/\partial L\right)\left(1000,216\right)40=5544$	40	0.94
$Q\left(1050,216\right)=5578.53$	$Q\left(1000,216\right)+\left(\partial Q/\partial L\right)\left(1000,216\right)50=5580$	50	1.46
$Q\left(1060,216\right)=5613.9$	$Q\left(1000,216\right)+\left(\partial Q/\partial L\right)\left(1000,216\right)60=5616$	60	2.1

Devemos variar L em 60 unidades para que a diferença entre $Q\left(1060,216\right)$ e sua aproximação linear varie por mais de duas unidades.

12.2 Função Composta - Regra da cadeia

Teorema. ***Regra da cadeia***

Seja $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ uma função de duas variáveis derivável no ponto (x_0,y_0) do domínio, e sejam as funções dadas por $x(t)$ e $y(t)$ diferenciáveis em t_0 de modo que $x(t_0)=x_0$ e $y(t_0)=y_0$. Então a função composta F de f com x e y é tal que:

$$\frac{dF}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).\frac{dy(t_0)}{dt}$$

De modo abreviado:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$$

Exemplo. $f(x, y) = 2x + 5y - 3,\ x(t) = 2t$ e $y(t) = 3t - 1$

$$f(t) = 2.(2t) + 5(3t - 2) - 3 = 4t + 15t - 5 = 19t - 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 19$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{df}{dx}.\frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt} = 2.2 + 3.5 = 19$$

Exemplo. 34.d

$$f(x, y) = e^{x+y}, x = t^2 \text{ e } y = 2t^3 - 1$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= e^{x+y}.2t + e^{x+y}.6t^2$$

$$= e^{x+y}(2t + 6t^2)$$

$$= e^{2t^3+t^2-1}.t(2 + 6t)$$

$$= e^{2t^3+t^2-1}.2t(1 + 3t)$$

Exemplo. 36

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2.x_2}$$

$$x_1 = 168 - t$$

$$x_2 = 0,5t$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2}(x_1^2.x_2)^{-1/2}.2x_1 - 1 + \frac{1}{2}(x_1^2.x_2)^{-1/2}.1.0,5$$

$$= \frac{1}{2(x_1^2.x_2)^{1/2}}\left[-2x_1 + \frac{1}{2}\right]$$

12.3 Funções Implícitas e suas derivadas

Seja $x + y - 3 = 0$, resolvendo essa expressão para y obtemos que $y = 3 - x$. Podemos dizer que $h(x) = 3 - x$ diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}$. Dizemos que $x + y - 3 = 0$ define implicitamente uma função $y = h(x)$ derivável em relação a x.

Teorema. *Teorema da função implícita:*

Sejam $f(x, y)$e $\frac{\partial f}{\partial y}$ funções contínuas num domínio D e $(x_0, y_0) \in D$. Se $f(x_0, y_0) = 0$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ então existe um intervalo I, com centro em x_0 em que a equação $f(x_0, y_0) = 0$ define implicitamente uma única função derivável $y = h(x)$ tal que $y_0 = h(x_0)$ e $f(x, h(x)) = 0 \forall x \in I$.

Exemplo. $f(x, y) = x^3.y + xy^3 + x^2y^2 + xy - 4 = 0$ define implicitamente uma função $y = h(x)$ num intervalo I centrado um $x_0 = 1$, pois

a) $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 3x.y^2 + 2yx^2 + x$

b) $f(1, 1) = 0$

c) $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 7 \neq 0$

Consideremos a função derivável $y = h(x)$, definida implicitamente pela equação $f(x, y) = 0$. Como $F(x) = f(x, h(x)) = 0$. Pela regra da cadeia:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial h(x)}.\frac{\partial h(x)}{\partial x} = 0$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}.1 + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\frac{-\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial y}{\partial x} \rightarrow \text{derivada da função implícita}$$

Exemplo. $f(x, y) = 2x^2 + y - 1 = 0$

$$y = 1 - 2x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -4x \;\; \rightarrow \text{diretamente}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = \frac{-4x}{1} = -4x$$

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$D =]-1,1[$$

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} - 2x = \frac{-x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = \frac{-2x}{-2y} = \frac{-x}{y}$$

Como

$$y = \sqrt{2-x^2}$$

Temos que

$$\frac{-x}{\sqrt{2-x^2}}$$

12.4 Funções homogêneas e homotéticas

12.4.1 Funções Homogêneas

Definição. Seja f uma função homogênea de duas variáveis x e y. Dizemos que f é homogênea de grau m se para toda constante positiva λ tivermos:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y)$$

Exemplo. $f(x,y) = 3x^2 + 6xy$

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3.(\lambda x)^2 + 6(x\lambda)(\lambda y) = \lambda^2 3x^2 + \lambda^2 6xy = \lambda^2 f(x,y)$$

Portanto essa função é homogênea de grau 2. A função demanda $Q(x,y) = \frac{10y}{x}$ é homogênea de grau zero, pois:

$$Q(\lambda x, \lambda y) = \frac{10(\lambda y)}{x\lambda} = \frac{10y}{x} = \lambda^0.Q(x,y)$$

A interpretação do grau de homogeneidade é a seguinte: quando x e y são modificados por uma fração λ o novo valor de f será igual λ^n vezes a função original. No exemplo da função $f(x,y) = 3x^2 + 6xy$ um aumento de 50% em x e y, isto é, $\lambda = 1,5$ faz com que $f(x,y)$ cresça $\lambda^2 f(x,y)$.

Vejamos como isto funciona. Considere $x = y = 1$ e $\lambda = 1,5$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x,y) = (1,5)^2.(3+6) = 2,25.(9) = 20,25$$

$$f(x,y) = 3+6 = 9$$

Ao aumentarmos x e y em 50%, a função cresceu 125%.

$$f(1,5,1,5) = 3.(1,5)^2 + 6.(1,5).(1,5) = 20,25$$

Teorema. ***de Euler*** *Seja f uma função de duas variáveis x e y e homogênea de grau m. Então:*

$$m.f(x,y) = x.\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y.\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Demonstração. :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m.f(x,y)$$

Derive os dois lados em relação a λ

$$\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial \lambda} = m.\lambda^{m-1}.f(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}.x + \frac{\partial f}{\partial y}.y \quad = \quad m\lambda^{m-1}f(x,y)$$

Tendo em vista que essa igualdade é válida para todo $\lambda > 0$ usamos $\lambda = 1$ e teremos

$$\frac{\partial f}{\partial x}.x + \frac{\partial f}{\partial y}.y = m.f(x,y)$$

□

Teorema. *Seja f derivável e homogênea de grau m. Então $\frac{df}{dx}$ e $\frac{df}{dy}$ será homogênea de grau $m-1$.*

Demonstração. Sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}.x + \frac{\partial f}{\partial y}.y = m\lambda^{m-1}f(x,y) \tag{6}$$

Tome a derivada em relação a um parâmetro, x, por exemplo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.x + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y \partial x}.y = m\lambda^{m-1}\frac{\partial f}{\partial x}$$

Multiplique por x:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.x^2 + \frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y \partial x}.yx = m\lambda^{m-1}\frac{\partial f}{\partial x}x$$

Derive em relação a equação (1) em relação a *y:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.y + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x \partial y}.x = m\lambda^{m-1}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Multiplicando essa equação por y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.y^2 + \frac{\partial f}{\partial y}y + \frac{\partial f}{\partial x \partial y}.xy = m\lambda^{m-1}\frac{\partial f}{\partial y}y$$

Fazendo $\lambda = 1$ e somando as duas derivadas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.x^2 + \frac{\partial f}{\partial y}y + \frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial x \partial y}.xy + \frac{\partial f}{\partial y \partial x}.yx = m\frac{\partial f}{\partial y}y + m\frac{\partial f}{\partial x}x$$

Considerando as derivadas parciais iguais:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.y^2 + 2.xy\frac{\partial f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.x^2 = (m-1)\left(\frac{\partial f}{\partial y}y + \frac{\partial f}{\partial x}x\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.y^2 + 2.xy\frac{\partial f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.x^2 = (m-1)\,f\,(x,y)$$

$\square$

12.4.2 Função Homotéticas

Definição. Seja I um intervalo em R. Dizemos que $g : I \to R^1$ é uma transformação monótona de I se g é uma função estritamente crescente em I. Além disso se g é uma transformação monótona e um é uma função real de n variáveis, então dizemos que

$gou : x \to g(u(x))$ é uma transformação monótona de u.

Seja $u(x,y) = xy$ as funções $3xy + 2$, $(xy)^2$, $(xy)^3 + (xy)$, $e^{(xy)}$ e $\ln x + \ln y$

São transformações monótonas de *u(x,y).*

Definição. Uma função $v : R_+^n \to R^1$ é denominada homotética se é uma transformação monótona de uma função homogênea, ou seja, se existirem uma transformação monótona $z \to g(z)$ de R_+ e uma função homogênea $u : R_+^n \to R_+$ tais que $v(x) = g(u(x))$ para cada x no domínio de V.

Exemplo. 1

$$u(x,y) = xy \; g(u(x)) = (xy)^2$$

$$u(x,y) \text{ é homogênea de grau 2}$$

$$-\frac{gx}{gy} \rightarrow \text{deve ser constante para qualquer } x,\ y \text{ dados}$$

$$\begin{array}{l} gx = 2xy^2 \\ gy = 2x^2y \end{array} \rightarrow -\frac{2xy^2}{2x^2y} = -\frac{x}{y} \dashrightarrow \text{a inclinação é sempre 1 para qualquer } x \text{ e } y$$

Teorema. *Seja u uma função C^1 em R^n_+. Seja u homogênea então a inclinação dos planos tangentes aos conjuntos de nível é constante ao longo de raios e a partir da origem; em outras palavras, para quaisquer i, j e qualquer* x *em R^n_+:*

$$\frac{\frac{\partial u(tx)}{\partial xi}}{\frac{\partial u(tx)}{\partial xj}} = \frac{\frac{\partial u(x)}{\partial xi}}{\frac{\partial u(x)}{\partial xj}} \forall t > 0$$

O próximo teorema apresenta um resultado interessante:

Teorema. *Seja u uma função C^1em R^n_+. Se C^1vale para qualquer x em R^n_+, t>0 e i e j então u é homotética.*

12.5 Derivadas parciais de segunda ordem

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sendo x e y suas variáveis fx e fy as suas derivadas parciais de primeira ordem. Se tomarmos novamente as derivadas em relação a x e y de f_x e f_y teremos quatro funções derivadas, como segue:

A derivada de f_x em relação a x é: : f_{xx} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
A derivada de f_y em relação a y é: f_{yy} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
A derivada de f_x em relação a y : é: f_{xy} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
A derivada de f_y em relação a x : é: f_{yx} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
Chamamos essas duas últimas derivadas de derivadas cruzadas.

Exemplo. $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2 - 6xy$

$$f_x = 8x - 6y\ f_{xx} = 8\ f_{xy} = 6$$

$$f_y = 6y - 6x\ f_{yy} = 6\ f_{xy} = -6$$

Exemplo. 51.9

$f(x,y) = e^{x+y}$
$f_x = e^{x+y}\ f_{xx} = e^{x+y}\ f_{xy} = e^{x+y}$
$f_y = e^{x+y}\ f_{yy} = e^{x+y}\ f_{yx} = e^{x+y}$

12.6 Integrais Duplas

Suponha que a derivada parcial de uma função $f(x,y)$ em relação a x seja $f_x(x,y) = 6xy$. Aprendemos que ao realizarmos a derivação parcial em relação a x deveríamos considerar y constante. Se quisermos obter a função original devemos integrar $f_x(x,y) = 6xy$, como segue:

$$\int f_x(x,y)dx = \int 6xydx = 3x^2y + c(y)$$

Assim:

$$f(x,y) = 3x^2y + c(y)$$

Essa integral é chamada de integral parcial em relação a x. Note que a constante de integração torna-se uma função de y, já que esta variável é mantida constante no procedimento de integração. Poderíamos tranquilamente calcularmos a integral definida de f_x no intervalo 0 e $2y$:

$$\int\limits_1^{2x} 4xydy = \left[2xy^2\right]_1^{2x} = 2.x.(2x)^2 - 2x(1) = 8x^3 - 2x$$

Definição. (Integral Dupla) Seja $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ $D \to \mathbb{R}_+$definida no domínio D dado pelas inequações $x \in [a,b]$ e $y \in [c,d]$

Ao calcularmos a integral parcial em relação a y estaremos mantendo x constante, num ponto genérico entre a e b. $A(x) = \int_c^d f(x,y)dy$. O produto $A(x)dx$ representa o volume do sólido de área $A(x)$ e espessura dx.

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Simbolicamente a integral dupla é representado por $\int\int_d f(x,y)dxdy$

$$\int\int_d f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

Exemplo. $f(x,y) = x + y$ $f : [0,5] \times [0,3] \to \mathbb{R}$

$$\int_0^3 (\int_0^5 (x+y)dx)dy \text{ ou } \int_0^5 (\int_0^3 (x+y)dy)dx$$

O resultado é o mesmo nos dois casos!

Faremos o segundo:

$$A(x) = \int_0^3 (x+y)dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^3 = 3x + \frac{9}{2}$$

$$V = \int_0^5 A(x)dx = \int_0^5 (3x + \frac{9}{2})dx = \left[\frac{3x^2}{2} + \frac{9}{2}.x\right]_0^5 = \frac{3}{2}.25 + \frac{45}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

Seja $f(x,y) = 1$ e $0 \leq x \leq 1$ e $x^2 \leq y \leq x$ o volume do sólido é dado por:

$$\int_0^2 (\int_{x^2}^x f(x,y)dy)dx$$

$$A(x) = \int_{x^2}^x 1dy = x - x^2$$

$$\int_0^1 A(x)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Vejamos outra situação: Seja $y \in [c,d]$ e $x \in [x_1(y), x_2(y)]$. O volume pode ser calculado do seguinte modo:

$$\int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right] dy = \int\int_D f(x,y)dy$$

Exemplo. $f(x,y) = 5$ $y \in [0,5]$ e $x \in [y, 3y]$

$$\int_0^5 \left[\int_y^{3y} 5dx\right] dy$$

$$\int_y^{3y} 5dx = 5x|_y^{3y} = 15y - 5y$$

$$\int_0^5 (15y - y) = \left[\frac{15}{2}y^2 - \frac{5y^2}{2}\right]_0^5$$

$$\frac{y^2}{2}[15 - 5]_0^5$$

$$\frac{5^2}{2}[10] = 125$$

13 Máximos e mínimos para funções de duas variáveis

Em Economia, as técnicas de maximização e minimização são de suma importância para a compreensão de como os indivíduos, empresas e governos tomam as suas decisões. Primeiramente definiremos as noções de máximo e mínimo local e global e veremos como obter e testar se o ponto encontrado é de máximo ou de mínimo.

Definição. Máximo Relativo

Seja f uma função de duas variáveis x e y. Dizemos que $(x, y) \in D$ é um ponto de máximo relativo de f, se existe uma bola aberta de centro (x_0, y_0) e raio r, tal que $\forall$ ponto $P(x, y) \in D$ situado no interior dessa bola aberta, tenhamos:

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

Ao invertermos a desigualdade teremos a definição para um ponto de mínimo relativo:

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

Definição. Máximo Global

Seja $f(x, y)$,dizemos que um ponto (x_0, y_0), do domínio D é um ponto de máximo global de f, se $\forall P(x, y)$ do domínio tivermos:

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

A definição é análoga para o mínimo global, no entanto, devemos inverter a desigualdade

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

Teorema. *Sejam $f(x, y)$ e (x_0, y_0) um ponto interior do domínio. Se (x_0, y_0) for um ponto de máximo ou de mínimo de f se existirem as derivadas parciais f_x e f_y, então:*

$$fx(x_0, y_0) = 0 \ e \ fy(x_0, y_0) = 0$$

Exemplo. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 1$

$$fx = 2x - 2 = 0 \ \rightarrow x = 1$$

$$fy = 2y = 0 \rightarrow y = 0$$

Se f tiver um máximo ou mínimo este ponto poderá ser somente $(1, 0)$. A seguir veremos como identificar se esse ponto é de máximo ou de mínimo.

Teorema. ***(Condições de Segunda Ordem)****. Seja f uma função de duas variáveis x e y, contínua, com derivadas parciais até a segunda ordem contínuas. Seja (x_0, y_0) um ponto crítico de f. Chamaremos o determinante*

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

a) $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ então (x_0, y_0) será ponto de máximo de f.

b) $H(x_0, y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ então (x_0, y_0) será ponto de mínimo de f.

c) $H(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) será um ponto de sela.

Fato. *Se $H(x_0, y_0) = 0$ o teorema é inconclusivo.*

Antes de prosseguirmos é necessário entendermos a definição de matrizes simétricas definidas.

13.1 Matrizes Simétricas Definidas

Definição. (Matriz Simétrica Definida). Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica, então A é:

1. positiva se $x^T Ax > 0 \forall x \neq 0$ em $\mathbb{R}^n$
2. não negativa se $x^T Ax \geq 0$
3. negativa se $x^T Ax < 0$
4. não positiva se $x^T Ax \leq 0$

Caso contrário a matriz A será indefinida se $x^T Ax > 0$ para alguns x em $\mathbb{R}^n$ e $x^T Ax < 0$ para outros em $\mathbb{R}^n$.

Definição. Menor Principal (líderes). São os mesmos principais dos elementos da diagonal principal, isto é, o escalar $M_{ij} = detA_{ij}$quando $i = j$.

Teorema. *Classificação de Matrizes (positivas e negativas). Seja A uma matriz simétrica* 2×2 *(esse teorema é válido para o caso geral* $n \times n$*).*

a) A é positiva, se e somente se, todos os menores principais líderes são estritamente positivos.

b) A é negativa, se e somente se, os 2(n) menores principais líderes alternam de sinal, como segue:

$$|A_1| < 0 \ e \ |A_2| > 0$$

O n-ésimo menor principal líder deveria ter o mesmo sinal de $(-1)^n$

c) Se algum menor principal líder de A(ou par de menores) é não-nulo, mas não se encaixa em nenhum do dois padrões acima, então A é indefinida.

Note que podemos relacionar os dois teoremas:

1. Se o determinante Hessiano é positivo e seus menores alternam de sinal, isto é, $f_{xx} < 0$ e $f_{xx}.f_{yy} - f_{xy}.f_{yx} > 0$ teremos um ponto de máximo;

2. Se o determinante Hessiano é positivo e seus menores principais líderes possuem o mesmo sinal, isto é, $f_{xx} > 0$ e $f_{xx}.f_{yy} - f_{xy}.f_{yx} > 0$ teremos um ponto de mínimo;

3. Se o determinante do Hessiano é negativo teremos um ponto de sela;

4. Se por fim, o determinate do Hessino é zero o teorema das condições de segunda ordem é inconclusivo.

Voltamos ao primeiro exemplo:

Exemplo. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 1$

$$f_x = 2x - 2 \to x = 1$$

$$f_y = 2y \ y = 0$$

Ponto crítico (1,0)

$$f_{xx} = 2 \ ; \ f_{xy} = f_{yx} = 0$$

$$f_{yy} = 2$$

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

O ponto crítico (1,0) é o ponto de mínimo dessa função.
Considere a função $f\,(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$. Os pontos críticos dessa função são:

$$f_x = 2x - 2y = 0 \to x = y$$

$$f_y = -2x + 2y \ = 0 \to x = y$$

Então, temos que os pontos críticos da função são (x, x) $x \in R$. Por outro lado,

$$f_{xx} = 2 \ ; \ f_{xy} = f_{yx} = -2$$

$$f_{yy} = 2$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Nesse caso o teorema das condições de segunda ordem é inconclusivo. Assim, devemos analisar o comportamento de f nos pontos *(x,x)*, usando a definição. Temos:

$f\,(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geqslant 0$ para todo par *(x,y)*.

$f\,(x,x) = 0$ para todo x.

Portanto, $f\,(x,y) \geq f\,(x,x)$ para qualquer valor de x e y, desta forma, os pontos *(x,x)* são todos de mínimo de *f*.

Exemplo. Seja $L(x,y) = 600 - 2x^2 - 4y^2 - 3xy + 18x + 18y$ o lucro obtido pela venda de x e y. Identifique as quantidades de x e y que maximizam o lucro. Verifique também as condições de segunda ordem.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -4x - 3y + 18 = 0 \ (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -8y - 3x + 18 = 0 \ (2)$$

Por (1)

$$x = \frac{18-3y}{4} \ (3)$$

Inserindo (3) em (2)

$$8y = 18 - 3.\frac{(18-3y)}{4}$$

$$8y = 18 - \frac{54+9y}{4}$$

$$8y = \frac{72-54-9y}{4}$$

$$32y = 22 + 9y$$

$$23y = 18$$

$$y = \frac{18}{23} \cong 0,8 \ (4)$$

Inserindo (4) em (3)

$$x = \frac{18}{4} - \frac{3}{4}.\frac{18}{23}$$

$$x = \frac{18}{4}.(1 - \frac{3}{23})$$

$$x = \frac{18}{4}(\frac{20}{23})$$

$$x = \frac{9}{2}(\frac{20}{23})$$

$$x = \frac{9.10}{23} = \frac{90}{23} \cong 3,9$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -8 \end{vmatrix}$$

$$f_{xx} < 0 = -4$$

$$H = 32 - (-9) = 41 > 0$$

O ponto (3,9;0,9) é de máximo.

$$L(3,9;0,9) = 600 - 2(3,9)^2 - 4.(0,9)^2 - 3.(3,9).(0,9) + 18.(3,9) + 18.(0,9)$$

$$= 600 - 30,24 - 3,21 - 10,53 + 70,2 + 16,2$$

$$L(3,9;0,9) \cong 642,4$$

Exemplo. Vejamos a função

$$f(x,y) = xy$$

$$fx = y \ , \ f_{xx} = 0 \ f_{xy} = f_{yx} = 1$$

$$fy = x \ f_{yy} = 0$$

Portanto o ponto (0,0) é denominado ponto de sela.

Exercício. Exercício 11.6.2 - Simon e Blume (2004)

Uma empresa de dois produtos enfrenta as seguintes funções de demanda e custo:

$$q_1 = 40 - 2p_1 - p_2$$

$$q_2 = 35 - p_1 - p_2$$

$$C(q_1, q_2) = 10 + q_1^2 + 2q_2^2$$

(a) Calcule os níveis de produção que satisfaçam as Condições de Primeira Ordem para o lucro máximo.

(b) Verifique as Condições de Segunda Ordem (suficiente). É possível concluir que esse problema possui um único máximo absoluto?

(c) Qual é o lucro máximo?

R: Letra (a)

Para solucionarmos a letra **a** é necessário invertermos as funções de demanda:

$$p_2 = 40 - 2p_1 - q_1 \tag{7}$$

$$p_1 = 35 - q_2 - p_2 \tag{8}$$

Inserindo (1) na equação (2) teremos:

$$p_1 = 5 + q_2 - q_1 \tag{9}$$

Inserindo (3) na equação (1) teremos:

$$p_2 = 30 - 2q_2 + q_1 \tag{10}$$

Construindo a função de lucros:

$$\Pi(q_1, q_2) = p_1 q_1 + p_2 q_2 - C(q_1, q_2)$$

$$\Pi(q_1, q_2) = 5q_1 - 2q_1^2 + 2q_1 q_2 - 4q_2^2 + 30q_2 - 10$$

Tomando as derivadas parciais em relação a q_1 e q_2:

$$\frac{\partial \Pi(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 5 - 4q_1 + 2q_2 = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial \Pi\left(q_1, q_2\right)}{\partial q_2} = 30 + 2q_1 - 8q_2 = 0 \tag{12}$$

Dividindo (6) por dois e isolando q_1:

$$q_1 = 4q_2 - 15 \tag{13}$$

Inserindo (7) em (5):

$$2q_2 = 4\left(4q_2 - 15\right) - 5$$

$$q_2^* \cong 4.65 \tag{14}$$

Plugando (8) em (7):

$$q_1^* \cong 3.6 \tag{15}$$

R: Letra (b)

Use as equações (5) e (6) para tomar as segundas derivadas da função lucro:

$$\frac{\partial^2 \Pi\left(q_1, q_2\right)}{\partial q_1^2} = -4 \tag{16}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi\left(q_1, q_2\right)}{\partial q_2^2} = -8 \tag{17}$$

O teorema de Young nos diz que as derivadas parciais devem ser simétricas:

$$\frac{\partial \Pi\left(q_1, q_2\right)}{\partial q_2 \partial q_1} = \frac{\partial \Pi\left(q_1, q_2\right)}{\partial q_1 \partial q_2} = 2 \tag{18}$$

Montando o Hessiano:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \Pi(q_1,q_2)}{\partial q_1^2} & \frac{\partial \Pi(q_1,q_2)}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \frac{\partial \Pi(q_1,q_2)}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 \Pi(q_1,q_2)}{\partial q_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} \tag{19}$$

Podemos notar que o primeiro menor principal é igual -4<0 e o segundo menor principal é o próprio determinante H que é igual a 28>0. Portanto a função de lucros obedece as condições suficientes para um ponto lucro de máximo.

R: Letra (c)

Vamos inserir as equações (8) e (9) na nossa função de lucros original:

$$\Pi\left(q_1, q_2\right) = 5q_1 - 2q_1^2 + 2q_1 q_2 - 4q_2^2 + 30q_2 - 10$$

$$\Pi\left(q_1^*, q_2^*\right) = \Pi\left(3.6, 4.65\right) = 5\left(3.6\right) - 2\left(3.6\right)^2 + 2\left(3.6 \times 4.65\right) - 4\left(4.65\right)^2 + 30(4.65) - 10 = 68.57$$

13.2 Análise dos pontos de fronteira

Vimos que os teoremas anteriores aplicam-se somente a pontos interiores do domínio. A análise dos pontos de fronteira quando existem terá de ser feita sem auxílio desses teoremas. Usaremos as curvas de nível da função a ser otimizada.

Exemplo. $f(x, y) = 2x + y$

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \text{ e } x + y \leq 7\}$

A função $2x+y$ admite como curvas de nível o eixo de paralelas à reta $2x+y = 0$, pois qualquer curva de nível c tem por equação a reta $2x+y = c$ que é paralela à $2x+y = 0$ $\forall c$.

$c = 1 \ \rightarrow 2x + y = 1$

$c = 2 \ \rightarrow 2x + y = 2$

$c = 3 \ \rightarrow 2x + y = 3$

Traçaremos um gráfico usando apenas a restrição imposta no domínio:

Considere:

$x = 0 \ \rightarrow$ então $y = 7$

$y = 0 \ \rightarrow$ então $x = 7$

$x = y = 0 \ \rightarrow$ então $(0, 0) \leq y$

O ponto (0,0) é o ponto de mínimo absoluto e (7,0) é o máximo absoluto de $f(x, y)$

Vejamos o exemplo da função $f(x, y) = x + y$ **cujo domínio é** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ = 2x + y \geq 10$ **e** $x + 2y \geq 10\}$ Note que a função a ser maximizada ou minimizada é linear, portanto, não conseguiremos computar as derivadas de segunda ordem. Desse modo usamos as restrições do domínio (em igualdade)

$2x + y = 10$ (1)

$x + 2y = 10$ (2)

Casos extremos de (1): Se $x = 0$ então $y = 10$;

Se $y = 0$ então $x = 5$

Casos extremos de (2): Se $x = 0$ então $y = 5$

Se $y = 0$ então $x = 10$

Intersecção: $2x + y = x + 2y$

$$x = y$$

$$x + 2.(x) = 10$$

$$3x = 10$$

$$x = \frac{10}{3} = y$$

As curvas de nível são:

$$x + y = 1$$

$$x + y = 2$$

$$\vdots$$

$$x + y = 5$$

Note que a curva de nível intercepta o ponto $P(\frac{10}{3}, \frac{10}{3})$ e mais nenhum outro ponto. Fazendo uma analogia podemos pensar como a reta tangente que toca aquele ponto (x^*, y^*) da função derivada. Vejamos outro exemplo coma mesma função, mas com o seguinte domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ | x + y \leq 3\}$. A função admite como curvas de nível o feixe de paralelas à reta $x + y = 0$; $x + y = 1$; $x + y = 2$ e $x + y = 3$ e assim por diante todos os pontos do segmento $\overline{B}c$ são pontos de máximo e o ponto $A(0, 0)$ é o ponto de mínimo.

14 Otimização com restrições de igualdade

14.1 Efeito de uma restrição

Imagine que o consumidor deseja obter o nível mais elevado de satisfação representado pela função $U = x_1x_2 + 2x_1$, mas o mesmo possua uma restrição orçamentária de $4x_1 + 2x_2 = 60$. Qual o domínio de U dado x_1 e x_2 "ótimos"?

$$D_U = \{(x_1, x_2) \parallel x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$$

Encontre x_1 e x_2 ótimos.

$$x_2 = \frac{60 - 4x_1}{2}$$

$$U(x_1, x_2) = x_1.\left(\frac{60 - 4x_1}{2}\right) + 2x_1$$
$$U = 30x_1 - 2x_1^2 + 2x_1 = 32x_1 - 2x_1^2$$
$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 32 - 4x_1 = 0 \rightarrow x_1^* = 8$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = -4 < 0 \rightarrow x_1^* \text{ é um máximo!}$$

$$x_2^* = \frac{60 - 32}{2} = 14$$
$$U(x_1^*, x_2^*) = 14.8 + 2.8 = 128$$

Contudo se houverem várias restrições ou se a restrição em se for uma função "complicada" a técnica de substituição de variáveis pode se tornar uma tarefa árdua.

14.2 Método do Multiplicador de Lagrange

O matemático Lagrange propôs uma técnica colocando um peso λ sobre a restrição do problema de otimização. Desse modo, para um problema de maximização (ou minimização) de duas variáveis sujeito a uma restrição, construímos uma função $L\,(x_1, x_2, \lambda)$ da seguinte forma:

$$L = x_1x_2 + 2x_1 + \lambda(60 - 4x_1 - 2x_2)$$

Temos que $L(x_1, x_2, \lambda)$ então devemos diferenciar L em relação a essas 3 variáveis.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 2 - 4\lambda = 0 \ (1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - 2\lambda = 0 \ (2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 60 - 4x_1 - 2x_2 \ (3)$$

$$\frac{x_2 + 2 = 4\lambda}{x_1 = 2\lambda}$$
$$\frac{x_2 + 2}{x_1} = 2$$

$$x_2 + 2 = 2x_1 \ (4)$$

$$\frac{x_2}{2} + 1 = x_1$$

Inserindo (4) em (3)

$$60 = 4\left(\frac{2x_2}{2} + 1\right) + 2x_2$$

$$60 = 2x_2 + 4 + 2x_2$$

$$56 = 4x_2$$

$$14 = x_2 \ (5)$$

Inserindo (5) em (4)

$$\frac{14}{2} + 1 = x_1$$

$$x_1 = 8 \ \mathbf{(6)}$$

(6) em (2)

$$8 = 2\lambda$$

$$4 = \lambda$$

$$L(x_1, x_2\lambda) = L(8, 14, 4)$$

De modo geral, dada uma função objetiva $f(x_1, x_2)$ sujeita à restrição $g(x_1, x_2) = C$, podemos escrever a função de Lagrange como:

$$L = f(x_1, x_2) + \lambda \left[C - g(x_1, x_2)\right]$$

$$L_{x_1} = f^{'}(x_1, x_2) - \lambda g^{*}_{x_2} = 0$$

$$L_{x_2} = f_{x_2} - \lambda g_{x_2} = 0$$

$$L_{\lambda} = g(x_1, x_2) = C \rightarrow \text{a própria restrição!}$$

Observação. **Interpretação do λ**

Uma alteração em λ provocaria um deslocamento no plano x_1x_2/xy e alteraria a solução ótima.

14.2.1 Qualificação da Restrição

Se a restrição é linear o problema está satisfeito. Para verificarmos isto os vetores gradiente de f e g (o vetor formado pelas primeiras derivadas da função objetivo e da restrição) devem ter a mesma direção. Isto é, eles apontam no mesmo sentido, ou em sentidos contrários no caso de uma minimização. Dessa forma $\nabla f(x^*) = \lambda^* \nabla g(x^*)$, x^* e u^* são os pontos críticos da função L de Lagrange. Para $f : R^2 \to R$ temos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Para várias restrições

Desejamos maximizar ou minimizar:

$$f(x_1, \ldots, x_n) \text{ s.a. } C_g = \{x = (x_1, \ldots, x_n)\, g_2(x) = a_1, \ldots, g_m(x) = a_m\}$$

Se tivermos m funções de restrição com $m > 1$, a generalização natural é a derivada jacobiana.

$$D_g(x^*) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Definição. x^*é um ponto crítico de $g = (g_1, \ldots, g_m)$ se o posto da matriz $Dg(x^*)$ é$< m$. De modo mais formal, dizemos que $(g_1, \ldots, g_m)$ satisfaz a ***qualificação de restrição não-degenerada (QRND)*** em x^* se o posto da matriz jacobiana $Dg(x^*)$ em x^* é m.

Observação. Lembre que o posto é o número de linhas não nulas de uma matriz na sua forma escalonada por linhas.

Exemplo. 1

$$f(x, y, z) = xyz$$

$$g_1(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 = 1$$

$$g_2(x, y, z) \equiv x + z = 1$$

$$Dg(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seu posto será menor que 2 se, e somente se, $x = y = 0$ que não atende a restrição g_1. Todos os outros postos satisfazem QRND.

14.3 Condições de Segunda Ordem e o Hessiano Orlado

Suponha que desejássemos resolver o seguinte problema de maximização:

$$\begin{gathered} \textit{Maximizar } f(x_1, \ldots, x_n) \\ \text{sujeita a} \\ g(x_1, \ldots, x_n) = C \\ h(x_1, \ldots, x_n) = d \end{gathered}$$

Então teríamos:

$$L = f(.) + \lambda \left[c - g(.)\right] + u \left[d - h(.)\right]$$

sendo que método de solução é idêntico ao anterior.

Agora desejamos saber se os pontos críticos encontrados irão satisfazer as condições de segunda ordem.

Definição 1. d^2L é $\left\{ \begin{matrix} \text{positiva definida} \\ \text{negativa definida} \end{matrix} \right\}$ sujeita a $dg = 0$ se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} 0 & gx_1 & gx_2 \\ gx_1 & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} \\ gx_2 & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} \end{vmatrix} \left\{ \begin{matrix} < 0 \\ \hline > 0 \end{matrix} \right.$$

$\left|\bar{H}\right|$ é negativo é suficiente para estabelecê-lo como um mínimo.

Exemplo. Ex.:

$$U(x_1, x_2) = x_1.x_2 \text{ s.a.} x_1 + \frac{x_2}{1+r} = B$$

$$L = x_1.x_2 + \lambda \left[B - x_1 - \frac{x_2}{1+r}\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_2 + \frac{x_2}{1+r} = B \ (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - \lambda = 0 \ (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + \frac{\lambda}{1+r} = 0 \ (3)$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\lambda}{1+r}.\frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = (1+r)$$

$$x_2 = x_1(1+r) \ (4)$$

$$x_1 + x_1 = B$$

$$x_1 = \frac{B}{2}\ (5)$$

$$(5) \rightarrow (4)$$

$$x_2 = \frac{B}{2}(1+r)\ (6)$$

$$\lambda = \frac{B}{2}(1+r)\ (7)$$

$$H = \begin{vmatrix} 0 & -1 & \dfrac{-1}{1+r} \\ -1 & 0 & 1 \\ \dfrac{-1}{1+r} & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \left(\dfrac{1}{1+r} > 0\right) \\ \text{negativa definida} \end{matrix}$$

Então a condição de segunda ordem é satisfeita para um máximo de U.

$$U(x_1^*, x_2^*) = \frac{B^2}{4}(1+r)$$

14.3.1 Para n variáveis e restrições

Com múltiplas restrições nosso problema se apresenta do seguinte modo:

$$Q = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[c_j - g^j(x_1, \ldots, x_n)\right]$$

$$\left|\bar{H}\right| \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & g_1^1 & g_1^2 & \cdots & g_1^m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & g_2^1 & g_2^2 & \cdots & g_2^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & & 0 & \vdots & g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_1^1 & g_1^2 & \cdots & g_1^m & \vdots & L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ g_2^1 & g_2^2 & \cdots & g_2^m & \vdots & L_{21} & L_{22} & \cdots & L_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^m & \vdots & L_{n1} & L_{n2} & \cdots & L_{nn} \end{vmatrix}$$

Para determinarmos a classificação da da matriz hessiana orlada devemos fazer o seguinte:

Confira os sinais dos últimos $n - m$ (sendo n o número de variáveis e m o número de restrições) menores principais líderes de H, começando com o determinante de H mesmo.

(a) Se *det* H tem o mesmo sinal de $(-1)^n$ e se estes últimos $n - m$ menores principais líderes alternam de sinal, então Q é negativa no conjunto restrição e x^* é um *max* global estrito de Q neste conjunto restrição.

(b) Se $det\ H$ e estes últimos $n-m$ menores principais líderes têm todos o mesmo sinal de $(-1)^m$, então Q é positiva no conjunto restrição e x^*é um *min* global estrito de Q neste conjunto restrição.

(c) Se ambas as condições a) e b) são violadas por menores principais líderes não-nulos, então Q é indefinida no conjunto restrição e x^* não é nem um *max* nem um *min* de Q no conjunto restrição.

15 Otimização com restrições em desigualdade

15.1 Restrições de não-negatividade

Imagine que você deseja maximizar uma função $f(x_1)$ para $x_1 \geq 0$. Supomos que f é C^2. Dada a nossa restrição podem ocorrer 3 situações que serão expressas abaixo:

- Se $f^{'}(x_1) = 0$ e $x_1 > 0$ →temos uma solução interior ***(A)***
- Se $f^{'}(x_1) = 0$ e $x_1 = 0$ →solução de fronteira ***(B)***
- Se $f^{'}(x_1) < 0$ e $x_1 = 0$ →$f^{'}(x_1) < 0$ não é possível ter máximo quando a inclinação da curva é ascendente ***(C)***

Lembre-se $x_1 \geq 0$. As 3 condições a cima podem ser consolidadas em um único enunciado:

$$f^{'}(x_1) < 0\ x_1 \geq 0\, e\, x_1.f^{'}(x_1) = 0$$

$x_1.f^{'}(x_1) = 0$, nos diz que pelo menos uma dessas variáveis deve assumir o valor zero. Essa característica é denominada de folga complementar entre x_1 e $f^{'}(x_1)$. Nossas conclusões são análogas para o caso de n variáveis.

$$\text{Max}\ \pi = f(x_1, \ldots, x_n)\ \text{s. a.}\ x_j \geq 0 (j = 1, \ldots, n)$$

$$f_j \leq 0,\ x_j \geq 0\ e\ x_j f_j = 0\ \forall j = 1, \ldots, n$$

15.2 Restrições de desigualdade

Para simplificarmos a nossa vida, vamos tratar de um problema com 3 variáveis de escolha e duas restrições $(n = 3)$ e $(n = 2)$.

$$\begin{aligned} \text{Max}\quad \pi = f(x_1, x_2, x_3)\quad \text{s. a.}\quad & g^1(x_1, x_2, x_3) \leq r_1 \\ & g^2(x_1, x_2, x_3) \leq r_2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Com o auxílio de duas novas variáveis $s_1 \, e \, s_2$nosso problema pode ser modificado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad \pi = f(x_1, x_2, x_3) \quad \text{s. a.} \quad & g^1(x_1, x_2, x_3) + s_1 = r_1 \\ & g^2(x_1, x_2, x_3)s_2 = r_2 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Se as restrições de não negatividade estiverem ausentes, podemos utilizar a formulação de Lagrange:

$$L^{'} = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 \left[r_1 - g_1 - s_1 \right] + \lambda_2 \left[r_1 - (s_2 + g^2) \right]$$

E escrever a condição de primeira ordem como:

$$\frac{\partial L^{'}}{\partial x_1} = \frac{\partial L^{'}}{\partial x_2} = \frac{\partial L^{'}}{\partial x_3} = \frac{\partial L^{'}}{\partial s_1} = \frac{\partial L^{'}}{\partial s_2} = \frac{\partial L^{'}}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial L^{'}}{\partial \lambda_2} = 0$$

Note que x_i e s_i devem ser obrigatoriamente não negativos então as condições de primeira ordem devem ser modificadas como vimos anteriormente. Deste modo obtemos o seguinte conjunto de equações:

$$\frac{\partial L^{'}}{\partial x_j} \leq 0 \; x_j \geq 0 \, e \, x_j \frac{\partial L^{'}}{\partial x_j} = 0 \quad \begin{matrix} i = 1, 2 \\ j = 1, 2, 3 \end{matrix} \; (1)$$

$$\frac{\partial L^{'}}{\partial s_i} \leq 0 \; s_i \geq 0 \, e \, s_i \frac{\partial L^{'}}{\partial s_i} = 0 \; (2)$$

$$\frac{\partial L^{'}}{\partial \lambda_i} = 0 \; (3)$$

Se olharmos para $L^{'}$, notamos que $\frac{\partial L^{'}}{\partial s_i} = -\lambda_i \; \forall_1$isto quer dizer que:

$$s_i \geq 0, \; \lambda_i \geq 0 \, e \, \lambda_i s_i = 0$$

Então podemos dizer que $s_i = r_i - g^i$ e então combinar as linhas (2) e (3):

$$r_i - g^i \geq 0 \, \lambda_i \geq 0 \, e \, \lambda_i \left[r_i - g^i \right] = 0$$

Considere $\dfrac{\partial g^i}{\partial x_j}$ como g^i_j e escrevemos o problema do seguinte modo:

$$L^{'}_j \leftarrow \frac{\partial L^{'}}{\partial x_j} = f_j - (\lambda_1 g^1_j + \lambda_2 g^2_j) \, x_j \geq 0 \text{ e } x_j L^{'}_j = 0$$

$$r_i - g^i \geq 0 \, \lambda_i \geq 0 \, e \, \lambda_i \left[r_i - g^i(x_1, x_2, x_3) \right] = 0$$

$$r_i - g^i(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial L^{'}}{\partial \lambda_i}$$

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad u = xy \quad \text{sujeito a} \quad & x + y \leq 100 \\ & x \leq 40 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

$$L^{'} = xy + \lambda_1 [100 - x - y] + \lambda_2 [40 - x]$$

$$L_x = y - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0 \quad x \geq 0 \quad \text{e} \quad x.L_x = 0 \quad (1)$$

$$L_y = x - \lambda_1 \leq 0 \quad y \geq 0 \quad \text{e} \quad y.L_y = 0 \quad (2)$$

$$L_{\lambda_1} = 100 - x - y \geq 0 \quad \lambda_1 \geq 0 \quad \text{e} \quad \lambda_1.L_{\lambda_1} = 0 \quad (3)$$

$$L_{\lambda_2} = 40 - x \geq 0 \quad \lambda_2 \geq 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2.L_{\lambda_2} = 0 \quad (4)$$

Suponha x ou y *=0* desde que essa solução atenda (1)-(4). Você pode supor que $\lambda_1$ou λ_2 são iguais a zero e assim essa restrição será não vinculadora. Então o multiplicador de *Kuhn-Tucker* será zero por folga complementar. Nesse exemplo x ou y iguais a zero nos levaria a um nível zero de utilidade o que não faz sentido econômico. Se $y, x > 0$ então L_y e $L_x = 0$

$$y = \lambda_1 + \lambda_2 \ (1)$$

$$x = \lambda_1 \ (2)$$

$$y = x + \lambda_2 \ (5)$$

Vamos "chutar" que a restrição 2 seja não vinculadora. Então:

$$\lambda_2 = 0 \text{ e } 40 \geq x \ (3)$$

$$y = x \ (5)$$

$$\lambda_1 \geq 0 \text{ então } L_{\lambda_1} = 0$$

$$100 - 2x \geq 0$$

$$\frac{100}{2} = x \rightarrow 50 \rightarrow \text{Mas viola 2}$$

Então a restrição de racionamento é vinculadora:

$$\lambda_2 = 0;\ L_{\lambda_2} = 0 \to 40 = x\ (4)$$

$$\text{por (2) } x = \lambda_1 = 40;$$

$$\text{por (5) } y = x + \lambda_2 = 40 + \lambda_2$$

$$\text{Se } \lambda_1 \geq 0;\ L_{\lambda_1} = 0$$

$$100 = x + y$$

$$100 = 40 + 40 + \lambda_2$$

$$20 = \lambda_2\ (6)$$

$$\text{Inserindo (6) } y = 400 + 20 = 60$$

Esta solução atende a todas as restrições.

Observação. O caso de n variáveis e m restrições é análogo.

Exemplo. Encontre o máximo $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeita à $2x + y \leq 2$ e $x, y \geq 0$.

Solução:

Vamos montar o Lagrangeano usando o teorema de Kuhn-Tucker. Como estamos buscando um máximo devemos usar a desigualdade da restrição do seguinte modo: $2 - 2x - y \geq 0$

$$L = x^2 + y^2 + \lambda [2 - 2x - y]$$

As condições de primeira ordem são as seguintes:

$$L_x = 2x - 2\lambda \leq 0;\ x \geq 0;\ xL_x = 0; \tag{20}$$

$$L_y = 2y - \lambda \leq 0;\ y \geq 0;\ yL_y = 0; \tag{21}$$

$$L_\lambda = 2 - 2x - y \geq 0;\ \lambda \geq 0;\ \lambda L_\lambda = 0; \tag{22}$$

CHUTE 1:

$x = 0;\ y$ e $\lambda > 0$

Se $x = 0$ então L_x não pode ser usada em igualdade. Usamos (3) para encontrar que *y=2* e (2) para obtermos $\lambda = 4$. Portanto a solução *S(0,2,4)* atende as restrições (1), (2) e (3). Insira os valores de x, y e λ nessas equações e verifique você mesmo.

CHUTE 2:

$y = 0;\ x$ e $\lambda > 0$

Se $y = 0$ então L_y não pode ser usada em igualdade. Usando (3) temos que *x=1* e por (1) obtermos $\lambda = 1$. Portanto a solução *S(1,0,1)* atende as restrições (1), (2) e (3).

CHUTE 3:

y, x e $\lambda = 0;$

A solução S(0,0,0) é possível e atende a todas as restrições.

CHUTE 4:

y, x e $\lambda > 0$

Desse modo, podemos usar as equações (1), (2) e (3) em igualdade. Por (1) obtemos que $x = \lambda$ e por (2) $2y = x$. Usando esse resultado em (3) teremos que $y = \frac{2}{5}$ e então $x = \lambda = \frac{4}{5}$. A solução $S\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ atende a todas as restrições.

Finalmente para encontrarmos o ponto de máximo global, precisamos inserir os valores de x e y oriundos da maximização na função objetivo, como segue:

$$\begin{gathered}
S(0,2) = f(0,2) = (0)^2 + (2)^2 = 4 \\
S(1,0) = f(1,0) = (1)^2 + (0)^2 = 1 \\
S(0,0) = f(0,0) = (0)^2 + (0)^2 = 0 \\
S\left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5}\right) = f\left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5}\right) = \left(\tfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 = \tfrac{20}{25} = 0.8
\end{gathered}$$

Portanto o máximo global é atingido em *S(0,2,4)*.

15.3 Minimização usando Kuhn-Tucker

Minimizar equivale a menos maximizar a função objetivo. Em termos práticos:

$$\frac{\partial L'}{\partial x_j} \geq 0;\ x_j \geq 0 \text{ e } x_j . \frac{\partial L'}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \lambda_i} \leq 0;\ \lambda_i \geq 0 \text{ e } \lambda_i . \frac{\partial L'}{\partial \lambda_i} = 0$$

$$\text{Min } C = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$-3x_1 - 2x_2 \geq -12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$L = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + \lambda_1(6 - 2x_1 - 3x_2) + \lambda_2(-12 + 2x_2 + 3x_1)$$

$$L_{x_1} = 2(x_1 - 4) - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \geq 0;\ x_1 \geq 0;\ x_1 L_{x_1} = 0$$

$$L_{x_2} = 2(x_2 - 4) - 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_2 L_{x_2} = 0$$

$$L_{\lambda_1} = 6 - 2x_1 - 3x_2 \leq 0;\ \lambda_1 \geq 0;\ \lambda_1 L_{\lambda_1} = 0$$

$$L_{\lambda_2} = -12 + 2x_2 + 3x_1 \leq 0;\ \lambda_2 \geq 0;\ \lambda_2 L_{\lambda_2} = 0$$

Fazendo $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $x_1 = \frac{16}{5}$ e $x_2 = \frac{-1}{5}$ resulta na solução experimental o que viola a restrição de não negatividade de x_2.

Fazendo $x > 0$ e $y > 0$ temos que:

$$2(x_1 - 4) - 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0\ (1)$$

$$2(x_2 - 4) - 3\lambda_1 + 2\lambda = 0\ (2)$$

Multiplicando (1) por 2 e (2) por 3 e subtraído (1) - (2) teremos:

$$4x_1 - 6x_2 + 5\lambda_1 + 8 = 0$$

$$\text{Supondo } \lambda_1 = 0$$

$$2x_1 - 3x_2 = -4$$

$$x_1 - \frac{3}{2}x_2 = -2$$

Então $\lambda_2 > 0$ temos que $L_{\lambda_2} = 0$

$$3x_1 + 2x_2 = 12$$

$$3(-2 + \frac{3}{2}x_2) + 2x_2 = 12$$

$$-6 + \frac{9}{2}x_2) + 2x_2 = 12$$

$$18 = \frac{13}{2}x_2$$

$$*\frac{36}{13} = x_2$$

$$x_1 = -2 + \frac{3}{2}.x_1$$

$$x_1 = \frac{3}{2}.\frac{36}{13} - 2$$

$$x_1 = \frac{108}{26} - 2$$

$$x_1 = \frac{54}{13} - 2$$

$$*x_1 = \frac{54-26}{13} = \frac{28}{13}$$

$$2\left(\frac{28}{13} - 4\right) + 3\lambda_2 = 0$$

$$\frac{56}{13} - 8 = -3\lambda_2$$

$$\frac{56-104}{13} = -3\lambda_2$$

$$\frac{-48}{13} = -3\lambda_2$$

$$*\frac{16}{13} = \lambda_2$$

Essas soluções atendem as restrições e são aceitáveis como solução final.

16 Concavidade e Convexidade

Definição. A função $f(x_1, x_2)$ definida $R^2 \to R$ é côncava (convexa) se e somente se, para qualquer par de pontos distintos M e N em seu gráfico -uma superfície- um segmento de reta MN estiver sobre ou abaixo da superfície. A função é estritamente côncava e estritamente convexa se e somente se o segmento de reta MN estiver inteiramente abaixo (a cima) da superfície exceto em M e N.

Sejam $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ e Df os valores de $f(u_1, u_2)$ e $f(v_1, v_2)$ também. Então todos os pontos do segmento de reta uv também estão no domínio. Podemos denotar este segmento de reta $\theta u + (1-\theta)v$ onde $\theta \in [0, 1]$.

Definição. Uma função f é $\left\{ \begin{array}{c} \text{côncava} \\ \text{convexa} \end{array} \right\}$ se e somente se, para qualquer pontos distintos u e v no domínio de f e para $\theta f(u) + (1-\theta)f(v) \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \end{array} \right\} f\left[\theta u + (1-\theta)v\right]$

A concavidade estrita (convexidade) alterando as desigualdades para as desigualdade estritas. Da relação a cima podemos deduzir três teoremas:

Teorema. ***(função linear):*** *Se f(x) for uma função linear, então ela é uma função côncava, bem como, uma função convexa, mas não estritamente.*

Exemplo: o segmento de reta MN (por exemplo" cumpre os requisitos, isto é, este segmento sempre coincide com o arco MN. A igualdade é sempre garantida.

Teorema. ***(negativa de uma função):*** *Se f(x) for uma função côncava então - f(x) é uma função convexa e vice-versa. De modo semelhante, se f(x) for uma função estritamente concava, então - f(x) é estritamente convexa e vice-versa.*

A noção de concavidade e convexidade, se difere apenas no sentido da desigualdade, isto é,

$$\theta f\left(u\right)+\left(1-\theta\right)f\left(v\right)\leq f\left[\theta u+\left(1-\theta\right)v\right]$$

Multiplicando por -1

$$-\theta f(u)-(1-\theta)f(v)\geq -f\left[\theta u+(1-\theta)v\right]$$

Usaremos esse teorema na demonstração a seguir.:

Teorema. ***(soma de funções):*** *Se f(x) e g(x) forem ambas funções côncavas (convexas), então f(x) + g(x) é uma função (convexa). Se f(x) e g(x) forem ambas côncavas (concavas) e além disso, qualquer delas, ou ambas, for estritamente concava (estritamente convexa), então f(x) + g(x) é estritamente côncava (convexa).*

Demonstração. Imagine que *f(x)* e *g(x)* são ambas funções côncavas:

$$\theta f(u)+(1-\theta)f(v)\leq f\left[\theta u+(1-\theta)v\right]$$

e

$$\theta g(u)+(1-\theta)g(v)\leq g\left[\theta u+(1-\theta)v\right]$$

Somando obtermos a seguinte desigualdade:

$$\theta\left[f\left(u\right)+g\left(u\right)\right]+(1-\theta)\left[f(v)+g(v)\right]\leq f\left[\theta u+(1-\theta)v\right]+g\left[\theta u+(1-\theta)v\right]$$

O que mostra que $\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]$ gera uma f côncava. A demonstração para funções convexas é análoga. A demonstração também vale para a forma estrita. □

Exercício. Verifique a concavidade ou convexidade de $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$. Sejam $u=(u_1,u_2)$ e $v=(v_1,v_2)$

$$f(u_1,u_2)=u_1^2+u_2^2$$

$$f(v_1,v_2)=v_1^2+v_2^2$$

Usando $\theta f(u) + (1-\theta) f(v) \left\{ \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \right\} f\left[\theta u + (1-\theta) v\right] \rightarrow$em igualdade

$$\theta\left[u_1^2 + u_2^2\right] + (1-\theta)(v_1^2 + v_2^2) = f\left[\theta u_1 + (1-\theta)v_1, \theta u_2 + (1-\theta)v_2\right]$$

$$\theta\left[u_1^2 + u_2^2\right] + (1-\theta)(v_1^2 + v_2^2) = \left[\theta u_1 + (1-\theta)v_1\right]^2 + \left[\theta u_2 + (1-\theta)v_2\right]^2$$

Solucionando o lado direito:

$$\begin{gathered} \theta^2 u_1^2 + 2\theta u_1(1-\theta)v_1 + (1-\theta)^2 v_2^2 + \theta^2 u_2^2 + 2\theta u_2(1-\theta)v_2 \\ +(1-\theta)^2 v_2^2 + \theta^2\left[u_1^2 + u_2^2\right] + (1-\theta)^2(v_1^2 + v_2^2) + 2\theta\,(1-\theta)\left[u_1 v_1 + u_2 v_2\right] \end{gathered}$$

Subtraindo os dois lados **Esquerda-Direita**

$$\theta(1-\theta)\left[u_1^2 + u_2^2\right] + \theta(1-\theta)(v_1^2 + v_2^2) - 2\theta(1-\theta)\left[u_1 v_1 + u_2 v_2\right]$$

$$\theta(1-\theta)\left[(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2\right]$$

$\theta \in (0,1)$ então $\theta(1-\theta) > 0$, e (u_1, u_2) e (v_1, v_2) são pontos distintos $u_1 \neq v_1$ e $u_2 \neq v_2$. Assim a desigualdade estrita ($>$) vale e $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ é estritamente convexa.

Ex2: Pelo Teorema 2 $f(x_2, x_2) = -x_2^2 - x_2^2$ é estritamente côncava.

Ex3: Verifique a concavidade ou convexidade de $z = f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 \rightarrow$ **É convexa mas não estritamente.**

$$f(u) = f(u_1, u_2) = (u_1 + u_2)^2$$

$$f(v) = f(v_1, v_2) = (v_1 + v_2)^2$$

$$\begin{aligned} f\left[\theta u + (1-\theta)v\right] = \;& \left[\theta u_1 + (1-\theta)v_1 + \theta u_2 + (1-\theta)v_2\right]^2 \\ & \left[\theta(u_1^2 + u_2^2)^2 + (1-\theta)(v_1^2 + v_2^2)^2\right] \end{aligned}$$

Usando: $\theta f(u) + (1-\theta) f(v) = f\left[\theta u + (1-\theta)v\right]$

Subtraindo o lado direito do lado esquerdo:

$$\theta\,(1-\theta)\,(u_1 + u_2)^2 - 2\theta\,(1-\theta)\,(u_1 + u_2)(v_1 + v_2) + \theta\,(1-\theta)\,(v_1 + v_2)^2$$

$$\theta\,(1-\theta)\left[(u_1+u_2)-(v_1+v_2)\right]^2$$

$\theta\,(1-\theta) > 0$, mas $(u_1+u_2)-(v_1+v_2) \rightarrow$ pode ser $=0$ então é convexa mas não estrita.

16.1 Diferenciabilidade e convexidade

Definição. Uma função diferenciável $f(x)$ é $\left\{\begin{array}{c}\text{côncava}\\ \text{convexa}\end{array}\right\}$se e somente se para qualquer dado ponto u e qualquer outro v no domínio:

$$f(v)\left\{\begin{array}{c}\leq\\ \geq\end{array}\right\}f(u)+f^{'}(u)(v-u)$$

(Inclinação do segmento de reta $AC = \frac{DC}{AD}$)

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leq \text{(inclinação AB) } = f^{'}(u) \rightarrow \textbf{Teorema do Valor Médio}$$

Em termos iguais para n variáveis a definição precisa de uma modificação sutil: Uma função diferenciável $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ é $\left\{\begin{array}{c}\text{côncava}\\ \text{convexa}\end{array}\right\}$se, e somente se, para qualquer ponto dado $u=(u_1,\ldots,u_n)$ e qualquer ponto $v=(v_1,\ldots,v_n)$ no domínio

$$f(v)\left\{\begin{array}{c}\leq\\ \geq\end{array}\right\}f(u)+\sum_{j=1}^{n} fj(u)(vj-uj)$$

onde $fj(u)=\frac{\partial f}{\partial xj}$

Definição. Uma função c^2 $z=f(x_1,\ldots,x_n)$ é $\left\{\begin{array}{c}\text{côncava}\\ \text{convexa}\end{array}\right\}$ se e somente se, d^2z (diferencial de segunda ordem) for $\left\{\begin{array}{c}\text{negativa}\\ \text{positiva}\end{array}\right\}$ semidefinida em toda a sua extensão. A função citada é estritamente $\left\{\begin{array}{c}\text{côncava}\\ \text{convexa}\end{array}\right\}$se (mas não somente se) d^2z for $\left\{\begin{array}{c}\text{negativa}\\ \text{positiva}\end{array}\right\}$ definida em toda sua extensão.

Exemplo. :

$$f(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2^2 \tag{23}$$

Lado esquerdo :

$$v_1^2+v_2^2 \tag{24}$$

Lado direito

$$u_1^2+u_2^2+2u_1(v_1-u_1)+2u_2(v_2-u_2)$$

Subtraindo (1) - (2)

$$v_1^2 + v_2^2 + u_1^2 + u_2^2 - 2u_1v_1 - 2u_2v_2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2$$

Visto que $(v_1, v_2) \neq (u_1, u_2) \rightarrow\backslash$ desigualdade estrita role
Estritamente Convexa!
Pelo hessiano

$$f_{11} = 2,\ f_{12} = 0\ f_{11} > 0;\ DET > 0$$

$$f_{22} = 2,\ f_{21} = 0 \overset{DET}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = 4 > 0$$

Positiva definida convexide estrita

16.2 Conjunto Convexo

Definição. Seja um conjunto S em um espaço bidimensional ou tridimensional. Se, para quais dois pontos no conjunto S, o segmento de reta que liga esses dois pontos estiver contido em S, então diz-se que S é convexo.

16.3 Combinação convexa

Definição. Uma combinação linear de dois vetores u e v: k_1u+k_2v onde k_1k_2 são escalares. Se k_1e $k_2 \in [0, 1]$ e sua soma $(k_1+k_2 = 1)$ é igual a 1 diz-se que a combinação linear é uma combinação convexa de dois vetores u e v, e pode ser escrita como: $\theta u+(1-\theta)\,v\ \theta \in [0, 1]$

Ex.:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

A combinação convexa pode ser interpretada como uma média ponderada, de dois vetores. O domínio de funções côncavas e convexas exigem que seja um conjunto convexo.

Definição. Um conjunto S é convexo se e somente se para quaisquer pontos $u \in S$ e $v \in S$ para todo o escalar $\theta \in [0, 1]$ $w = \theta u + (1-\theta)\,v\ \in S$

$$S^{\leq} \equiv \{x \mid f(x) \leq k\}\,[f(x) \text{ convexa}]$$

$$S^{\leq} \equiv \{x \mid g(x) \geq k\}\,[g(x) \text{ concava}]$$

16.4 Aplicações na economia

Decisão de produção de uma empresa. Considere uma empresa cuja função lucro seja:

$$\pi = R - C = PQ - wL - rK$$

$$q = L^{\alpha}.K^{\alpha},\ \alpha < \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = L^{\alpha}p.\alpha K^{\alpha-1} - r = 0 \rightarrow (1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = K^{\alpha}p\alpha L^{\alpha-1} - w = 0 \rightarrow (2)$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial K^2} = \alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{\alpha}p$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial L^2} = \alpha(\alpha-1)L^{\alpha-2}K^{\alpha}p$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial K \partial L} = \alpha^2 pK^{\alpha-1}L^{\alpha-1}$$

$$H = \begin{vmatrix} \alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{\alpha}p & \alpha^2 pK^{\alpha-1}L^{\alpha-1} \\ \alpha^2 pK^{\alpha-1}L^{\alpha-1} & \alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{\alpha}p \end{vmatrix}$$

$$H_1 = p.\alpha(\alpha-1)L^{\alpha}K^{\alpha-2} < 0$$

$$H_2 = p^2.\alpha^2\underbrace{(\alpha-1)^2}_{\alpha^2-2\alpha+1}K^{2(\alpha-2)}L^{2(\alpha-2)} - \alpha^4p^2K^{2(\alpha-2)}L^{2(\alpha-2)}$$

$$\alpha^2p^2K^{2(\alpha-2)}L^{2(\alpha-2)}(1-2\alpha) > 0$$

para $\alpha < \frac{1}{2}$ H_1 e H_2 são satisfeitas então H é negativa definida para isto tem-se máximo. Usando a equação 1

$$L^{\alpha}p\alpha = rK^{1-\alpha}$$

$$L^{\alpha}\frac{p\alpha}{r} = K^{1-\alpha}$$

$$L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(\frac{p\alpha}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = K\ (3)$$

$$w.L^{1-\alpha} = K^{\alpha}.p\alpha$$

$$w.L^{1-\alpha} = L^{\frac{\alpha^2}{1-\alpha}} \left(\frac{p\alpha}{r}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} .p\alpha$$

$$w.L^{1-\alpha} = L^{\frac{\alpha^2}{1-\alpha}} .p\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}} .r^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}$$

$$L^{\frac{(1-\alpha)^2-\alpha^2}{1-\alpha}} = w^{-2}(p\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} .r^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}$$

$$L^{\frac{-2\alpha+1}{1-\alpha}} = w^{-2}(p\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} .r^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}$$

$$L^{*} = (p\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} .r^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} .w^{\frac{+(1-\alpha)}{1-2\alpha}}$$

$$L^{*} = \left(p\alpha w^{1-\alpha} r^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-2\alpha}} \quad (4)$$

(4) em (3)

$$K = \left[\left(p\alpha w^{1-\alpha} r^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-2\alpha}}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} . \left(\frac{p\alpha}{r}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$K = (p\alpha)^{\frac{1}{(1-2\alpha)}\cdot\frac{1}{(1-\alpha)}} .w^{\frac{-\alpha}{1-2\alpha}} .r^{\frac{-\alpha^2}{(1-2\alpha)(1-\alpha)}} \left(\frac{p\alpha}{r}\right)^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)(-1)}}$$

$$K = (p\alpha)^{\frac{\alpha+2-2\alpha}{1-2\alpha.(1-\alpha)}} . w^{\frac{-\alpha}{1-2\alpha}} . r^{\frac{-\alpha^2-1-2\alpha}{(1-2\alpha)(1-\alpha)}}$$

$$K = \left(p\alpha w^{-\alpha} r^{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{1-2\alpha}}$$

$$Q^{*} = K^{\alpha}.L^{\alpha}$$

$$= \left(p\alpha w^{-\alpha} r^{\alpha-1}\right)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}} . \left(p\alpha w^{1-\alpha} r^{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}}$$

$$= (p\alpha)^{\frac{2\alpha}{1-2\alpha}} \left(\frac{1}{wr}\right)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}}$$

$$= \left(\frac{p^2\alpha^2}{wr}\right)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}}$$

16.5 Quase-concavidade e Quase-convexidade

Definição. Uma função f é $\left\{\begin{array}{c}\text{quase-côncava}\\ \text{quase-convexa}\end{array}\right\}$ se, e somente se, para qualquer par de pontos distintos u e v no domínio (conjunto convexo) de f e para $\theta \in (0,1)$

$$f(v) \geq f(u) \Rightarrow f\left[\theta u + (1-\theta)v\right]\left\{\begin{array}{l}\geq f(u)\\ \leq f(v)\end{array}\right.$$

Uma função $f(x)$,onde x é um vetor de variáveis é $\left\{\begin{array}{c}\text{quase-côncava}\\ \text{quase-convexa}\end{array}\right\}$se e somente se para qualquer constante k o conjunto $\left\{\begin{array}{c}S^{\geq} \equiv \{x \| f(x) \geq k\}\\ S^{\leq} \equiv \{x \| f(x) \leq k\}\end{array}\right\}$ for um conjunto convexo.

Exemplo. Veja se $f(x) = x^2$, definida $f : R_+ \to R_+$ é convexa (quase) ou côncava (quase). Aplicando a definição1:

$$f(u) = u^2,\ f(v) = v^2 \text{ e } f\left[\theta u + (1-\theta)v\right] = \left[\theta u + (1-\theta)v\right]^2$$

Suponha que $f(v) \geq f(u)$, isto é, $v^2 \geq u^2$, isto é, $v \geq u$ ou $v > u$, já que $v \neq u$, então temos que

$$f(v) > f(u)$$

$$f(v) > f\left[\theta u + (1-\theta)v\right]$$

$$v^2 > \left[\theta u + (1-\theta)v\right]^2 > u^2\ \theta \in (0,1)$$

$$f(v) > f\left[\theta u + (1-\theta)v\right] > f(u)$$

Então a função é quase côncava e quase convexa simultaneamente. As definições anteriores, não demandam diferenciabilidade, mas podem ser definidas alternativamente da seguinte forma:

Definição. Uma função diferenciável de uma só variável, $f(x)$, é $\left\{\begin{array}{c}\text{quase-côncava}\\ \text{quase-convexa}\end{array}\right\}$ se e somente se para quaisquer par de pontos (distintos) u e v no domínio,

$$f(v) \geq f(u) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}f'(u)(v-u)\\ f'(v)(v-u)\end{array}\right\} \geq 0$$

Para n varáveis:

Uma função diferenciável $f(x_1, \ldots, x_n)$ é $\left\{\begin{array}{c}\text{quase-côncava}\\ \text{quase-convexa}\end{array}\right\}$ se e somente se para quaisquer “2 pontos” distintos $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $v \neq (v_1, \ldots v_n)$ no domínio.

$$f(v) \quad \geq \quad f(u) \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} f_j'(u)(v_j - u_j) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} f_j'(v)(v_j - u_j) \end{cases}$$

Se a função for C^2 então poderemos utilizar o determinantes aumentado:

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 0 & f_1 \\ f_1 & f_{11} \end{vmatrix}; \ |B_2| = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$

Para que $f(x_1, \ldots, x_n)$ seja quase-côncava, é necessário que:

$$|B_1| \leq 0 \ |B_2| \geq 0 \ \ldots, \ |B_n| \begin{Bmatrix} \leq 0 \\ \geq 0 \end{Bmatrix} \text{ se } n \text{ for } \begin{Bmatrix} \text{ímpar} \\ \text{par} \end{Bmatrix}$$

A definição para “ estritamente” é análoga retirando-se a igualdade.

Exemplo. Mostre que $f(x, y) = x^a.y^a (x, y > 0; 0 < a, b < 1)$ é estritamente quase-côncava

$$f_x = ax^{a-1}y^b$$

$$f_y = bx^a y^{b-1}$$

$$f_{xy} = abx^{a-1}y^{b-1}$$

$$f_{xx} = a(a-1)x^{a-1}y^b$$

$$f_{yy} = b(b-1)x^a y^{b-1}$$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & f_x & f_y \\ f_x & f_{xx} & f_{xy} \\ f_y & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} \ B_1 = \begin{vmatrix} 0 & ax^{a-1}y^b \\ ax^{a-1}y^b & a(a-1)x^{a-1}y^b \end{vmatrix} = -2ax^{2(a-1)}y^{2b} < 0$$

$$B_2 = B \begin{vmatrix} 0 & ax^{a-1}y^b & bx^a y^{b-1} \\ ax^{a-1}y^b & a(a-1)x^{a-1}y^b & abx^{a-1}y^{b-1} \\ bx^a y^{b-1} & abx^{a-1}y^{b-1} & b(b-1)x^a y^{b-1} \end{vmatrix}$$

$$\left[2a^2b^2 - a(a-1)b^2 - a^2b(b-1)\right] x^{3a-2}y^{3b-2} > 0$$

Quase-concavidade mais o conjunto restrição convexo de f^* indica um máximo absoluto restrito. Se f for estritamente quase-concava f^* o máximo absoluto restrito é único.

17 Auto vetores e autovalores

Os autovalores de uma matriz de uma matriz $n \times n$ são os n números que resumem as propriedades essenciais daquela matriz. Como esses n números realmente caracterizam a matriz sendo estudada também são denominadas algumas vezes "valores características" ou "valores próprios".

Definição. Seja A uma matriz $n \times n$. Um autovalor de A é um número tal que, se for subtraído de cada entrada na diagonal de A, converte A numa matriz singular. Subtrair um escalar r de cada entrada diagonal de A é o mesmo que subtrair r vezes a matriz identidade I de A. Portanto, r é um autovalor de A se, e somente se, $A - rI$ é uma matriz singular.

Exemplo 1. .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Subtraindo 2 de cada entrada diagonal A transformamos essa matriz em singular.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema. *As estradas de uma matriz diagonal D são autovalores de D.*

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 2 e 3 são autovalores de D.

Teorema. *Uma matriz quadrada A é singular se, e somente se,0 é um autovalor de A.*

$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B - rI = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ ou $B - rI = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ dado que $r = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Definição. Matriz Singular. Uma matriz A é singular se, e somente se, $detA = 0$.

Nesse caso r é um autovalor de A, ou seja, $A - rI$ é uma matriz singular se, e somente se,

$$det(A - rI) = 0$$

Para $A_{n \times n}$ o lado esquerdo da equação acima é um polinômio de grau n na variável r, denominado polinômio característico de A. O número r é um autovalor de A se, e somente se, r é uma zero do polinômio característico de A.

Seja $A_{2 \times 2}$:

$$der(a - rI) = det \begin{bmatrix} a11 - n & a12 \\ a21 & a22 - r \end{bmatrix} = r^2 - (a_{11} + a_{22})r + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

Portanto, uma matriz 2×2 tem no máximo dois autovalores e uma matriz $n \times n$ no máximo n autovalores.

Definição. Quando r é um autovalor de A e um vetor não nulo V tal que $(A - rI).V = 0$. Então, denominamos V um autovetor de A associado ao autovalor r.

$$Av - rIV = 0$$
$$Av = rV$$

Teorema. *Seja $A_{n \times n}$ e r um escalar.*

Então, as seguintes afirmações são equivalentes.

a. A subtração de r de cada elemento da diagonal de A transforma A em uma matriz Singular;

b. $A - rI$ é uma matriz Singular;

c. $det(A - rI) = 0$;

d. $det(A - rI)V = 0$ para algum vetor V não nulo;

e. $AV = rV$

Exemplo. Vejamos a seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$det(A - rI) = det \begin{vmatrix} (-1-r) & 3 \\ 2 & (0-r) \end{vmatrix}$$

$$(-1-r).-r-6->(1+r).r-6 = r^2+r-6 = (r+3)(r-2) = 0$$

As raízes do polinômio característico -3 e 2 (autovalores)

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2.-4.1-6}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vejamos os autovetores

$$(A - rI)V = 0$$

$$(A - 2I)V = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right) V = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-3V_1 + 3V_2 = 0 \ \rightarrow \ V_1 = V_2$$

$$2V_1 - 2V_2 = 0->V_2 = V_1$$

$$(A - (-3)rI)V = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) V = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$2V_1 + 3V_2 = 0 \ \rightarrow \ V_1 = \frac{-3}{2} V_2$$

$$\frac{-6}{2}V_2 + 3V_2 = 0$$

$$r = -3 \;\Rightarrow\; \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$r = 2 \;\Rightarrow\; \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Definição. O conjunto unidimensional da equação linear $(a - rI)V = 0$, incluindo $V = 0$, é denominado auto-espaço de A em relação a r.

Exemplo.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(B - rI) = det \begin{bmatrix} (1-r) & 0 & 2 \\ 0 & (5-r) & 0 \\ 3 & 0 & (2-r) \end{bmatrix} = (1-r)(5-r)(2-r) - 6(5-r)$$

$$(5-r)\left[(1-r)(2-r) - 6\right] = (5-r)\left[2 - r - 2r + r^2 - 6\right] = (5-r)(r^2 - 3r - 4)$$

$$(r-4)(r+2) = (r^2 + r - 4r)$$

Os autovalores de B são: 5, 4 e -1.

$(5 - r) = 0$

$(r - 4) = 0$

$(r + 1) = 0$

Calculamos o espaço nulo de $(B - 5I)$

$$(B - 5IV) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4V_1 + V_2 \\ 0 \\ 3V_1 - 3V_3 \end{bmatrix}$$

Cuja solução é $V_1 = V_3 = 0$ e V_2livre

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = V_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{auto vetor para } r = 5$$

Para $r = -1$

$$(B - (-1)I)V = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$2V_1 + 2V_3 = 0$$

$$6V_2 = 0$$

$$3V_1 + 3V_3 = 0$$

Solução: $V_2 = 0$ e $V_1 = -V_3$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Para $r = 4$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Em alguns casos é necessário utilizar eliminação gaussiana para solucionar o sistema linear $(A - rI)V = 0$

Teorema. *Os autovalores de uma matriz triangular são as suas entradas diagonais.*

Triangular superior 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \text{->} \; det(A - rI) = \begin{vmatrix} (a_{11} - r) & a_{12} \\ 0 & (a_{22} - r) \end{vmatrix} = (a_{11} - r)(a_{22} - r) = 0$$

Isso ocorre se, e somente se $r = 0$

Teorema. *Seja A uma matriz invertível. Se $(A - rI)V = 0$ então $(A^{-2} - \frac{1}{r}I)V = 0$, isto é, se A é invertível r é seu autovalor se, e somente se, $\frac{1}{r}$ é um autovalor de A^{-1}.*

Demonstração.

$$(A - rI)V = 0$$

$$AV = rV \implies A^{-1}AV = A^{-1}rV \implies IV = A^{-1}rV \implies V = A^{-1}rV$$

$$\frac{V}{r} = A^{-1}V \implies V(A^{-1} - \frac{1}{r}) = 0$$

$$(A^{-1} - \frac{1}{r}I)V = 0$$

□

17.0.1 Propriedades de autovalores

Do ponto de vista prático, os autovalores de uma matriz A de tamanho $k \times k$ são simplesmente os zeros do polinômio característico de A, o polinômio de grau K dado por: $p(r) = det(A - rI)$

De fato, há 3 possibilidades para as raízes de $p(r)$.
1.$p(r)$ tem K raízes reais distintas;
2.$p(r)$ tem algumas raízes repetidas, ou
3.$p(r)$ tem algumas raízes complexas;

17.1 Traço como soma de autovalores

Definição. O traço de uma matriz quadrada é a soma das suas entradas diagonais

$$trA = a_{11} + a_{22} + a_{33} + ... + a_{kk}$$

Teorema. *Seja $A_{k \times k}$ com autovalores $r_1, ..., r_k$. Então,*

$r_1 + r_2 + ... + r_k = trA$, *e*
$r_1.r_2...r_k = detA$

Demonstração. .

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$p_A(r) = det \begin{vmatrix} (a-r) & b \\ c & (d-r) \end{vmatrix} = r^2 - (a+d)r + (ad-bc)$$

$p_A(r) = Br^2 - B^{(r_1+r_2)^r} + Br_1r_2$
$p_A(r) = B(r_1 - r)(r_2 - r)$

Duas formas de dizermos o mesmo

Coeficiente $r^2 : 1 = B$

Coeficiente de $r : -(a+d) = -B(r_1 + r_2)$

Termo constante: $ad - bc = Br_1r_2$ □

Portanto:

$$\beta = 1; trA = (a+d) = r_2 + r_1 \text{ e } detA = ad - bc = r_1r_2$$

Exemplo. Para matrizes markovianas a soma da coluna é sempre 1, logo ele é um autovalor.

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix}$$

$$detA = \left(\frac{3}{10}.\frac{4}{10} - \frac{7}{10}.\frac{6}{10}\right) = \frac{12}{10} - \frac{42}{10} = -0,3$$

$$r_1r_2 = -0,3 \tag{25}$$

$$r_1 + r_2 = 0,7 \tag{26}$$

$$r_1^2 + r_1r_2 = 0,7r_1$$

$$r_1^2 - 0,3 = 0,7r_1$$

$$r_1^2 - 0,7r_1 - 0,3 = 0$$

$$r_1 = \frac{+0,7 \pm \sqrt{(-0,7)^2 - 4.1 - 0,3}}{2.1}$$

$$r_1 = \frac{0,7 \pm \sqrt{1,69}}{2}$$

$$r_1 = \frac{0,7 \pm 1,3}{2}$$

$$r_1 = -0,3$$

$$r_1 = 1$$

$$\text{Se } r_1 = 1$$

$$r_2 = -0,3$$

$$\text{Se } r_1 = -0,3$$

$$r_2 = 1$$

17.2 Autovalores repetidos

Definição: Uma matriz A que tem um autovalor de multiplicidade $m > 1$, mas não possui m autovalores independentes associados a esse autovalor, é denominada matriz não diagonalizável ou defectiva.

Teorema. Seja A uma matriz 2×2 com dois autovalores iguais. Então, A é diagonalizável se, e somente se, A já é diagonal.

Demonstração. Se A é diagonalizável pela mudança de variáveis P, então as entradas na diagonal de $P^{-1}AP$ são os autovalores de A. Seja r^* o único autovalor de A, Então, $P^{-1}AP$ deve ser a matriz $\begin{pmatrix} r^* & 0 \\ 0 & r^* \end{pmatrix} = r^*I$:

$$P^{-1}AP = r^*I$$

ou equivalentemente,

$$A = P(r^*I)P^{-1} = r^*PIP^{-1} = rI$$

□

Definição: Seja r^*um autovalor da matriz A. Um vetor (não-nulo) v tal que $(A-r^*I)v \neq 0$ mas $(A-r^*I)^m v = 0$ para algum inteiro $m > 1$ é denominado um autovetor generalizado de A associado a r^*.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad r = 3 \text{ e } 3$$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ o autovetor generalizado v_2 é uma solução de $(A-3I)v_2 = v_1$ou

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tome, por exemplo, $v_{21} = 1, v_{22} = 0$ e forme

$$P = [v_2 = v_1] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

checamos que:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Teorema. Seja A uma matriz 2×2 com dois autovalores iguais $r = r^*$. Então,

(a) ou A tem dois autovetores independentes associados a r^*,e neste caso, A é a matriz diagonal r^*I.

(b) ou A tem somente um autovetor independente, digamos v_1 tal que $(A-r^*I)v_2 = v_1$e, se $P = [v_1v_2]$ então $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} r^* & 1 \\ 0 & r^* \end{pmatrix}$.

18 Equações Diferenciais Ordinárias

Pense no crescimento de fundos aplicados na cardeneta de poupança. Suponha que esse investimento cresça a uma taxa fixa r que satisfaça a seguinte equação em diferenças:

$$\frac{y(t+1) - y(t)}{y(t)} = r \text{ ou } y(t+1) = (1+r)y(t) \tag{27}$$

Imagine que essa taxa de juros é paga a cada variação no tempo $\triangle t$, então teríamos:

$$\frac{y(t+\triangle t) - y(t)}{\triangle t} = ry(t)$$

$$\lim_{\triangle t \to 0} y(t) = \frac{y(t+\triangle t) - y(t)}{\triangle t} = \frac{dy(t)}{dt} = ry(t) \tag{28}$$

Por conveniência escreveremos $\dot{y} = \frac{dy(t)}{dt} = ry(t)$. Se aplicarmos o ln em (2) e tomarmos a derivada em relação ao tempo teremos:

$$ln(\dot{y}) = ln(r) + ln(y(t))$$

$$\frac{1}{\dot{y}}\ddot{y} = \frac{1}{y}\ddot{y}$$

$$\frac{\ddot{y}}{\dot{y}} = \frac{\dot{y}}{y}$$

$$g_{\ddot{y}} = g_{\dot{y}}$$

Definição. Equação diferencial ordinária. Uma equação diferencial ordinária é uma operação que descreve um relacionamento entre uma função de uma varável e sua derivada.

Exemplo. Veja a seguinte equação:

$$\dot{y}\left(t\right) = 2y\left(t\right) \text{ ou } \dot{y} = 2\dot{y}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2y$$

$$\frac{dy}{y} = 2dt$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int dt$$

$$ln(y) = 2t + c$$

$$e^{ln(y)} = e^{2t}$$

$$y = e^{2t}$$

Definição. De modo mais geral $y(t) = ke^{2t}$ para qualquer constante K. Essa constante é determinada pelo valor inicial y, isto é, $y(t_0)$.

Definição. Equação Diferencial Parcial. As equações diferenciais que descrevem um relacionamento entre uma função de várias variáveis e suas derivadas parciais são chamadas de equações diferenciais parciais.

Exemplo:

$$\dot{y} = y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = y^2$$

$$\int dyy^{-2} = \int dt$$

$$-\frac{1}{y} = t + c$$

$$-\frac{1}{t} = y$$

Definição. Uma equação diferencial ordinária é uma equação $\dot{y} = F(y, t)$ entre a derivada de uma função desconhecida $y(t)$ e uma expressão $F(y, t)$ envolvendo y e t, isto é, se a equação pode ser escrita como $\dot{y} = F(y)$, nós a chamamos de autônomo ou tempo independente.

Retomando a equação $\dot{y} = ry$, ela também poderia ser usada para descrever o tamanho de uma população a uma taxa de crescimento constante r. Esse pressuposto de crescimento constante é às vezes chamado de *lu* de Malthus. A solução geral para esta equação é $y(t) = ke^{rt}$. No entanto, podemos especificar um valor inicial para o tamanho populacional. Com uma constante k pré determinada. Ao fazermos $y(0) = y_0$,(um valor constante) o problema de encontrarmos uma função $y(t)$ que satisfaça a essas condições é chamado de problemas de valor inicial.

Exemplo. Vejamos agora o exemplo da equação logística

$$\dot{y} = y(100 - 2y)$$

A função constante $y = 50 \, \forall t$ é a solução que faz ambos os lados da equação serem zero. Essa solução constante, muitas vezes é chamada de solução estacionária ou de estado estacionário. Outro ponto importante é definirmos que uma solução parametrizada $y(t, k)$ de uma equação diferencial $\dot{y} = F(y, t)$ échamda de *solução* geral.

18.1 Soluções explícitas

18.1.1 Equações lineares de primeira ordem

Seja $\dot{y} = ay$ sendo a uma constante. A solução geral para esta equação é

$$y(t) = ke^{at} \ (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = kae^{at}$$

$$\dot{y} = ke^{at}a$$

(2) Seja $a, b > 0$ a solução geral para a equação:

$$\dot{y} = ay + b$$

$$y = \frac{-b}{a} + ke^{at} \longrightarrow ay = (-b + ke^{at})$$

Para verificar isso insira a solução candidata dentro da equação:

$$\dot{y}(t) = ake^{at}$$

$$ay(t) + b = (-b + ake^{at}) + b = ake^{at}$$

Note que $y(t) = \frac{-b}{a}$ é uma solução de estado estacionário. Agora examinaremos versões não autõnomas dessas duas classes: $\dot{y} = a(t)y$ (3)

A solução geral é:

$$y(t) = ke^{\int^t a(r)dr} \text{ ou } y = ke^{\int^t a}$$

.

$$\dot{y} = (a(t))y + b(t) \quad (4)$$

$$y(t) = \left[k + \int^t b(s)e^{-\int^s a(u)du}ds\right] e^{\int^t a(s)ds} \quad (10)$$

Para encontrar (10) como solução, escreva a equação diferencial como $\dot{y} - a(t)y = b(t)$ e multiplique cada termo por $exp\left(-\int^t a(s)ds\right)$

$$\dot{y}(t)e^{-\int^t a(s)ds} - a(t)y(t)e^{-\int^t a(s)ds} = b(t)e^{-\int^t a(s)ds} \quad (11)$$

Como o lado esquerdo de (11) é precisamente a derivada da expressão $y(t)exp\left(-\int^t a(s)ds\right)$então (11) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)e^{-\int^t a(s)ds}\right) = b(t)e^{-\int^t a(s)d(s)} \quad (12)$$

Integrando ambos os lados de (12) e multiplicando por $e^{\int^t a}$ para obtermos (10). Chamamos a expressão $e^{-\int^t a(s)ds}$de fator integrante. Alternativamente podemos escrever a equação (10) do seguinte modo:

$$y(t) = \left[k + \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt\right] e^{\int a(t)dt} \ (10.1)$$

Definição. Uma equação diferencial $\dot{y} = F(y,t)$ é chamada separável se $F(y,t)$ puder ser escrita como o produto: $F(y,t) = g(y)h(t)$.

Exemplos:

$$\dot{y} = y^2 + t^2;\ \dot{y} = a(t) + b(t)\ e\ \dot{y} = ty + t^2y^2$$

Solução geral da equação separável:

$$\dot{y} = g(y)h(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(y)h(t)$$

$$\frac{d(y)}{g(y)} = h(t)dt$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)dt$$

Outro:

$$\dot{y} = t^2y$$
$$\frac{dy}{dt} = yt^2$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int t^2dt$$

$$ln(y) = \frac{t^3}{3} + c$$
$$y = e^{\frac{t^3}{3}+c}$$

Equação diferencial de primeira ordem com termos constantes:

$$\dot{y} = 5 - y$$

Note que $a = -1$ e $b = 5$. Então utilizamos a equação:

$$y = \frac{-b}{a} + ke^{at}$$

Para verificar isso insira a solução candidata dentro da equação:

$$y = 5 + ke^{-t}$$

Utilizando a condição inicial $y\,(1) = 1$ teremos que:

$$1 = 5 + ke^{-1}$$

$$k = -4e$$

O que implica que:

$$y = 5 - 4e^{1-t}$$

Equação diferencial de primeira ordem com $a(t)$ e $b(t)$

$$\dot{y} = t - y$$

Note que $a = -1$ e $b = t$. Então utilizamos a equação:

$$y(t) = \left[k + \int b(t)e^{-\int a(t)dt}dt\right] e^{\int a(t)dt} \; (10.1)$$

$$y(t) = \left[k + \int te^{\int dt}dt\right] e^{-\int dt}$$

$e^{\int dt} = t + c$ (ignoraremos a constante)

$$y(t) = \left[k + \int te^{t}dt\right] e^{-t}$$

Note que caímos na seguinte integral por partes $\int te^{t}dt$. Lembre da regra do produto que é:

$$\frac{d\,(uv)}{dx} = u'x + v'u$$

Em que u e v são funções de x. Integre os dois lados para obter:

$$uv = \int u'vdx + \int v'udx$$

Defina $u = t$ e $v = e^{t}$. Assim, $u' = 1$ e $v' = e^{t}$.

$$te^{t} = \int e^{t}dx + \int te^{t}dx$$

Rearranjando a equação:

$$te^t - \int e^t dx = \int te^t dx$$

Solucionando:

$$te^t - e^t = \int te^t dx$$

$$e^t\,(t-1) = \int te^t dx$$

Inserindo na solução de y:

$$y(t) = \left[k + e^t\,(t-1)\right] e^{-t}$$

$$y(t) = ke^{-t} + (t-1)$$

Usando a condição inicial $y\,(1) = 1$, teremos que:

$$1 = ke^{-1} + (1-1)$$

$$e = k$$

Então temos que:

$$y(t) = e^{1-t} + (t-1)$$

18.2 Equações lineares de segunda ordem

Nos concentraremos em equações lineares de segunda ordem que são homogêneas e possuem coeficientes constantes. Escreveremos essas equações do seguinte modo:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy + 0 \quad (23)$$

Se $a = 0 \rightarrow y = e^{rt}$

Para encontrearmos soluções, plugue $y = e^{rt}, \dot{y} = re^{rt}$ e $\ddot{y} = r^2e^{rt}$e teremos:

$$ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0$$

Como e^{rt} é não nulo, então $y = e^{rt}$ é uma solução de (23) se, e somente se, r satisfaz a equação:

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(1) $\triangle > 0 \rightarrow 2$ raízes reais

(2) $\triangle < 0 \rightarrow 2$ raízes complexas

(3) $\triangle = 0 \rightarrow 1$ raíz

Raízes reais distintas da equação característica

Teorema. *Se o polinômio característico* (24) *da equação diferencial de segunda ordem* (23) *possui duas raízes reais distintas* r_1*e* r_2*, então a solução geral de* (23) *é* $y(t) = k_1e^{r_1t} + k_2e^{r_2t}$

Demonstração. Como r_1e r_2 são as raízes do polinômio característico de $ar^2 + br + c = 0$, saberemos que ambas $y(t) = k_1e^{r_1t}$ e $y(t) = k_2e^{r_2t}$ são soluções da equação diferencial $a\ddot{y} + by + cy = 0$ (23). Uma consequência advinda da linearidade dessa equação é que se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são duas soluções de (23) então a soma $y_1(t) + y_2(t)$ aimda é uma solução de (23), já que

$$\Big(a(y_1 + y_{2)}\Big)^{\cdot\cdot} + b(y_1 + y_2)^{\cdot} + c(y_1 + y_2) = ((a\ddot{y} + b\dot{y}_1 + cy_1) + (a\ddot{y}_2 + b\,\dot{}_1 + cy_2) \dot{=} 0 + 0 = 0$$

$$y(t) = k_1e^{r_1t} + k_2e^{r_2t} \quad (26)$$

□

Portanto (26) é uma solução de (23). Finalmente, mostraremos que (26) é a solução geral, ou seja:

$$(a\ddot{y} + b\dot{y} + cy) = 0$$

$$y(t_0) = y_0$$

$$\dot{y}(t_o) = z_0 \ (27)$$

Dado qualquer problema de valor inicial existe uma única escolha de constantes de integração k_1^* e k_2^* tais que $y(t) = k_1^*e^{r_1t} + k_2^*e^{r_2t}$ é uma solução de (27). Para provar, considere $t_0 = 0$ e substitua o valor inicial (27) na solução (26)

$$y_1(0) = k_1e^{r_1.0} + k_2e^{r_2.0} = k_1 + k_2$$

$$y_2(0) = r_1 k_1^{r_1.0} + r_2 k_2^{r_2.0} = r_1 k_1 + r_2 k_2$$

o que leva à equação matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Como $r_1 \neq r_2$a matriz de coeficientes é não singular, dados quaisquer y_0 e z_0. Esse sistema possui uma única solução para k_1 e k_2. Isso prova que, dado qualquer problema de valor inicial (27), podemos mostrar k_1e k_2 tais que a solução (26) de (23) satisfaz as condições iniciais. Portanto, (26) é Solução geral de (23).

Exemplos:

$$\ddot{y} - y = 0 \; y(0) = \dot{y}(0) = 1$$

$$a\ddot{y} - cy = 0$$

$$r^2 - 1 = 0$$

$$r = \pm 1$$

$$y(t) = k_1 e^t + k_2 e^{-t}$$

$$y(0) = 1 \longrightarrow 1 = k_1 e^0 + k_2 e^{-0} \; (1)$$

$$\dot{y}(0) = 1 \longrightarrow 1 = k_1 e^0 + k_2 e^{-0} (2)$$

Somando (1) e (2)

$$2 = 2k_1$$

$$1 = k_1 \; (3)$$

Inserindo (3) em (2)

$$1 = 1 - k_2$$

$$k_2 = 0 \ (4)$$

A solução geral é:

$$y(t) = k_1 e^{t.r_1} + k_2 e^{-r_2} \longrightarrow y(t) = 1e^t$$

b)

$$\ddot{y} - 5\dot{y} + 6y = 0$$

$$y(0) = 3 \rightarrow \quad 3 = k_1 + k_2 \ (1)$$

$$\dot{y}(0) = 7 \rightarrow \quad 7 = 3k_1 + 2k_2 \ (2)$$

$$a = 1$$

Multiplique (1) por 2 e subtraia de (2)

$$b = -5$$

$$1 = k_1(3)$$

$$c = 6$$

Inserindo k_1 em (3)

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

$$r = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$k_2 = 2$$

$$r_1 \rightarrow 3$$

$$r_2 \longrightarrow 2$$

$$y = e^{3t} + 2e^{2t} \text{ (solução geral)}$$

$$y(0) = 3$$

$$y(3) = k_1 e^{3t} + k_2 e^{2t}$$

$$\dot{y}(0) = 7$$

$$7 = 3k_1 e^{3t} + 2k_2 e^{2t}$$

18.2.1 Raízes reais e iguais

Teorema. *Se o polinômio característico da equação diferencial linear de segunda ordem possui raízes iguais então a solução geral é*

$$y(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 t e^{r_1 t}$$

Exemplo. $\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0$ $y(0) = 2$; $\dot{y}(0) = 5$

$a = 1;\quad b = -4;\quad c = 4.$

$$y = k_1 e^{r_1 t} + k_2 t e^{r_1 t}$$

$$y = k_1 e^{2t} + k_2 t e^{2t}$$

$$y = e^{2t}(k_1 + tk_2)$$

$$\dot{y} = 2k_1 e^{2t} + k_2 e^{2t} + tk_2 e^{2t}$$

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.4}}{2}$$

$$r = 2$$

$$\dot{y} = e^{2t}(2k_1 + k_2(1 + 2t))$$

$$y(0) = 2 \longrightarrow 2 = k_1$$

$$\dot{y}(0) = 5 \longrightarrow 5 = 2k_1 + k_2 \longrightarrow k_2 = 1$$

$$y = e^{2t}(2 + t) \longrightarrow \text{Solução}$$

Teorema. *Se o polinômio característico da equação diferencial linear de segunda ordem tem raízes complexas $\alpha \pm i\beta$, ou seja, se $b^2 - 4ac < 0$ então a solução geral é $y(t) = e^{at}(c_1 cos\beta t \pm c_2 sen\beta t)$.*

18.3 Equações não homogêneas de segunda ordem

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g\,(t) \;\; (38)$$

A função $g(t)$ representa, especialmente em problemas mecânicos uma força externa, sem a qual a equação é autônoma. Para encontrarmos a solução geral de uma equação não autônoma, basta acharmos a solução geral da equação homogênea e uma solução particular da equação não homogênea.

Teorema. *Seja $y_p(t)$ uma solução particular qualquer da equação diferencial não homegênea $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g(t)$. Seja $k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$ uma solução geral da equação homogênea $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$ correspondente. Então, uma solução geral de (38) é $y(t) = k_1y_1(t) + k_2y_2(t) + y_p(t)$.*

18.3.1 Método dos coeficientes indeterminados

Nesse método procuramos uma solução particular de $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = g(t)$ que possua o mesmo formato de $g(t)$. Se $g(t)$ é uma função constante $g(t) = g(0)$ então uma solução particular da equação diferencial é a função constante $y(t) = g_0/c$.Se $g(t)$ é um polinômio t de grau j procuramos uma solução particular que se adeque a essa forma.

Exemplo. $\ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = 9t^2(40)$

A solução geral é

$$y(t) = k_1e^{3t} + k_2e^{-t}$$

$$a = 1;b = -2;\;\; c = -3;$$

$$y(t) = k_1e^{3t} + k_2e^{-t}$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1. - 3}}{2.1}$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$r_1 = 3$$

$$r_2 = -1$$

$$y_p(t) = At^2 + Bt + c$$

Derive o candidato e substitua em (40)

$$\dot{y}_p = 2At + B$$

$$\ddot{y}_p = 2A$$

$$9t^2 = \ddot{y}_p - 2\dot{y}_p - 3y_p$$

$$9t^2 = 2A - 2(2At + B) - 3(At^2 + Bt + c)$$

$$9t^2 = 2A - 4At - 2B - 3At^2 - 3Bt - 3c$$

$$9t^2 = t^2(-3A) + t(-4A - 3B) + 2A - 2B - 3C$$

Suponha que:

$$9t^2 + (0)t + (0) = (-3A)t^2 + (-4A - 3B)t + (2A - 2B - 3C)$$

Como os lados esquerdo e direito dessa equação são iguais para qualquer t, os coeficientes de cada potência t devem ser iguais:

$$9 = 3A \ (1)$$

$$0 = -4A - 3B \ (2)$$

$$0 = 2A - 2B - 3C \ (3)$$

Por (1) $A = -3$; Inserindo (1) em (2) $B = 4$. Usando essas duas informações em (3)

$$0 = -6 - 8 - 3c \longrightarrow c = -\frac{14}{3}$$

Portanto, uma solução particular é:

$$y_p(t) = -3t^2 + 4t - \frac{14}{3}$$

A solução geral:

$$y(t) = k_1 e^{3t} + k_2 e^{-t} - 3t^2 + 4t - \frac{14}{3}$$

Se um termo candidato da equação não homogênea for igual a um termo da solução geral da equação homogênea dizemos que o sistema está em ressonância. Em geral, multiplicamos o candidato natural $y_p(t)$ por t ou às vezes até por t^2, para encontrar um candidato com chances de ser uma solução particular da equação não homogênea.

18.3.2 Existência de soluções

Teorema. *Considere o problema de valor inicial $\dot{y} = f(t, y)$, $y(t_o) = y_o$ (42). Suponha que f é contínua no ponto (t_o, y_o). Então, existe uma função $I \to \mathbb{R}$ que é C^1 num intervalo aberto $I = (t_o - a,\, t_o + a)$ em torno de t_o e é tal que $y(t_o) = y_o$e $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ para cada $t \in I$, ou seja, $y(t)$ é uma solução do problema de valor incial (42). Além disso, se f é C^1 em $(t_o,\, y_o)$ então a solução $y(t)$ é única. Quaisquer duas soluções de (42) devem ser iguais entre si na intersecção de seus domínios.*

18.3.3 Retratos de Fase e equilíbrios em $\mathbb{R}^n$

O retrato de fase nos mostra como as soluções da equação diferencial evoluem ao longo do tempo. Vejamos o seguinte exemplo:

$$\dot{y} = y - y^3$$

Iremos verificar os valores de estado estacionário dessa equação diferencial, isto é, $\dot{y} = 0$

$$0 = y - y^3$$

$$0 = y - y^3$$

$$y = 0$$

$$y = \pm 1$$

Após encontrarmos as raízes (interceptos com o eixo x) veremos as taxas de crescimento e descrescimento da função $f(y) = y - y^3$, como segue:

$$f''(y) = 1 - 3y^2$$

$$f'(y) = 0 \rightarrow 1 - 3y^2 = 0 \rightarrow \frac{1}{3} = y^2 \rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \pm 0,58 = y$$

Vejamos $f'''(y)$:

$$f'''(y) = 0 \rightarrow -6y = 0 \rightarrow y = 0$$

Temos que zero é um ponto de inflexão. O próximo passo é fazermos o gráfico desta função. Note que se $-1 < y < 0$ então $f(y)$ é negativa. Isso também ocorre no intervalo (1,∞). Nos intervalos ($-\infty$, -1) e (0,1) $f(y)$ é positiva. Para finalizarmos o gráfico devemos inserir as setas que dão a ideia de movimento ou convergência. Faremos isso passo a passo:

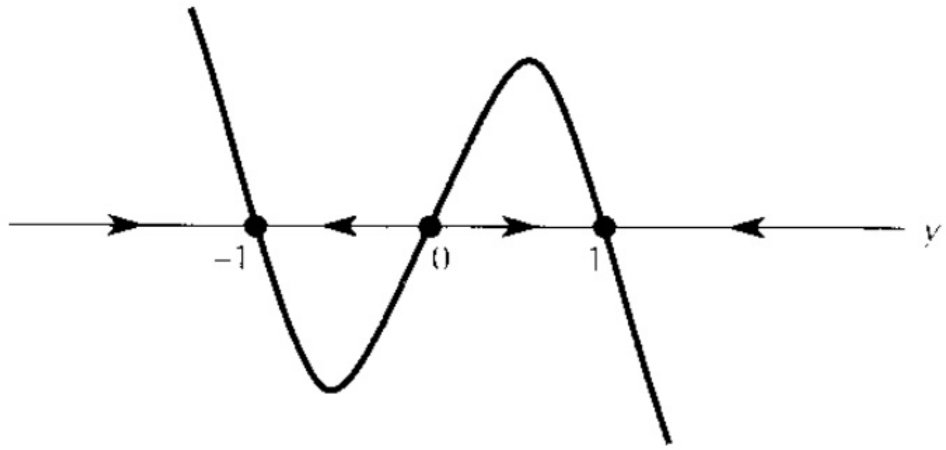
1. Se $y \in]-\infty,1]$ então $f(y) > 0$ desse modo, colocamos uma seta para a direita.

2. Se $y \in]-1,0]$ então $f(y) < 0$ e então colocamos uma seta para a esquerda.

3. Se $y \in]0,1[$, $f(y) > 0, \dot{y} > 0$, então colocamos uma reta para a direita.

4. Se $y \in]1,+\infty]$ então $f(y) < 0, \dot{y} < 0$ e adicionamos uma seta para a esquerda.

Agora podemos olhar para o nosso gráfico e verificarmos que -1 e $+1$ são dois equilíbrios estáveis no estado estacionário.



O teorema abaixo resume e explica esse resultado:

Teorema. *Seja y_o um ponto de equilíbrio de uma equação diferencial $\dot{y} = f(y)$ que é C^1na reta, de modo que $f(y_o) = 0$. Se $f'(y_o) < 0$, então y_o é um equilíbrio assintoticamente estável. Se $f'(y_o) > 0$, então y_o é um equilíbrio estável.*

18.4 Modelo de Solow

Nesse modelo, tem-se uma economia fechada e sem governo. O nível de poupança é igual ao investimento e apenas parte do que é produzido é poupado. O mercado das empresas é perfeitamente competitivo e a tecnologia de produção apresenta retornos decrescentes a escala. A função de produção da economia depende no nível de capital físico (L) e da quantidade de mão-de-obra oferecida (L). A tecnologia é exógena e nesse caso particular é aumentadora de trabalho. Em termos matemáticos isso quer dizer que:

$$Y = C + I$$

$$S = I = sY$$

$$Y = F(K, AL) = K^{\alpha} (AL)^{1-\alpha}$$

Considere que: s e $\alpha \in (0,1)$. A lei que move a dinâmica do estoque de capital nesse economia é:

$$\dot{K} = sY - dK$$

Tem-se que $d \in (0,1)$ é a taxa de depreciação do capital. Desejamos obter o nível de produção da economia por trabalho-efetivo. Isso é o mesmo que dividir a função de produção por AL.

$$\frac{Y}{AL} = \frac{K^{\alpha}\left(AL\right)^{1-\alpha}}{AL}$$

$$y = k^{\alpha}$$

Sendo $y = \frac{Y}{AL}$ e $k = \frac{K}{AL}$. Devemos tomar a expressão $k = \frac{K}{AL}$ e aplicamos o logaritmo natural:

$$lnk = lnK - lnA - lnL$$

Em seguida tomamos a derivada em função do tempo:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{L}}{L}$$

Precisamos adicionar que o crescimento da mão-de-obra e da tecnologia seguem um processo exponencial:

$$\dot{L} = e^{nt}$$

$$\dot{A} = e^{gt}$$

Para solucionar essas equações diferenciais tome a integral dos dois lados:

$$\frac{dL}{dt} = e^{nt}$$

$$\int dL = \int e^{nt} dt$$

$$L = c_0 \frac{e^{nt}}{n}$$

Lembre que $\dot{L} = e^{nt}$ e considere $c_0 = 1$ então:

$$L = \frac{\dot{L}}{n}$$

$$n = \frac{\dot{L}}{L}$$

Analogamente:

$$g = \frac{\dot{A}}{A}$$

Inserindo essas informações na equação abaixo:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{L}}{L}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - g - n$$

Podemos dividir a Lei de Movimento da economia por K:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{sY}{K} - \frac{dK}{K}$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{sY}{K} - d$$

Observe que:

$$\frac{sY}{K} \quad = \quad \frac{sY}{kAL} = \frac{sy}{k}$$

Então teremos que:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{sy}{k} - d$$

Agora usaremos a transformação que fizemos anteriormente:

$$\frac{\dot{k}}{k} + g + n = \frac{\dot{K}}{K}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} + g + n = sy - d$$

$$\dot{k} = sy - (n + g + d)\, k$$

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (n + g + d)k$$

No estado estacionário da economia sabemos que não há crescimento do estoque de capital, então teremos que:

$$\dot{k} = 0$$

Note que:

$$0 = sk^{\alpha} - (n + g + d)k$$

Podemos observar que se $k = 0$ satisfaz a equação acima. No entanto, devemos checar se há outro ponto de equilíbrio.

$$(n + g + d)k = sk^{\alpha}$$

$$k = (\frac{s}{n + g + d}).k^{\alpha}$$

$$k^{\frac{1}{\alpha}} = (\frac{s}{n + g + d})^{\frac{1}{\alpha}}k$$

$$k^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = (\frac{s}{n + g + d})^{\frac{1}{\cancel{\alpha}}\cdot\frac{\cancel{\alpha}}{1-\alpha}}$$

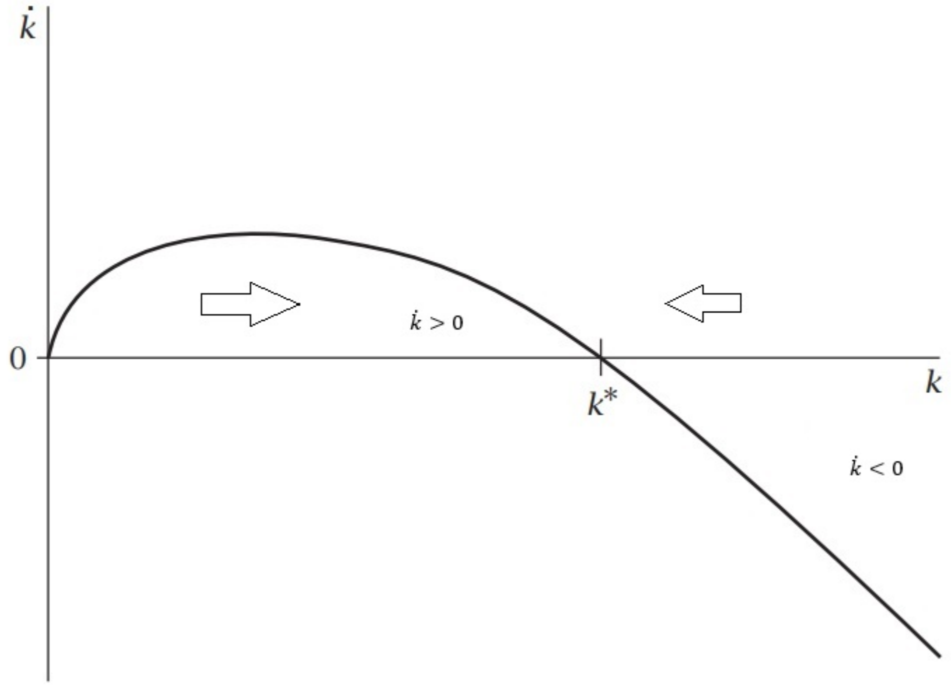
$$k^{*} = (\frac{s}{n + g + d})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Agora devemos tomar as derivada de $\dot{k}$ em relação a k:

$$\frac{d\dot{k}}{dk} = s\alpha k^{\alpha-1} - (n + g + d)$$

$$\frac{d^2\dot{k}}{dk^2} = s\alpha\left(\alpha - 1\right)k^{\alpha-2} < 0 \;\forall\; k$$

Então sabemos que $\dot{k}$ é côncavo em k. Além disso, devemos verificar que se $k \in (0, k^{*})$ então $\dot{k} > 0$ e devemos inserir uma seta para direita no gráfico abaixo. Caso contrário, se $k \in (-\infty, 0) \cup (k^{*}, +\infty)$ então $\dot{k} < 0$ e devemos inserir uma seta para a esquerda. O gráfico abaixo apresenta o diagrama de fase do modelo de Solow:



Para finalizar devemos checar se k^*é um equilíbrio estável. Para isso, $\frac{d\dot{k}}{dk}(k^*) < 0$.

$$\frac{d\dot{k}}{dk} = s\alpha k^{\alpha-1} - (n+g+d)$$

$$\frac{d\dot{k}}{dk}(k^*) = s\alpha \left((\frac{s}{n+g+d})^{\frac{1}{1-\alpha}} \right)^{\alpha-1} - (n+g+d)$$

Se invertermos k^*:

$$\frac{d\dot{k}}{dk}(k^*) = s\alpha \left((\frac{n+g+d}{s})^{\frac{1}{\alpha-1}} \right)^{\alpha-1} - (n+g+d)$$

$$\frac{d\dot{k}}{dk}(k^*) = \alpha(n+g+d) - (n+g+d)$$

$$\frac{d\dot{k}}{dk}(k^*) = (n+g+d)(\alpha-1) < 0$$

Dessa forma k^* é um equilíbrio estável.

19 Equações Diferenciais Ordinárias: Sistemas de Equações

O sistema geral de duas equações diferenciais pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x,y,t) \\ \dot{y} &= G(x,y,t) \end{aligned} \tag{29}$$

Uma Solução de (1) é um par $x(t)^*$ e $y(t)^*$ de funções de t tais que, para cada t, valem:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)^* &= F(x^*(t), y^*(t), t) \\ \dot{y}(t)^* &= G(x^*(t), y^*(t), t) \end{aligned} \tag{30}$$

O sistema (30) é um sistema de 1ª ordem.

Se F e G não dependem explicitamente de t dizemos que o sistema é autônomo ou tempo independente. Caso contrário, o sistema é não autônomo. O modo usado para encontrarmos uma solução geral e uma particular, por exemplo, é análogo ao que fizemos anteriormente.

19.1 Sistemas Lineares por meio de Autovalores

O sistema geral de equações diferenciais lineares pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{31}$$

Ou simplesmente como $\dot{x} = Ax$. Se A é uma matriz diagonal, ou seja, se $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ em (31), então (31) separa em n equações independentes $\dot{x}_i = a_{ii}x_i$ entre as quais não há interações. Nesse caso o sistema pode ser resolvido como:

$$x_1(t) = c_1 e^{a_{11}t}, ..., x_n(t) = c_n e^{a_{nn}t}$$

Se algum dos a_{ij} fora da diagonal não é nulo, de modo que as equações são relacionadas entre si, podemos usar autovalores de A para transformar o sistema (3) de n equações mais ou menos independentes, exatamente como procedemos com sistemas de equações a diferenças lineares.

Teorema. *Seja A uma matriz de tamanho $n \times n$ com n autovalores reais distintos $r_1, ..., r_n$ e autovetores associados $v_1, ..., v_n$. Então, a solução geral do sistema linear $\dot{x} = Ax$ de equações diferenciais é dada por:*

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} v_1 + \ldots + c_n e^{r_n t} v_n$$

Seja A uma matriz real 2×2 com autovalores complexos $\alpha \pm i\beta$ e autovetores associados $u \pm iw$. Então a solução geral do sistema linear de equações diferenciais $\dot{x} = Ax$ é dada por

$$x(t) = e^{\alpha t} cos\beta t(c_1 u - c_2 w) - e^{\alpha t} sen\beta t(c_2 u - c_1 w)$$

Teorema. *Seja A uma matriz de tamanho 2×2 com autovalores iguais $r_1 = r_2 = r$ e somente um autovetor independente v. Seja w um autovetor generalizado para A. Então, a solução geral do sistema linear de equações diferenciais $\dot{x} = Ax$ é dada por:*

$$x(t) = e^{rt}(c_1 v + c_2 w) + te^{rt}(c_2 v)$$

19.1.1 Resolvendo Sistemas por Substituição

Essa técnica não utiliza autovalores ou autovetores. Escreveremos um sistema de primeira ordem a duas variáveis como um sistema de segunda ordem a uma variável. Vejamos o exemplo a seguir:

$$\dot{y}_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2$$
$$\dot{y}_2 = a_{21} y_2 + a_{22} y_2$$

Veja que os parâmetros do sistema são arbitrários, entao faremos uma escolha apenas para fins ilustrativos.

$$\dot{y}_1 = y_1 + 4y_2 \tag{32}$$

$$\dot{y}_2 = y_1 + y_2 \tag{33}$$

$$y_2 = \frac{1}{4}(\dot{y}_1 - y_1) \rightarrow \text{equação } (33.1)$$

Derive essa expressão em relação ao tempo:

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{4}(\ddot{y}_1 - \dot{y}_1)$$

Inserindo essa expressão em (34)

$$\frac{1}{4}(\ddot{y}_1 - \dot{y}_1) = y_1 + y_2$$

$$\frac{1}{4}(\ddot{y}_1 - \dot{y}_1) = y_1 + \frac{1}{4}(\dot{y}_1 - y_1)$$

$$\frac{1}{4}(\ddot{y}_1 - \dot{y}_1) - \frac{1}{4}(\dot{y}_1 - y_1) - y_1 = 0$$

$$\ddot{y}_1 - \dot{y}_1 - \dot{y}_1 + y_1 - 4y_1 = 0$$

$$\ddot{y}_1 - 2\dot{y} - 3y_1 = 0 \tag{34}$$

Encontrando o polinômio característico:

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.(-3)}}{2.1}$$

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$r_1 = 3\ ;\ r_2 = -1$$

A solução geral para y_1 é : $y_1(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$

Derive em relação a t : $\dot{y}_1 = 3c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t}$

Substitua essas duas equações em (33.1)

$$y_2 = \frac{1}{4}(\dot{y}_1 - y_1)$$

$$y_2 = \frac{1}{4}(3c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t} - c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t}$$

$$y_2 = \frac{1}{4}(2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t})$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(c_1 e^{3t} - c_2 e^{-t})$$

Em notação matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

19.1.2 Estabilidade de Sistemas Lineares

Critérios de estabilidade para um sistema de equações diferenciais de primeira ordem:
(1) Assintoticamente estável se $f(y^*) = 0$ e $f'(y^*) < 0$, e
(2) instável se $f(y^*) = 0$e $f'(y^*) > 0$

Teorema. *Seja y^* um estado estacionário do sistema de equações diferenciais $\dot{y} = F(y)$ de primeira ordem em $\mathbb{R}^n$, onde F é uma função C^1 de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$.*

(a) Se cada autovalor da matriz jacobiana $DF(y^*)$ de F em y^* é negativo ou tem parte real negativa, então y^* é um estado estacionário assintoticamente estável de $\dot{y} = F(y)$.

(b) Se $DF(y^*)$ tem pelo menos um autovalor real positivo ou um autovalor complexo com parte real positiva, então y^* é um estado estacionário instável de $\dot{y} = F(x)$.

Se o teste do teorema 6 não for aplicável, ou seja, se $DF(y^*)$ tiver algum autovalor puramente imaginário ou um autovalor nulo, mas nenhum autovalor positivo e nenhum autovalor com parte real positiva, então não podemos usar a matriz jacobiana em y^* para determinar a estabilidade de y^*.

Definição. Estabilidade Assintótica. Escreva $x(t; y_0)$ para a solução $x(t)$ do sistema autônomo de equações diferenciais $\dot{x} = f(x)$ que satisfaz a condição inicial $x(0) = y_0$. Um estado estacionário x^* desse sistema é assintoticamente estável se existe $\varepsilon > 0$ tal que para qualquer y_0 com $\| y_0 - x_0 \| < \varepsilon$, $x(t; y_0) \to x^*$ quando $t \to \infty$.

Considere o seguinte sistema linear

$$\dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$$
$$\dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$$

Esse sistema pode ser expresso como: $\dot{x} = Ax$ em $\mathbb{R}^2$. Vamos mostrar que $(0, 0)$ é um estado estacionário assintoticamente estável se, e somente se, o traço de A é negativo e o determinante de A é positivo.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} - r & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r \end{pmatrix}$$

Então o polinômio característico de A:

$$(a_{11} - r)(a_{22} - r) - (a_{12}a_{21})$$

$$a_{22}a_{11} - ra_{11} - ra_{22} + r^2 - a_{12}a_{21}$$

$$r^2 - r(a_{11} + a_{22}) + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})$$

$$r^2 - r(a_{11} + a_{22}) + detA = 0$$

A soma dos autovalores $(a_{11} + a_{22})$ é igual ao traço de A. O produto dos autovalores é igual ao determinante de A. Note que se os autovalores de A são ambos negativos sua soma resulta em um número < 0 e seu produto é > 0. Se os autovalores são complexos $a \pm ib$ com $a < 0$, então sua soma $2a$ é negativa e seu produto $a^2 + b^2$é positivo. Por outro lado, se seu produto é positivo e sua soma é negativa os autovalores são números complexos com uma parte real negativa ou eles são números reais negativos.

Se $detA < 0$, os autovalores possuem sinais opostos; ou algum deles é positivo. Se o traço de $A > 0$, os autovalores (um deles) deve ser positivo, ou ambos podem ser complexos com a parte real positiva. Finalmente, se $detA > 0$ e o $traçoA = 0$ os autovalores devem ser números complexos com a parte real igual a zero, isto é, são puramente números imaginários $\pm ib$. A solução geral nesse caso é $x = (cosbt)u+(senbt)v$. Nesse caso, todas as órbitas são periódicas e $(0, 0)$ é uma solução estável.

Exemplo. .

$$\dot{x} = 2xy - 2y^2$$
$$\dot{y} = x - y^2 + 2$$

Encontrando os pontos no estado estacionário

$$\dot{x} = 0$$
$$0 = 2y(x - y)$$

Então, $y = 0$ ou $x = y$

$$\dot{y} = 0$$
$$x = -y^2 + 2$$

Se $y = 0$ então $x = 2$. Se $y = x$ então:

$$y = -y^2 + 2$$

$$0 = -y^2 - y + 2$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.(-1)2}}{2(-1)}$$

$y = 1$ ou $y = -2$. Temos as seguintes pontos de estado estacionário: $(1, 1)$, $(-2, -2)$ e $(2, 0)$. Montando a matriz jacobiana:

$$D(f,g)(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x-4y \\ 1 & -2y \end{pmatrix}$$

Em $(2,0)$:

$$D(f,g)(2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

As raízes do polinômio característico alternam de sinal, isto é, $r_1 = 2$ e $r_2 = -2$ logo $(2,0)$ é um equilbrio instável. Em $(1,2)$:

$$D(f,g)(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

As raízes são $-1,65$ e $3,65$. Então $(1,2)$ é um equilíbrio instável. Em $(-2,-2)$:

$$D(f,g)(-2,-2) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

As raízes são $8,32$ e $-4,3$, ou seja, mais um equilíbrio instável.

19.2 Retratos de fase de sistemas planares

Suponha que tenhamos o seguinte sistema planar:

$$\dot{x} = f(x,y)$$

$$\dot{y} = g(x,y)$$

A vizualização geométrica desse sistema é um vetor:

$$(\dot{x},\dot{y}) = (f(x,y), g(x,y))$$

Em cada ponto (x,y) a vizualização geométrica correspondente de uma solução $(x^*(t), y^*(t))$ é uma curva no plano tangente em cada ponto ao campo de vetores.

Definição. Diagrama de fase. Quando a curva $(x^*(t), y^*(t))$ passa pelo ponto (x,y), seu vetor tangente $(\dot{x}^*(t), \dot{y}^*(t))$ deveria apontar na direção e sentido de $(f(x,y), g(x,y))$. O conjunto de todas essas curvas é denominado retrato de fase ou diagrama de fase.

Exemplo. Veja o sistema desacoplado

$$\dot{x} = 2x$$

$$\dot{y} = -2y$$

$$\begin{array}{c|c} \frac{dx}{dt} = 2x & \dot{y} = -2y \\ \frac{dx}{x} = 2dt & \frac{dy}{dt} = -2y \\ \int \frac{dx}{x} = 2\int dt & \int \frac{dy}{y} = -2\int dt \\ lnx = 2t + c & lny = -2t + c \\ x = c_1e^{2t} & y = c_2e^{-2t} \end{array}$$

Para encontrarmos as soluções não parametrizadas resolvemos cada equação por e^{2t} e então eliminamos t igualando as expressões:

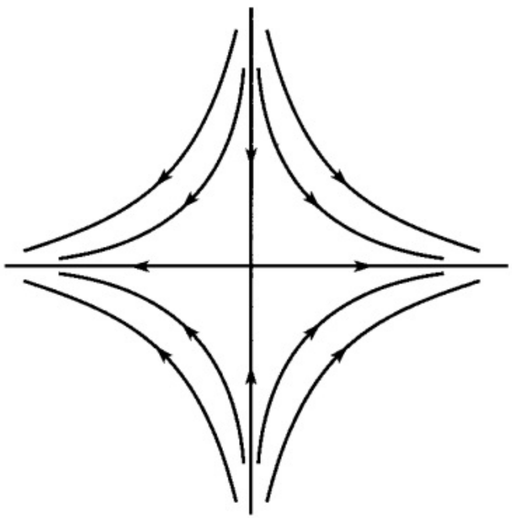
$$\frac{x}{c_1} = e^{2t} \text{ e } e^{2t} = \frac{c_2}{y}$$

$$\frac{x}{c_1} = \frac{c_2}{y}$$

$$y = c_1c_2x^{-1}$$

Podemos expressar algumas dessas hipérboles $y = \frac{K}{x}$

Figura 2: Retrato de Fase



19.3 Retratos de fase sistemas lineares

Faremos o diagrama de fase para o seguinte sistema:

$$\dot{x} = x(4 - x - y)$$

$$\dot{y} = y(6 - y - 3x)$$

Passo 1. Encontre os valores de equilíbrio igualando o lado direito de cada equação a zero. A soluções são $(0,0)$, $(0,6)$, $(4,0)$ e $(1,3)$.

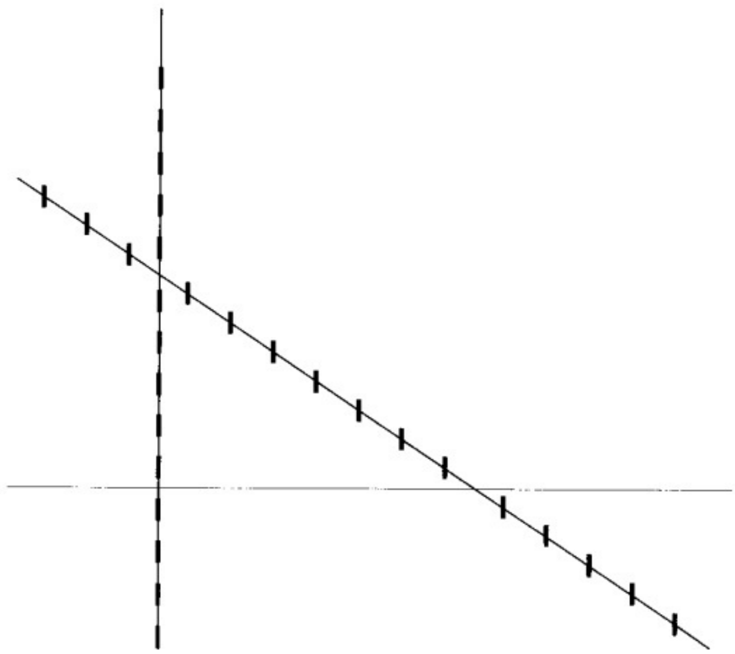
Passo 2. Use o teorema 25.5 para determinar a estabilidade local de cada um desses equilíbrios. Note que: $(0,0)$ e $(1,3)$ são instáveis e $(0,6)$ e $(4,0)$ são estáveis.

Passo 3. Esboce as isóclinas

Um vetor $(\dot{x}, \dot{y})$ é vertical se $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} \neq 0$.Se $\dot{y} > 0$ o vetor aponta para cima se $\dot{y} < 0$ aponta para baixo. Como $\dot{x} = f(x,y)$, o conjunto dos pontos (x,y) nas quais $\dot{x} = 0$ é dado pela curva $f(x,y) = 0$.Uma tal curva ao longo da qual o campo de vetores sempre aponta na mesma direção e sentido, é denominada isóclina do sistema.

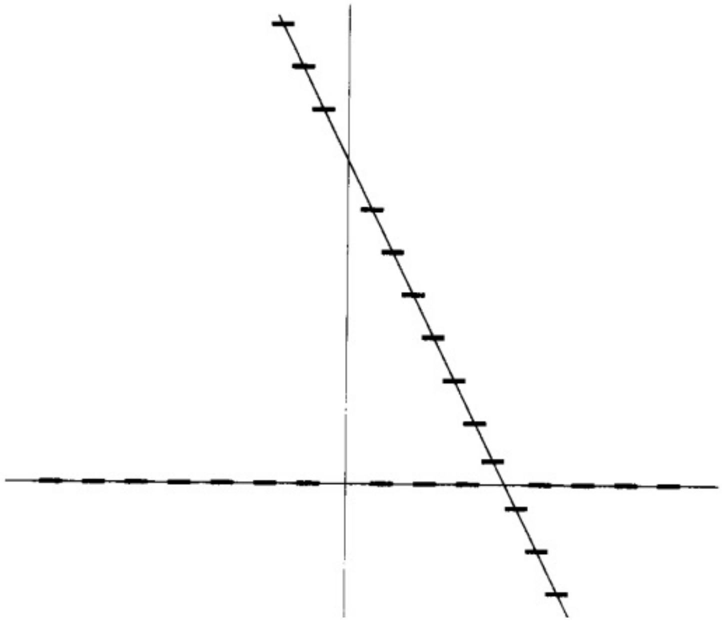
$\dot{x} = 0 \rightarrow x = 0$ e $4 - x - y = 0$

Figura 3: Isóclinas para $\dot{x} = 0$



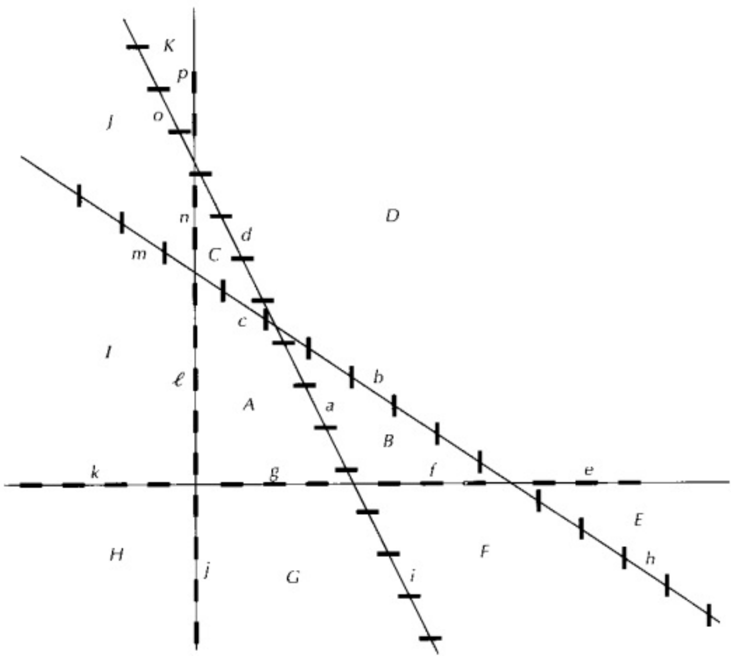
Vejamos para $\dot{y} = 0 \rightarrow y = 0$ e $6 - y - 3x = 0$

Figura 4: Isóclinas para $\dot{y} = 0$



Passo 4. Complete as setas nas isóclinas e nos setores entre as isóclinas. As isóclinas dividem o plano em regiões denominadas setores, e constituem as fronteiras desses setores.

Figura 5: Rotulando os setores e os segmentos fronteiriços

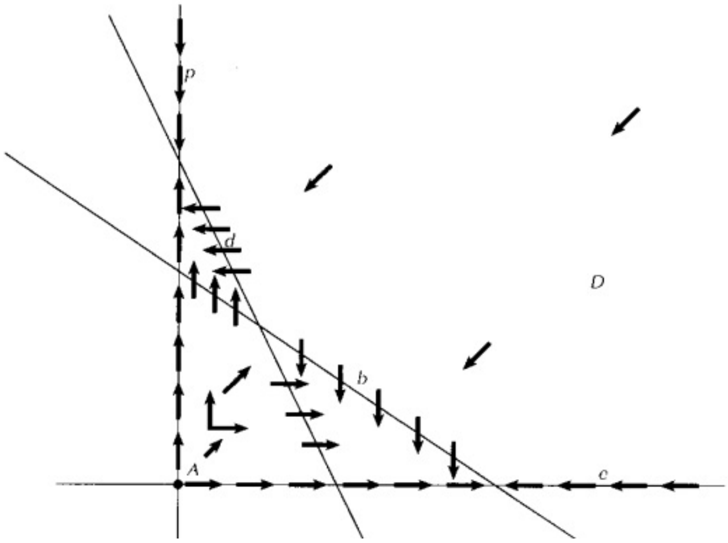


Seja $\dot{x} = -4x + 16$ e $\dot{y} = -5y + 15$. Se $\dot{x} = 0$ então $x = 4$. Se $\dot{y} = 0$ então $y = 3$. Trace as isóclinas e divida o quadrante positivo em 4 setores: $(x^*, y^*) = (4, 3)$

Vamos determinar o movimento entre os setores:

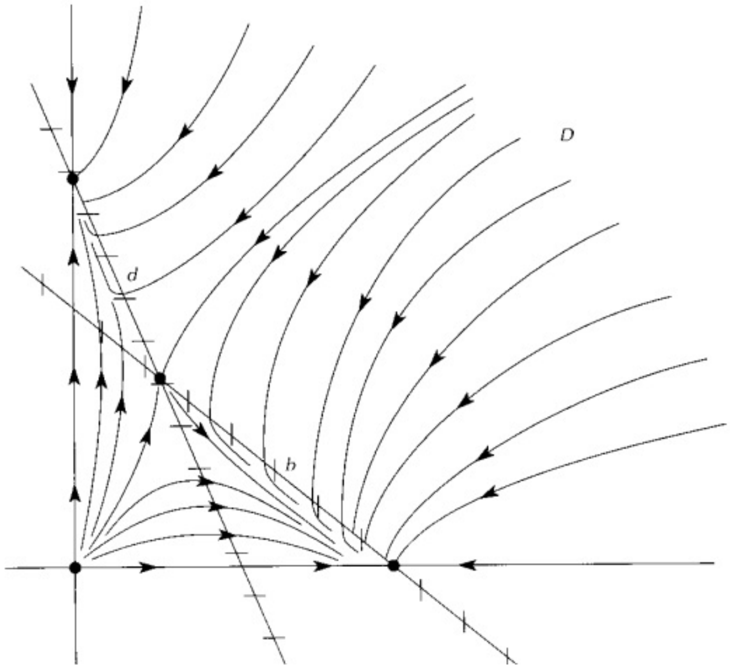
Se $x < 4 \rightarrow \dot{x} > 0$ (seta direita)
Se $x > 4 \rightarrow \dot{x} < 0$ (seta esquerda)
Se $y > 3$, $\dot{y} < 0$ (seta para baixo)
Se $y < 3$, $\dot{y} > 0$ (seta para cima)

Figura 6: Lista completa de setores e segmentos para o sistema



Note que o ponto $(4, 3)$ é um equilíbrio estável.

Figura 7: Diagrama de fase completo



Exemplo. Crescimento e Poluição

Considere o seguinte modelo referente a crescimento econômico e poluição. Primeiramente defina K como o estoque de capital e P como o estoque de poluição. A função de produção dessa economia é dada por:

$$Y = K^{\alpha} \text{ sendo que } \alpha \in (0, 1)$$

$$\mathring{K} = sK^{\alpha} - sK = K(sK^{\alpha-1} - \delta)$$

$\delta > 0$ é a taxa de depreciação do capital. O estoque de capital gera o fluxo de poluição K^{β},onde $\beta > 1$ e o estoque de poluição decai a taxa $\gamma > 0$ e uma mudança líquida no estoque de poluição é dada por:

$$\mathring{P} = K^{\beta} - \gamma P$$

As condições iniciais são :

$$K(0) = K_0 \geq 0 \text{ e } P = P_0 \geq 0$$

Nossa primeira tarefa é determinarmos o locus de pontos *(K, P)* no plano que $\mathring{P} = 0$. Então teremos que:

$$P = \mathring{K^{\beta}} - \gamma P \rightarrow \mathring{P} = 0$$

$$\gamma P = K^{\beta}$$

$$P = \frac{1}{\gamma} K^{\beta}$$

Note que a curva $\mathring{P} = 0$ é convexa em K:

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \frac{\beta}{\gamma} K^{\beta - 1} > 0 \; \forall K$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial k^2} = \frac{(\beta - 1)\beta}{\gamma} K^{\beta - 2} > 0 \text{ já que } \beta > 1$$

Essa curva sai da origem, pois permitimos $K = 0$. Vejamos agora $\mathring{K} = 0$

$$\mathring{K} = 0 \rightarrow sK^{\alpha} - \delta K = K(sK^{\alpha - 1} - \delta) = 0$$

$K = (\delta/s)^{(1/\alpha - 1)}$→Note que essa equação é uma reta.

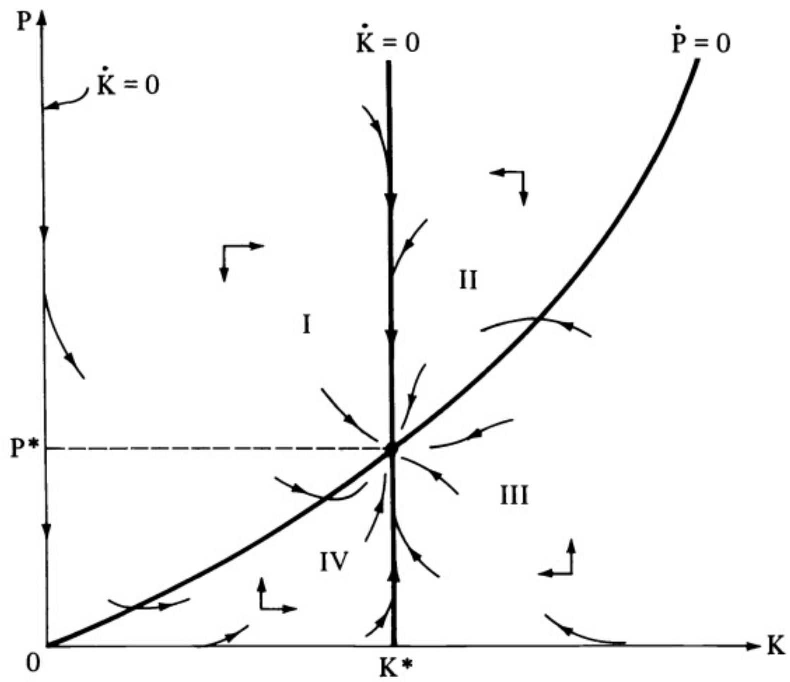
Há dois pontos que $\mathring{K} = 0$ e $\mathring{P} = 0$ se interseccionam, o primeiro deles é a origem (0,0) e o segundo é $P^* = \dfrac{(1)}{\gamma}(K^*)^{\beta}$.Essas duas "curvas" definem 4 iso setores, sendo que os sinais de $\mathring{K} = 0$ e $\mathring{P} = 0$ são unicamente determinadas dentro de casa isosetor. Portanto acima do locus $\mathring{P} = 0$, $P > \frac{(1)}{\gamma} K^{\beta}$ o que implica que $\mathring{P} < 0$ $(K^{\beta} - \gamma P)$, mas abaixo disse locus $\mathring{P} > 0$. Agora vejamos a curva $\mathring{K} = 0$. Se $K > K^*$ então $\mathring{K} < 0$ e se $0 < K < K^*$então $\mathring{K} > 0$. Até K^*, $\mathring{K}$ é crescente, podemos ver isso usando a primeira derivada de $\mathring{K} = 0$, como segue:

$$\mathring{K} = 0 \equiv g(K)$$

$$\frac{\partial g(K)}{\partial k} = sK^{\alpha - 1} - \delta \succ 0$$

Suponha que essa condição é zero apenas quando $K = K^*$

Figura 8: Diagrama de Fase



Na região I $\mathring{K} > 0$ e $\mathring{P} < 0$. Nesse iso setor desenhamos uma linha horizontal apontando para a direita indicando que K cresce nessa região. Similarmente, fizemos o mesmo para P indicando que P decresce nessa região. Todas as trajetórias na região I apontam para sudeste elas podem entrar na região IV somente cruzando o locus $\mathring{P} = 0$ e a inclinação dessas trajetórias é zero (no ponto de intersecção) como dá-se que $\dfrac{\partial P}{\partial K} = \dfrac{\mathring{P}}{\mathring{K}}$ e o numerador é zero no locus $\mathring{P} = 0$. Essa trajetória não pode entrar na região II para a I porque quando K se aproxima de K^*, $\mathring{K}$ se aproxima de zero e K^* não pode ser atingido em tempo finito. Na região III podemos observar que $\mathring{K} < 0$ e $\mathring{P} > 0$. Novamente as trajetórias não podem se mover para a região IV, mas podem se mover para a região II e possuem uma inclinação horizontal ao passarem por $\mathring{P} = 0$. Considerações similares mostram que as trajetórias apontam para sudoeste na região II e nordeste na região IV e não podem "durar" (sair) dessas regiões.

Para verificarmos se o sistema é estável no estado estacionário devemos linearizar nossas equações diferenciais em torno de K^* e P^*. Para isso é necessário assumirmos que:

$$f(K,P) = f(K^*,P^*) + f_K(K^*,P^*)(K-K^*) + f_P(K^*,P^*)(P-P^*)$$
$$g(K,P) = g(K^*,P^*) + g_K(K^*,P^*)(K-K^*) + g_P(K^*,P^*)(P-P^*)$$

Note que $f(K^*,P^*)$ e $g(K^*,P^*)$ são nulas no estado estacionário. Então podemos construir a seguinte matriz jacobiana:

$$\begin{bmatrix} \mathring{K} \\ \mathring{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\mathring{K}/dK & d\mathring{K}/dP \\ d\mathring{P}/dK & d\mathring{P}/dP \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K - K^* \\ P - P^* \end{bmatrix}$$

Que é igual a:

$$\begin{bmatrix} \mathring{K} \\ \mathring{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha s K^{\alpha-1} - \delta & 0 \\ \beta K^{\beta-1} & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K - K^* \\ P - P^* \end{bmatrix}$$

Devemos avaliar a expressão acima no estado estacionário:

$$\begin{bmatrix} \mathring{K} \\ \mathring{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(\alpha-1) & 0 \\ \beta(\delta/s)^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K - K^* \\ P - P^* \end{bmatrix}$$

Sabemos que:

$Traço A = \lambda_1 + \lambda_2$ e o $det\,|A| = \lambda_1 \lambda_2$.

$$\begin{vmatrix} \delta(\alpha-1) - \lambda & 0 \\ \beta(\delta/s)^{\frac{\beta-1}{\alpha-1}} & -\gamma - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Teremos que:

$$\lambda^2 - \lambda(\delta(\alpha-1) - \gamma) - \delta(\alpha-1)\gamma = 0$$

$$\lambda = \frac{\delta(\alpha-1) - \gamma \pm \sqrt{(\delta(\alpha-1)-\gamma)^2 + 4\delta(\alpha-1)\gamma}}{2}$$

$$\lambda = \frac{\delta(\alpha-1) - \gamma \pm \sqrt{\delta(\alpha-1)^2 + -2\delta(\alpha-1) + \gamma^2 + 4\delta(\alpha-1)\gamma}}{2}$$

$$\lambda = \frac{\delta(\alpha-1) - \gamma \pm \sqrt{\delta(\alpha-1)^2 + \gamma^2 + 2\delta(\alpha-1)\gamma}}{2}$$

$$\lambda = \frac{\delta(\alpha-1) - \gamma \pm \sqrt{(\delta(\alpha-1)+\gamma)^2}}{2}$$

$$\lambda = \frac{\delta(\alpha-1) - \gamma \pm [(\delta(\alpha-1)+\gamma)]}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{\delta(\alpha-1) - \gamma - [(\delta(\alpha-1)+\gamma)]}{2} = \frac{-2\gamma}{2} = -\gamma$$

$$\lambda_2 = \frac{\delta(\alpha-1) - \gamma + [(\delta(\alpha-1)+\gamma)]}{2} = \frac{2\delta(\alpha-1)}{2} = \delta(\alpha-1)$$

Note que os autovalores são negativos, o que faz o determinante de A ser positivo.

Mostrando que (K^*, P^*) é um equilíbrio estável.

20 Teoria do Controle Ótimo

Em problemas que envolvem o tempo, devemos otimizar uma função objetivo dentro de um intervalo, ou seja, de t_0 até T. Dessa forma, a solução para qualquer variável não toma a forma de um único valor, mas de uma trajetória ao longo do tempo. Suponha que desejássemos maximizar o lucro de uma empresa ao longo do tempo. Definimos a variável de controle como aquela que está sendo maximizada "dentro" da função objetivo. Adicionalmente, definimos uma variável de estado que dita ou define o comportamento da economia e está relacionada com a variável de controle. Há também a variável de coestado que tem um papel equivalente ao multiplicador de Lagrange λ.

20.1 Contexto histórico

A teoria do controle ótimo foi formulada com base na necessidade de otimizar sistemas dinâmicos ao longo do tempo. Ela tem suas raízes no início do século XX, principalmente ligada a problemas de engenharia elétrica, mecânica e economia. A formulação moderna dessa teoria é fortemente associada aos trabalhos de Lev Pontryagin e seus colegas nos anos 1950, na União Soviética. Eles desenvolveram o Princípio do Máximo, que é um método para encontrar trajetórias ótimas em sistemas controlados, especialmente no contexto de sistemas de controle com equações diferenciais. O objetivo central da teoria do controle ótimo é encontrar a trajetória e o controle que minimizam (ou maximizam) um dado funcional de custo, considerando restrições nas dinâmicas do sistema.

No contexto histórico, praticamente de modo simultâneo, Richard Bellman desenvolveu a Programação Dinâmica, principalmente para lidar com problemas de otimização em múltiplos estágios, onde a decisão ótima em cada estágio depende das decisões ótimas dos estágios subsequentes. Esse pesquisador, introduziu a famosa Equação de Bellman, que estabelece uma relação recursiva para a solução de problemas de decisão sequenciais, onde o problema em um determinado instante pode ser resolvido de forma ótima, considerando os resultados ótimos dos estados futuros. Inicialmente, a programação dinâmica foi aplicada em problemas de roteamento, economia e operações militares, mas logo se estendeu a várias áreas como controle de processos e aprendizado por reforço.

Podemos ainda destacar as principais diferenças entre essas duas teorias:

Controle ótimo:

- Está focada em controlar sistemas dinâmicos contínuos ou discretos ao longo do tempo, buscando a trajetória ótima.
- Envolve muitas vezes equações diferenciais para descrever a dinâmica do sistema e é, em essência, uma teoria de otimização contínua.

- O foco principal é encontrar uma trajetória ótima para um sistema dado, sujeita a restrições de controle e estado.
- A formulação se baseia muito em métodos analíticos e no uso do Princípio do Máximo de Pontryagin, além do cálculo de variações, em muitos casos.

Programação Dinâmica:

- A programação dinâmica lida com a otimização em múltiplos estágios, resolvendo o problema de trás para frente (indução retroativa).
- É usada tanto em problemas contínuos quanto discretos, mas é mais comumente aplicada em problemas discretos.
- A programação dinâmica é particularmente poderosa para resolver problemas em que o estado atual depende dos estados anteriores e futuros, aplicando a Equação de Bellman de forma recursiva.
- Diferente do controle ótimo, ela é algorítmica e computacional, sendo muitas vezes aplicada em otimização numérica e em problemas de tomada de decisão em tempo discreto.

No contexto econômico a Teoria do Controle ótimo é utilizada principalmente em modelos de crescimento econômico que buscam a melhor política de investimento para maximizar o bem-estar de longo prazo.A programação dinâmica é muito usada em Teoria dos Jogos. Uma outra possível aplicação seria a decisão de quantos produtos devem ser armazenados para minimizar custos e evitar faltas ou excessos.

Dessa forma, a programação dinâmica pode ser vista como um método de solução para certos tipos de problemas de controle ótimo. Isso é especialmente válido em casos discretos, onde a abordagem recursiva da equação de Bellman se aplica diretamente. De fato, o Princípio do Máximo de Pontryagin e a Equação de Bellman são metodologicamente complementares em muitos problemas de otimização.

20.2 Princípio do Máximo

Esse conteúdo foi desenvolvido por Pontryagin *et al* (1962), veremos que a abordagem para a resolução desse tipo de problema é similar a dos multiplicadores de Lagrange. Temos que:

$$H(t, y, u, \lambda) = F(t, y, u) + \lambda f(t, y, u)$$

As condições de primeira ordem para esse problema são:

1. $H(t, y, u^*, \lambda) \geq H(t, y, u, \lambda) \, \forall t \in [0, T]$;

2. $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$;

3. $\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$ (equação de estado)

4. $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y}$ (equação de coestado)

5. $\lambda(T) = 0$ (condição de transversalidade)

Note que (2) é válida se a função H for C^1em u. Se os períodos iniciais e finais de y forem definidos, por $y(0)$ e $y(T)$ para a variável de estado não precisaremos assumir que (5) é válida. Se o horizonte temporal for infinito, a condição de transversalidade pode ser substituída por:

$$\underset{t\to\infty}{lim}\lambda y e^{-rt} = 0$$

Adicionalmente, se a condição terminal for $y(T)$ livre. Precisaremos utilizar a seguinte condição de folga complementar do Teorema de Kuhn-Tucker:

$$\lambda(T) \geq 0;\ \ y_T \geq y_{Min};\ \ (y_T - y_{Min})\,\lambda(T) = 0$$

Em outras palavras, o “recurso” definido pela variável de estado se extingue ao final do problema. Vejamos o seguinte exemplo. Encontre a trajetória de controle ótimo que:

$$Max \int_0^1 \left(y - u^2\right) dt$$

sujeito a

$$\dot{y} = u$$

$$y\,(0) = 5 \text{ e } y\,(1) \text{ livre}$$

Montaremos o Hamiltoniano:

$$H(u, y, \lambda) = \left(y - u^2\right) + \lambda\,(u)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \lambda = 0 \tag{35}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u \tag{36}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -1 \tag{37}$$

Pela equação (35) temos que:

$$\lambda = 2u$$

Podemos derivar essa equação em relação ao tempo:

$$\dot{\lambda} = 2\dot{u}$$

Usando a equação (37), sabemos que:

$$\dot{u} = -\frac{1}{2} \tag{38}$$

Podemos integrar a equação (37) para encontrarmos:

$$\dot{\lambda} = -1$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -1$$

$$d\lambda = -dt$$

$$\int d\lambda = -\int dt$$

$$\lambda = -t + c_1 \tag{39}$$

Usando (39) na equação (35) teremos que:

$$u = 0.5\left(c_1 - t\right) \tag{40}$$

Ainda sabemos que:

$$\dot{y} = u$$

Usando o resultado obtido em (40):

$$\dot{y} = 0.5\left(c_1 - t\right)$$

$$dy = 0.5\left(c_1 - t\right)dt$$

$$\int dy = 0.5c_1 \int dt - 0.5 \int tdt$$

$$y = \frac{1}{2}c_1 t - \frac{t^2}{4} + c_2$$

Usando a condição inicial $y\left(0\right) = 5$

$$5 = c_2$$

$$y = \frac{1}{2}c_1 t - \frac{t^2}{4} + 5$$

Ainda temos a seguinte condição $y\left(1\right)$ livre . Note que 1 é o limite superior de integração da função objetivo. Nesse casos, devemos utilizar a seguinte condição de folga complementar do teorema de Kuhn-Tucker:

$$\lambda\left(T\right) \geq 0; \;\; y_T \geq y_{Min}; \;\; \left(y_T - y_{Min}\right)\lambda\left(T\right) = 0$$

Podemos pensar que $\lambda\left(T\right) = 0$,ou seja, $\lambda\left(1\right) = 0$:

$$\lambda = -t + c_1$$

$$0 = -1 + c_1$$

$$c_1 = 1$$

Se essa condição for verdadeira, então: $(y_1 - y_0) > 0$

$$y\left(1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 5 = 5.25$$

$$y\left(0\right) = 5$$

Então:

$$(y_1 - y_0) = (5.25 - 5) > 0$$

O que satisfaz a condição de folga. Podemos concluir que:

$$y = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} + 5$$

$$\lambda = 1 - t$$

$$u = \frac{(1 - t)}{2}$$

Utilizaremos o mesmo exemplo anterior com uma condição inicial diferente e uma condição final truncada.

$$y\left(0\right) = 2 \text{ e } y\left(1\right) = a$$

A solução do problema é análoga.

$$y = \frac{1}{2}c_1 t - \frac{t^2}{4} + c_2$$

Devemos usar as condições indicadas acima:

$$2 = c_2$$

$$a = \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{4} + 2$$

$$c_1 = 2a - \frac{7}{4}$$

Sabemos que:

$$y = \frac{1}{2}\left(2a - \frac{7}{4}\right)t - \frac{t^2}{4} + 2$$

e

$$u = a - \frac{7}{4} - \frac{t}{2}$$

Note que

$$2u = \lambda = 2a - \frac{7}{2} - t$$

Agora trabalharemos com um exemplo, em que o horizonte temporal é fixo, mas o tempo de chegada ao nível viesado de y não é restrito.

$$Max \int_0^T -\left(t^2 + u^2\right) dt$$

sujeito a

$$\dot{y} = u$$

$$y\,(0) = 4, y\,(T) = 5 \text{e } T \text{ livre}$$

Montaremos o Hamiltoniano:

$$H(u, y, \lambda) = -\left(t^2 + u^2\right) + \lambda u$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \lambda = 0 \tag{41}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u \tag{42}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \tag{43}$$

Podemos integrar a equação (43) para encontrarmos:

$$\dot{\lambda} = 0$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0$$

$$d\lambda = 0dt$$

$$\int d\lambda = \int 0dt$$

$$\lambda = c_1 \tag{44}$$

Usando (44) na equação (41) teremos que:

$$u = 0.5c_1 \tag{45}$$

Ainda sabemos que:

$$\dot{y} = u$$

Usando o resultado obtido em (45):

$$\dot{y} = 0.5c_1$$

$$dy = 0.5c_1 dt$$

$$\int dy = 0.5c_1 \int dt$$

$$y = \frac{1}{2}c_1 t + c_2$$

Usando a condição inicial $y\left(0\right) = 4$

$$4 = c_2$$

Usando a condição terminal $y\left(T\right) = 5$

$$5 = \frac{1}{2}c_1 T + 4 \tag{46}$$

$$2/T = c_1$$

Quando temos a condição terminal como sendo livre, devemos usar a seguinte condição de transversalidade:

$$H_{t=T} = 0$$

Em outras palavras devemos avaliar o Hamiltoniano da seguinte forma:

$$H_{t=T}(u,y,\lambda) = -\left(T^2 + u^2\right) + \lambda u = 0$$

$$H_{t=T}(u,y,\lambda) = -\left(T^2 + \left(\frac{1}{2}c_1\right)^2\right) + \lambda\frac{1}{2}c_1 = 0$$

$$H_{t=T}(u,y,\lambda) = -T^2 - \frac{c_1^2}{4} + \frac{\lambda}{2}c_1 = 0$$

Podemos substituir $c_1 = \lambda$:

$$H_{t=T}(u,y,\lambda) = -T^2 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{2} = 0$$

$$H_{t=T}(u,y,\lambda) = -T^2 + \frac{\lambda^2}{4} = 0$$

Isso significa que:

$$T^2 = \frac{\lambda^2}{4}$$

Tomando a raiz quadrada dos dois lados:

$$T = \pm\frac{\lambda}{2} \tag{47}$$

Pelas condições do teorema de Kuhn-Tucker o multiplicador de Lagrange deve ser $\lambda \geq 0$. Além disso, devemos admitir as seguintes condições:

$$H_{t=T_{Max}} \geq 0;\ T_{Max} \geq T;\ \ (T - T_{Max})\, H_{t=T_{Max}} = 0$$

Desse modo, não podemos admitir raízes negativas para T. Usando a solução positiva de (47) em (46) teremos que:

$$5 = \frac{c_1}{2}T + 4$$

$$1 = \frac{c_1}{2}T$$

$$1 = \frac{\lambda}{2}T$$

$$1 = T^2$$

Isso implica que:

$$1 = T$$

Dessa forma podemos concluir que:

$$\lambda = 2$$

$$u = 1$$

$$y = t + 4$$

20.3 Problemas autônomos

Quando não temos t na função objetivo e na equação de estado, teremos que:

$$Max \int_0^T F(y,u)\,dt$$

sujeito a

$$\dot{y} = f(y,u)$$

Podemos também adicionar um fator de tempo como desconto na função objetivo:

$$Max \int_0^T G(y,u)\,e^{-rt}dt$$

Precisaremos converter o Hamiltoniano para sua versão de valor corrente:

$$H_c = He^{rt} = G(y,u) + \mu f(y,u)$$

As condições de primeira ordem desse problema, são as seguintes:

1. $H_c(y,u^*,\mu) \geq H(y,u,\mu)\,\forall t \in [0,T]$;

2. $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$;

3. $\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \mu}$ (equação de estado)

4. $\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial y} + r\mu$ (equação de coestado)

5. $\mu(T) = 0$ ou $(H_c)_{t=T} = 0$ (condição de transversalidade)

Nesse caso teremos que:

$$\mu = \lambda e^{rt}$$

Se tomarmos a derivada dessa equação em relação ao tempo, obteremos que:

$$\dot{\mu} = r\lambda e^{rt} + \dot{\lambda} e^{rt}$$

$$\dot{\mu} - r\mu = \dot{\lambda} e^{rt}$$

Suponha uma função de utilidade $u(C)$ em que o consumo é uma variável dependente do tempo. Além disso, a utilidade do consumidor é côncava em c e apresenta as seguintes propriedades:

$$U_c > 0 \text{ e } U_{cc} < 0$$

Caracterizaremos a nossa economia do seguinte modo:

$$Y = rK$$

$$\dot{K} = I = Y - C = rK - C$$

Podemos notar que esse modelo lembra bastante o modelo de crescimento de Solow. O problema desse consumidor será:

$$Max \int_0^T u(C) e^{-\delta t} dt$$

sujeito a

$$\dot{K} = rK - C$$

$\delta > 0$ é a taxa de preferência intertemporal do consumidor. Suporemos que o consumo (C) e o estoque de capital (K) são estritamente positivos $\forall t$. Teremos ainda que: $\mu = \lambda e^{\delta t}$

$$H_c = u(C) + \mu (rK - C)$$

Tomando as condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial H}{\partial C} = u'(C) - \mu = 0 \tag{48}$$

$$\dot{K} = \frac{\partial H}{\partial \mu} = rK - C \tag{49}$$

$$\dot{\mu} = -\frac{\partial H}{\partial K} + \delta\mu = \mu\left(\delta - r\right) \tag{50}$$

Podemos derivar a equação (48) em relação ao tempo e usarmos o resultado de (50):

$$u'\left(C\right) = \mu$$

Lembre que precisaremos usar a regra da cadeia:

$$u''\left(C\right)\dot{C} = \dot{\mu}$$

$$u''\left(C\right)\dot{C} = \mu\left(\delta - r\right)$$

$$u''\left(C\right)\frac{\dot{C}}{u'\left(C\right)} = \left(\delta - r\right)$$

$$\dot{C} = \frac{u'\left(C\right)}{u''\left(C\right)}\left(\delta - r\right)$$

Podemos multiplicar a equação acima por C:

$$C\dot{C} = -C\frac{u'\left(C\right)}{u''\left(C\right)}\left(r - \delta\right)$$

$$\dot{C} = -\frac{C}{C}\frac{u'\left(C\right)}{u''\left(C\right)}\left(r - \delta\right)$$

$$\rho\left(C\right) = -C\frac{u''\left(C\right)}{u'\left(C\right)}$$

é o coeficiente de aversão ao risco de Arrow-Pratt. Então podemos reescrever a equação acima do seguinte modo:

$$\dot{C} = \frac{1}{\rho\left(C\right)}C\left(r - \delta\right)$$

Ainda podemos fazer o seguinte procedimento:

$$\frac{\dot{C}}{C} = g_c = \frac{\left(r - \delta\right)}{\rho\left(C\right)}$$

Note que se a taxa de juros da economia for menor que a taxa de desconto intertemporal do consumo o crescerá ao longo do tempo.

20.4 Horizonte Temporal Infinito

Agora veremos o modelo Neoclássico de crescimento em que as famílias maximizam sua utilidade ao longo do tempo.

20.4.1 Modelo Neoclássico de Crescimento

Seja a economia definida do seguinte modo:

$$Y = f\left(K, L\right)$$

$$Y_L > 0 \; Y_{LL} < 0$$

$$Y_K > 0 \; Y_{KK} < 0$$

Definiremos as equações do modelo em termos per capita: $y = \frac{Y}{L}$ e $k = \frac{K}{L}$. A produção da economia é definida por uma função côncava no formato Cobb-Douglas que exibe retornos decrescentes a escala: $y = f\left(k\right) = k^{\alpha}$. A economia é fechada e sem governo. Seja $u\left(c\right)$ uma função côncava de bem-estar social que representa um consumidor representativo da economia.

$$\underset{c\to\infty}{lim} u'(c) = \infty \text{ e } \underset{c\to 0}{lim} u'(c) = 0$$

Seja ρ a taxa de desconto intertemporal:

$$\text{Max}V = \int_0^{\infty} u(c)e^{-\rho t}L_0 e^{nt}dt = \int_0^{\infty} u(c)e^{-(\rho-n)t}dt$$

sendo $r = \rho - n$

$$\text{Max}V == \int_0^{\infty} u(c)e^{-rt}dt$$

sujeito a

$$\dot{k} = f\left(k\right) - c - \left(n+\delta\right)k$$

$$k\left(0\right) = k_0 \text{ e } c \in \left[0, f\left(k\right)\right]$$

Montaremos o Hamiltoniano:

$$H(c,k,\lambda) = u(c)e^{-rt} + \lambda\left(k^{\alpha} - c - \left(n+\delta\right)k\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial c} = u'(c)\, e^{-rt} - \lambda = 0 \tag{51}$$

$$\dot{k} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = k^{\alpha} - c - (n+\delta)\, k \tag{52}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial k} = -\lambda \left(\alpha k^{\alpha-1} - (n+\delta)\right) \tag{53}$$

Se derivarmos (51) em relação ao tempo, teremos que:

$$u''(c)\, \dot{c} e^{-rt} - r u'(c)\, e^{-rt} = \dot{\lambda}$$

$$u''(c)\, \dot{c} e^{-rt} - r\lambda = \dot{\lambda}$$

Dividindo a equação por λ:

$$\frac{u''(c)\, \dot{c} e^{-rt}}{\lambda} - r\frac{\lambda}{\lambda} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$$

$$\frac{u''(c)\, \dot{c} e^{-rt}}{u'(c)\, e^{-rt}} - r = \left(-\alpha k^{\alpha-1} + (n+\delta)\right)$$

$$\dot{c}\frac{u''(c)}{u'(c)} = -\alpha k^{\alpha-1} + r + (n+\delta)$$

$r = \rho - n$

$$\dot{c}\frac{u''(c)}{u'(c)} = -\alpha k^{\alpha-1} + \rho - n + (n+\delta)$$

$$\dot{c}\frac{u''(c)}{u'(c)} = -\alpha k^{\alpha-1} + (\rho+\delta)$$

$$\dot{c}\frac{u''(c)}{u'(c)} = -\left(\alpha k^{\alpha-1} - (\rho+\delta)\right)$$

Multiplicando os dois lados da equação por c:

$$\dot{c}\frac{u''(c)}{u'(c)} c = -c\left(\alpha k^{\alpha-1} - (\rho+\delta)\right)$$

Multiplicando os dois lados da equação por -1:

$$\dot{c} - \frac{u''(c)}{u'(c)} c = c\left(\alpha k^{\alpha-1} - (\rho+\delta)\right)$$

$$\dot{c} = -\frac{u'(c)}{u''(c)}\frac{c}{c}\Big(\alpha k^{\alpha-1} - (\rho+\delta)\Big)$$

Para simplificar o modelo suporemos a seguinte função de utilidade:

$$u(c) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$

Então teremos que:

$$u'(c) = c^{-\theta}$$

$$u''(c) = -\theta c^{-\theta-1}$$

Então:

$$-c\frac{u'(c)}{u''(c)} = -c\frac{c^{-\theta}}{-\theta c^{-\theta-1}} = \frac{c^2}{\theta}$$

Inserindo na equação:

$$\dot{c} = \frac{c^2}{\theta}\frac{1}{c}\Big(\alpha k^{\alpha-1} - (\rho+\delta)\Big)$$

$$\dot{c} = \frac{c}{\theta}\Big(\alpha k^{\alpha-1} - (\rho+\delta)\Big)$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\Big(\alpha k^{\alpha-1} - (\rho+\delta)\Big)$$

No equilíbrio de estado estacionário teremos que:

$$\dot{k} = k^{\alpha} - c - (n+\delta)\,k$$

$$\dot{k} = 0$$

$$\dot{c} = 0$$

$$k^{\alpha} = (\rho+\delta)$$

$$(\rho+\delta)^{\frac{1}{\alpha}} = k^*$$

Isso implica que:

$$c^* = k^{*^\alpha} - (n+\delta)\, k^*$$

$$c^* = (\rho+\delta) - (n+\delta)\,(\rho+\delta)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$c^* = (\rho+\delta)\left(1 - (n+\delta)\,(\rho+\delta)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)$$

Para testarmos a estabilidade dos pontos de estado estacionário precisamos que:

$$\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\dot{k}/dk & d\dot{k}/dc \\ d\dot{c}/dk & d\dot{c}/dc \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k-k^* \\ c-c^* \end{bmatrix}$$

Que é igual a:

$$\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha k^{\alpha-1} - (n+\delta) & -1 \\ \frac{c}{\theta}\alpha k^{\alpha-1} & \frac{1}{\theta}\left(\alpha k^{\alpha-1} - (\rho+\delta)\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k-k^* \\ c-c^* \end{bmatrix}$$

Devemos avaliar a expressão acima no estado estacionário. Sabemos que o traço deve ser negativo e o determinante positivo isso exige que:

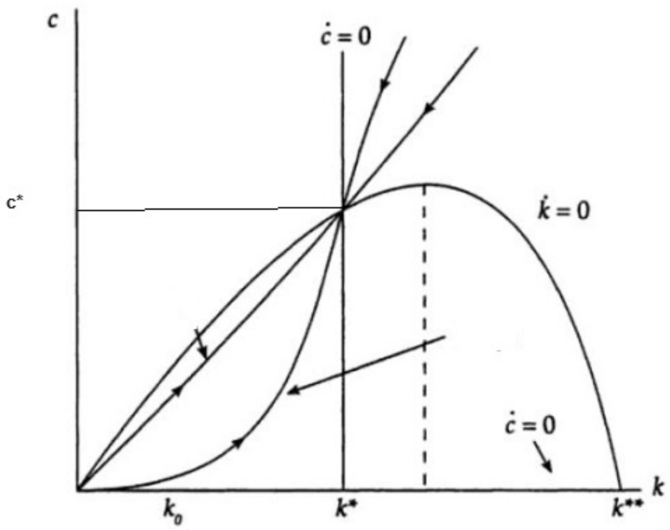
$$\alpha k^{*^{\alpha-1}} - (n+\delta) + \frac{1}{\theta}\left(\alpha k^{*^{\alpha-1}} - (\rho+\delta)\right) < 0$$

e que

$$\left[\alpha k^{*^{\alpha-1}} - (n+\delta)\right]\left[\frac{1}{\theta}\left(\alpha k^{*^{\alpha-1}} - (\rho+\delta)\right)\right] + \frac{c^*}{\theta}\alpha k^{*^{\alpha-1}} > 0$$

Abaixo temos uma ilustração do diagrama de fase:

Figura 9: Diagrama de Fase



20.5 Exercícios de exemplo

Todos esses exercícios foram extraídos do capítulo 20 de Chiang e Wainwright (2005).

Exercício 20.2.1

$$Max \int_0^T \left(y - u^2\right) dt$$

sujeito a

$$\dot{y} = u$$

$$y\left(0\right) = 2, y\left(1\right) \text{ livre}$$

$$y\left(0\right) = 4, y\left(T\right) = 5 \text{ e } T \text{ livre}$$

Montaremos o Hamiltoniano:

$$H(u, y, \lambda) = \left(y - u^2\right) + \lambda u$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \lambda = 0$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 1$$

Podemos integrar a última equação para obtermos:

$$\int d\lambda = -\int dt$$

$$\lambda = c_1 - t$$

Sabemos que:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda = 2u$$

$$u = \frac{c_1 - t}{2}$$

Inserindo essas informações na equação de estado:

$$\dot{y} = u$$

$$\dot{y} = \frac{c_1 - t}{2}$$

$$dy = dt\left(\frac{c_1 - t}{2}\right)$$

$$\int dy = \int dt\left(\frac{c_1 - t}{2}\right)$$

$$y = \frac{c_1 t}{2} - \frac{t^2}{4} + c_2$$

Podemos então usar as condições terminais:
$y\,(0) = 2$

$$2 = c_2$$

Devemos testar se $y\,(1) > 0$.

$$y = \frac{c_1}{2} - \frac{1}{4} + 2$$

Ainda não sabemos o valor de c_1. Para isso, podemos chutar que $\lambda\,(1) = 0$:

$$\lambda = c_1 - t$$

$$0 = c_1 - 1$$

$$1 = c_1$$

Com $c_1 = 1$ teremos que

$$y\,(1) = 2.25 > y\,(0) = 2$$

O que satisfaz a condição de folga do Teorema de Kuhn-Tucker. Portanto a solução é:

$$y = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4} + 2$$

$$\lambda = 1 - t$$

$$u = 0.5\,(1 - t)$$

Exercício 20.2.2

$$Max \int_0^8 6y dt$$

sujeito a

$$\dot{y} = u + y$$

$$y\,(0) = 10, y\,(8) \text{ livre e} u \in [0, 2]$$

Montaremos o Hamiltoniano:

$$H(u, y, \lambda) = 6y + \lambda\,(y + u)$$

Note que como o Hamiltoniano é linear em u devemos utilizar o Teorema de Weierstrass. Então, o Hamiltoniano será maximizado quando $u = 2$. Além disso, pela condição de folga de Kuhn-Tucker precisamos que $\lambda > 0$.

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u + y$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\,(6 + \lambda)$$

$$\dot{\lambda} = -\,(6 + \lambda)$$

Encontraremos uma solução para λ. Note que essa é uma equação linear de primeira ordem, e que os coeficientes não dependem do tempo. Então devemos achar a solução de estado estacionário quando $\dot{\lambda} = 0$.

$$\lambda = \frac{-b}{a} + c_1 e^{at}$$

$$0 = -\,(6 + \lambda)$$

$$-6 = \lambda$$

Adicionando essa solução da solução quando $b = 0$.

$$\lambda = c_1 e^{-t} - 6$$

Como $u = 2$ podemos fazer o mesmo processo para y:

$$\dot{y} = 2 + y$$

$$y = c_1 e^{t} - 2$$

A partir de agora utilizaremos as condições iniciais e terminais do problema:

$$y\left(0\right) = 10, y\left(8\right) \text{ livre}$$

$$10 = c_1 - 2$$

$$12 = c_1$$

Então:

$$y = 12e^{t} - 2$$

Exercício 20.2.3

$$Max \int_0^T -\left(au + bu^2\right) dt$$

$$\text{sujeito a}$$

$$\dot{y} = y - u$$

$$y\left(0\right) = y_0, y\left(T\right) \text{ livre}$$

Montaremos o Hamiltoniano:

$$H(u, y, \lambda) = -\left(au + bu^2\right) + \lambda\left(y - u\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -a - 2ub - \lambda = 0$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = y - u$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\lambda$$

Note que é simples encontramos λ:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -dt$$

$$ln\,(\lambda) = -t + c_1$$

$$\lambda = c_1 e^{-t}$$

Se inserirmos λ na equação de u teremos que:

$$-a - 2ub = \lambda$$

$$-2bu = a + c_1 e^{-t}$$

$$u = -\left(\frac{a + c_1 e^{-t}}{2b}\right)$$

Para facilitar os cálculos, podemos usar a condição terminal $\lambda\,(T) = 0$

$$0 = c_1 e^{-T}$$

$$0 = c_1$$

$$u = -\frac{a}{2b}$$

Devemos inserir u na equação diferencial de y.

$$\dot{y} = y - u$$

$$\dot{y} = y + \left(\frac{a + c_1 e^{-t}}{2b}\right)$$

Como os coeficientes de um dos termos da equação diferencial depende do tempo, deveremos usar:

$$y(t) = \left[c_1 + \int be^{-\int adt}dt\right]e^{\int adt}$$

Note que $a\,(t) = 1$ e $b\,(t) = \left(\frac{a+c_1e^{-t}}{2b}\right)$

$$y(t) = \left[c_2 + \int \left(\frac{a+c_1e^{-t}}{2b}\right)e^{-\int dt}dt\right]e^{\int dt}$$

$$y(t) = \left[c_2 + \int \left(\frac{a+c_1e^{-t}}{2b}\right)e^{-t}dt\right]e^{t}$$

$$y(t) = c_2e^t + \left[\int \left(\frac{a}{2b}\right)e^{-2t}dt + \int \left(\frac{c_1}{2b}\right)e^{-t}dt\right]e^{t}$$

$$y(t) = \frac{tc_1}{2b}e^t + c_2e^t - \frac{a}{2b}$$

Usando a condição inicial $y\,(0) = y_0$

$$y_o = c_2 - \frac{a}{2b}$$

$$c_2 = y_0 + \frac{a}{2b}$$

Podemos ainda utilizar a condição terminal:

$$y\,(T) = \left(y_0 + \frac{a}{2b}\right)e^T - \frac{a}{2b}$$

Exercício 20.2.4

$$Max \int_0^T \left(yu - u^2 - y^2\right)dt$$

sujeito a

$$\dot{y} = u$$

$$y\,(0) = y_0 \text{ e } y\,(T) \text{ livre}$$

Montaremos o Hamiltoniano:

$$H(u, y, \lambda) = yu - u^2 - y^2 + \lambda\,(u)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = y - 2u + \lambda = 0$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u$$

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial y} = u - 2y$$

Podemos resolver u em função de λ e y:

$$u = \frac{y + \lambda}{2}$$

Inserindo na equação de $\dot{\lambda}$:

$$\dot{\lambda} = -u + 2y$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{y + \lambda}{2} + 2y$$

$$\dot{\lambda} = \frac{3}{2}y - \frac{\lambda}{2}$$

Podemos escrever um sistema de equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 1.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ y \end{bmatrix}$$

Defina:

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 1.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Sabemos que:

$$Traço\,(A) = r_1 + r_2$$

$$det\,(A) = r_1 r_2$$

$$0 = r_1 + r_2$$

$$-1 = r_1 r_2$$

Então:

$$-1 = -r_1^2$$

$$\pm 1 = r_1 \text{e } r_2$$

Em outras palavras, temos 2 autovalores distintos. O próximo passo é encontramos os autovetores. Usando $r_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} -0.5-1 & 1.5 \\ 0.5 & 0.5-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1.5 & 1.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo a multiplicação matricial:

$$v_1^1 = v_2^1$$

Uma solução possível é

$$v_1^1 = v_2^1 \ = 1$$

O próximo passo é solucionarmos para Usando $r_1 = -1$:

$$\begin{bmatrix} -0.5+1 & 1.5 \\ 0.5 & 0.5+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 1.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então teremos que:

$$v_1^2 = -3v_2^2$$

Fazendo $v_1^2 = 1$ teremos que:

$$v_2^2 \ = -\frac{1}{3}$$

A solução desse sistema de equações fica:

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} c_1 e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix} c_2 e^{-t}$$

Usando as condições do problema $y\,(0) = y_0$ e $y\,(T)$ livre:

$$y = c_1 e^t - \frac{1}{3} c_2 e^{-t}$$

$y\,(0) = y_0$

$$y_0 = c_1 - \frac{c_2}{3}$$

Se $\lambda\,(T) = 0$

$$0 = c_1 e^T + c_2 e^{-T}$$

$$c_1 = -c_2 e^{-2T}$$

Então:

$$y_0 = -c_2 e^{-2T} - \frac{c_2}{3}$$

$$y_0 = -c_2 \left(e^{-2T} + \frac{1}{3} \right)$$

$$-\frac{y_0}{\left(e^{-2T} + \frac{1}{3}\right)} = c_2$$

Podemos encontrar c_1:

$$c_1 = \frac{y_0 e^{-2T}}{\left(e^{-2T} + \frac{1}{3}\right)}$$

Inserindo os valores das constantes na equação de y:

$$y = \frac{y_0 e^{t-2T}}{\left(e^{-2T} + \frac{1}{3}\right)} + \frac{y_0 e^{-t}}{3\left(e^{-2T} + \frac{1}{3}\right)}$$

$$y = \frac{y_0}{\left(e^{-2T} + \frac{1}{3}\right)} \left(e^{t-2T} + \frac{e^{-t}}{3} \right)$$

e em:

$$\lambda = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$$

$$\lambda = \frac{y_0 e^{-2T}}{\left(e^{-2T} + \frac{1}{3}\right)} e^t - \frac{y_0}{\left(e^{-2T} + \frac{1}{3}\right)} e^{-t}$$

$$\lambda = \frac{y_0}{\left(e^{-2T} + \frac{1}{3}\right)} \left(e^{t-2T} - e^{-t} \right)$$

Sabemos que $u = 0.5\left(\lambda + y\right)$

$$u = \frac{y_0}{\left(e^{-2T} + \frac{1}{3}\right)}\left(e^{t-2T} - \frac{e^{-t}}{3}\right)$$

$$y\left(T\right) = \left(y_0 + \frac{a}{2b}\right)e^{T} - \frac{a}{2b}$$

Exercício 20.2.5

$$Max\int_0^{20} -0.5u^2dt$$

sujeito a

$$\dot{y} = u$$

$$y\left(0\right) = 10 \text{ e } y\left(20\right) = 0$$

Montaremos o Hamiltoniano:

$$H(u, y, \lambda) = -0.5u^2 + \lambda\left(u\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -u + \lambda = 0$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u$$

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

Pela equação de $\dot{\lambda}$:

$$d\lambda = 0dt$$

$$\int d\lambda = 0\int dt$$

$$\lambda = c_1$$

Como

$$u = \lambda = c_1$$

Então:

$$\dot{y} = c_1$$

$$dy = c_1 dt$$

$$\int dy = c_1 \int dt$$

$$y = tc_1 + c_2$$

Usando as condições dadas no problema:

$$y\left(0\right) = 10 \text{ e } y\left(20\right) = 0$$

$$10 = c_2$$

$$0 = 20c_1 + 10$$

$$-0.5 = c_1$$

$$y = 10 - 0.5t$$

$$u = \lambda = 0.5$$

Exercício 20.2.6

$$Max \int_0^4 3y dt$$

$$\text{sujeito a}$$

$$\dot{y} = y + u$$

$$y\left(0\right) = 5 \text{ e } y\left(4\right) \geq 300$$

$$0 \leq u \leq 2$$

Montaremos o Hamiltoniano:

$$H(u, y, \lambda) = 3y + \lambda\,(y + u)$$

O Hamiltoniano é uma função linear de u. Novamente usaremos o Teorema de Weierstrass e faremos $u = 2$.

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = y + 2$$

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial y} = 3 + \lambda$$

$$\dot{\lambda} - \lambda - 3 = 0$$

$$\dot{\lambda} - a\lambda - b = 0$$

Pela equação de $\dot{\lambda}$:

$$\lambda = -3 + c_1 e^{-t}$$

Então:

$$\dot{y} = y + 2$$

$$y = k_1 e^{t} - 2$$

Usando as condições dadas pelo problema:

$$y\,(0) = 5 \text{ e } y\,(4) \geq 300$$

$$5 = k_1 - 2$$

$$7 = k_1$$

$$y = 7e^{t} - 2$$

Se:

$$\lambda\,(4) = 0$$

$$0 = -3 + c_1 e^{-4}$$

$$3e^4 = c_1$$

$$\lambda = 3e^{4-t} - 3$$

Note que:

$$y\,(4) \geq 300$$

$$7e^4 - 2 \geq 300$$

$$380 \geq 300$$

Exercício 20.2.7

$$Max \int_0^1 -u^2 dt$$

$$\text{sujeito a}$$

$$\dot{y} = y + u$$

$$y\,(0) = 1 \text{ e } y\,(1) = 0$$

Montaremos o Hamiltoniano:

$$H(u, y, \lambda) = -u^2 + \lambda\,(y + u)$$

.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \lambda = 0$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = y + u$$

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial y} = \lambda$$

Essa última equação implica que:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda$$

$$-\int \frac{d\lambda}{\lambda} = \int dt$$

$$\lambda = c_1 e^{-t}$$

Inserindo na equação de u:

$$u = \frac{c_1 e^{-t}}{2}$$

Solucionando a equação diferencial para y:

$$\dot{y} = y + \frac{c_1 e^{-t}}{2}$$

$$y = \left[c_2 + \int \frac{c_1 e^{-t}}{2} e^{-\int dt} dt \right] e^{\int dt}$$

$$y = \left[c_2 + \int \frac{c_1 e^{-2t}}{2} dt \right] e^{t}$$

$$y = c_2 e^{t} - \frac{c_1 e^{-t}}{4}$$

Usando as condições dadas no problema:

$$y\left(0\right) = 1 \text{ e } y\left(1\right) = 0$$

$$1 = c_2 - \frac{c_1}{4}$$

$$0 = c_2 e - \frac{c_1 e^{-1}}{4}$$

$$\frac{c_1 e^{-1}}{4} = c_2 e$$

$$c_1 = 4 c_2 e^{2}$$

$$1 = c_2 - \frac{4c_2e^2}{4}$$

$$c_2 = \frac{1}{1-e^2}$$

$$c_1 = \frac{4e^2}{1-e^2}$$

$$y = \frac{e^t}{1-e^2} - \frac{e^{2-t}}{1-e^2}$$

$$\lambda = \frac{4e^{2-t}}{1-e^2}$$

$$u = \frac{2e^{2-t}}{1-e^2}$$

Exercício 20.2.8

$$Max \int_1^2 \left(y + ut - u^2\right) dt$$

sujeito a

$$\dot{y} = u$$

$$y\,(1) = 3 \text{ e } y\,(2) = 4$$

Montaremos o Hamiltoniano:

$$H(u, y, \lambda) = y + ut - u^2 + \lambda\,(u)$$

.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = t - 2u + \lambda = 0$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u$$

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial y} = 1$$

Essa última equação implica que:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -1$$

$$\int d\lambda = -\int dt$$

$$\lambda = c_1 - t$$

Inserindo na equação de u:

$$t - 2u + c_1 - t = 0$$

$$\frac{c_1}{2} = u$$

Solucionando a equação diferencial para y:

$$\dot{y} = \frac{c_1}{2}$$

$$\int dy = \frac{c_1}{2} \int dt$$

$$y = \frac{c_1 t}{2} + c_2$$

Usando as condições dadas no problema:

$$y\,(1) = 3 \text{ e } y\,(2) = 4$$

$$3 = \frac{c_1}{2} + c_2$$

$$6 = c_1 + 2c_2$$

$$4 = c_1 + c_2$$

Subtraindo as duas equações:

$$2 = c_2$$

O que implica que:

$$2 = c_1$$

$$y = t + 2$$

$$\lambda = 2 - t$$

$$u = 1$$

Exercício 20.2.9

$$Max \int_0^2 \left(2y - 3u - au^2\right) dt$$

$$\text{sujeito a}$$

$$\dot{y} = u + y$$

$$y(0) = 5 \text{ e } y(2) \text{ livre}$$

Montaremos o Hamiltoniano:

$$H(u, y, \lambda) = 2y - 3u - au^2 + \lambda(u + y)$$

.

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -3 - 2au + \lambda = 0$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = y + u$$

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial y} = 2 + \lambda$$

$$\dot{\lambda} - a\lambda - b = 0$$

Pela equação de $\dot{\lambda}$:

$$\lambda = c_1 e^{-t} - 2$$

Inserindo na equação de u:

$$-3 - 2au + c_1 e^{-t} - 2 = 0$$

$$u = \frac{c_1 e^{-t} - 5}{2}$$

Inserindo na equação de $\dot{y}$:

$$\dot{y} = y \frac{c_1 e^{-t} - 5}{2}$$

$$y = \left[c_2 + \int \frac{-5 + e^{-t}}{2} e^{-\int dt} dt \right] e^{\int dt}$$

$$y = c_2 e^t + \left[+ \frac{5e^{-t}}{2} - \frac{c_1 e^{-2t}}{4} \right] e^t$$

$$y = \frac{5}{2} + c_2 e^t - \frac{c_1 e^{-t}}{4}$$

Usando as condições apresentadas pelo exercício:

$$y\left(0\right) = 5 \text{ e } y\left(2\right) \text{ livre}$$

$$5 = \frac{5}{2} + c_2 - \frac{c_1}{4}$$

$$10 = 5 + 2c_2 - \frac{c_1}{2}$$

$$5 = 2c_2 - \frac{c_1}{2}$$

Se $\lambda\left(2\right) = 0$:

$$0 = c_1 e^{-2} - 2$$

$$2e^2 = c_1$$

Então:

$$5 = 2c_2 - \frac{2e^2}{2}$$

$$\frac{5 + e^2}{2} = c_2$$

$$y = \frac{5}{2} + \left(\frac{5 + e^2}{2} \right) e^t - \frac{e^{2-t}}{2}$$

$$y = \frac{5}{2}\left(1 + e^{t}\right) + \frac{e^{2}}{2}\left(e^{t} - e^{-t}\right)$$

$$\lambda = 2\left(e^{2-t} - 1\right)$$

:

$$u = e^{2-t} - \frac{5}{2}$$

Exercício 20.4.1

$$Max \int_{0}^{T} \left(K - \alpha K^{2} - I^{2}\right) dt$$

sujeito a

$$\dot{K} = I - \delta K$$

$$K\left(0\right) = K_{0} \text{ e } K\left(T\right) \text{ livre}$$

Antes de montarmos o problema iremos parametrizar os valores de $\alpha = 0.5$ e $\delta = 0.71$. Além disso, assumiremos que $K\left(0\right) = 0$ e $T = 1$. A partir disso, montaremos o Hamiltoniano:

$$H(K, I, \lambda) = K - 0.5K^{2} - I^{2} - \lambda\left(I - 0.71K\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial I} = 2I - \lambda = 0$$

$$\dot{K} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = I - 0.71K$$

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial K} = 1 - K - 0.71\lambda$$

Montaremos um sistema de equações diferenciais com $\dot{\lambda}$ e $\dot{K}$:

$$\dot{K} = 0.5\lambda - 0.71K$$

$$\dot{\lambda} = K + 0.71\lambda - 1$$

Montaremos o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.71 & 1 \\ 0.5 & -0.71 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Defina:

$$A = \begin{bmatrix} 0.71 & 1 \\ 0.5 & -0.71 \end{bmatrix}$$

Sabemos que:

$$Traço\,(A) = r_1 + r_2$$

$$det\,(A) = r_1 r_2$$

$$0 = r_1 + r_2$$

$$-1 = r_1 r_2$$

Então:

$$-1 = -r_1^2$$

$$\pm 1 = r_1$$

Em outras palavras, temos 2 autovalores distintos. O próximo passo é encontramos os autovetores. Usando $r_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 0.71 - 1 & 1 \\ 0.5 & -0.71 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.29 & 1 \\ 0.5 & -1.71 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo a multiplicação matricial:

$$0.29 v_1^1 = v_2^1$$

Uma solução possível é

$$v_1^1 = 1 \text{ e } v_2^1 \ = 0.29$$

O próximo passo é solucionarmos para Usando $r_1 = -1$:

$$\begin{bmatrix} 0.71+1 & 1 \\ 0.5 & -0.71+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.71 & 1 \\ 0.5 & 0.29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo a multiplicação matricial:

$$1.71v_1^2 = -v_2^2$$

Uma solução possível é

$$v_1^2 = 1 \text{ e } v_2^2 \ = -1.71$$

A solução desse sistema de equações fica:

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ K \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.29 \end{pmatrix} c_1 e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1.71 \end{pmatrix} c_2 e^{-t}$$

Precisamos encontrar a solução particular:

$$\begin{bmatrix} \lambda_p \\ K_p \end{bmatrix} = -A^{-1}B$$

Ou encontrarmos os valores de λ^* e K^* de estado estacionário fazendo :$\dot{K} = 0$ e $\dot{\lambda} = 0$

$$0.71K = 0.5\lambda$$

$$K = 0.71\lambda$$

$$1 = K + 0.71\lambda$$

$$1 = 0.71\lambda + 0.71\lambda$$

Então os valores aproximados ficam:

$$0.7 = \lambda^*$$

$$0.5 = K^*$$

A solução desse sistema de equações fica:

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ K \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.29 \end{pmatrix} c_1 e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ -1.71 \end{pmatrix} c_2 e^{-t} + \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Usando as condições apresentadas no problema:

$$K(0) = 0 \text{ e } K(1) \text{ livre}$$

Precisaremos checar a condição de transversalidade $\lambda(1) = 0$:

$$\lambda = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + 0.7$$

$$0 = c_1 e^1 + c_2 e^{-1} + 0.7$$

$$-0.7 = c_1 e^1 + c_2 e^{-1}$$

$$-1.9 - 7.4 c_1 = c_2$$

Usando a condição inicial de K:

$$K = 0.29 c_1 e^t - 1.71 c_2 e^{-t} + 0.5$$

$$0 = 0.29 c_1 e^0 - 1.71 c_2 e^0 + 0.5$$

$$c_2 = 0.17 c_1 + 0.29$$

Inserindo na equação anterior:

$$-1.9 - 7.4 c_1 = 0.17 c_1 + 0.29$$

$$-1.9 - 0.29 = 0.17 c_1 + 7.4 c_1$$

$$-2.2 = 7.57 c_1$$

$$-0.3 = c_1$$

$$c_2 = 0.17 c_1 + 0.29$$

$$c_2 = 0.24$$

Então teremos que:

$$\lambda = 0.7 + 0.24e^{-t} - 0.3e^{t}$$

$$K = 0.5 - 0.09e^{t} - 0.41e^{-t}$$

$$I = 1.4 + 0.48e^{-t} - 0.6e^{t}$$

Exercício 20.4.2

$$Max \int_0^T ln\,(q)\, e^{-\delta t} dt$$

sujeito a

$$\dot{s} = -q$$

$$s\,(0) = s_0 \text{ e } s\,(t) \geq 0$$

Montaremos o Hamiltoniano:

$$H(q, s, \lambda) = ln\,(q)\, e^{-\delta t} - \lambda\,(q)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{1}{q} e^{-\delta t} - \lambda = 0$$

$$\dot{s} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = -q$$

$$-\dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial s} = 0$$

Pela equação de $\dot{\lambda}$:

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0$$

$$\int d\lambda = 0 \int dt$$

$$\lambda = c_1$$

aplicando o ln na equação de q:

$$e^{-\delta t} = c_1 q$$

$$q = \frac{1}{c_1} e^{-\delta t}$$

Inserindo na equação de $\dot{s}$:

$$\dot{s} = -\frac{e^{-\delta t}}{c_1}$$

$$ds = -\frac{e^{-\delta t}}{c_1} dt$$

$$s = \frac{e^{-\delta t}}{c_1 \delta} + c_2$$

Pelas condições do problema:

$$s\left(0\right) = s_0 \text{ e } s\left(t\right) \geq 0$$

$$s_0 - \frac{1}{c_1 \delta} = c_2$$

$$s_T = \frac{e^{-\delta T}}{c_1 \delta} + c_2$$

$$s_T = \frac{e^{-\delta T}}{c_1 \delta} + s_0 - \frac{1}{c_1 \delta}$$

$$s_T - s_0 = \frac{e^{-\delta T}}{c_1 \delta} - \frac{1}{c_1 \delta}$$

$$c_1 \delta \left(s_T - s_0\right) = e^{-\delta T} - 1$$

$$c_1 = \frac{e^{-\delta T} - 1}{\delta \left(s_T - s_0\right)}$$

E então:

$$s_0 - \frac{1}{c_1 \delta} = c_2$$

$$c_2 = s_0 - \frac{\delta\left(s_T - s_0\right)}{\delta\left(e^{-\delta T} - 1\right)}$$

$$c_2 = s_0 - \frac{\left(s_T - s_0\right)}{\left(e^{-\delta T} - 1\right)}$$

$$c_2 = \frac{s_0\left(e^{-\delta T} - 1\right) - \left(s_T - s_0\right)}{\left(e^{-\delta T} - 1\right)}$$

$$s = \frac{e^{-\delta t}}{c_1 \delta} + c_2$$

$$s = \frac{e^{-\delta(T+t)} - e^{-\delta T}}{\left(s_T - s_0\right)} + \frac{s_0\left(e^{-\delta T} - 1\right) - \left(s_T - s_0\right)}{\left(e^{-\delta T} - 1\right)}$$

$$q = \frac{1}{c_1} e^{-\delta t}$$

$$\lambda = c_1 = \frac{e^{-\delta T} - 1}{\delta\left(s_T - s_0\right)}$$

$$q = \frac{\delta\left(s_T - s_0\right)}{e^{-\delta T} - 1} e^{-\delta t}$$

Referências

BELLMAN, R. .The Theory of Dynamic Programming. RAND Corporation, 1954.

CHIANG, A.; WAINWRIGHT, K. Matemática para economistas. 4a ed. Elsevier, 2005.

DADKHAH, K. Foundations of Mathematical and Computational Economics, 2ed. Springer, 2011.

GUIDORIZZI, H. Curso de Calculo, vol. 1. LTC, 2001.

LEONARD, D.; VAN LONG, N. Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics. Cambridge University Press, 1992.

MORETIN, P. A.; HAZZAN, S.; BUSSAB. W. O. Cálculo: funções de uma e várias variáveis. 3° Edição. Editora Saraiva, 2016.

PONTRYAGIN, L. S.; V. G. BOLTYANSKII; R. V. GAMKRELIDZE; E. F. MISHCHENKO. The Mathematical Theory of Optimal Processes. New York, Wiley, 1962.

SIMON, C.; BLUME, L. Matemática para economistas. Porto Alegre: Bookman, 2004.