Notas de Aula de Microeconomia 2

Rodrigo Nobre Fernandez

Pelotas

2024

Prefácio

Esta apostila é um resumo das notas de aula da disciplina de Microeconomia 2 do curso de Pós-Graduação em Organizações e Mercados (Mestrado/Doutorado em Economia Aplicada) da Universidade Federal em Pelotas. Em quase sua totalidade essas notas de aula transcrevem literalmente ou resumem o conteúdo do livro de Mas-Colell *et al.* (1995). Destaco que essa apostila não tem fins comerciais, o texto serve exclusivamente como material de apoio as aulas. Aproveito e agradeço ao aluno Fabrício Santos que colaborou na construção desse material. Quaisquer erros e omissões são de minha inteira responsabilidade. Contribuições e considerações podem ser enviadas para: **rodrigo.fernandez@ufpel.edu.br** ou **rodrigonobrefernandez@gmail.com**

Sumário

1 Escolha do consumidor sob Incerteza

O tomador de decisões se depara com um número de alternativas “arriscadas”. Cada alternativa pode resultar em um número de resultados possíveis. Denotamos o conjunto de todos os resultados possíveis por C. Por simplicidade assumimos um número finito de resultados possíveis $n = 1, ..., N$.

Definição. (Loteria): Uma loteria simples L é uma lista $L = (p_1, ..., p_n)$ com $p_n \geq 0 \; \forall \; n$ e $\sum_n p_n = 1$ em que p_n é q probabilidades de ocorrência do resultado n.

Definiremos na sequência uma loteria composta:

Definição. (Loteria Composta): Dadas k loterias simples $L_k = (p_1^k, ..., p_n^k)$ $k = 1, ..., k$ e as probabilidades $\alpha_k \geq 0$ com $\sum_k \alpha_k = 1$ a loteria composta $(L_1, ..., L_k; \alpha_1, ..., \alpha_k)$ é a alternativa arriscada que resulta na loteria simples L_k com probabilidades α_k para $k = 1, ..., k$. Para cada loteria composta, nós calculamos a loteria reduzida como a loteria $(L = p_1, ..., p_n)$ que gera a última distribuição de resultados.

$$p_n = \alpha_1 p_n^1 + ... + \alpha_k p_n^k$$

Seja $(L_1, L_2, L_3; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e $L_1 = (1, 0, 0), L_2 = (\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8})$ e $L_3 = (\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8})$. A loteria reduzida será $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Formalmente: $L = \alpha_1 L_1 + ... + \alpha_k L_k \in \triangle$. Sendo $\triangle$ o simplex probabilístico.

1.1 Preferências sobre loterias

Começamos com a hipótese de que se tivermos duas loterias compostas que resultam na mesma loteria reduzida do ponto de vista do decisor elas são equivalentes. Seja L o conjunto de todas as loterias simples sob o conjunto de resultados C. Assumimos que o agente econômico possui a relação de preferência $\gtrsim$ sobre L, ou seja, uma relação de preferência completa e transitiva que permite comparar quaisquer pares de loterias simples.

Definição. A relação de preferência $\gtrsim$ no espaço de loterias simples L é continua se para qualquer L, L', L'' e L nos conjuntos

$$\{\alpha \in [0, 1] : \alpha L + (1 - \alpha)L' \gtrsim L''\} \subset [0, 1]$$

e

$$\{\alpha \in [0, 1] : L'' \gtrsim \alpha L + (1 - \alpha)L'\} \subset [0, 1]$$

são fechados.

Definição. A relação de preferência $\gtrsim$ no espaço L satisfaz o axioma da independência se para L, L', L'' e L e $\alpha \in]0,1[$ temos que:

$$L \gtrsim L' \iff \alpha L + (1-\alpha)L'' \gtrsim \alpha L' + (1-\alpha)L''$$

Axioma da independência

Se a mistura de duas loterias com uma terceira, então o andamento das duas combinações não depende da terceira loteria utilizada. **NOTA:** O axioma da continuidade implica que a existência da função de utilidade representando $\gtrsim U : L \to \mathbb{R}$ tal que $L \gtrsim L'$ se e somente se $U(L) \geq U(L')$.

Definição. A função de utilidade $U : L \to \mathbb{R}$, possui a forma de utilidade esperada se há um conjunto de números $(u_1, ..., u_n)$ para as N possíveis resultados tal que para cada loteria simples $L = (p_1, ..., p_n) \in L$ temos:

$$U(L) = u_1 p_1 + ... + u_n p_n$$

A função de utilidade $U : L \to \mathbb{R}$ com a forma de utilidade esperada é chamada de função de utilidade de *Von Neumann-Morgestern.*

Proposição. *A função de utilidade $U : L \to \mathbb{R}$ possui a forma de utilidade esperada, se e somente se, ela é linear e se, e somente se, satisfaz a propriedade que:*

$$\left(\sum_{k=1}^{k} \alpha_k L_k\right) = \sum_{k=1}^{k} \alpha_k U(L)$$

Para qualquer k loterias $L_k \in L$, $k = 1, ..., k$ e as probabilidades $(\alpha_1, ..., \alpha_k) \geq 0, \sum_k \alpha_k = 1$.

Demonstração. Suponha que $U(\cdot)$ satisfaça a propriedade proposta acima. Podemos escrever qualquer $L = (p_1, ..., p_n)$ como uma combinação convexa de loterias degeneradas $(L^1, ..., L^n)$ isto é $L = \sum_n p_n L^n$. Temos então n. Assim $U(\cdot)$ possui a forma de utilidade esperada. Em outra direção suponha que $U(\cdot)$ possua a forma de utilidade esperada e considere qualquer loteria composta $(L_1, ..., L_k; \alpha_1, ..., \alpha_k)$ onde $L_k = (p_1^k, ..., p_n^k)$. A loteria reduzida seria representada por $L' = \sum_k \alpha_k L_k$. Assim,

$$U\left(\sum_k \alpha_k L_k\right) = \sum_n u_n \left(\sum_k \alpha_k p_n^k\right) = \sum_k \alpha_k \left(\sum_n \alpha_u n p_n^k\right) = \sum_k \alpha_k U(L_k)$$

$$\sum_n p_n = \sum_k \alpha_k (\sum_n p_n^k) = \sum_k \alpha_k = 1$$

. $\square$

Proposição. *Suponha que* $U : l \to \mathbb{R}$ *é uma função de utilidade esperada para a relação de preferência* $\gtrsim$ *em* L*. Então,* $\tilde{U} : l \to \mathbb{R}$ *é outra* $V.N - M$ *para* $\gtrsim$ *se e somente se existem escalares* $\beta > 0$ *e* γ *tal que* $\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$ *para cada* $L \in l$*.*

Essa proposição mostra que a forma da utilidade esperada é preservada somente por uma transformação linear crescente.

Demonstração. Escolha duas loterias $\overline{L}$ e $\underline{L}$ com a propriedade que $\overline{L} \gtrsim L \gtrsim \underline{L}$. Se $\underline{L} \sim \overline{L}$ então cada função de utilidade é constante e o resultado é imediato. Portanto, assumimos que $\overline{L} > \underline{L}$. Note que se $U(\cdot)$ é uma função de utilidade esperada $(V.N - M)$ e $\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$ então:

$$\tilde{U}(\sum_{k=1}^{k} \alpha_k L_k) = \beta U(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k) + \gamma$$

$$= \beta[\sum_{k=1}^{k} \alpha_k U(L_k)] + \gamma$$

$$= \sum_{k=1}^{k} \alpha_k[\beta U(L_k) + \gamma]$$

$$= \sum_{k=1}^{k} \alpha_k \tilde{U}(L_k)$$

Assim $\tilde{U}(\cdot)$ satisfaz as propriedades da função de utilidade esperada. Por outro lado, desejamos mostrar que se $\tilde{U}(\cdot)$ e $U(\cdot)$ possem a forma de utilidade esperada, então constantes $\beta, \gamma > 0$ existe $\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma \ \forall \ L \in l$ Para isso, considere a loteria qualquer $L \in l$ e defina $\lambda_L \in [0, 1]$ por

$$U(L) = \lambda_L U(\overline{L}) + (1 - \lambda_L) U(\underline{L})$$

$$\lambda_L = \frac{U(L) - U(\underline{L})}{U\left(\overline{L}\right) - U(\underline{L})}$$

Como $\lambda_L U(\tilde{L}) + (1 - \lambda_L) U(L) = U(\lambda_L \overline{L} + (1 - \lambda_L)\underline{L})$ e $U(\cdot)$ representa as preferências $\gtrsim$ deve-se ter que $L \ \lambda_L \overline{L} + (1 - \lambda_L)\underline{L}$. Mas se assim for, como $\tilde{U}(.)$ é linear e representa as mesmas preferências, temos que:

$$\tilde{U}(L) = \tilde{U}(\lambda_L \overline{L} + (1 - \lambda_L)\underline{L})$$

Substituindo λ_L por $\frac{U(L) - U(\underline{L})}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})}$

$$\tilde{U}(L) = \frac{U(L) - U(\underline{L})}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})}.(\tilde{U}(\overline{L} - \tilde{U}(\underline{L})) + \tilde{U}(\underline{L})$$

$$\tilde{U}(L) = U(L).\frac{\tilde{U}(\underline{L}) - \tilde{U}(\underline{L})}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})} + (\tilde{U}(\underline{L}) - \frac{U(\underline{L}).(\overline{U}(\underline{L}) - \tilde{U}(\underline{L}))}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})}$$

Sabemos que $\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$. Podemos concluir que:

$$\beta = \frac{\tilde{U}(\overline{L}) - U(\underline{L})}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})} \text{ e } \gamma = \tilde{U}(\underline{L}) - U(\underline{L})\frac{[\tilde{U}(\overline{L}) - \tilde{U}(\underline{L})]}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})}$$

□

1.2 Teorema da Utilidade Esperada

O teorema da utilidade esperada diz que se o tomador de decisão e as preferências sobre loteria satisfazem os axiomas de continuidade e de independência, então suas preferências podem ser representadas na forma de utilidade esperada.

Teorema. *Suponha que a relação de preferência racional $\succsim$ sobre o espaço de loterias L satisfaz os axiomas de continuidade e independência. Então $\succsim$ admite a representação na forma de utilidade esperada. Isto é, podemos atribuir um número u_n a cada resultado $n = 1, ..., N$ de tal modo que para qualquer das loterias $L = (p_1, ..., p_n)$ e $L' = (p_1, ..., p_n)$ temos que $L \succsim L$ se e somente se $\sum_{n=1}^{N} u_n p_n \geq \sum_{n=1}^{N} u_n p'_n$.*

A prova deste teorema será deixada como exercício.

1.2.1 O Paradoxo de Allois

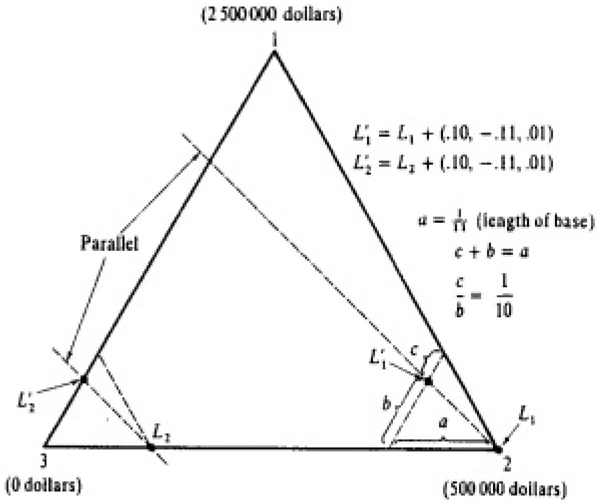
Suponha que há 3 possíveis prêmios monetários:

Tabela 1: Paradoxo de Allois

1º Prêmio	2º Prêmio	3º Prêmio
2.500.000	500.000	0

O agente decisor é sujeito a duas escolhas. A primeira é entre as loterias: L_1 e L'_1, sendo $L_1 = (0, 1, 0)$ e $L'_1 = (0.1, 0.89, 0.01)$ e a segunda consiste: $L_2 = (0, 0.11, 0.89)$ e $L'_2 = (0.10, 0, 0.90)$. É comum para os indivíduos expressarem suas preferências na forma $L_1 > L'_1$ e $L'_2 > L_2$. A primeira escolha significa que é preferível receber 500.000 com certeza sobre uma loteria de $\frac{1}{10}$ de chances de receber $5\times$ mais e 0.89 de chances de receber o mesmo e apenas 1% de chances de não receber nada. A segunda escolha o indivíduo prefere $\frac{1}{10}$ de chances de ganhar 2.500.000 é preferível do que $\frac{11}{100}$ de receber 500.000.

Figura 1: Gráfico 1



Essas escolhas não são consistentes com a teoria da utilidade esperada. As linhas conectando L_1 a L_1' e L_2 a L_2' são paralelas. Portanto, se um indivíduo possui uma curva de indiferença linear de tal modo que L_2 é preferido a L_1' então uma curva de indiferença paralela L_2 deve ser preferível a L_2' e vice-versa. De modo mais formal, suponha que exista uma função de utilidade V.N-M. Denote por u_{25}, u_{05} e u_0, os valores de utilidade para esses 3 resultados. Então, escolha $L_1 > L_1'$ implica:

$$u_{05} > 0.1u_{25} + 0.89u_{05} + 0.01u_0$$

Adicionando $(0.89)u_0 - (0.89)u_{05}$ de ambos lados.

$$(0.11)\, u_{05} + (0.89)\, u_0 > (0.9)\, u_0 + (0.1)\, u_{25}$$

.

Então qualquer indivíduo com uma função $V.N - M$ deve ter $L_2 > L_2'$

1.3 Loterias e aversão ao risco

Considere x como uma variável contínua. Podemos descrever uma loteria monetária por uma função cumulativa de distribuição $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$. Então para qualquer x, $F(x)$ é a probabilidade de o *payoff* realizado ser igual ou maior a x. Note que se a função de distribuição de uma loteria possui uma função $f(\cdot)$ associada com ela, então

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \ \forall x$$

Daqui em diante, trabalharemos com funções de distribuição que descrevem loterias sobre resultados monetários. Tomamos o espaço de loterias L sendo o conjunto de todas as funções de distribuição sobre montantes de dinheiro não negativos num intervalo $[a, +\infty[$.

$$U(F) = \int u(x)F(x)$$

É importante fazer uma distinção entre a função de utilidade $U(\cdot)$ definida sobre loterias e a função $u(\cdot)$ definida em montantes monetários. Por essa razão chamamos $U(\cdot)$ de $VN - M$ e $u(\cdot)$ de utilidade de Bernoulli.

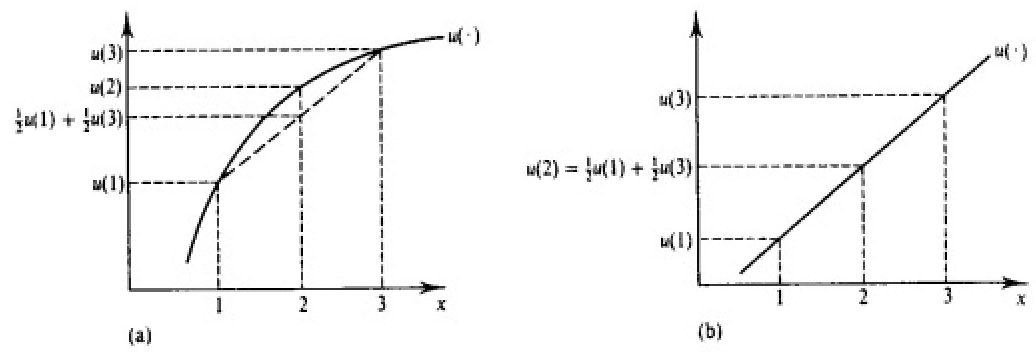
Definição. Um indivíduo é risco avesso se para qualquer loteria $F(\cdot)$, a loteria degenerada que resulta no montante $\int xF(x)$ com certeza é pelo menos tão bom que a loteria $F(\cdot)$. Se o tomador de decisão é sempre indiferente entre essas duas loterias, então dizemos que ele é neutro ao risco. Finalmente, dizemos que ele é estritamente avesso ao risco se a indiferença é satisfeita somente quando as duas loterias são as mesmas.

O agente decisor é avesso ao risco se e somente se:

$$\int u(x)dF(x) \leq u(\int xdF(x)) \; \forall F(\cdot)$$

Essa desigualdade é chamada de desigualdade de Jensen. No contato da teoria da utilidade esperada a aversão ao risco é equivalente a concavidade de $u(\cdot)$.

Figura 2: Gráfico 1



Definição. Dada uma função de utilidade de Bernoulli $u(\cdot)$, definimos os seguintes conceitos: O equivalente de certeza de $F(\cdot)$ denotado $c(F, u)$ é o montante de dinheiro para qual indivíduo é indiferente entre jogar (apostar) $F(\cdot)$ e um certo montante de dinheiro $C(F, u)$, tal que :

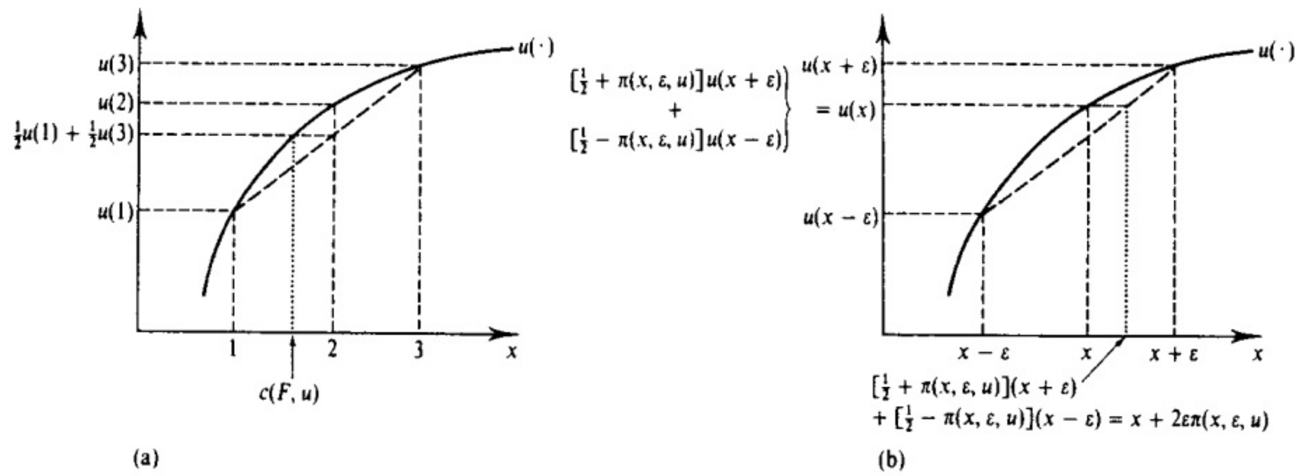
$$u\left(c(F, u)\right) = \int u(x)dF(x)$$

Para qualquer montante fixo de dinheiro x e $\epsilon > 0$, a probabilidade premia o $\pi(x, \epsilon, u)$ (prêmio de risco) e o excesso em ganhar probabilidade sobre uma chance justa que deixa o indivíduo indiferente entre um resultado certo x e uma aposta entre dois resultados $x + \epsilon$ e $x - \epsilon$, isto é:

$$u(x) = (\frac{1}{2} + \pi(x, \epsilon, u))u(x + \epsilon) + (\frac{1}{2} - \pi(x, \epsilon, u))u(x - \epsilon)$$

Observação. A utilidade do valor esperado da loteria *UE(g)* é igual a utilidade do ECg (Equivalente de Certeza da loteria g) $UE(g) = u(ECg)$; O equivalente de certeza também pode ser definido como a diferença entre o valor esperado da loteria e o prêmio de risco $E(g) - Pg$. Isso implica que: $UE(g) = u(E(g) - Pg) \rightarrow Pg = Eg - ECg$

Figura 3: Gráfico 2



Note que $C(F, u) < 2$ implicando que algum retorno é negociado com certeza. A desigualdade é satisfeita pelo fato $C(F, u) \leq \int xdF(x)\ \forall\ F(.)$ esse fato é equivalente ao indivíduo ser risco avesso.

$$C(F, u) \leq \int xdF(x) \Leftrightarrow u(C(F, u)) \leq u(\int xdF(x)) \Leftrightarrow \int u(x)dF(x) \leq u(\int xdF(x))$$

Proposição. *Suponha que o tomador de decisão é um maximizador com uma função de utilidade de Bernoulli $u(\cdot)$. Então as seguintes propriedades são equivalentes:*

O agente decisor é avesso ao risco;

$u(\cdot)$ é côncava;

$C(F, u) \leq \int xdF(x)\ \forall\ F(.)$

$\pi(x, \epsilon, u) \geq 0\ \forall\ x, \epsilon.$

Definição. Dada uma função de utilidade de Bernoulli(duas vezes diferenciável), para a moeda o coeficiente de *Arrow-Pratt* de aversão ao risco (absoluto) para algum x é definido como:

$$\pi_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Exemplo. $u(x) = -e^{ax}a > 0$

$u'(x) = ae^{-ax}; u''(x) = -a^2e^{-ax}\ \pi_A(x,u) = a\ \forall\ x$

Uma definição mais precisa de π_A como o grau de aversão ao risco pode ser obtida considerando um montante de riqueza x e o comportamento da probabilidade de prêmio $\pi(x,\epsilon,u)$ quando $\epsilon \to 0$.

$$u(x) = (\frac{1}{2} + \pi(x,\epsilon,u)u(x+\epsilon) + (\frac{1}{2} - \pi(x,\epsilon,u))u(x-\epsilon)$$

Podemos diferenciar $u(x)$ duas vezes em relação a ϵ e valorar a $\epsilon = 0$ e teremos:

$$u'(x+\epsilon)(\frac{1}{2}+\pi) + u(x+\epsilon)\pi' + (\frac{1}{2}-\pi)u'(x-\epsilon)(-1) - \pi' u(x-\epsilon)$$

$$u''(x+\epsilon)(\frac{1}{2}+\pi)+u'(x+\epsilon)\pi'+u'(x+\epsilon)\pi'+u(x+\epsilon)\pi''+(\frac{1}{2}-\pi)u''(x-\epsilon)+\pi'u'(x-\epsilon)-\pi''u(x-\epsilon)+\pi'u'(x-\epsilon)$$

Fazendo $\epsilon = 0$

$$4u'\pi'(0) + u''(x) = 0$$

$$\frac{-u''(x)}{u'(x)} = 4\pi'(0)$$

$$r_A = 4\pi'(0)$$

Assim, $r_A(x)$ mede a taxa que a probabilidade de prêmio aumenta com certeza por uma pequena medida de risco ϵ. Podemos realizar a comparação do perfil de risco entre dois indivíduos do seguinte modo:

Definição. Dadas duas funções de utilidade de Bernoulli $u_1(\cdot)$ e $u_2(\cdot)$, podemos dizer que $u_2(\cdot)$ é inequivocamente mais risco avesso que:

1. $u_1(\cdot)$ se $r_A(x,u_2) \geq r_A(x,u_1)$ para cada x.
2. Existe uma função concava $\psi(\cdot)$ tal que $u_2 = \psi\left(u_1(x)\right)\ \forall\ x$ tal que $u_2(\cdot)$ é uma transformação côncava de $u_2(.)$.[em outras palavras $u_2(.)$ é "mais concava" que $u_2(.)$].

3. $C(F, u_2) \leq C(F, u_1)$ para qualquer $F(.)$ $\pi(x, \epsilon, u_2) \geq \pi(x, \epsilon, u_1)$ para qualquer x e qualquer ϵ.

4. Sempre $u_2(\cdot)$ "encontre" uma loteria $F(\cdot)$ pelo menos tão boa quanto o resultado menos arriscado $\overline{x}$, então $u_1(\cdot)$ também encontra $F(.)$ pelo menos tão bom como $\overline{x}$. Isto é, $\int u_2(x)dF(x) \geq u_2(\overline{x})$ implica que $\int u_1(x)dF(x) \geq u_1(\overline{x})$ para qualquer $F(.)$ e $\overline{x}$.

Proposição. *As definições de 1 a 4 (acima) de mais avesso ao risco que são equivalentes.*

Definição. Uma função de utilidade de Bernoulli $u(\cdot)$ apresenta um coeficiente de aversão ao risco absoluto se $r_A(x, u)$ é uma função decrescente de x.

Proposição: As seguintes propriedades são equivalentes

1. A função de utilidade de Bernoulli apresenta aversão ao risco decrescente;

2. Sempre que $x_2 < x_1, u_2(z) = u(x_2 + z)$ é uma transformação côncava de $u_1(z) = u(x_2 + z)$

3. Para qualquer risco $F(z)$ o equivalente de certeza da loteria formado por adicionar o risco z ao nível de riqueza x dado pelo montante C_x tal que $u(x) = \int u(x+z)dF(z)$ é tal que $(x - c_k)$ é decrescente em x. Isto é, quanto maior o x, menor o indivíduo deseja pagar para se livrar do risco x.

4. o prêmio de risco $\pi(x, \epsilon, u)$ é decrescente em x;

5. Para qualquer $F(z)$, se $\int u(x_1+z)dF(z) \geq u(x_2)$ e $x_2 < x_1$ então $\int u(x_1+z)dF(z) \geq u(x_1)$.

Definição. Dada uma função de utilidade de Bernoulli, $u(\cdot)$, o coeficiente de aversão ao risco reativo é x é

$$r_R(x, u) = -x\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Exemplo. Suponha que o indivíduo possua uma utilidade de $u(\cdot) = \sqrt{w}$. Calcule os coeficientes de Arrow-Pratt (absoluto e relativo) ao nível de riqueza $w = 5$, o equivalente de certeza e a probabilidade prêmio para a loteria (16,4;0.5;0.5).

Para $u(x) = \sqrt{x}$ temos que:

$$u(x)^{'} = 0.5x^{-0.5} \text{ e } u(x)^{''} = -0.25x^{-1.5}$$

Então:

$$\pi_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{-0.25x^{-1.5}}{0.5x^{-0.5}} = \frac{0.5}{x}$$

$$\pi_R(x) = -x\frac{u''(x)}{u'(x)} = -x\frac{-0.25x^{-1.5}}{0.5x^{-0.5}} = 0.5$$

Como $x = 5$ então:

$$\pi_A(5) = \frac{0.5}{5} = 0.1$$

Agora calcularemos a utilidade esperada:

$$UE\,(x) = 0.5 \times u(16) + 0.5 \times u(4)$$

$$UE\,(x) = 0.5 \times \sqrt{16} + 0.5 \times \sqrt{4} = 2 + 1 = 3$$

O equivalente de certeza é uma função inversa da utilidade esperada:

$$u\,(EC) = UE$$

$$u\,(EC) = 3$$

$$\sqrt{EC} = 3$$

$$EC = 9$$

Para calcularmos a probabilidade prêmio, precisaremos o Valor Esperado da Loteria (VE):

$$VE = 0.5 \times 16 + 0.5 \times 4 = 10$$

Defina $x + \epsilon = 16$ e $x - \epsilon = 4$ portanto $x = 10$ e $\epsilon = 6$. Note que esse x é o VE. O próximo passo devemos calcular as utilidades:

$$u(x + \epsilon) = u(16) = \sqrt{16} = 4$$

$$u(x - \epsilon) = u(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$u(x) = u(10) = \sqrt{10} \approxeq 3.16$$

Agora podemos calcular a probabilidade prêmio $\pi(x, \epsilon, u) = \pi(10, 6, u\,(\cdot))$. Sabendo que:

$$u(x) = (\frac{1}{2} + \pi(x, \epsilon, u))u(x + \epsilon) + (\frac{1}{2} - \pi(x, \epsilon, u))u(x - \epsilon)$$

Substituindo os valores:

$$u(10) = (\frac{1}{2} + \pi(10, 6, u\left(\cdot\right)))u(16) + (\frac{1}{2} - \pi(10, 6, u\left(\cdot\right)))u(4)$$

$$u(10) = \frac{1}{2}\left[u(16) + u(4)\right] + \pi(10, 6, u\left(\cdot\right))\left[u(16) - u(4)\right]$$

Note que o termo $\frac{1}{2}\left[u(16) + u(4)\right]$ é igual a utilidade esperada. Podemos substituir o valores que conhecemos:

$$3.16 = 3 + \pi(10, 6, u\left(\cdot\right))\left[4 - 2\right]$$

$$\frac{3.16 - 3}{2} = \pi(10, 6, u\left(\cdot\right))$$

$$0.08 = \pi(10, 6, u\left(\cdot\right))$$

Adicionalmente obteremos o Prêmio de Risco:

$$UE(x) = u(E(x) - Pg)$$

$$3 = u(10 - Pg)$$

$$3 = \sqrt{10 - P_g}$$

$$9 = 10 - P_g$$

$$1 = P_g$$

Alternativamente:

$$Pg = VE - EC$$

$$Pg = 10 - 9 = 1$$

Proposição. *As seguintes condições para uma função de utilidade de Bernoulli para montantes monetários são equivalentes:*

1. $r(x,u)$ é decrescente em x;

2. Sempre que $x_2 < x_1, \tilde{u}_2(t) = (tx_2)$ é uma transformação côncava de $\tilde{u}_1(t) = u(tx_2)$

3. Dado qualquer risco $F(t)$ em $t > 0$ o equivalente de certeza $\bar{c}_x$ definido por $u(\bar{c}_x) = \int u(tx)dF(t)$ é tal que $x/c_{\overline{x}}$ é decrescente em x.

Demonstração. Mostraremos que (1) implica (3). Para isso fixe uma distribuição $F(t)$ em $t > 0$ para qualquer x, defina $u_x(t) = u(tx)$. Seja $c(x)$ o equivalente de certeza $u_x(c(x)) = \int u_x(t)dF(t)$. Note que $-u''_x(t)/u'_x(t) = -t^{-1}x[u''(tx)/u'(tx)]$ para qualquer x. Assim se (1) satisfeita, então $u'_x(.)$ é menos avesso ao risco que $u_x(.)$ sempre $x' > x$. Portanto pela proposição que retrata a comparação de aversão ao risco entre os indivíduos) $c(x') > c(x)$ e concluímos que $c(\cdot)$ é crescente. Agora pela definição de $u_x(.), u_x(C(x)) = u(xc(x))$, também

$$u_x(c(x)) = \int u_x(t)dF(t) = \int u(tx)dF(t) = u(\bar{c}_x)$$

Assim, $\bar{c}x/x = c(x)$ e então $x/\bar{c}x$ é decrescente. Isso conclui a prova. □

Exemplo. Mercado de Seguros

Considere um agente estritamente avesso ao risco com uma riqueza inicial w, mas que se separa com um risco de perda D. A probabilidade de perda é π. Uma unidade de seguro custa q e paga 1 unidade monetária se a perda ocorre. Assim, se α unidades de seguro são comparadas a riqueza individual será $w - \alpha q$ se não houver perda e $w - \alpha q + D + \alpha$ se a perda ocorre. A riqueza esperada do decisor é $w - \pi D + \alpha(\pi - q)$. O problema de maximização é portanto:

$$Max\ (1-\pi)u(w - \alpha q) + \pi u(w - \alpha q - D + \alpha)$$

Se α^* é um ponto ótimo, ele deve satisfazer a condição de primeira ordem:

$$(1-\pi)u'(w-\alpha q)(-q) + \pi u'(w - \alpha q - D + \alpha)(1-q) \leq 0$$

com igualdade se $\alpha^* > 0$. Suponha que $q = \pi$ (o seguro é atualmente justo) então o CPO requer:

$$u'(w - \alpha^* q) = u'(w - D + \alpha^*(1-\pi))$$

Se $\alpha^* > 0$. Para igualdade ser válida $\alpha^* = D$

$$w - D + \alpha^*(1-\pi) = w - \alpha^*\pi$$

$$\alpha^* = D$$

Assim, se o seguro é atualmente justo o decisor irá se “assegurar” totalmente.

2 Teoria dos Jogos - Elementos básicos de jogos não cooperativos

Definição. (*Jogo*) Um jogo é uma representação é uma representação formal de uma situação em que um número de indivíduos interagem em um conjunto de independência estratégica o bem estar de cada indivíduo não depende somente de usas ações, mas também das ações das outras indivíduos.

Para descrever uma situação de interação estratégica. precisamos saber de 4 coisas.

(i) Os jogadores: Quem está envolvido?

(ii) As regras: Quem se move e quando se move? O que eles podem fazer?

(iii) Os resultados: Para cada possível conjunto de ações dos jogadores, qual é o resultado do jogo?

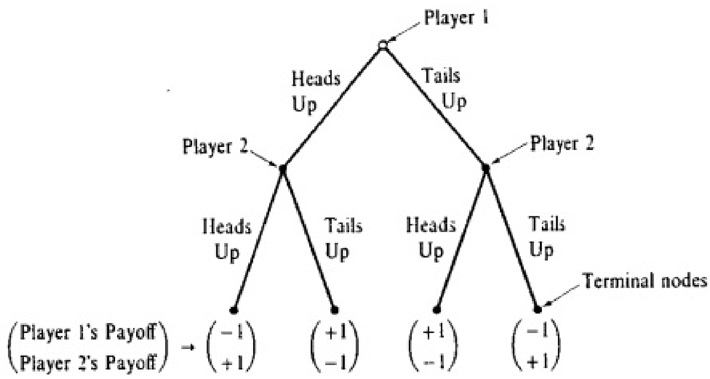
(iv) Os *payoffs*: Quais são as preferências dos jogadores sobre os possíveis resultados?

Exemplos: Jogo da velha, Encontro para almoço em NY etc.

2.1 Forma extensiva

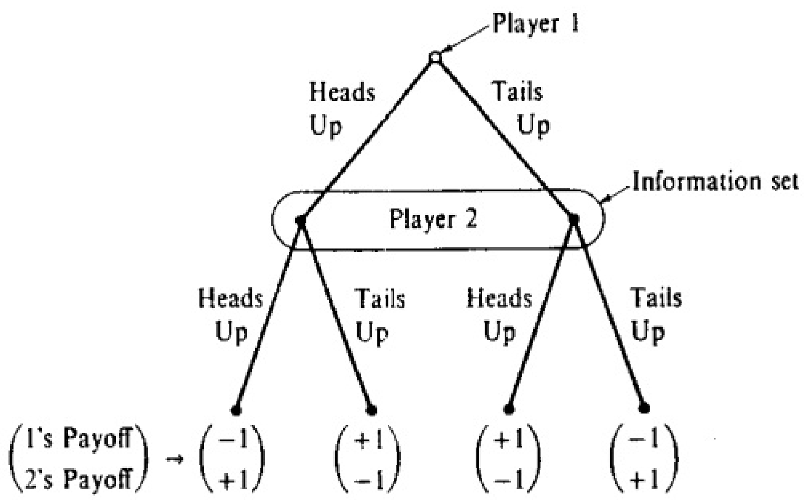
A forma extensiva captura formalmente quem se move quando, quais são as ações que cada jogador pode tomar, o que os jogadores saem quando eles se movem, qual é o resultado decorrente das ações dos jogadores. Nesse exemplo, os jogadores se movem sequencialmente:

Figura 4: Forma extensiva do jogo Matching Pennies



Se as moedas combinam, o jogador 2 recebe 1 e o jogador 1 paga 1. Se as moedas não combinam o contrário ocorre. Esse é um jogo de soma zero (estritamente competitivo), ou seja, $u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0$. O ganho (*payoff*) do jogador 1 é extamente o contrário do *payoff* do jogador 2. Em outras palavras, $u_1(s_1, s_2) = -u_2(s_1, s_2)$. Contudo no jogo simultâneo representado na forma extensiva o jogador 2 não sabe o movimento do jogador 1. A cada nó em um conjunto de informação o jogador deve possuir o mesmo conjunto de ações. Outra suposição que fazemos é que os jogadores possuem *perfect recall* (memória perfeita), isto é, uma vez que o jogador sabe ele não esquece o que ocorreu previamente no jogo.

Figura 5: Forma extensiva do jogo Matching Pennies - versão C



Formalmente:

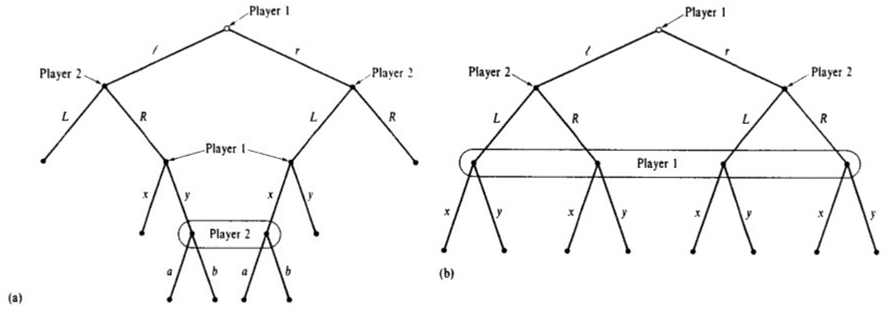
Definição. *Memória Perfeita*: Se denotarmos um conjunto de informação contendo o nó de decisão x por *H(x)*, um jogo é caracterizado como de memória perfeita se as seguintes condições são satisfeitas:

(i) *H(x) = H (x')*, x não é um predecessor nem um sucessor de *x'*; e

(ii) x e *x'* são dois nós de decisão para o jogador i com *H (x) = H (x')* , e se *x"* é um predecessor de x (não necessariamente imediato) em um dos conjuntos de informação do jogador i, com a "sendo a ação a *H(x")* no caminho a x, deve haver um nó predecessor a *x'* que é elemento de *H (x")* e a ação desse nó predecessor que está no caminho *x'* também deve estar em a".

Exemplo de um jogo que não satisfaz e propriedade de *perfect recall*.

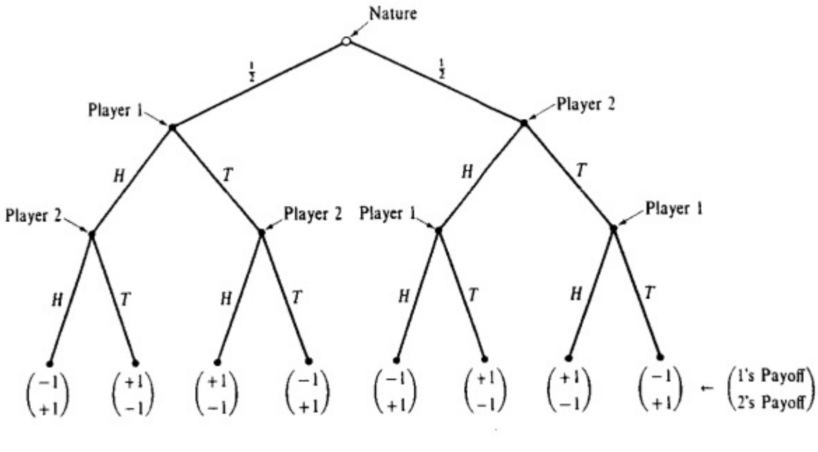
Figura 6: Dois jogos que não satisfazem a propriedade de *perfect recall*



Definição. Um jogo é dito de informação perfeita se cada conjunto de informação contém apenas um único nó. Caso contrário, o jogo é de informação imperfeita.

Apresentaremos a seguir a forma extensiva do jogo. Matching Pennies.

Figura 7: *Forma extensiva para o Jogo Matching Pennies*



Formalmente um jogo representado na forma extensiva:

(i) Um conjunto χ de nós, e um conjunto de possíveis ações A, e um conjunto finito de jogadores $\{1, ..., I\}$.

(ii) Uma função $p : \chi \to \{\chi \cup \phi\}$ especificando um único nó predecessor de cada nó x, *p(x)* é não vazio para todo x $x \in \chi$, mas é vazio para o nó inicial x_o. Os sucessores (nós) imediatos de x são então $s(x) = p^{-1}(x)$ e o conjunto de todos os predecessores e sucessores de x podem ser encontrados iterando *p(x)* e *s(x).* Para ter uma estrutura de árvore, é necessário que esses conjuntos sejam disjuntos (um predecessor não pode ser um sucessor). O conjunto de nós terminais $T = \{x \in \chi : s(x) = \phi\}$. Todos os outros nós $\chi \setminus T$ são conhecidos como nós de decisão.

nota:$\chi\backslash$T : É a diferença dos conjuntos χ e T. Em outras palavras são todos os elementos de χ que não estão em T.

(iii) A função $\alpha : \chi\backslash\{x_o\} \rightarrow A$ dada a ação que leva a qualquer nó não inicial x até o seu predecessor imediato *p(x)*, satisfazendo a propriedade que se *x',x"* e *s(x)* e $x' \neq x''$ então $\alpha(x') \neq \alpha(x'')$. O conjunto de escolhas disponíveis para o nó de decisão x é $C(x) = \{a \in A : a = \alpha(x')$ para algum $x' \in s(x)\}$

(iv) Uma coleção de conjuntos de informação $\mathcal{H}$e uma função $H : \chi \rightarrow \mathcal{H}$ "liga" cada nó de decisão x a um conjunto de informação em $\mathcal{H}$ formam uma partição[1] de χ. Requeremos que todos os nós de decisão atribuídos a um único conjunto de informação possuam as mesmas escolhas disponíveis; Formalmente, $c(x) = c(x')$ se $H(x) = H(x')$. Podemos portanto escrever as escolhas disponíveis ao conjunto de informação $\mathcal{H}$ como $c(H) = \{a \in A : a \in c(x)$ para $x \in H\}$

(v) Uma função i: $H = \{0, 1, ..., I\}$ atribui cada um conjunto de informação em $\mathcal{H}$ para o jogador (ou jogador 0, a natureza) que move-se ao nó de decisão no conjunto. Podemos denotar a coleção dos conjuntos de informação do jogador i como $Hi = \{H \in \mathcal{H} : i = l(H)\}$

(vi) Uma função $\rho : H_o \times A \rightarrow [0, 1]$ atribuindo probabilidades as ações aos conjuntos de informação onde a natureza move-se e satisfazendo $\rho(H, a) = 0$ se a $\notin C(H)$ e $\sum_{a \in C(H)} \rho(H, a) = 1 \forall H \in \mathcal{H}o$.

(vii) Uma coleção de funções *payoff* $u = \{u_1(\cdot), ..., u_i(\cdot)\}$ atribuindo utilidades aos jogadores para cada nó terminal $u_i : T \rightarrow \mathbb{R}$. Formalmente um jogo na forma extensiva é especificado pela coleção:

$$\Gamma_E = \{\chi, A, I, p(\cdot), \alpha(\cdot), \mathcal{H}, H(\cdot), i(\cdot), \rho(\cdot), u\}$$

2.2 Estratégias e forma nominal de representação do jogo

Um conceito central em teoria dos jogos é o conceito de estratégia.

Definição. Uma estratégia é um plano contingente completo ou uma regra de decisão que especifica como o jogador irá agir em cada circunstância possível em que será "chamado" a agir. De modo formal, denotamos $\mathcal{H}_i$ como a coleção dos conjuntos de informação do jogador *i*, A_i o conjunto de ações possíveis no jogo e $C(H) \subset A$ o conjunto de ações possíveis no conjunto *H*. Uma estratégia para o jogador i é uma função $s_i : \mathcal{H}_i \rightarrow A$ tal que $si : (H) \in C(H) \, \forall H \in \mathcal{H}_i$.

---

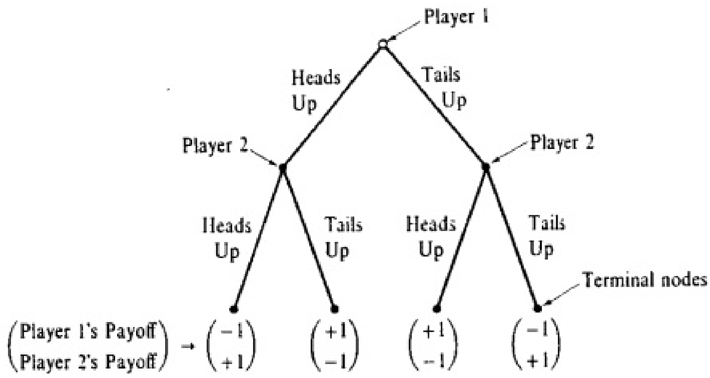
[1]

Definição. (Partição) Uma partição é valida se para $A_i, ..., A_n$ todas não vazias.

1. $A_i \neq \phi \forall i$
2. $A_i \cap A_j = \phi$
3. $A_i \cup A_{i+1} \cup ... \cup A_m = E$(universo)

Exemplo: Estratégias em Matching Pennies

Figura 8: Forma extensiva do jogo Matching Pennies



Veremos as possíveis opções do jogador 2 dada a escolha do jogador 1:

$\delta_1(s1)$: Jogar H se J1 joga H; Jogar H se J1 joga T.

$\delta_2(s2)$: Jogar H se J1 joga H; Jogar T se J1 joga T

$\delta_3(s3)$: Jogar T se J1 joga H; Jogar H se J1 joga T

$\delta_4(s4)$: Jogar T se J1 joga H; Jogar T se J1 joga T

Na versão C, onde há um conjunto de informação sobre as escolhas de J2, as estratégias desse jogador são idênticas as de J1, isto é, jogar H ou T. O vetor $s = (s_1, ..., s_i)$ representa o perfil de escolhas de estratégias em um jogo com I jogadores, sendo s_i a estratégia escolhida pelo jogador i. Escrevemos o perfil de estratégias s como (s_i,s_{-i}) onde s_{-i} é o $(I-1)$ vetor de estratégias para outros jogadores ao invés de i.

2.3 Forma normal de representação do jogo

A forma normal ou estratégia pode ser definida como uma representação da forma normal Γ_n específica para cada jogador i um conjunto de estratégias S_i (com $s_i \in S_i$) e uma função payoff $u_i(s_1, ..., s_I)$ dado o nível de utilidade *VN-M* associado com o resultado oriundo das estratégias$(s_1, ..., s_I)$. Formalmente,$\Gamma_n = [I, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$

Exemplo: Matching Pennies V.B

Tabela 2: Forma Normal do Jogo Matching Pennies - Versão B

J2

		s_1	s_2	s_3	s_4
J1	H	-1,+1	-1,+1	+1,-1	+1,-1
	T	+1,-1	-1,+1	+1,-1	-1,+1

As funções *pay-off* desse jogo:

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} +1 \text{ se } (s_1, s_2) = (H, \text{estratégias 3 ou 4}) \text{ ou } (T, \text{estratégias 1 ou 3}) \\ \text{-1 se } (s_1, s_2) = (H, \text{estratégias 1 ou 2}) \text{ ou } (T, \text{estratégias 2 ou 4}) \end{cases}$$

Alternativamente podemos dizer que:$u_2(s_1, s_2) = -u_1(s_1, s_2)$.

2.4 Escolhas Randomizadas

A definição de *estratégia* se refere a uma estratégia dominante para o jogador i, o que podemos chamar de *estratégia pura.* Essa escolha determinística $s_i(H)$ a cada um do conjunto de informação $H \in \mathcal{H}$. Suponha que o jogador i possua um conjunto finito de estratégias puras S_i. Uma forma para o jogador randomizar é escolher aleatoriamente um elemento desse conjunto. Esse tipo de randomização é chamado de estratégias mistas.

Definição. (*Estratégia Mista*) Dado o conjunto finito de estratégias puras do jogador i (S_i), uma *estratégia mista* para esse jogador $\sigma_i : S_i \to [0, 1]$ atribui a cada estratégia pura $s_i \in S$ uma probabilidade $\sigma_i(s_i) \geq 0$ que será jogada onde:

$$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$$

Suponha que i possua M estratégias puras no conjunto $S_i = s_{1i}, ..., s_{Mi}$. O conjunto de estratégias mistas do jogador i pode portanto estar associado com pontos do seguinte simplex:

$$\Delta(S_i) = \{(\sigma_{1i}, ..., \sigma_{Mi}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{M}} : \sigma_{mi} \geq 0 \, \forall m = 1, ..., M$$
$$\text{e}$$
$$\sum_{m=1}^{M} \sigma_{mi} = 1\}$$

Seja $S = S_1 \times ... \times S_I$,a utilidade esperada (VN-M) do jogador i dado o seu perfil de estratégias mistas é:

$$\sum_{s \in S} [\sigma_1(s_1), \sigma_2(s_2), ..., \sigma_I(s_I)] u_i(s)$$

Definição. (*Estratégia Comportamental*). Dado um jogo na forma extensiva Γ_E uma estratégia comportamental para o jogador i especifica, para cada conjunto de informação H e H_i e ação $a \in C(H)$, uma probabilidade $\lambda_i(a, H) \geq 0$,com $\sum_{a \in C(H)} \lambda_i(a, H) = 1 \forall H \in H_i$.

Pode parecer intuitivo, para jogos de *perfect recall* os dois tipos de aleatorização são equivalentes. Para cada estratégia comportamental do jogador i há uma estratégia mista que resulta na mesma distribuição de resultados.

3 Jogos simultâneos

Definição. Uma estratégia s_i e S_i é uma estratégia estritamente dominante para o jogador i no jogo $\Gamma_N = [\{I\}, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$ se para todo $s_i^{'} \neq s_i$ temos que $u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i^{'}, s_{-i})$ $\forall s_{-i} \in S_{-i}$

Tabela 3: Exemplo Dilema dos Prisioneiros

		Prisioneiro 2	
		Não Confessa	Confessa
Prisioneiro 1	Não Confessa	-2,-2	-10,-1
	Confessa	-1,-10	-5,-5

Deveríamos esperar que o jogador i não jogará estratégias dominadas, ou seja, para aquelas que há alguma alternativa que resulta em um maior *payoff* independente do que os outros jogadores façam.

Definição. Uma estratégia $s_i \in S_i$ é estritamente dominada para o jogador i no jogo $\Gamma_N = [\{I\}, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$ se existe alguma outra estratégia $s_{-i} \in S_{-i}$

$$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

Nesse caso dizemos que a estratégia s_i' estritamente domina a estratégia s_i.

Tabela 4: Exemplo: Estratégias Dominadas

		J2	
		L	R
J1	U	1,-1	-1,1
	M	-1,1	1,-1
	D	-2,5	-3,2

		J2	
		L	**R**
J1		**5,1**	**4,0**
		6,0	**3,1**
		6,4	**4,4**

No quadro da esquerda, a estratégia D é estritamente dominada para J1. Na tabela da direita (em negrito) U e M são fracamente dominadas por D.

Definição. Uma estratégia $s_i \in S_i$ é fracamente dominada no jogo $\Gamma_N = [\{I\}, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$ se existe uma outra estratégia $s_i \in S_i$ tal que $\forall s_{-i} \in S_{-i}$

$$u_i(s_i', s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$$

Com a desigualdade estrita para algum s_{-i}. Nesse caso, dizemos que a estratégia s_i' fracamente domina a estratégia s_i. Uma estratégia é uma estratégia fracamente dominante para o jogador i jogo $\Gamma_N = [\{I\}, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$ se ela fracamente domina cada outra estratégia em S_i. Assim, uma estratégia é fracamente dominada se uma outra estratégia é pelo menos tão boa para dos s_i e estritamente melhor para algum s_{-i}.

3.1 Eliminação Iterada de estratégias estritamente dominadas

Começaremos esse tópico com um exemplo:

Tabela 5: Exemplo: DA's Brother

		Prisioneiro 2	
		Não Confessa	Confessa
Prisioneiro 1	Não Confessa	0,-2	-10,-1
	Confessa	-1,-10	-5,-5

A estratégia não confessa é estritamente dominada por confessa para o jogador 2. Se o jogador 1 eliminar a estratégia não confessa para o jogador 2 a sua resposta ótima também é confessar. O ordenamento da eliminação de estratégias pode levar a resultados distintos no jogo.

Definição. Uma estratégia $\sigma_i \in \triangle(s_i)$ é estritamente dominada para o jogador i no jogo $\Gamma_N = [\{I\}, \{\triangle S_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$ se existe uma outra estratégia $\sigma_i \in \triangle(S_i)$ tal que para todo $\sigma_{-i} \in \mathit{\Pi}_{j \neq i} \triangle(S_j)$

$$u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$$

Nesse caso dizemos que a estratégia σ_i' estritamente domina a estratégia σ_i. Uma estratégia σ_i é uma estratégia estritamente dominante para o jogador i no jogo $\Gamma_N = [\{I\}, \{\triangle S_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$ se estritamente domina cada outra estratégia em $\triangle(S_i)$. Quando testamos se a estratégia σ_i é estritamente dominada pela estratégia σ_i' para o jogador i, precisamos considerar somente as *payoffs* dessas duas estratégias contra as estratégias puras dos oponentes de i.

$$u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \ \forall \ \sigma_{-i}$$

se e somente se

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(\sigma_i, s_{-i}) \ \forall \ s_{-i}$$

Isso segue porque podemos escrever

$$u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) - u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \left[\Pi_{k \neq i} \sigma_k \left(s_k \right) \right] \left[u_i \left(\sigma_i', s_{-i} \right) - u_i \left(\sigma_i, s_{-i} \right) \right]$$

Essa expressão é positiva $\forall\ \sigma_{-i}$ se e somente se $[u_i(u_i', s_{-i}) - u_i(\sigma_i, s_{-i})]$ é positiva para todo s_{-i}

Proposição. *A estratégia pura do jogador i $s_i \in S_i$ é estritamente dominada no jogo $\Gamma_N = [\{I\}, \{\triangle S_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$ se e somente se existe uma outra estratégia $\sigma_i' \in \triangle(S_i)$ tal que:*

$$u_j(\sigma_j', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

A proposição acima nos relata que devemos testar se uma estratégia pura não é dominada quando aleatorizar é possível, ou seja, na presença de estratégia mistas.

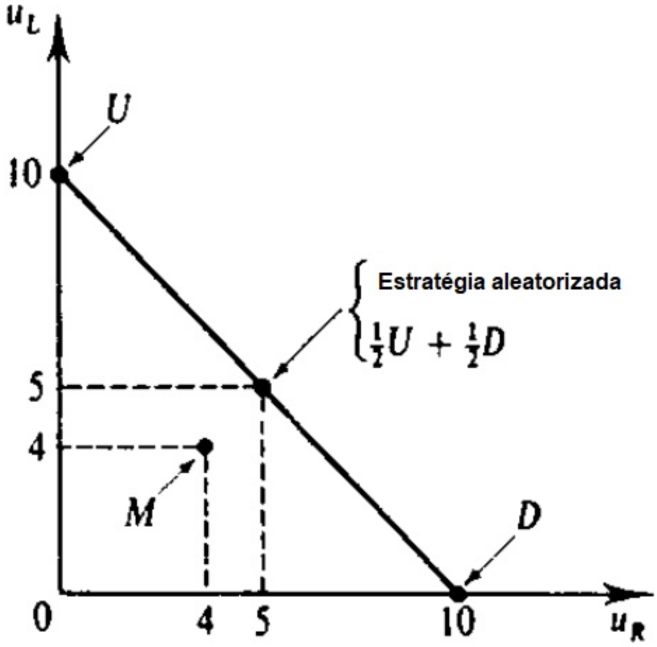
Tabela 6: Exemplo: Dominação de uma Estratégia Pura por uma Mista

		J2	
		L	R
J1	U	10,1	0,4
	M	4,2	4,3
	D	0,5	10,2

Nota: Percebemos que U é excelente quando J2 joga L. Além disso, D é excelente quando J2 joga R.

Uma aleatorização entre U e D estritamente domina a estratégia M para J1.

Figura 9: Dominação de uma Estratégia Pura por uma Mista



3.2 Estratégias racionalizáveis

Um conjunto de estratégias racionalizáveis consistem precisamente naquelas estratégias que podem ser jogadas num jogo em que a estrutura do jogo e a racionalidade são de conhecimento comum entre os jogadores.

Definição. No jogo $\Gamma_N = [\{I\}, \{\triangle S_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$ a estratégia σ_i é a melhor resposta para a estratégia σ_{-i} do rival do jogador i.

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})$$

Para todo $u_i' \in \triangle(S_i)$ a estratégia σ_i nunca é a melhor resposta se não há σ_{-i} para tal que σ_i é a melhor resposta.

Definição. Um jogo $\Gamma_N = [\{I\}, \{\triangle S_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$ as estratégias em $\triangle(S_i)$ que sobrevivem a remoção iterada de estratégias que nunca são uma melhor resposta, são conhecidas como estratégias racionalizáveis do jogador i.

Tabela 7: Exemplo: Estratégias Racionalizáveis

J2

		b_1	b_2	b_3	b_4
	a_1	0,7	2,5	7,0	0,1
J1	a_2	5,2	**3,3**	5,2	0,1
	a_3	7,0	2,5	0,7	0,1
	a_4	0,0	0,-2	0,0	10,-1

Podemos eliminar b_4 que nunca é uma melhor resposta e é estritamente dominado por b_1 e b_3. Feito isso a estratégia a_4 pode ser eliminada pois ela é dominada por a_2 uma vez que b_4 é eliminado. Assim, o conjunto de estratégias puras racionalizáveis para J_1 é $\{a_1, a_2, a_3\}$ e para $J_2\{b_1, b_2, b_3\}$.

3.3 Equilíbrio de Nash (EN)

Definição. Um perfil de estratégias $s = (s_1, ..., s_I)$ constitui um equilíbrio de Nash do jogo $\Gamma_N = [I, \{(S_i)\}\{u_i(\cdot)\}]$ se para todo $i = 1, ..., I$

$$u_i(s_j, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \forall s'_{-i} \in S_{-i}$$

Tabela 8: Exemplo: Equilíbrio de Nash

J2

		l	m	r
J1	U	5,3	0,4	3,5
	M	4,0	**5,5**	4,0
	D	3,5	0,4	5,3

Adicionalmente, apresentamos um segundo exemplo.

Tabela 9: Exemplo 2: Equilíbrio de Nash

Mr. Schelling

		Empire State	*Grand Central*
Mr. Thomas	Empire State	100,100	0,0
	Grand Central	0,0	**100,100**

Uma pequena correção na definição do EN pode ser obtida pela introdução do conceito de correspondência de melhor resposta. Formalmente dizemos que a correspondência de melhor resposta do jogador i $b_i : S_{-i} \rightarrow S_i$ no jogo $\Gamma_N = [I, \{(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}]$ é a correspondência que atribui para cada $s_{-i} \in S_{-i}$ o conjunto

$$b_i(s-i) = \{s_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}) \; \forall \; s_i' \in S_i\}$$

Com essa noção podemos reformular a definição EN como segue: o perfil de estratégia $(s_i, ..., s_I)$ é EN do jogo $\Gamma_N = [I, \{(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}]$ se e somente se $\in b_i(s_{-i})$ para $i = 1, ...I$.

3.3.1 Existência de um Equilíbrio de Nash

Lema. *Se os conjuntos $S_1, ..., S_I$ são não vazios S_i é compacto e convexo e $u_i(\cdot)$ é contínuo em $(s_1, ..., s_I)$ e quase quase concava em s_i, então a melhor resposta do jogador i $b_i(\cdot)$ é não vazia, convexa e semi contínua superior.*

Demonstração. Note que $b_i(s_{-i})$ é o conjunto dos resultados ótimos de $u_i(i, s_{-i})$ no conjunto compacto S_i. Assim, ele é não vazio. A convexidade de $b_i(s_{-i})$ segue porque o conjunto de resultados oriundos de uma maximização de uma função quase concava $(u_i(\cdot), s_{-i})$ no conjunto convexo (S_i) é convexo. Finalmente, para a semi continuidade superior precisamos mostrar que qualquer sequência $(s_i^n, s_{-i}^n) \rightarrow (s_i, s_{-i}, u)$ tal que $s_i^n \in b_i(s_{-i})$. Para ver isso, note que para todo n $u_i(s_i^n, s_{-i}^n) \geq u_i(s_i^1, s_{-1}^n)$ para todo $S_i^1 \in S_i$. Portanto pela continuidade de $u_i(\cdot)$, temos que $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i})$. □

Proposição. *Um equilíbrio de Nash existe num jogo $\Gamma_N = [I, \{(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}]$ se para todo $i = 1, ..., I$.*

(i) S_i é não vazio, convexo e compacto;

(ii) $u_i(s_i, ..., s_i)$ é contínua em $(s_1, ..., S_I)$ e quase concava em s_i.

Demonstração. Defina a correspondência $b : S \rightarrow S$ por $b(s_1, ..., s_I) = b_1(s_{-i}) \times, ..., \times b_I(s_{-I})$. Note que $b(\cdot)$ é uma correspondência de um conjunto não vazio, convexo e compacto $S = S_1 x, ..., x S_I$. Além disso, pelo Lema desta subseção $b(\cdot)$ é um conjunto convexo não vazio e uma correspondência semi contínua superior. Assim, todas as condições do teorema de ponto fixo de Kakutani são satisfeitas. Então existe um ponto fixo para essa correspondência, um perfil de estratégia s e S tal que $s \in b(s)$. As estratégias a esse ponto fixo constituem um EN pela construção $s_i \in b_i(s_{-i}) \; \forall \; i = 1, ..., I$. □

Proposição. *Cada jogo $N = [I, \{\triangle(S_i)\}, \{u_i(.)\}]$ em que os conjuntos $s_1, ..., s_i$ possuem um número finito de elementos possui um EN em estratégias mistas.*

Demonstração. O jogo $\Gamma_N = [I, \{\triangle(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}]$ visto como um jogo com os conjuntos de estratégias $\{\triangle(S_i)\}$ e as funções de recompensa $u_i(\sigma_1, .., \sigma_I) = \sum_{s \in S} [\Pi_{k=1}^i \sigma_k(s_k)] u_i(s)$ para todo $i = 1, ..., I$ satisfaz todos os pressupostos da proposição D3. Assim, a proposição D2 é um corolário desse resultado. □

3.4 EN com estratégias mistas

Definição. Um perfil de estratégias mistas $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_I)$ constitui EN do jogo $\Gamma_N = [\{I\}, \{\triangle S_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$ se para cada $i = 1, ..., I$.

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \; \forall \sigma_i' \in \triangle(S_i)$$

Proposição. *Seja $S_i^+ \subset S_i$ denotar o conjunto de estratégias puras que o jogador i joga com uma probabilidade positiva no seu perfil de estratégias mistas $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_I)$ o perfil de estratégias mistas σ é um equilíbrio de Nash no jogo $\Gamma_N = [\{I\}, \{\triangle S_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$ se e somente se para todo $i = 1, ..., I$.*

(i) $u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s_i', \sigma_{-i}) \; \forall \; s_i, s_i' \in S_i^+$

(ii) $u_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(s_i', \sigma_{-i}) \; \forall \; s_i \in S_i^+$ *e todo* $s_i' \notin S_i^+$

Demonstração. (necessidade) Note que se as condições (i) e (ii) não são garantidas para algum jogador i, então há estratégias $s_i \in S_i^+$ e $s_i' \in S_i$ tal que $u_i(s_i', \sigma_{-i}) = u_i(s_i \sigma_{-i})$. Então, o jogador i pode aumentar estritamente o seu *payoff* jogando s_i' sempre que ele pudesse jogar s_i. Por suficiência, suponha que as condições (i) e (ii) sejam satisfeitas, mas que σ não é EN. Então há algum jogador i que possui a estratégia σ_i' com $u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$. Mas então há alguma estratégia pura s_i' que é jogada com probabilidade positiva sob σ_i' em que $u_i(s_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$. Como $u_i(\sigma_i, \sigma - i) = u(s_i, \sigma - i)$ para todo $s_i \in S_i^+$, isso contradiz as condições (i) e (ii) sendo elas assim satisfeitas. □

Corolário. *O perfil de estratégias $s = (s_i, ..., s_I)$ é um equilíbrio de Nash do jogo $\Gamma_N = [\{I\}, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$ se e somente se é um (degenerado) equilíbrio de Nash em estratégias mistas do jogo $\Gamma_N = [\{I\}, \{\triangle S_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$.*

Exemplo. Estratégias mistas no jogo encontra em NY.

Considere que as recompensas dos jogadores se encontram em NY sejam $(1000, 1000)$. Se o Mr. Thomas deseja aleatorizar entre as suas opções de escolha, então ele deve ser indiferente entre elas. Suponha que o Mr. Schelling joga Grand Central com uma probabilidade σ_s. Então os *payoffs* esperados do Sr. Thomas são os seguintes:

Tabela 10: Exemplo 2: Equilíbrio de Nash

		Mr. Schelling	
		$(1 - \sigma_s)$	σ_s
		Empire State	*Grand Central*
Mr. Thomas	Empire State	100,100	0,0
	Grand Central	0,0	**1000,1000**

$$\text{Jogar Grand Central} = 1000\sigma_s + 0\,(1 - \sigma_s)$$

$$\text{Jogar Empire State} = 0\sigma_s + 100\,(1 - \sigma_s)$$

Mr. Thomas deve ser indiferente entre essas duas estratégias, então:

$$1000\sigma_s = 100\,(1 - \sigma_s)$$

$$\sigma_s = \frac{1}{11}$$

A estratégia mista é $(\sigma_s, 1-\sigma_s) = (\frac{1}{11}, \frac{10}{11})$. Logo, o EN em estratégias mistas (arredondado) se dá com 9% de chances de jogar Grand Central e 91% chances de jogar Empire State.

Os jogadores no exemplo anterior não possuem preferências reais sobre as probabilidades que atribuem às estratégias puras que jogam com probabilidade positiva. O que determina as probabilidades que cada jogador usa é a necessidade de tornar o outro jogador indiferente. Esse fato levou alguns economistas e estudiosos de teoria dos jogos a questionarem a utilidade dos equilíbrios de Nash de estratégias mistas como previsões de jogo. Esses profissionais fazem dois questionamentos: Primeiro, se os jogadores sempre têm uma estratégia pura que lhes dá o mesmo payoff esperado que sua estratégia mista no equilíbrio, não está claro por que eles se preocuparão em aleatorizar.

Uma resposta a essa objeção é que os jogadores podem realmente não aleatorizar. Em vez disso, podem fazer escolhas definidas que são afetadas por variáveis aparentemente inconsequentes "sinais", sendo esses apenas observados por eles mesmos. Por exemplo, considere como um arremessador de uma equipe de beisebol da liga principal "mistura seus arremessos" para deixar os rebatedores adivinhando. Ele pode ter um plano completamente determinístico sobre o que fará, mas pode depender de qual lado da cama ele acordou naquele dia ou do número de semáforos vermelhos que encontrou em seu trajeto para o estádio. Como resultado, os rebatedores veem o comportamento do arremessador como aleatório, mesmo que de fato não seja.

O segundo questionamento é que a estabilidade dos equilíbrios de estratégias mistas parece ser frágil. Os jogadores devem aleatorizar com as probabilidades corretas, mas não têm incentivo positivo para fazê-lo. A reação a esse problema pode depender de como se espera que um equilíbrio de Nash surja. Por exemplo, o uso das probabilidades corretas pode ser improvável de ocorrer, como por exemplo se dá uma convenção social estável. Por outro lado, pode parecer mais plausível quando o equilíbrio surge como um acordo auto-implementado.

3.5 Equilíbrio em jogos estritamente competitivos: minimax e maxmin

Nesse tipo de situação, cada jogador está tomando suas decisões procurando causar o maior dano possível ao outro jogador. Uma estratégia prudente parece ser a de cada jogador tentar minimizar o dano que o outro jogador pode lhe causar. Consideramos que os dois jogadores estão adotando essa abordagem estratégia mais prudente no momento de escolher suas estratégias. Representamos o que pior pode acontecer para o jogador que está nas colunas como a maior recompensa em cada linha

$$\underset{s}{max} U(s,t')$$

Ao calcularmos $\underset{s}{max} U(s,t')$ estamos calculando o que de pior pode acontecer para o jogador que se encontra nas colunas, caso ele escolha jogar a estratégia representada na coluna *t'*. Vamos apresentar a menor recompensa na linha *s'*, após considerarmos todas as colunas da matriz de recompensa, como sendo:

$$\underset{t}{min} U(s',t)$$

Ao calcularmos $\underset{t}{min} U(s',t)$ estamos computando para o jogador linha o que pior pode acontecer, caso ele escolha jogar a estratégia representada na linha *s'*.

	Comboio Japonês	
Forças Aliadas	Rota Sul (t_1)	Rota Norte (t_2)
Rota Sul $D_1(s_1)$	3	1
Rota Norte $D_1(s_2)$	2	2

Observaremos as recompensas do jogador linha. Vejamos as maiores recompensas em cada coluna:

$$\underset{s}{max} U(s,t_1) = (s_1,t_1) = 3$$

$$\underset{s}{max} U(s,t_2) = (s_2,t_2) = 2$$

Deixando "fixo" a linha, o próximo passo é encontrarmos o menor valor entre as recompensas máximas de cada coluna.

$$\underset{t}{min} \left\{ \underset{s}{max} U(s,t) \right\}$$

É fácil concluir que:

$$\min_t \left\{ \max_s U(s,t) \right\} = (s_2, t_2) = 2$$

Essa combinação de estratégias é o valor minimax do jogo da batalha de Bismarck. É o valor que representa o menor dano que o comboio japonês pode garantir dadas suas opções e as dos aliados. Vamos analisar as menores recompensas em cada linha, considerando todas as colunas.

$$\min_t U(s_1,t) = (s_1, t_2) = 1$$

$$\min_t U(s_2,t) = (s_2, t_1) = 2$$

Entre essas duas recompensas, devemos encontrar a maior delas

$$\max_s \left\{ \min_t U(s,t) \right\} = (s_2, t_2) = (s_2, t_1) = 2$$

A recompensa 2 é o valor maxmin da batalha do mar de Bismarck. É o valor que representa o maior dano que os aliados podem garantir dadas as suas opções e as opções da marinha japonesa. temos que:

$$\text{minimax(nas colunas)} = \text{maxmin (nas linhas)}$$

Sempre que isso ocorre, teremos encontrado um equilíbrio em um jogo estritamente competitivo. Em resumo, há uma combinação de estratégias que, ao mesmo tempo, garante ao comboio japonês o mínimo de dias de bombardeiro entre os piores resultados que pode sofrer, e garante às forças aliadas o máximo possível entre o mínimo de dias de bombardeiro que seus aviões pode obter.

Formalmente, temos o seguinte teorema:

Teorema. ***(Minimax)*** *Um jogo com dois jogadores, com um conjunto de estratégias finito* $\Gamma_N = [I, \{S_2, S_2\}, \{u_1(\cdot), u_2(\cdot)\}]$ *é um jogo de soma zero se* $u_2(s_1, s_2) = -u_1(s_1, s_2)$ $\forall\ (s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$. Defina $\underline{w_i}$ como *a utilidade esperada maxmin do jogador i no jogo* $\Gamma_N = [I, \{\triangle(S_1), \triangle(S_2)\}, \{u_1(\cdot), u_2(\cdot)\}]$, *como:*

$$\underline{w_i} = \max_{\sigma_i} \left[\min_{\sigma_{-i}} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \right]$$

Também defina $\underline{v_i}$ *a utilidade esperada minimax do jogador i sendo o pior nível de utilidade que ele pode ser forçado a receber se ele responder as ações do seu adversário:*

$$\underline{v_i} = \min_{\sigma_{-i}} \left[\max_{\sigma_i} u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \right]$$

Então tem-se um equilíbrio Minimax quando $\underline{v_i} = \underline{w_i}$.

Vejamos um segundo exemplo.

	J2		
J1	**A**	**B**	**C**
α	4	5	4
β	3	0	1

Verificaremos se há equilíbrio minimax-maximin para esse jogo. Começaremos avaliando as escolhas de J1. Esse jogador deve escolher a estratégia que proporciona um maior dano a J2. Em outras palavras fixe a coluna e escolha a estratégia com o maior valor numérico:

$$J1 = \underset{s}{Max}\,(s, t_i) = \begin{cases} (s, t_1) = 4 \\ (s, t_2) = 5 \\ (s, t_3) = 4 \end{cases}$$

Agora J1 escolhe o menor valor na coluna, ou seja:

$$J1 = \underset{t}{Min}\left\{\underset{s}{Max}\,(s, t_i)\right\} = 4$$

Nesse caso J2 obtém o menor dano dados as possíveis escolhas de J1. Faremos o processo inverso. J2 observará nas linhas a menor recompensa possível para J1:

$$J2 = \underset{t}{Min}\,(s_i, t) = \begin{cases} (s_1, t) = 4 \\ (s_2, t) = 0 \end{cases}$$

Então J2 escolherá o maior valor nas linhas:

$$J2 = \underset{s}{Max}\left\{\underset{t}{Min}\,(s_i, t)\right\} = 4$$

Em outras palavras, essa é a maior recompensa que J1 pode obter dadas as opções de J2. Assim, nesse jogo há dois equilíbrios do tipo minmax-maxmin $= (\alpha, A)$ e (α, C).

Exemplo 3:

Dados um batedor de pênaltis e um goleiro, suponha que as chances de que o gol seja marcado sejam dadas pela forma estratégica a seguir, de acordo com o lado que o batedor e o goleiro escolham:

		Goleiro	
		Lado Direito	Lado Esquerdo
Batedor	Lado Direito	30%	90%
	Lado Esquerdo	80%	40%

De acordo com essas informações, verificaremos se há algum equilíbrio do tipo minimax-maxmin e um EN em estrategias mistas. Note que esse é um jogo estritamente competitivo. Se o Batedor possui 30% de acerto caso chute para o lado direito, então se o Goleiro pular para esse mesmo lado, suas chances são de 70% de defesa:

		Goleiro	
		Lado Direito	Lado Esquerdo
Batedor	Lado Direito	0.3,0.7	0.9,0.1
	Lado Esquerdo	0.8, 0,2	0.4,0.6

Se subtrairmos 1 menos os valores da tabela acima e multiplicarmos por 100, chegaremos nos dados da tabela anterior. Começaremos observando as escolhas do Batedor (B): Esse jogador deve escolher a estratégia que proporciona a menor chance defesa para o Goleiro. Em outras palavras fixe a coluna e escolha a estratégia com o maior valor numérico:

$$B = \underset{s}{Max}\,(s, t_i) = \begin{cases} (s, t_1) = 0.8 \\ (s, t_2) = 0.9 \end{cases}$$

Agora B escolhe o menor valor na coluna, ou seja:

$$B = \underset{t}{Min}\left\{\underset{s}{Max}\,(s, t_i)\right\} = 0.8$$

Nesse caso o Goleiro (G) obtém a menor chance de defesa dadas as possíveis escolhas de B. Faremos o processo inverso. G observará nas linhas a menor recompensa possível para B:

$$G = \underset{t}{Min}\,(s_i, t) = \begin{cases} (s_1, t) = 0.3 \\ (s_2, t) = 0.4 \end{cases}$$

Então G escolherá o maior valor nas linhas:

$$G = \underset{s}{Max}\left\{\underset{t}{Min}\,(s_i, t)\right\} = 0.4$$

Em outras palavras, essa é a maior recompensa que o B pode obter dadas as opções de G. Assim, nesse jogo não equilíbrio do tipo minmax-maxmin. No entanto, devemos verificar se há algum equilíbrio em estratégias mistas. Primeiramente escreveremos os payoffs do seguinte modo:

			G		
			D	E	
			q	***1-q***	REB
B	***p***	D	0.3,0.7	0.9,0.1	*0.3q+0.9(1-q)*
	1-p	E	0.8, 0,2	0.4,0.6	*0.8q+0.4(1-q)*
	REG		*0.7p+0.2(1-p)*	*0.1p+0.6(1-p)*	

O próximo passo é encontramos as recompensas esperadas de B e G que computem todas as escolhas estratégicas possíveis, como segue:

$$REB = pq0.3 + p\left(1-q\right)0.9 + q\left(1-p\right)0.8 + \left(1-p\right)\left(1-q\right)0.4$$

$$REB = p\left(0.5-q\right) + 0.4\left(1+q\right)$$

Para que B seja indiferente entre D e E devemos escolher p tal que:

$$\frac{\partial REB}{\partial p} = \left(0.5-q\right) = 0$$

$$q = 0.5$$

Quando $q = 0.5$, B é indiferente entre jogar D ou E. O processo é análogo para G:

$$REG = pq0.7 + p\left(1-q\right)0.1 + q\left(1-p\right)0.2 + \left(1-p\right)\left(1-q\right)0.6$$

$$REG = q\left(p-0.4\right) - 0.5p + 0.6$$

Para que G seja indiferente entre D e E devemos escolher q tal que:

$$\frac{\partial REB}{\partial q} = \left(p-0.4\right) = 0$$

$$p = 0.4$$

Assim, o EN em estratégias mistas é:

$$EN = (p, q) = (0.4, 0.5)$$

Agora observaremos como a estratégia MaxMin pode ser utilizada em um jogo não competitivo. Utilizaremos como exemplo uma questão da prova de Microeconomia da ANPEC do ano de 2012.

Questão 9) Duas empresas operam no mercado de iogurtes, podendo optar entre produzir um iogurte de alta qualidade (A) ou um iogurte de baixa qualidade (B). As escolhas das firmas são simultâneas. Os lucros resultantes de cada estratégia encontram-se apresentados na matriz de pay-off a seguir:

		Empresa 2	
		Baixa	Alta
Empresa 1	Baixa	-10,-25	600,300
	Alta	90, 500	40,40

É correto afirmar que:

1. Existe apenas um equilíbrio de Nash possível nesse jogo.
2. Se ambas as empresas optassem por uma estratégia maxmin, o equilíbrio seria (Alta, Alta).
3. Num equilíbrio de conluio, a Empresa 1 produzirá iogurte de baixa qualidade e a Empresa 2 produzirá iogurte de alta qualidade.
4. O jogo acima é do tipo Dilema dos Prisioneiros.
5. Trata-se de um jogo de informação imperfeita.

Resolução:

(1) Falso, em estratégias puras temos 2 EN.

		Empresa 2	
		Baixa	Alta
Empresa 1	Baixa	-10,-25	**600**,*300*
	Alta	**90**, *500*	40,40

(2) Verdadeiro. A estratégia MaxMin é aquela que dá o jogador i o maior ganho dado os piores cenários possíveis que podem ocorrer. É uma estratégia conservadora, seja porque i é paranoico ou porque acredita que os demais jogadores querem vê-lo na pior situação possível, como por exemplo, no caso de uma guerra militar. Além disso, o jogador i pode acreditar que os outros jogadores não agem racionalmente.

Do ponto de vista da empresa 1, ela minimiza as chances de ganho dela escolhendo as estratégias Baixa, quando 2 joga Baixa e Alta quando 2 joga Alta. Depois, ela maximiza "esses menores ganhos", ou seja, escolhe o máximo entre ganhar -10 e 40. Do ponto de vista da empresa 2, o processo é semelhante. Se 1 joga baixa, 2 minimiza seu ganho escolhendo baixa. Se 1 joga alta 2 minimiza seu ganho escolhendo a estratégia alta. Finalmente 2, escolhe o máximo entre esses dois ganhos mínimos que é o valor de 40. Como as escolhas de 1 e 2 resultam em (Alta, Alta) o equilíbrio equilíbrio MaxMin = (40, 40).

(3) Verdadeiro, caso as empresas combinem o que fazer, ambas vão obter o maior ganho possível considerando as possibilidades de ação da adversária. Nessa situação, a estratégia (Baixa, Alta) = (600,300).

(4) Falso. Um jogo do tipo Dilema dos Prisioneiros apresenta um EN, sendo que cada jogador possui uma estratégia dominante. Além disso, o EN num jogo desse tipo resulta num resultado pior em termos de payoffs para os jogadores, caso eles fizessem um acordo de cooperação que seria melhorador no sentido de Pareto.

(5) Verdadeiro. Precisamos relembrar dos seguintes conceitos:

- **Conhecimento comum** : Uma informação do jogo é dita de conhecimento comum quando todos os jogadores conhecem a informação, todos os jogadores sabem que todos os jogadores conhecem a informação e assim por diante, até o infinito.
- **Informação completa:** Um jogo é dito de informação completa quando as recompensas dos jogadores são de conhecimento comum.
- Um jogo é dito de **informação perfeita** quando todos os jogadores conhecem toda a história do jogo antes de fazerem suas escolhas.

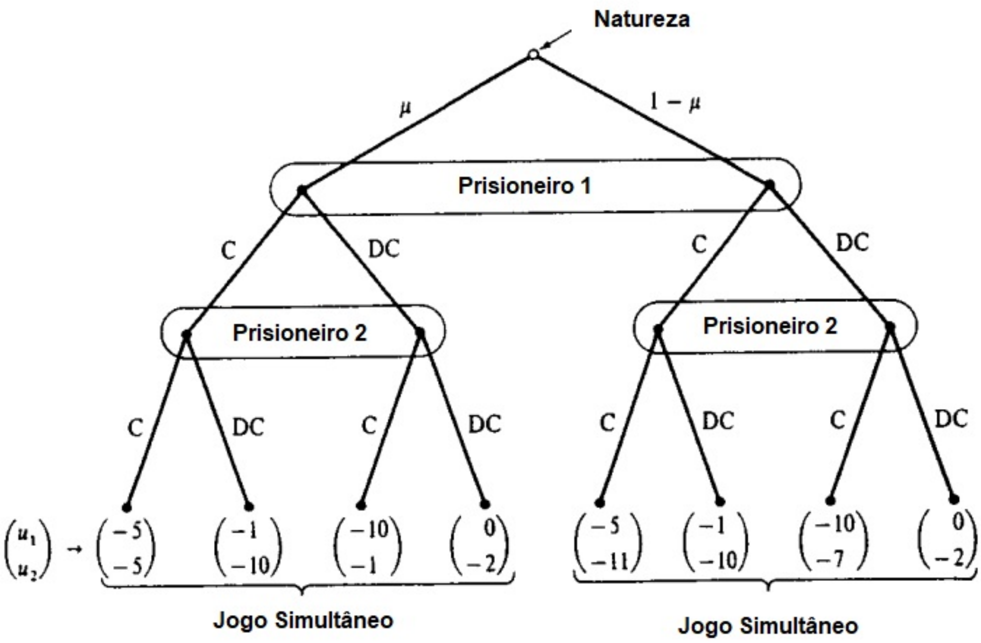
Respondendo diretamente a pergunta, se algum jogador, em algum momento do jogo, tem de fazer suas escolhas sem conhecer exatamente a história do jogo até ali, o jogo é dito de informação imperfeita. Dessa forma, podemos concluir que *todo jogo simultâneo* é um jogo de ***informação imperfeita***.

3.6 Jogos de informação incompleta: o EN Bayesiano

Até agora assumimos que os jogadores conhecem toda a informação relevante sobre o outro, incluindo os *payoffs* que cada um recebe dos vários resultados do jogo. Tais jogos são conhecidos como de informação completa. As preferências dos jogadores são portanto determinadas pela realização de uma variável é somente observada pelo jogador a distribuição de probabilidade *ex ante* é de conhecimento comum entre os jogadores. Sob essas circunstâncias a situação de informação incompleta pode ser reinterpretada como um jogo de informação imperfeita. A natureza faz o primeiro movimento, escolhendo realizações de uma variável aleatória que determinam cada tipo de preferência de cada jogador, e cada jogador observa a realização da sua própria variável aleatória.Um jogo com essa constituição é chamado de jogo Bayesiano.

Considere o jogo DA's *Brother*, com probabilidade u o J_2 tem as preferências apresentadas anteriormente. enquanto que com probabilidade $(1-u)$ o J_2 possui um novo "grupo" de preferências.

Figura 10: Jogo DA's Brother com Informação Incompleta



Nota: Com probabilidade μ J2 possui preferências do tipo I e com probabilidade $1-\mu$ J2 possui preferências do tipo II.

Tabela 11: Exemplo: Jogo DA's Brother com Informação Incompleta

		P2	
		DC	C
P1	DC	0,-2	-10,-1
	C	-1,-10	-5,-5

	P2	
	DC	**C**
P1	**0,-2**	**-10,-7**
	-1,-10	**-5,-11**

Nesse jogo, uma estratégia pura para o jogador 2 pode ser vista como cada realização possível do seu tipo de preferência que indica que a ação que ele tomará. Assim, o prisioneiro 2 possui 4 possíveis estratégias puras:

- C se I, C se II
- C se I, DC se II
- DC se I, C se II
- DC se I, DC se II

Note que J_1 não observa o tipo do J_2 e uma estratégia pura para J_1 é simplesmente confessar ou não confessar.

Definição. Formalmente, em um jogo Bayesiano, cada jogador i tem uma função de recompensa $u_i\left(s_i, s_{-i}, \theta_i\right)$ em que$\theta_i \in \Theta_i$ é uma variável aleatória escolhida pela natureza e é observada pelo jogador i. A distribuição de probabilidade conjunta de $\theta_i' s$ dada por $F\left(\theta_1, \ldots, \theta_I\right)$é assumida ser de conhecimento comum entre os jogadores. Seja $\Theta = \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_I$, um jogo Bayesiano é resumido pelos seguintes dados: $\left[\{I\}, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}, \Theta, F(\cdot)\right]$.

Definiremos uma estratégia no contexto de jogos bayesianos.

Definição. Uma estratégia pura para o jogador i em um jogo Bayesiano é uma função $s_i(\Theta_i)$ ou regra de decisão que dá ao jogador a escolha da estratégia para cada realização do seu tipo Θ_i. A estratégia pura do jogador i é representado pelo conjunto de estratégias ς_i. O *payoff* esperado do jogador i dado um perfil de estratégias puras para os I jogadores $(s_i(\cdot), ..., s_I(\cdot))$ é então dado por:

$$\tilde{u}_i(s_i(\cdot), ..., s_I(\cdot)) = E_\theta[u_i(s_i(\theta_2), ..., s_I(\theta_I), \theta_i)] \; (E.1)$$

Definição. Um equilíbrio de Nash Bayesiano (em estratégias puras) para o jogo Bayesiano $\Gamma_N = \left[\{I\}, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}, \Theta, F(\cdot)\right]$ é um perfil de regras de decisão $(s_i(\cdot), ..., s_I(\cdot))$ que constituem um equilíbrio de Nash do jogo $\Gamma N = [I, \{(S_i)\}\{\tilde{u}_i(\cdot)\}]$. Isto é, para cada $i = 1, ..., I$.

$$\tilde{u}_i(s_i(\cdot), s_{-i}(\cdot)) \geq \tilde{u}_i(s_i^{'}(\cdot), s_{-i}(\cdot))$$

para todo $s_i^{'}(\cdot) \in S_i$ onde $\tilde{u}_i(s_i(\cdot), s - i(.))$ como definido em (E.1).

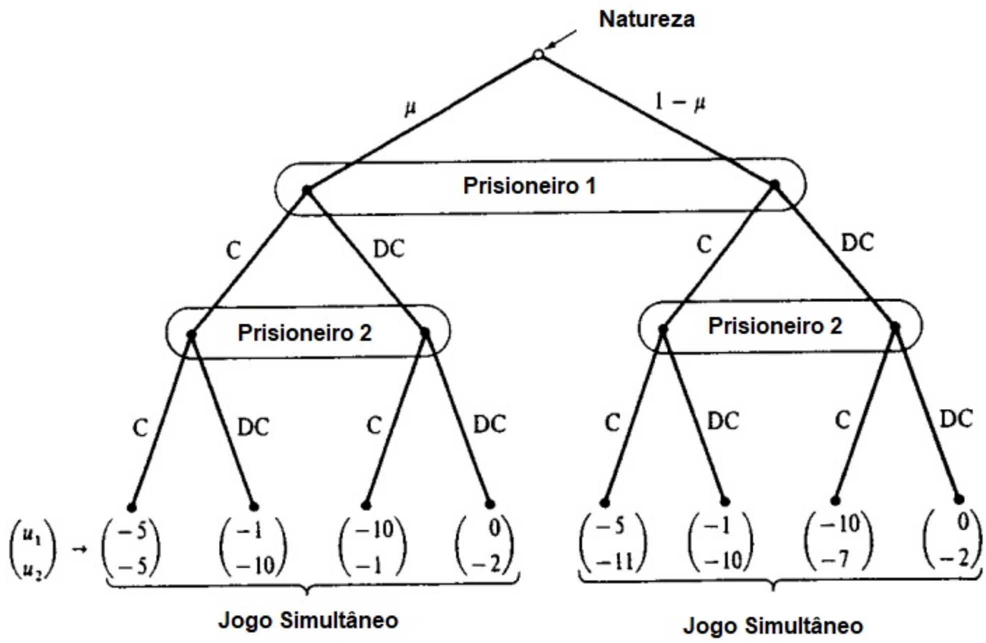
Proposição. *Um perfil de regras de decisão* $(s_1(\cdot), ..., s_I(\cdot))$ *é um equilíbrio de Nash Bayesiano* $\Gamma_N = \left[\{I\}, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}, \Theta, F(\cdot)\right]$ *se e somente se, para todo i e todo* $\overline{\theta}_i \in \Theta$ *ocorrendo com probabilidade positiva:*

$$E_{\theta-i}\ [u_i(s_i(\overline{\theta}_i), s_{-i}(\theta_{-i}), \tilde{\theta}_i)|\tilde{\theta}_i]\ \geq\ E_{\theta-i}\ [u_i(s_i^{'}, s_{-i}|\theta_{-i}), \overline{\theta}_i|\overline{\theta}_i)]\ (E.2)$$

para todo $s_i^{'} \in S_i$ onde a expectativa condicional é tomada sobre as realizações das variáveis aleatórias dos outros jogadores condicional a realização do sinal de $\tilde{\theta}_i$

Continuação exemplo DA's Brother com informação incompleta. Para solucionar o ENB, note que o tipo I de $J2$ deve sempre confessar poque essa é a sua estratégia dominante. O tipo II possui a estratégia dominante não confessar. Dado esse comportamento de $J2$ a melhor resposta de $J1$ é não confessar se:

Figura 11: Jogo DA's Brother com Informação Incompleta



Nota: Com probabilidade μ J2 possui preferências do tipo I e com probabilidade $1-\mu$ J2 possui preferências do tipo II.

$$-10\mu + 0(1-\mu) > -5\mu + -1(1-\mu)$$

$$-10\mu > -5\mu - 1 + \mu$$

$$-10\mu > -4\mu - 1$$

$$-6\mu > -1$$

$$\mu < \frac{1}{6}$$

Se $\mu = \frac{1}{6}$ $J1$ é indiferente.

Exemplo. o consórcio $\alpha\beta$ possui dois membros. As regras do consórcio são que qualquer invenção independente feita por uma das firmas deve ser compartilhada com a outra. Suponha que há uma nova invenção chamada "Zigger" que cada uma das empresas poderia desenvolver. Para desenvolver esse produto cada firma incorre no custo $C \in (0,1)$ o benefício de Zigger é apenas conhecido individualmente por cada firma. Formalmente cada firma possui o tipo θ_i que está independentemente distribuído sob uma distribuição uniforme no $[0,1]$ o benefício obtido por produzir Zigger quando o seu tipo é θ_i é $(\theta_i)^2$. As duas empresas observam privadamente o seu tipo, então elas escolhem simultânea mente se desenvolveram o produto ou não.

Escrevemos $s_i(\theta_i) = 1$ se o tipo θ_i da firma i desenvolve Zigger então seu *payoff* é $\theta_i^2 - c$. Se a firma i decide não desenvolver Zigger quando o seu tipo é θ_i ela terá um *payoff* esperado igual a

$$(\theta_i)^2 \text{Prob}(s_j(\theta_j) = 1)$$

.

Assim, a melhor resposta da firma i para desenvolver Zigger é se i somente se seu tipo θ_i.

$$\theta_i \geq \left[\frac{c}{1 - Prob(s_j(\theta_j) = 1)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Para entendermos esse resultado, considere que i seja indiferente:

$$(\theta_i)^2 \text{Prob}(s_j(\theta_j) = 1) = \theta_i^2 - c \text{ (indiferente)}$$

$$c = \theta_i^2 \left(1 - \text{Prob}(s_j(\theta_j) = 1)\right)$$

$$\theta_i = \left[\frac{c}{1 - Prob(s_j(\theta_j) = 1)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

:

Isoladamente a firma i seria indiferente entre desenvolver ou não o produto quando:

$$\theta_i = \sqrt{c} \text{ ou seja} \sqrt{c}^2 - C = 0$$

Há um efeito de carona ao participar do consórcio. Suponha que $\hat{\theta_1}, \hat{\theta_2} \in]0,1[$ são os valores de corte para as duas empresas. Usando o fato que $Prob(s_j(\theta_j) = 1) = 1 - \hat{\theta_j}$ usando $i = 1$ e $j = 2$ temos que:

$$\hat{\theta}_1 = \left(\frac{c}{1-(1-\hat{\theta}_2)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\hat{\theta_2}^2 = \frac{c}{\theta_2}$$

$$\hat{\theta_1}^2 = \hat{\theta}_2 = c$$

O mesmo vale para $\hat{\theta}_2 = \theta_2 = c$. Essas igualdades implicam que $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_2$. Assim o ENB envolve um valor de “corte” $\theta = c^{\frac{1}{3}}$.

$$\hat{\theta}_1^2\hat{\theta}_1 = c$$

$$\hat{\theta}_1^3 = c$$

$$\hat{\theta}_1 = c^{\frac{1}{3}} = \hat{\theta}_2$$

$$\theta^* = c^{\frac{1}{3}}$$

Nesse equilíbrio a probabilidade que nenhuma das firmas desenvolva Zigger é $(\theta^*)^2$, a probabilidade que apenas 1 desenvolva é $2\theta(1-\theta^*)$ e a probabilidade das duas dese volverem é $(1-\theta^*)^2$

Tabela 12: Exemplo: Zigger

			F2	
			D	ND
F1			$1-\theta^*$	θ^*
	D	$1-\theta^*$	$(1-\theta^*)^2$	$(1-\theta^*)\,\theta^*$
	ND	θ^*	$(1-\theta^*)\,\theta^*$	${\theta^*}^2$

1. Se F1 e F2 desenvolvem então: $(1-\theta^*)^2$;
2. Se F1 desenvolve e F2 não desenvolve: $(1-\theta^*)\,\theta^*$;
3. Se F1 não desenvolve e F2 desenvolve: $(1-\theta^*)\,\theta^*$;
4. Se ambas não desenvolvem: ${\theta^*}^2$

Se apenas 1 desenvolve somamos (2) e (3)

$$\theta(1-\theta) + \theta(1-\theta) = 2\theta(1-\theta)$$

3.7 A probabilidade de cometermos erros: Mãos trêmulas

A discussão de que os jogadores cometam pequenos erros nos leva ao refinamento do conceito de EN *Trembling-hand perfect* que identifica que o EN é robusto a possibilidade que os jogadores cometam pequenos erros. Definimos um jogo "perturbado" $\Gamma_\epsilon = [I, \{\triangle_\epsilon(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}]$ pela escolha de cada jogador i e a estratégia $s_i \in S_i$ um número $\epsilon_i(s_i) \in]0,1[$ estratégia perturbada como:

$$\triangle_\epsilon(S_i) = \{\sigma_i : \sigma_i(s_i) \geq \epsilon_i(s_i) \; \forall \; s_i \in S_i \text{ e } \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\}$$

$\epsilon_i(s_i)$ é uma probabilidade muito pequena (inevitável) do jogador i cometer um erro.

Definição. Um equilíbrio de Nash σ do jogo $\Gamma_N = [\{I\}, \{S_i\}, \{u_i(\cdot)\}]$ é um equilíbrio *trembling hand* perfeito se há alguma sequência de jogos perturbados $\{\epsilon^k\}_{k=1}^{\infty}$ que converge para Γ_N no sentido que $lim_{k\to\infty}\epsilon_i^k(s_i) = 0$ para todo i e $s_i \in S_i]$ para qual há alguma sequência do equilíbrio de Nash $\{\sigma^k\}_{k=1}^{\infty}$ que converge para σ (isto é, $lim_{k\to\infty}\sigma^k = \sigma$)

Proposição. *Um equilíbrio de Nash σ do jogo $\Gamma N = [I, \{\triangle(S_i)\}, \{u_i(.)\}]$ é um equilíbrio perfeito trembling-hand se e somente se existe alguma sequência de estratégias mistas $\{\sigma^k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $lim_{k\to\infty}\sigma^k = \sigma$ e σ_i é a melhor resposta para cada elemento da sequência $\{\sigma_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ $\forall \; i = 1, ..., I$*

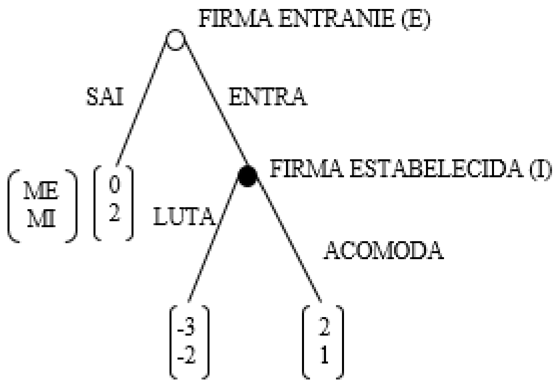
Proposição: Se $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_I)$ é um *ENPTH (Equilíbrio de Nash Perfeito Trembling Hand)* então σ_i não é uma estratégia fracamente dominada por qualquer $i = 1, ..., I$. Assim, em qualquer *ENPTH* nenhuma estratégia para fracamente dominado pode ser jogada com probabilidade positiva.

4 Jogos dinâmicos

Uma das questões mais importantes quando estudamos jogos dinâmicos é a credibilidade da estratégia do agente. Suponha que seu professor de Microeconomia 2 exija que você apenas faça essa matéria e que se você estiver matriculado em outros cursos ele irá te barrar (não deixar fazer) as provas. Essa ameaça é realmente crível? Ameaças vazias são aquelas que desejamos excluir como estratégias que constituem um equilíbrio em jogos dinâmicos. Contudo, o conceito de Equilíbrio de Nash (EN) que vimos antes não é suficiente para excluir estratégias não críveis. Precisaremos do conceito de EN perfeito em subjogos. A ideia central desse conceito é que há o princípio da racionalidade sequencial: estratégias de equilíbrio deveriam especificar o comportamento ótimo em qualquer ponto do jogo, um princípio que está intimamente ligado com a ideia de indução retroativa.

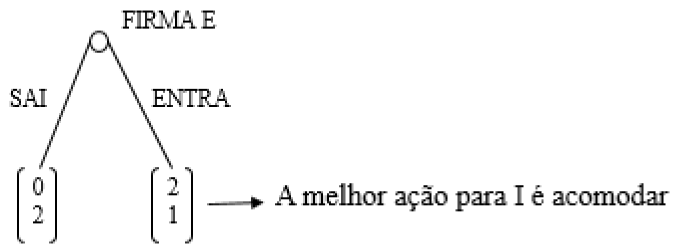
4.1 Racionalidade sequencial, indução retroativa e subjogo perfeito

Primeiramente começaremos apresentando um exemplo de um jogo sequencial:



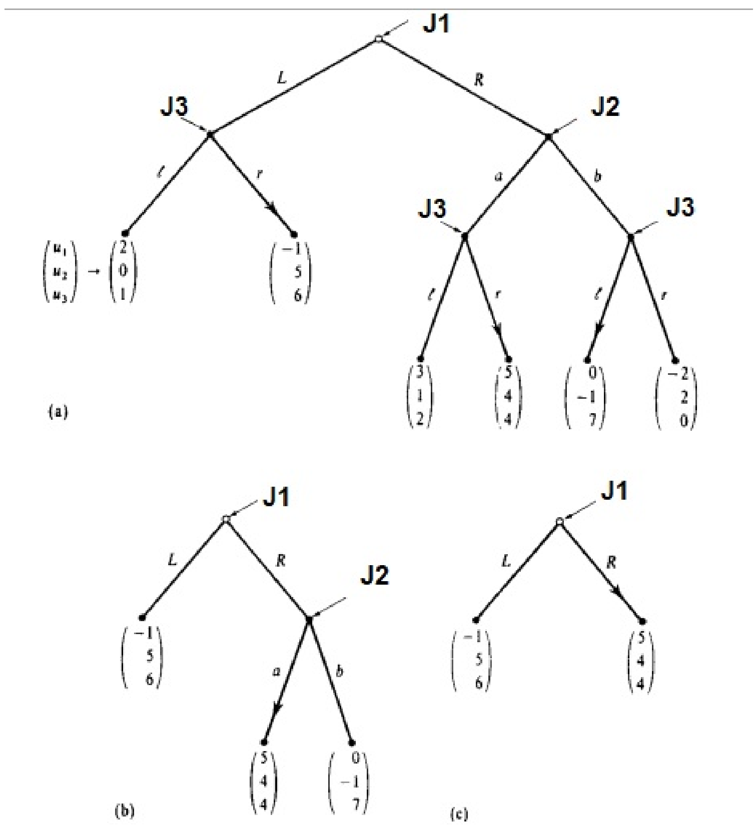
	Firma Estabelecida (I)	
Firma Entrante (E)	Luta se E entra	Acomoda se E entra
Sai (não entra)	0,2	0,2
Entra	-3,-1	2,1

Examinando a forma normal (estratégica) esse jogo possui dois EN em estratégias puras (σ_E, σ_I) = (sair, luta se E jogar entra) e (entrar, acomodar se E entrar). O primeiro par de estratégias não é algo crível, se E entra é ótimo para I acomodar. Para garantir que não haverá estratégias não críveis precisamos que as estratégias especifiquem as ações ótimas a cada ponto do jogo. Usaremos o conceito de racionalidade sequencial e solucionaremos o jogo de trás para frente.



E escolherá entrar então o Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos (ENPS) será (entrar, acomodar).

Vejamos um exemplo de indução retroativa em um jogo finito de informação perfeita.



O procedimento de indução retroativa identifica o perfil de estratégias $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ no qual σ_1= R, σ_2= "a se J1 joga R" e

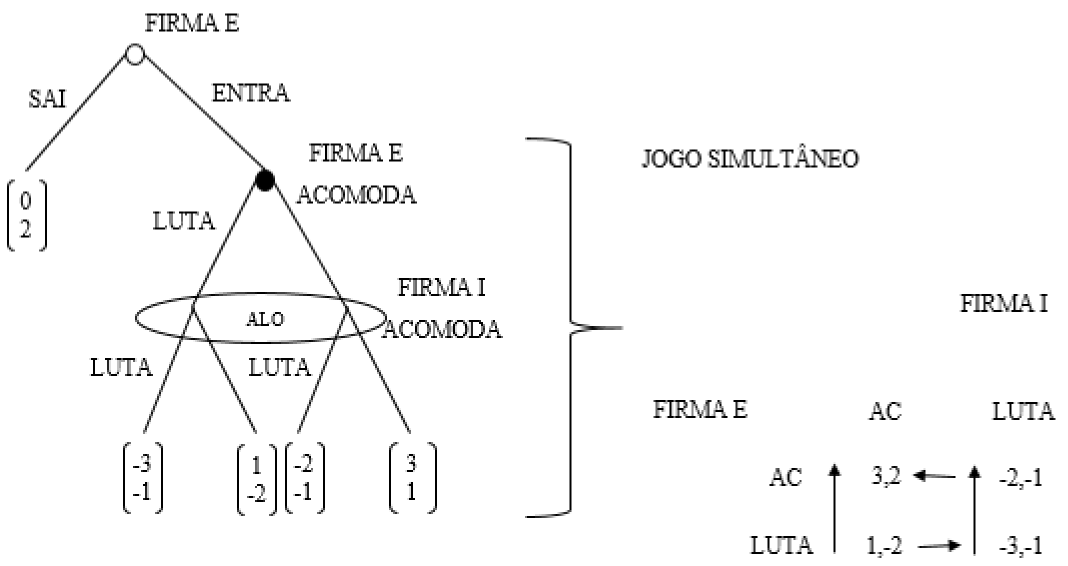
$$\sigma_3 = \begin{cases} r & \text{se } \textit{J1} \text{ joga } L \\ r & \text{se } \textit{J1} \text{ joga } R \text{ e } \textit{J2} \text{ joga } a \\ l & \text{se } \textit{J1} \text{ joga } R \text{ e } \textit{J2} \text{ joga } b \end{cases}$$

Esse perfil de estratégias é um EN mas esse jogo possui um equilíbrio em estratégias puras.

Teorema. *Teorema de Zermelo*

Cada jogo finito de informação perfeita Γ_E possui um equilíbrio de Nash em estratégias puras que pode ser derivado por indução retroativa. Além disso, se nenhum jogador possui os mesmos *payoffs* a quaisquer dois nós terminais, então existe um único equilíbrio de Nash que pode ser obtido dessa forma.

Prova: Exercício.



		Firma Estabelecida (I)	
		Acomoda se E entra	Luta se E entra
	Sai,Acomoda se entra	0,2(c)	(l)0,2(c)
	Sai,Luta se entra	0,2(c)	(l)0,2(c)
Firma Entrante (E)	Entra,Acomoda se entra	(l)3,1(c)	-2,-1
	Entra,Luta se entra	-1,-2	-3,-1(c)

Examinando a forma normal há 3 EN em estratégias puras:

1. [(sai, acomoda se entra), (luta se E joga entra)],
2. [(sai, luta se entra), (luta se E joga entra)],
3. [(entra, acomoda se entra), (acomoda se E joga entra)]

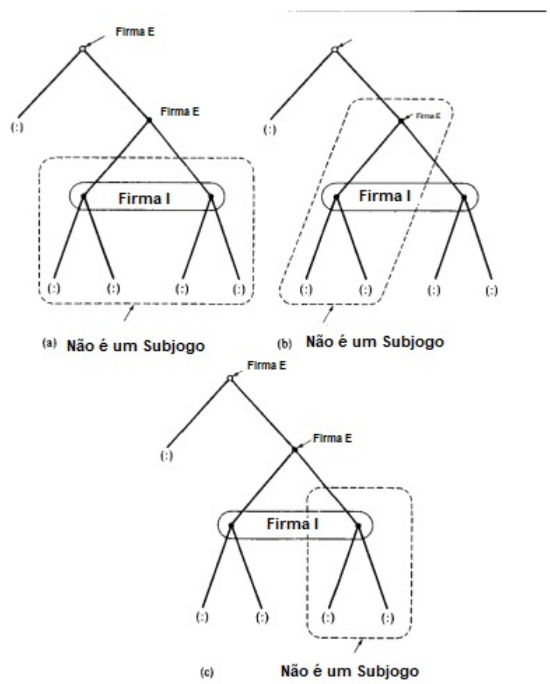
A lógica da racionalidade sequencial sugere que somente o último dos 3 equilíbrios é uma "previsão" razoável para esse jogo.

Definição. Um subjogo de um jogo na forma extensiva Γ_E é um subconjunto do jogo que possui as seguintes propriedades:

1. Começa com um conjunto de informação contendo um único nó de decisão, contém todos os nós de decisão que são sucessores (o imediato e o último) desse nó, e contém somente esses nós.
2. Se um nó de decisão x é um subjogo então cada $x' \in H(x)$ é também, em que $H(x)$ é o conjunto de informação que contém o nó x.

Definição. Um perfil de estratégia $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_I)$ em um I jogador jogo Γ_E é um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos se ele induz a um equilíbrio de Nash em cada subjogos de Γ_E.

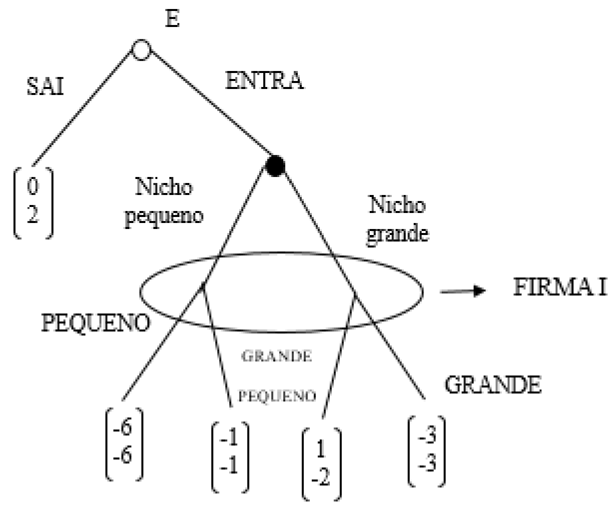
Exemplos de não-subjogos:



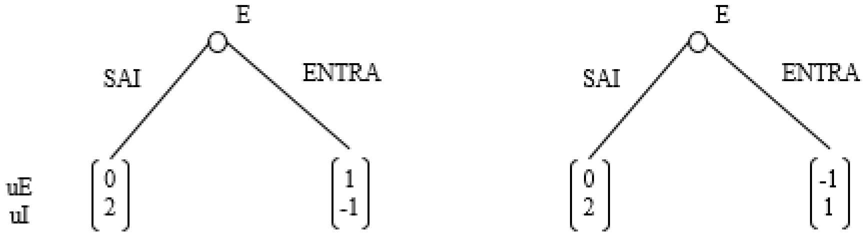
Proposição. *Cada jogo finito de informação perfeita Γ_E possui um equilíbrio de Nash perfeito em subjogos. Além disso, se nenhum jogador possui os mesmos payoffs a quaisquer dois nós terminais, então há um único equilíbrio de Nash perfeito em subjogos.*

Proposição. *Considere um jogo na forma extensiva Γ_E e algum subjogo S de Γ_E. Suponha que o perfil de estratégia σ^S é um ENPS no subjogo S, e seja $\hat{\Gamma}_E$ a forma reduzida substituindo o subjogo S por um nó terminal com os payoffs idênticos aqueles de σ^S. Então:*

1. Em qualquer ENPS σ de Γ_E em que σ^S é o jogo no subjogo S, os movimentos dos jogadores fora do subjogo S deve constituir um ENPS para o jogo reduzido $\hat{\Gamma_E}$.
2. Se $\hat{\sigma}$ é um ENPS de $\hat{\Gamma_E}$então o perfil de estratégias σ que especifica os movimentos em σ^S aos conjuntos de informação no subjogo S e que especifica os movimentos em $\hat{\sigma}$ nos conjuntos de informação não em S é um ENPS de Γ_E.



		FIRMA I	
		PEQUENO	GRANDE
FIRMA E	PEQUENO	-6,-6	-1, 1
	GRANDE	1, -1	-3, -3



Há dois ENPS:

1. [(entrar, larga nicho se entra), (pequeno nicho se E joga entra)];

2. [(sair, pequeno nicho se entra), (larga nicho se E joga entra)].

Proposição. *Considere um jogo com I jogadores na forma extensiva* Γ_E *envolvendo sucessivos "jogos" (rodadas) de T jogos simultâneos,* Γ_N^t=$[I, \{\Delta\,(si^t)\}\,, \{u_i^t\,(\cdot)\}]$ *para* $t = 1, ..., T$*. Com os jogadores observando as estratégias puras que são jogadas em cada jogo após ele ser concluído. Assuma que cada payoff de cada jogador é igual a soma dos payoffs dos T jogos. Se existe um único EN em cada jogo* Γ_N^t*, dito* σ^t= $(\sigma_1^t$,...,$\sigma_I^t)$ *então há um único ENPS de* Γ_E *e ele consiste em cada jogador i jogando a estratégica* σ_i^t *em cada jogo* Γ_N^t *independentemente do que tenha ocorrido previamente.*

Demonstração. Faremos a prova por indução. O resultado é claramente verdadeiro para *T=1.* Supomos que será verdade para todo $T \leq n-1$. Assim mostramos que será verdade para $T = n$. Sabemos por hipótese que qualquer ENPS no jogo todo, após o jogo Γ_N^1 os restantes $n-1$ movimentos simultâneos envolvem o EN de cada jogo. Seja o ganho do jogador i G_i oriundo desses $n-1$ jogos. Então no jogo reduzido que substitui todos os subjogos que seguem Γ_N^1com seus payoffs de equilíbrio o jogador i recebe $u_i\,(s_1^1, ..., s_I^1)+G_i$ se $(s_1^1, ..., s_I^1)$ é o perfil de estratégias jogadas no jogo Γ_N^1. O único EN do jogo reduzido é claramente σ^1. Assim o resultado é válido para $T = n$. $\square$

4.2 Crenças e racionalidade sequencial

Definição. (Sistema de crenças) Um sistema de crenças u no jogo na forma extensiva Γ_E é uma especificação de uma probabilidade *u(x)* $\in$ [0,1] para cada nó de decisão x em Γ_E tal que:

$$\sum_{x \in H} u(x) = 1$$

para todos os conjuntos de informação *H*.

Para definir racionalidade sequencial, é útil deixar (considerar) $E\left[u_i|H, \mu, \sigma_i, \sigma_{-i}\right]$ denotar a utilidade esperada do jogador i começando pelo seu conjunto de informação H se as suas crenças sobre as probabilidades condicionais de estar em vários nós de H são dadas por u, se ele segue a estratégia σ_i e seu rival usa a estratégia σ_{-i}.

Definição. Um perfil de estratégias σ= (σ_1,...,σ_I) do jogo na forma extensiva Γ_E é sequencialmente racional ao conjunto de informação H dado um sistema de crenças u se demonstrado por $i(H)$ para o jogador que se move no conjunto de informações *H*, temos que:

$$E\left[u_i\left(H\right)|H, \mu, \sigma_i\left(H\right), \sigma_{-i}\left(H\right)\right] \geq E\left[u_i\left(H\right)|H, \mu, \sigma_i\left(H\right), \sigma_{-i}\left(H\right)\right]$$

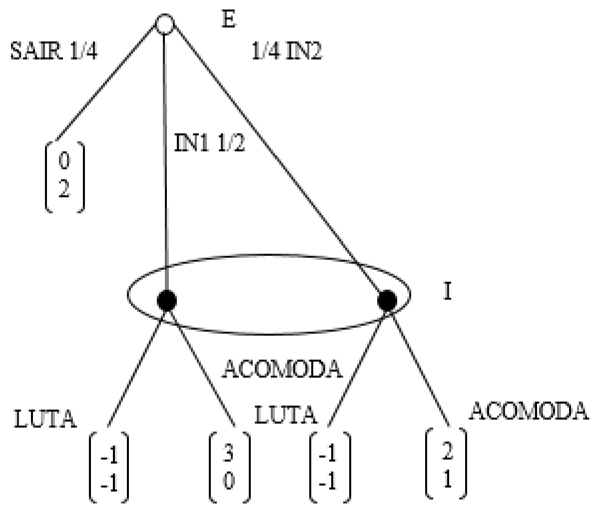
para todo $\tilde{\sigma_i}(H) \in \Delta\left(S_{(H)}\right)$. Se o perfil de estratégias σsatisfaz essa condição para todos os conjuntos de informação H, então dizemos que σ é sequencialmente racional dado o sistema de crenças μ. Em palavras, o perfil de estratégia $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_I)$ é sequencialmente racional se nenhum jogador acha que ele é atingível (ou que vale a pena), uma vez que os conjuntos de informação foram alcançados revisar suas estratégias dado suas crenças sobre o que ocorre e as estratégias do rival.

A definição de equilíbrio bayesiano fraco envolve duas noções: as estratégias devem ser sequencial racionais dadas as crenças e sempre que possível as crenças devem ser consistentes com essas estratégias. A noção natural de crenças sendo consistentes com o jogo do perfil de estratégias σ é um caso simples. Para cada nó x dado o conjunto de informação *H*, o jogador deveria computar a probabilidade de alcançar o nó dado que ele jogou a estratégia σ,Prob($x|\sigma$), e ele então deveria atribuir probabilidades condicionais de estar em cada nó dado que ele jogou e alcançou (atingiu) um conjunto de informação pela regra de Bayes.

Regra de Bayes:

$$Prob\left(x|H, \sigma\right) = \frac{Prob\left(x|\sigma\right)}{\Sigma_{x \in H} Prob\left(x'|\sigma\right)}$$

Exemplo:



- A probabilidade da firma I atingir seu conjunto de informação é $\frac{3}{4}$.
- A probabilidade que a firma I esteja no nó esquerdo do seu conjunto de informação dado que ele tenha sido atingido é de $\frac{2}{3}$.

$$Prob\,(x|H,\sigma) = \frac{Prob\,(x|\sigma)}{\Sigma_{x'\in H} Prob\,(x'|\sigma)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

Portanto a probabilidade de estar no nó direito do conjunto de informação é de $\frac{1}{3}$.

$$Prob\,(x|H,\sigma) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Definição. Definição: Um perfil de estratégias e um sistema de crenças (σ, u) é um equilíbrio bayesiano fraco (ENBF) em um jogo na forma extensiva Γ_E se ele possui as seguintes propriedades:

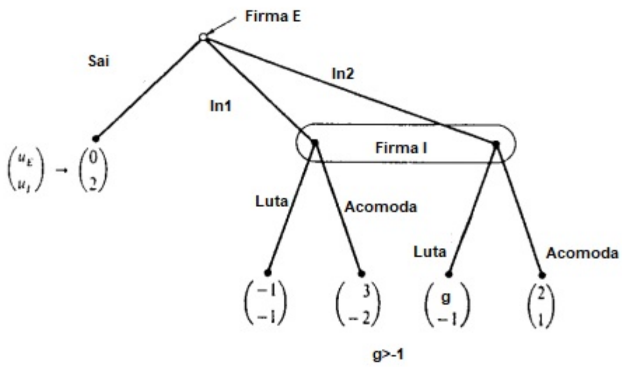
1. O perfil de estratégia σé sequencialmente racional dado o sistema de crenças μ;
2. O sistema de crenças μ é derivado do perfil de estratégias σ pela regra de Bayes sempre que possível. Isto é, para qualquer conjunto de informação H tal que $Prob\,(H|\sigma)$> 0 devemos ter que:

$$u\,(x) = \frac{Prob\,(x|\sigma)}{Prob\,(H|\sigma)} \forall x \in H$$

Um perfil de estratégia σé um equilíbrio de Nash na forma extensiva Γ_E se e somente se existe um sistema de crenças μ tal que:

1. O perfil de estratégia σ é sequencialmente racional dado o sistema de crenças μ a todo conjunto de informação H tal que Prob($H|\sigma$)> 0;

2. O sistema de crenças μ é derivado de um perfil de estratégias σ usando a regra de Bayes sempre que possível.



Seja σ_F a probabilidade que a empresa I lute após entrar, seja μ_1 a crença da firma I que "In1" foi a estratégia da empresa E. Se a entrada ocorreu, considere σ_0,σ_1e σ_2 as probabilidades que a firma E escolhe "Sair", "In1" e "In2" respectivamente. Note que se a firma I deseja jogar lutar com probabilidade positiva se, e somente se:

$$-1 \geq -2\mu_1 + 1\,(1-\mu_1) \text{ ou } \mu_1 \geq \frac{2}{3}$$

Suponha que $\mu_1 > \frac{2}{3}$ é um ENB (Equilíbrio de Nash Perfeito Bayesiano). Então a firma I deve jogar "lutar" com probabilidade 1. Mas, então a firma E deve jogar In2 com probabilidade 1, como $g > 0$ e o conceito de ENPB deveria requerer que $\mu_1 = 0$, o que é uma contradição. Suponha que $\mu_1 < \frac{2}{3}$ em um ENPB fraco. Então a firma I deve jogar acomodar com probabilidade 1. Mas, se isso ocorre a empresa E deveria jogar In2 com probabilidade 1, e o ENPB requer que $\mu_1 = 1$, outra contradição.

Assim, qualquer ENPB nesse jogo deve ter $\mu_1 = \frac{2}{3}$. Se isso é verdade, então a firma E deve estar aleatorizando no equilíbrio com probabilidades positivas endereçadas a "In2" e "In2" com "In1" duas vezes mais provável que "In2". Isso significa que a probabilidade da firma I jogar lutar deve fazer com que E seja indiferente entre "In1" e "In2". Assim, devemos ter:

$$-1\sigma_F + 3\,(1-\sigma_F) = g\sigma_F + 2\,(1-\sigma_F)$$

ou σ_F=$\frac{1}{g+2}$. O payoff de jogar "In1" ou "In2" é então $\frac{(3g+2)}{g+2}$ da firma E jogar "In1" ou "In2".

$$-1\sigma_F + 3\left(1-\sigma_F\right) = -1\frac{1}{g+2} + 3\left(1-\frac{1}{g+2}\right) = \frac{-1}{g+2} + \frac{3\left(g+1\right)}{g+2} = \frac{3g+2}{g+2}$$

e assim a firma E deve jogar "sair" com probabilidade zero. Portanto o único ENPB fraco desse jogo quando $g > 0$ possui $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$,$\sigma_F$=$\frac{1}{g+2}$ e μ_1=$\frac{2}{3}$.

Definição. Um perfil de estratégia e um perfil de crenças (σ, u) é um equilíbrio sequencial na forma extensiva Γ_E se ele possui as seguintes propriedades:

1. Um perfil de estratégias é sequencialmente racional dado o sistema de crenças u;
2. Há uma sequência de estratégias mistas $\left\{\sigma^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ com lim$\underset{k\to\infty}{lim}\sigma^k = \sigma$ tal que $u = \underset{k\to\infty}{lim}u^k$, onde u^k denota as crenças derivadas do perfil de estratégias σ^k usando a regra de Bayes.

Em cada equilíbrio sequencial (σ, u) de um jogo na forma extensiva Γ_E o perfil de estratégias σ constitui um ENPS de Γ_E.

5 Poder de Mercado

5.1 Apreçamento de monopólio

A demanda para esse bem é $x(p)$ que é estritamente decrescente em p e contínua tal que $p > 0$. Assumimos que existe um preço $\bar{p} < +\infty$ tal que $x(p) = 0 \ \forall p \geq \bar{p}$. O monopolista conhece a função demanda para o seu produto e pode produzir o nível q ao custo $c(q)$. O monopolista escolhe p tal que:

$$\underset{x(p)}{Max}\ px(p) - c(x(p))$$

ou alternativamente

$$\underset{q}{Max}\ p(q)q - c(q)$$

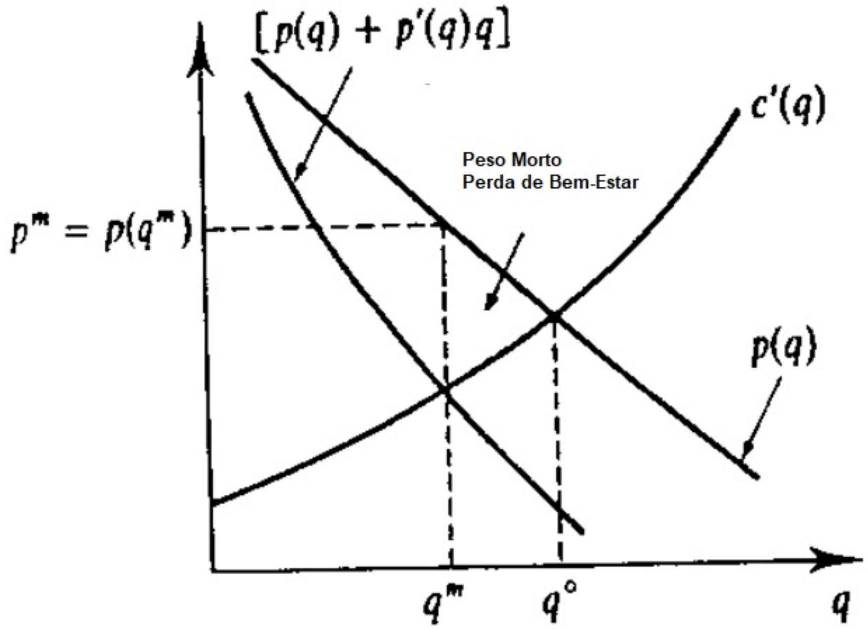
$$p(\cdot) = x^{-1}(\cdot) \text{ (demanda inversa)}$$

Assumimos que $p(\cdot)$ e $c(\cdot)$ são C^2 e $q \geq 0$ tal que $p(0) > c'(0)$ e existe um único nível de produto $q^o \in]0, +\infty[$ tal que $p(q^o) = c'(q^o)$, sendo q^o é o produto social ótimo de um mercado competitivo. Como $q^m > 0$ temos que $p(0) > c'(0)$ então:

$$p'(q^m)q^m + p(q^m) = c'(q^m)$$

Como $p'(q) < 0 \ \forall q \geq 0$ a condição acima implica que devemos ter $p(q^m) > c'(q^m)$, isto é o preço de monopólio excede o custo marginal.

$$p(q^m) - c'(q^m) = -p'(q^m)q^m$$



$$\int_{q^m}^{q^o} [p(s) - c'(s)]ds \text{ (peso morto)}$$

Note que a função de demanda inversa para preferências quase lineares $u_i(q_i) + m_i$ com $u(q_i) = \bar{p}q_i$ então $p'(q_i) = 0 \ \forall q$.

Exemplo: B.2.

$$p(q) = a - bq \text{ e } c(q) = cq$$

$$\pi = aq = bq^2 - cq$$

$$RT = aq - bq^2$$

$$RMed = p(q)$$

$$\pi' = 0 \rightarrow a - 2bq - c = 0$$

$$\frac{a-c}{2b} = q^m$$

$$p^m = \frac{a+c}{2}$$

No mercado competitivo:

$$p(q) = c$$

$$a - bq = c$$

$$\frac{a-c}{b} = q^{\text{o}}$$

$$p = a - \frac{b(a-c)}{b} = c$$

5.2 Modelos estáticos de oligopólio

5.2.1 Modelo de competição de preços de Bertrand

Nesse mercado há duas empresas maximizadoras de lucro. O mercado possui a função demanda $x(p)$, contínua e estritamente decrescente em p. Existe um $\bar{p} < +\infty$ tal que $x(p) = 0 \forall p \geq \bar{p}$.

A tecnologia dessas empresas apresenta retornos constantes de escala e ambas as firmas possuem o mesmo custo marginal $c > 0$. Assumimos que $x(c) \in]0, +\infty[$. A competição toma a seguinte forma: As duas firmas definem simultânea mente os seus preços p_1 e p_2. As "vendas" da firma j são dadas pela seguinte expressão:

$$x_j(p_j, p_k) = \begin{cases} x(p_j) \text{ se } p_j < p_k \\ \frac{1}{2}x(p_j) \text{ se } p_j = p_k \\ 0 \text{ se } p_j > p_k \end{cases}$$

Os lucros das firmas são dados pela seguinte função

$$\pi_k = (p_k - c)x_k(p_k, p_j)$$

Proposição 5.1. *Há um único* Equilíbrio Nash $\left(p_k^*, p_j^*\right)$ *no modelo de duopólio de Bertrand. Nesse equilíbrio, as duas firmas atribuem* $p_k^* = p_j^* = c$*.*

Demonstração. Note que as duas firmas estabelecem seu preço igual ao custo marginal. A esse preço elas possuem lucro econômico zero. Se uma das firmas resolve aumentar o seu preço ela terá lucro zero e não venderá nada. O que precisamos mostrar é que não há nenhum outro equilíbrio em estratégias puras. Suponha, que uma das firmas escolha o seu preço abaixo de c. Nesse caso a firma apresenta prejuízo. Mas, aumentando o seu preço acima de c o pior que ela pode fazer é não ganhar nada. Esses preços não constituem um *EN*. Suponha que $p_j = c$ e $p_k > c$. Nesse caso a firma j atende a todo o mercado e apresenta lucro econômico zero. Se p_j aumentar o seu preço um pouco, por exemplo, $\hat{p_j} = c + 0.5(p_k - c)$ a firma j venderia para todo o mercado, obtendo lucros estritamente positivos. Finalmente, suponha que $p_j > c$ e $p_k > c$. Sem perda de generalidade, assuma que $p_j \leq p_k$. Nesse caso, a firma k pode ganhar pelo menos $\frac{1}{2}(p_j - c)x(p_j)$. Mas atribuindo seu preço igual a $p_j - \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$,a empresa k ganharia todo o mercado e teria um lucro de $(p_j - \varepsilon - c)xj(p_j - \varepsilon) > \frac{1}{2}(p_j - c)x(p_j)$. Então a melhor resposta da empresa j seria reduzir o seu preço num montante ε e assim chegaríamos em $p_1 = p_2 = c$. Os três tipos de configurações não são possíveis e podem ser excluídos sendo o único *EN* em estratégias puras $p_k = p_j$= c. □

5.2.2 Modelo de Cournot

Suponha que a competição entre as duas firmas se dá pela escolha da quantidade que deve ser produzida. Assuma que $p'(q) < 0 \; \forall q \geq 0$. Ambas as firmas produzem o produto a mesmo custo marginal $c > 0$. Para encontrarmos um EN em estratégias puras, considere o problema de maximização de empresa j tomando o nível de produção $\bar{q_k}$ como dado (fixo):

$$\underset{q_j \geq 0}{Max}\, p(q_j + \bar{q_k})q_j - cq_j$$

$$p'(q_j + \bar{q_k})q_j + p(q_j + \bar{q_k}) - c \leq 0$$

com igualdade se $q_j > 0$.

Para cada $\bar{q}_k$ seja $b_j(\bar{q}_k)$ o conjunto de correspondência da empresa j para as escolhas de quantidades ótimas;$b_j(\cdot)$ é o conjunto das melhores respostas de k. O par de quantidades (q_j^*, q_k^*) é um *EN* se, e somente se,$q_j^* \in b_j(q_k^*)$ para $k \neq n$ e $j = 1, 2$. Assim se (q_1^*, q_2^*) é um *EN* essas quantidades devem satisfazer:

$$p'(q_1^*, q_2^*)q_1^* + p(q_1^* + q_2^*) \leq c$$

$$p'(q_1^*, q_2^*)q_2^* + p(q_1^* + q_2^*) \leq c$$

Ambas as condições com igualdade se q_1^* e $q_2^* > 0$. Somando as duas equações em igualdades devemos ter que:

$$\frac{1}{2}p'(q_1^*, q_2^*)\left(q_1^* + q_2^*\right) + p(q_1^* + q_2^*) = c$$

Proposição 5.2. *Em qualquer EN do modelo de duopólio de Cournot com $c > 0$ e uma demanda inversa $p(\cdot)$ satisfazendo $p'(q) < 0$ $\forall q \geq 0$ e $p(0) > c$, o preço de mercado é maior que c e é menor que o preço de monopólio.*

O preço de equilíbrio é maior que c. Esse fato é uma decorrência direta da equação acima e do fato que $q_1^* + q_2^* > 0$ e $p'(q) \leq 0$ $\forall q$. Argumentamos que $(q_1^* + q_2^*) > q^m$, isto é, que o preço de equilíbrio do duopólio é estritamente menor que o preço do monopólio. Vamos mostrar que isso é verdade em duas partes:

Demonstração. Primeiramente $(q_1^* + q_2^*) \geq q^m$. Para ver isso suponha que $q^m \geq (q_1^*, q_2^*)$. Aumentando a sua quantidade produzida para $\hat{q}_1 = q_m - q_k^*$ a firma j poderia (fracamente) aumentar o lucro agregado das duas empresas. Além disso, como a quantidade agregada aumenta, o preço deve cair e a firma k piora. Isso implica que a firma j estritamente melhora, e assim j deve ter um desvio lucrativo se $q^m > (q_1^*, q_2^*)$. Concluímos que devemos ter $(q_1^* + q_2^*) \geq q^m$. $\square$

Adicionalmente, não podemos ter $(q_1^* + q_2^*) = q^m$ por que:

$$\frac{q^m}{2}p'(q^m) + p(q^m) = c$$

o que é uma violação da condição de monopólio

$$p'(q^m)q^m + p(q^m) = c$$

Assim, devemos ter $(q_1^* + q_2^*) \geq q^m$.

Suponha que tenhamos um modelo de Cournot com J firmas, sendo $J > 2$ Seja Q_J^* o produto agrupado de equilíbrio, podemos chegar a seguinte generalização:

$$p'(Q_J^*)\frac{Q_J^*}{J} + p(Q_J^*) = c$$

Note que quando *J=1* o preço é igual ao de monopólio. A outro extremo quando $J \to \infty$ $p(Q_J^*) \to c$.

5.2.3 Modelo de Bertrand

Apresentaremos um modelo simplificado de duopólio em que as empresas competem por preço. Contudo, por hipótese os bens não são exatamente iguais. Esse modelo é conhecido como o Modelo de Bertrand com produtos diferenciados. Por exemplo, há diversos produtos que são substitutos muito próximos, mas há pequenas diferenciações entre eles, como a qualidade, a composição do produto etc. Considere uma estante de um supermercado com diversos detergentes de n diferentes tipos. Em linhas gerais, o produto e a função dele é o mesmo, contudo não se pode dizer que esses bens são exatamente iguais.

Mostraremos esse modelo com uma função de demanda linear para duas empresas:

$$q_1 = a - p_1 + bp_2$$

$$q_2 = a - p_2 + bp_1$$

$$c_1 = cq_1$$

$$c_2 = cq_2$$

$$c > 0$$

$$\Pi_1 = q_1.p_1 - cq_1 = ap_1 - {p_1}^2 + bp_1p_2 - cq_1$$

$$\Pi_2 = q_2.p_2 - cq_2 = ap_2 - {p_2}^2 + bp_1p_2 - cq_2$$

$$\Pi_1 = ap_1.p_1^2 + bp_1p_2 - c\left(a - p_1 + bp_2\right)$$

$$\Pi_2 = ap_2.p_2^2 + bp_1p_2 - c\left(a - p_2 + bp_1\right)$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = a - 2p_1 + bp_2 + c = 0$$

$$\frac{a + bp_2 + c}{2} = p_1 \text{ essa é a função de reação da firma 1}$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial p_2} = a - 2p_2 + bp_1 + c = 0$$

$$\frac{a + bp_1 + c}{2} = p_2$$

$$\frac{a + c}{2} + \frac{b}{2}\frac{\left(a + bp_1 + c\right)}{2} = p_1$$

$$\frac{a + c}{2} + \left(1 + \frac{b}{2}\right) = p_1\left(1 - \frac{b^2}{4}\right)$$

$$\frac{a + c}{4} + \left(2 + b\right) = p_1\frac{\left(2 + b\right)\left(2 - b\right)}{4}$$

$$\frac{a + c}{2 - b} = p_1$$

$$p_2^* = \frac{a+c}{2} + \frac{b}{2}\left(\frac{a+c}{2-b}\right)$$

$$p_2^* = \frac{a+c}{2}\left(1 + \frac{b}{2-b}\right)$$

$$= \frac{a+c}{2}\left(\frac{2-b+b}{2-b}\right)$$

$$= \frac{a+c}{2}.\frac{2}{2-b}$$

$$= \frac{a+c}{2-b}$$

5.2.4 Iteração repetida

Suponha que as firmas tomem (façam) as suas escolhas de preço mas o jogo se repete por um número extremamente grande de períodos (ou por um número infinito). Considere as seguintes estratégias das firmas 1 e 2:

$$p_{jt}\left(H_{t-1}\right) = \begin{cases} p^m \text{ se todos os elementos de } H_{t-1} \text{ são iguais}(p^m, p^m) \text{ ou } t{=}1 \\ c \text{ caso o contrário} \end{cases} \quad \text{(D1)}$$

A estratégia da firma *j* diz que ela deve jogar o preço de monopólio no primeiro período. Então em cada *t>1*, a firma *j* joga p^m se em cada período prévio ambas firmas cobraram o preço p^m e caso contrário cobram um preço igual ao custo. Esse tipo de estratégia é chamada de *reversão de Nash.* As firmas cooperam até que uma delas desvie e se ocorre qualquer desvio há um retaliação em que ambas empresas atribuem seu preço igual ao custo. Note que se ambas as firmas seguem as estratégias em (D1) então elas irão cobrar o preço de monopólio em cada período. Elas começam cobrando p^m e portanto nenhum desvio de p^mserá "ativado".

Proposição 5.3. *As estratégias descritas em (D1) constituem um Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos para o jogo de duopólio de Bertrand repetido infinitamente se, e somente se* $\delta \geq 0,5$.

Demonstração. Considere um subjogo que o desvio ocorreu. As firmas irão sempre atribuir seu preço igual a c a partir daí, independentemente da escolha da sua rival. Esse é um par de estratégias de um *EN* de um jogo *a la Bertrand infinitamente repetido*, porque cada firma ganha pelo menos zero quando sua oponente atribui seu preço igual a c e recebe esse mesmo montante em cada período restante. Considere agora um subjogo começando no período t sem que anteriormente tenha ocorrido um desvio prévio. Cada firma j sabe que a estratégia da sua rival é cobrar p^m até que se encontre algum desvio deste preço e então o valor cobrado mude para c a partir daí.

É interessante que a firma j use essa estratégia em decorrência do que a outra empresa faz? Se sim, essas estratégias constituem um ENPS?

Suponha que a firma j pensa (considera) desviar do preço p^m no período $t \geq T$ do subjogo se nenhum desvio ocorreu em algum período anterior a t. Do período t até *t-1* a firma j ganhará $\frac{1}{2}(p^m - c)\,x(p^m)$ em cada período, exatamente como se ela nunca desviasse. Nos períodos após ela desviar $(\tau + 1, \tau + 2, ...)$, a firma rival da j muda o seu preço para c independentemente da forma com que a empresa j desvie no período J, e então a empresa j deve ganhar 0 (zero) em cada um desses períodos. No período t a firma j desvia de forma a maximizar o seu *payoff* no período.

Ela irá cobrar $p^m - \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$ e realizar as vendas para todo o mercado e ganhar por 1 período o montante de $(p^m - c - \varepsilon)\,x(p^m)$. Assim, seu ganho descontado de período t pode ser considerado arbitrariamente próximo de $(p^m - c)\,x(p^m)$. Por outro lado, se a firma j desvia, ela recebe o pagamento descontado do período t em diante de $\left[\frac{1}{2}(p^m - c)\,x(p^m)\right]\frac{1}{1-\delta}$. Assim para qualquer t e $z \geq t$ a firma j preferirá não desviar a desviar no período z se e somente se:

$$\frac{1}{1-\delta}\left[\frac{1}{2}(p^m - c)\,x(p^m)\right] \geq (p^m - c)\,x(p^m)$$

$$\delta \geq \frac{1}{2}$$

Assim, as estratégias em (D1) constituem um ENPS se, e comente se $\delta \geq \frac{1}{2}$. □

Proposição 5.4. *No duopólio de Bertrand infinitamente repetido, quando $\delta \geq \frac{1}{2}$ a escolha repetida de qualquer preço $p \in [c, p^m]$ pode ser suportada como um ENPS usando reversão de estratégias de Nash (caminho). Em contraste, quando $\delta < \frac{1}{2}$, qualquer ENPS deve ter todas as vendas ocorrendo ao preço igual a c em cada período.*

5.3 Entrada

Veremos como se dá a entrada de uma empresa no mercado quando o poder de mercado está presente. Vamos considerar esse processo em mercados com a estrutura de oligopólio em duas etapas, com o custo de entrada $K > 0$:

Etapa 1: Todas as potenciais entrantes decidem se "entram" ou "saem". Se a firma entra ela possui um custo de entrada $K > 0$.

Etapa 2: Todas as empresas que entram atuam em um mercado oligopolizado.

Vamos denotar π_j como o lucro das firmas no estágio 2 quando J firmas entram. Veja que nesse modelo simples nenhuma firma é a primeira a se mover então não há alguma empresa que possa executar algum movimento para impedir a entrada. Por simplicidade suporemos que a firma escolhe entrar no mercado quando ela é indiferente. Dada essa suposição, há um equilíbrio com J^* firmas escolhendo entrar no mercado se, e somente se:

$$\pi_{J^*} \geq K \text{ (E1)}$$

$$\pi_{J^*+1} < K \text{ (E2)}$$

A equação (E1) mostra que a firma escolherá entrar se a decisão de entrada a deixaria em uma situação equivalente a que ela não tivesse entrado. Já (E2) a firma antecipa que estaria numa condição pior dada a competição no mercado com *J+1* firmas. Tipicamente, esperamos que π_J seja decrescente em J e que $\pi_J \rightarrow 0$ e $J \rightarrow \infty$. Nesse caso, há um único inteiro $\hat{J}$ tal que $\pi_J \geq K \ \forall$ J $\leq \hat{J}$ e $\pi_J < K \ \forall \ J > \hat{J}$, então $J^* = \hat{J}$ é o único equilíbrio de número de firmas.

Exemplo. Equilíbrio de Cournot (com entrada)

Suponha que a competição do estágio 2 corresponda ao modelo de Cournot com $c(q) = cq_i$ e $p(q) = a - bq = a - b \sum\limits_{i=1}^{J} q_i$

$$\Pi_i = p(q).q_i - cq_i = aq_i - bq_i \sum_{k=2}^{J} q_k - cq_i$$

$$\Pi_i = aq_i - bq_i{}^2 - bq_i \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} q_k - cq_i$$

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial qi} = a - 2bq_i - b\sum_{k \neq j} q_k - c = 0$$

$$q_i = \frac{a - b - \sum\limits_{k \neq j}^{J} q_k - c}{2b}$$

Se $q_i = q_{i+1} = ... = q_J$ então $\sum\limits_{k \neq j}^{J} q_k = (J-1)q_i$

$$q_i = \frac{a - b\,(J-1)\,q_i - c}{2b}$$

$$2bq_i + b(J-1)q_i = a - c$$

$$bq_i + bJq_i = a - c$$

$$q_i.b(J+1) = a - c$$

$$q_i = \frac{a-c}{b(J+1)}$$

Então

$$\Pi_i = a\frac{(a-c)}{b(J+1)} - b.J\left[\frac{(a-c)}{b(J+1)}\right]^2 - c.\frac{(a-c)}{b(J+1)} = \frac{(a-c)^2}{b(J+1)} - \frac{(a-c)^2}{b(J+1)} = \frac{(a-c)^2}{b(J+1)^2}$$

$$\Pi_i = \left(\frac{a-c}{J+1}\right)^2 \frac{1}{b}$$

Note que Π_i é estritamente decrescente em J

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial J} = -2\frac{(a-c)^2}{(J+1)^3}\frac{1}{b} < 0;$$

e$\Pi_i \to 0$ quando $J \to \infty$.

Também $q \to \frac{a-c}{b}$ quando $J \to \infty$, isto é a quantidade do mercado competitivo. Lembre que $p(q) = a - bq$ e c$(q) = cq$.

$$p(q) = CMg \to a - bq = c \to q = \frac{a-c}{b}$$

Exemplo. Equilíbrio com livre entrada modelo de Bertrand

Suponha que no estágio 2 o jogo toma a forma de Bertrand.

Novamente $c(q) - cq$ e $p(q) = a - bq$ com $a >$c $\geq$0 e $b > 0$. Agora $\Pi_1 = \Pi^m$ o nível de lucro do monopólio e $\Pi_J = 0 \; \forall J \geq 2$. Assim, assumindo $\Pi^m > K$ o ENPS deve ter apenas *J=1* e os resultados são equivalentes ao modelo de monopólio.

5.4 Reversão de Nash e o Teorema Popular

Primeiramente desenvolve-se uma versão formal do *Folk Theorem* (Teorema Popular) para jogos infinitamente repetidos. De modo simples um jogo infinitamente repetido consiste em uma sequência infinita de repetições de um jogo simultâneo de 1 período conhecido como *stage game* (jogo de cada fase). Suponhamos que há apenas 2 jogadores.

Cada jogador i possui um conjunto compacto de estratégias S_i, $q_i \in S_i$ é uma ação possível para cada jogador. Denote $q = (q_1, q_2)$ e $S = S_1 \times S_2$. A função de recompensa do jogador é $\pi_i(q_i, q_j)$. Restringiremos nossa atenção a estratégias puras. É conveniente definirmos que a melhor resposta do jogador é dado que seu rival joga q_j por $\hat{\pi}_i(q_j) = \underset{q \in Si}{Max} \pi_i(q_i, q_j)$. Assumimos que cada estágio do jogo possui apenas um único equilíbrio de Nash em estratégias puras $q^* = (q_1^*, q_2^*)$.

No jogo infinitamente repetido, as ações são tomadas e os pagamentos (ganhos) são recebidos no início de cada período. Os pagamentos são descontados por uma taxa $\delta <$ 1.Os jogadores observam as ações dos outros jogadores em cada período e possuem *perfect recall* (memória perfeita).

Nesse tipo de jogo uma estratégia pura para o jogador i é uma sequência de funções $\{s_{it}(\cdot)\}_{t=1}^{\infty}$ que mapeia a história, ou seja, a escolha das ações anteriores, a escolha do jogador no período de tempo t, $s_{it}(H_{t-1}) \in S_i$. O conjunto de todas as estratégias puras do jogador i é denotado por $\sum_i$ e $s = (s_1, s_2) \in \sum_1 \times \sum_2$ é um perfil de estratégias puras para os dois jogadores.

Qualquer perfil de estratégias (puras) induz a um caminho de resultado *Q(s)* uma sequência infinita de ações $\{q_t = (q_{1t}, q_{2t})\}_{t=1}^{\infty}$ que será jogada quando os jogadores seguem as estratégias s_1 e s_2. O *payoff* descontado do caminho de resultado Q é dado por $v_i(Q, t) = \sum_{t=0}^{\infty} = \delta^t \pi_i(q_{1+\tau})$.

Também definimos o pagamento médio para o caminho de resultado Q como $(1 - \delta)v_i(Q)$; Essa é a recompensa por período se o jogo infinitamente repetido desse ao jogador recompensa $v_i(Q)$. Finalmente, pode ser útil definirmos o *payoff* descontado "descontinuado" do caminho de resultado Q para algum período a frente descontado pelo período t por $v_i(Q, t) = \sum_{t=0}^{\infty} = \delta^t \pi_i(q_{t+\tau})$.

As estratégias para cada jogador i jogadas nesses estágio do jogo constituem um *EN* q_i^* em cada período independentemente da história prévia. Essas estratégias constituem um ENPS $\forall \; \delta < 1$.

Definição 1. Um perfil de estratégias $s = (s_1, s_2)$ em um jogo infinitamente repetido é uma reversão de Nash se cada estratégia exige jogar algum Q até que alguém desiste e joga EN $q^* = (q_1^*, q_2^*)$ depois disso.

Lema. *Um perfil de estratégia de reversão de Nash que exige jogar o caminho de resultado* $Q = \{q_{1t}, q_{2t}\}_{t=1}^{\infty}$ *previamente a qualquer desvio é um ENPS se, e somente se:*

$$\hat{\pi}_i(q_{jt}) + \frac{\delta}{1-\delta}\pi_i(q_1^*, q_2^*) \leq v_i(Q,t) \text{ (AA1).}$$

Demonstração. Como discutido anteriormente, a jogada prescrita após qualquer desvio é um equilíbrio de Nash na continuação do subjogo. Devemos apenas testar se estas estratégias induzem a um EN no subjogo começando em qualquer período t quando não tiver ocorrido nenhum desvio anterior. Note primeiro que se para algum i e t a condição (AA1) não é satisfeita, então não teremos um ENPS. Ou seja, se nenhum desvio ocorreu anteriormente ao período t, então na continuação do subjogo o jogador i não encontraria (atingiria) o caminho Q a sua melhor resposta ao que j está fazendo (em particular, um desvio pelo jogador i no período t que maximiza o *payoff* dele no período, seguindo por jogar q_i^* depois disso, seria superior para ele). Em outra direção suponha que a condição (AA1) é satisfeita para todo i e t mas não temos um ENPS. Então deve haver algum t em que algum jogador i acredita que vale a pena desviar do caminho Q se nenhum desvio prévio ocorreu. Agora, quando seu oponente segue uma reversão de estratégia no sentindo de Nash, o desvio ótimo do jogador i irá envolver desviar de um modo que seu *payoff* no período A seja maximizado e então jogar q_i^* depois disso. Mas seu payoff do desvio é exatamente o lado esquerdo da condição (AA1) e esse desvio não eleva o seu *payoff*. A condição (AA1) pode ser escrita para enfatizar o trade-off de um período entre perdas e ganhos futuros:

$$\widetilde{\pi_i}(q_{jt}) - \pi_i(q_{1t}, q_{2t}) \leq \delta\left[v_i(Q, t+1) - \frac{\pi_i(q_1^*, q_2^*)}{1-\delta}\right] \text{ (AA2)}$$

Para todo t e todo *i=1,2* o lado esquerdo da condição (AA2) dá ao jogador i o ganho de 1 período de desviar no período t, e o lado direito dá ao jogador i as perdas futuras descontadas do equilíbrio de reversão de Nash começando no período *t+1*. Para resultados estacionários (caminho) um conjunto infinito de desigualdades deve ser checado na condição (AA2) reduz somente a duas: a repetição infinita de (q_1, q_2) é um caminho de resultado (produto) de um ENPS que usa a reversão de Nash se e somente se, para *i=1* e *2*.

$$\hat{\pi}_i(q_j) - \pi_i(q_1, q_2) \leq \frac{\delta}{1-\delta}\left[\pi_i\left(q_1, q_2\right) - \pi_i^*\left(q_1^*, q_2^*\right)\right] \text{ (AA3)}$$

□

Proposição. ***AA1:*** *Seja um jogo infinitamente repetido com* $\delta > 0$ *e* $S_i \subset R$ *para i =1,2. Suponha também que* $\pi_i(q)$ *é diferenciável a* $q^* = (q_1^*, q_2^*)$*, com* $\partial\pi_i(q_i^*, q_j^*), \partial q_j \neq 0$

para $j \neq i$ e $i = 1, 2$. Então há algum $q' = (q_1^{'}, q_2^{'})$ com $[\pi_1(q'), \pi_2(q')] \gg [\pi_1(q^*), \pi_2(q^*)]$ cuja repetição infinita é o caminho resultado de um ENPS que usa reversão de Nash.

Demonstração. A $q = (q_1^*, q_2^*)$ a condição (AA3) é satisfeita com igualdade. Considere uma mudança em q (diferencial), (dq_1,dq_2) tal que:

$$\left[\partial\pi_i\left(q_i^*, q_j^*\right)/\partial q_j\right] dq_j > 0 \; \forall i = 1, 2$$

.

Uma mudança diferencial nos lucros da firma i podem ser vistas como:

$$d\pi_i\left(q_i^*, q_j^*\right) = \frac{\partial\pi_i\left(q_i^*, q_j^*\right)}{\partial q_i} + \frac{\partial\pi_i\left(q_i^*, q_j^*\right) dq_j}{\partial q_j}$$

$$= \frac{\partial\pi_i\left(q_i^*, q_j^*\right) dq_j}{\partial q_i} \text{ (AA4)}$$

Como q_i^* é a melhor resposta a q_j^*. Então,

$$d\pi_i\left(q_i^*, q_j^*\right) > 0\text{(AA5)}$$

□

Por outro lado, o teorema do envelope nos diz que para qualquer q_j

$$d\hat{\pi}_i(q_j) = \frac{\partial\pi_i(b_i(q_j), q_j) dq_j}{\partial q_j}$$

onde $b_i(\cdot)$ é a melhor resposta a q_j no estágio do jogo. Assim,

$$\hat{d\pi_i}\left(q_j^*\right) = \frac{\partial\pi_i\left(q_{i,}^* q_j^*\right) dq_j}{\partial q_j} \text{ (AA6)}$$

Conjuntamente, (AA4) e (AA6) implicam que, em primeira ordem, o valor do lado esquerdo da condição (AA3) é não afetado por essa mudança. Contudo (AA 5) implica que o lado direito de (AA3), a primeira ordem, aumenta. Assim, para uma mudança pequena suficiente (Δq_1,Δq_2) na direção (dq_1, dq_2) a infinita repetição de $((q_1 + \Delta q_1), (q_2 + \Delta q_2))$ é o caminho de resultado de um ENPS usando as estratégias de reversão de Nash e por (AA5) resulta estritamente em altos payoff descontados para os dois jogadores que a repetição infinita de $q^* = \left(q_{1,}^* q_2^*\right)$.

A proposição AA1 relata que com um conjunto de estratégias contínuas e funções de recompensa, desde que haja alguma possibilidade de melhoria conjunta nas recompensas ao redor (em torno) do EN do estágio do jogo, alguma cooperação pode ser sustentada.

Proposição 5.5. ***AA3***: *Para qualquer par de ações* $q = (q_1, q_2)$ *tal que* $\pi_i(q_1, q_2) > \pi_i(q_1^*, q_2^*)$ *para i = 1,2 existe* $\underline{\delta}$ *<1 tal que* $\forall\ \delta > \underline{\delta}$ *a repetição infinita de* $q = (q_1, q_2)$ *é o caminho de resultado de um ENPS usando estratégias de reversão de NASH.*

5.4.1 Punições mais severas e o *Folk Theorem* (teorema popular)

É claramente intuitivo que, para um dado nível de $\delta < 1$, a punição mais severa pode ser uma ameaça crível a qualquer desvio ($\delta \to 1$).

Proposição. ***AA4***: *Considere um jogo infinitamente repetido com* $\delta > 0$ *e* $\delta_i \subset R$ *para i = 1,2. Suponha também que* $\pi_i(q)$ *é diferenciável a* $q^* = (q_1^*, q_2^*)$ *com* $\partial\pi_i(q_i^*, q_j^*)/\partial q_j \neq 0$ *para* $j \neq i$ *e i = 1,2 e que* $\pi_i(q_1^*, q_2^*) > \pi_i = Minq_j[Maxq_i\pi_i(q_i, q_j)]$ *para i=1,2. Então existe algum ENPS com payoffs descontados para os dois jogadores* ($v_1^{\prime}$,$v_2^{\prime}$) *tal que (1-*δ*)*$v_i^{\prime} < \pi_i(q_1^*, q_2^*)$ *para i=1,2.*

Agora veremos a proposição que é conhecida como o teorema popular:

Proposição. ***The Folk Theorem (O Teorema Popular)***

Para qualquer par de *payoffs* racionais e individuais $(\pi_1, \pi_2) \gg \left(\underline{\pi_1}, \underline{\pi_2}\right)$, ambos atingíveis, existe $\underline{\delta} < 1$ tal que para todo $\delta > \underline{\delta}$, (π_1, π_2) os payoffs médios são ENPS (são "elevados" a essa condição).

Exemplo. AA1: Sustentando um *payoff* média de zero no jogo infinitamente repetido de Cournot.

Seja cada estágio do jogo um duopólio de Cournot com a função de custo $c(q)$, $c > 0$ e $p(\cdot)$ contínua tal que $p(x) \to 0$ quando $x \to \infty$. É conveniente escrevermos que quando as firmas escolhem a quantidade q $\pi(q) = [p(2q) - c]\, q$ e a melhor resposta da firma i a essa rival j é escolher a quantidade $\hat{\pi}(q)$.

Podemos fazer (considerar) o conjunto de quantidade como $[0, \overline{q}]$ tal que:

$$\pi(\overline{q}) + \left[\frac{\delta}{1-\delta}\left(\underset{q}{Max}\pi(q)\right)\right] = 0$$

Nenhuma firma atribui sua quantidade em um nível mais alto que $\overline{q}$, porque seria melhor escolher uma quantidade zero para sempre. Note que $\pi_j = 0$ para *j=1,2*. Se a rival da firma j escolhe uma quantidade pelo menos tão grande quanto a quantidade competitiva q_c satisfazendo $(p(q_c)) = c$, então a melhor resposta de j a essa ação é produzir nada e ganhar zero, e a firma j nunca pode ser forçada a receber um pagamento (ou pagar) negativo.

Considere que as estratégias para os jogadores tomam a seguinte forma:

1. Ambas firmas jogam a quantidade $\widetilde{q}$ no período 1 seguidas pela quantidade de monopólio q^m, em cada período $t > 1$ desde que ninguém desvie a quantidade de equilíbrio $\widetilde{q}$ satisfaz:
$$\pi\left(\widetilde{q}\right)+\frac{\delta}{1-\delta}\pi\left(q^m\right)=0 \text{ (AA7)}$$

2. Se alguém desvia ao jogar outro q que não $\widetilde{q}$, o resultado descrito em *(1)* é reiniciado.

3. Se alguém desvia, jogando um $q \neq q^m$ então a reversão de Nash ocorre.

4. Pela proposição AA3 sabemos que para algum $\underline{\delta} < 1$ podemos sustentar a repetição infinita de q^m pela reversão de Nash $\forall\ \delta >\underline{\delta}$. Assim para $\delta >\underline{\delta}$ nenhuma empresa irá desviar das estratégias acima quando q^m supostamente pode ser jogada.

Elas desviariam quando $\widetilde{q}$ supostamente poderia ser jogado?

Considere o payoff da firma j ao desviar de $\widetilde{q}$ por um único período. A firma j ganha $\hat{\pi}\left(q\right)+\delta\left(0\right)$ porque ela joga a melhor resposta quando desvia i então o caminho original é reiniciado o desvio não melhora a recompensa da firma j se $\hat{\pi}\left(\widetilde{q}\right)=0$. Examinando AA7 vemos que quando $\delta \rightarrow 1$, $\pi\left(\widetilde{q}\right)$ deve ser muito negativo ($\pi\left(\widetilde{q}\right) \rightarrow -\infty$) para que a condição seja satisfeita e em particular existe $\delta_e < 1$ tal que $\widetilde{q} > q_c\ \forall\ \delta > \delta_c$.Assim $\delta > Max\left\{\delta_c, \underline{\delta}\right\}$ estas estratégias constituem um *ENPS* que dá a ambas as firmas um *payoff* médio de zero.

6 Seleção Adversa, Sinalização e Screening

Um dos pressupostos implícitos nos teoremas do bem estar é que as características de todos os bens são observáveis a todos os participantes do mercado. Contudo, esse tipo de informação é frequentemente assimétrica entre os participantes, isto é, alguns possuem mais informação do que os outros. Alguns exemplos:

i) Quando uma empresa contrata um trabalhador, a firma sabe menos do que sobre a habilidade inata do funcionário;

ii) Uma companhia de seguros automobilísticos sabe menos do que um indivíduo sobre a sua habilidade de dirigir;

iii) No mercado de carros usados, o vendedor do carro possui uma informação muito melhor sobre a qualidade do seu automóvel do que o comprador.

Estudaremos como os mercados se comportam na presença de assimetria de informação.

6.1 Informação Assimétrica e Seleção Adversa

Apresentaremos um modelo de mercado de trabalho baseado no antigo seminal de Akerlof (1970) sobre o mercado de carros usados o qual o autor definiu um automóvel de má qualidade como limão. Em nosso modelo há muitas firmas idênticas que podem contratar trabalhadores. Cada uma produz o mesmo produto usando a mesma tecnologia que apresenta retornos de escala constantes. Para a produção de tal bem, o fator trabalho é o único *input*. As empresas são neutras ao risco, e tem como objetivo a maximização dos seus lucros esperados e as companhias são consideradas como tomadoras de preços. Por simplicidade, tomaremos o preço do produto das empresas igual a 1.

Os trabalhadores se diferenciam pelo número de unidades produzidas caso ele seja contratado por uma firma. A produtividade do trabalhador pode ser definida por θ. Seja $[\underline{\theta}, \bar{\theta}] \subset R$ o conjunto dos possíveis níveis de produtividade dos trabalhadores, sendo que $0 \leq \underline{\theta} \leq \bar{\theta} < \infty$. A proporção de trabalhadores com a produtividade θ é dada pela função distribuição $F(\theta)$.

Assumimos que $F(\cdot)$ é não degenerada, tal que há pelo menos dois tipos de trabalhadores. O número total de trabalhadores é N. Os trabalhadores buscam maximizar o montante recebido com o seu trabalho. Um trabalhador escolhe trabalhar em uma empresa ou em casa e supomos que o trabalhador do tipo θ pode receber $r(\theta)$ é o custo de oportunidade de um trabalhador do tipo θ aceitar o emprego.

A título ilustrativo considere um equilíbrio em que a produtividade de cada trabalhador e publicamente observável. Por que o trabalho de cada tipo diferente de trabalhador é um bem distinto então há um equilíbrio distinto de salário $w^*(\theta)$ para cada tipo θ. Dado que os retornos de escala das firmas são constantes num equilíbrio competitivo temos que

$w^*(\theta) = \theta \; \forall \; \theta$ e que os trabalhadores aceitam o emprego se $\{\theta : r(\theta) \leq \theta\}$.

Investigaremos a natureza do equilíbrio quando o nível de produtividade dos trabalhadores não pode ser observado pelas firmas. Quando o tipo dos trabalhadores não é observável, o salário dos mesmos deve ser independente do seu tipo, e então teremos uma única taxa de salário w para todos os trabalhadores. Considere a oferta de trabalho como função do salário.

O trabalhador do tipo θ desejará trabalhar para uma empresa se e somente se $r\,(\theta) \leq w$. Assim, o conjunto de tipos de trabalhadores que aceitam o emprego ao salário w é:

$$\Theta(w) = \{\theta : r(\theta) \leq w\} \;\; \text{(B2)}$$

Considere a demanda por trabalho como uma função de W se a firma acredita que a produtividade média do trabalhador que aceita o emprego é μ, então sua demanda de trabalho é dada por:

$$z(w) = \begin{cases} 0, \; \text{se } u < W \\ [0, \infty]\,, \; \text{se } u = W \\ \infty, \; \text{se } u > W \end{cases} \;\; \text{(B3)}$$

Agora, se os tipos de trabalhadores definidos no conjunto Θ^* estão aceitando ofertas em um equilíbrio competitivo e as crenças das firmas refletem a produtividade média correta dos trabalhadores contratados, nesse equilíbrio devemos ter $\mu = E\,[\theta \mid \theta \in \Theta^*]$. Como (B3) implica que a demanda por trabalho pode ser igual a sua oferta em um equilíbrio com um nível positivo de emprego se, e somente se $w = E\,[\theta \mid \theta \in \Theta^*]$

Isso leva a noção de equilíbrio competitivo apresentado na definição B1:

Definição. (B.1) No mercado de trabalho competitivo com níveis de produtividade dos trabalhadores sendo não observáveis, um equilíbrio competitivo consiste na taxa de salário w^* e num conjunto Θ^* de tipos de trabalhadores que aceitam a oferta de emprego tal que:

$$\Theta^* = \{\theta : r(\theta) \leq w^*\} \, \text{(B4)}$$

e

$$w^* = E\,[\theta \mid \theta \in \Theta^*] \, \text{(B5)}$$

A condição B5 envolve a expectativa racional por parte das empresas.

O equilíbrio definido acima não é Pareto eficiente. Considere o caso que $r(\theta) = r \; \forall \theta$ e $F(r) \in]0, 1[$, tal que há trabalhadores com $\theta > r$ aceitassem o emprego e aqueles com $\theta < r$ não. Considere o equilíbrio competitivo quando $r(\theta) = r \forall \theta$, o conjunto de trabalhadores que desejariam aceitar o emprego a um dado salário $\Theta\,(w)$ seria $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$ se $w \geq r$ ou $\emptyset$ se $(w < r)$. Então:

$$E\,[\theta \mid \theta \in \Theta^*\,(w)] = E[\theta] \, \forall w$$

e o salário de equilíbrio deve ser $w^* = E[\theta]$. Se $E[\theta] \geq r$ então todos os trabalhadores aceitam o emprego, já se $E[\theta] < r$ nenhum deles faz isso. Esse equilíbrio depende da distribuição dos tipos dos trabalhadores.

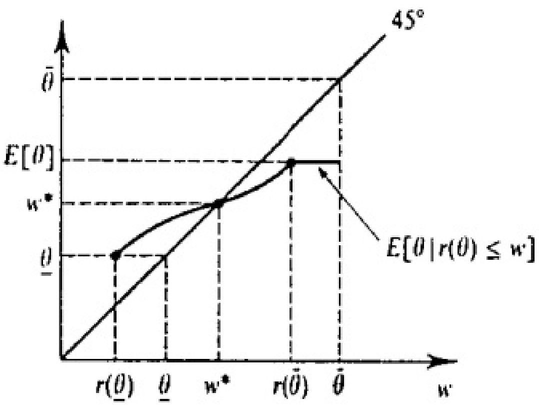
Quando $r(\theta)$ varia com θ há uma grande quebra na eficiência. Nesse caso a produtividade média dos trabalhadores que aceitariam o emprego depende do salário, e o fenômeno conhecido como seleção adversa pode surgir.

Definição. (*Seleção Adversa*) Esse fenômeno ocorre quando as decisões de mercado de um indivíduo informado dependem de sua características não observáveis de tal modo que afeta adversamente agentes não informados nesse mesmo mercado.

No contexto que estamos estudando, a seleção adversa se origina quando apenas os trabalhadores menos capazes estão dispostos a aceitar a oferta de emprego proposta pela empresa a qualquer salário dado. Suponha que $r(\theta) \leq \theta \forall \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$ e que $r(\cdot)$ é uma função estritamente crescente. Assumimos que $F(\cdot)$ possui uma função densidade associada $f(\cdot)$, com $f(\theta) > 0 \ \forall \theta \in [\underline{\theta}, \bar{\theta}]$. Isso garante que a produtividade média dos trabalhadores que estão dispostos a aceitarem o emprego seja $E[\theta \mid r(\theta) \leq w]$ varia continuamente com a taxa de salário m $w \in [r(\underline{\theta}), \infty]$. Para determinarmos o salário de equilíbrio competitivo deve-se satisfazer:

$$w^* = E[\theta \mid r(\theta) \leq w^*]$$

Figura 12: Equilíbrio Competitivo com Seleção Adversa



No gráfico estabelecemos os valores de $E[\theta \mid r(\theta) \leq w^*]$ como função de w. Essa função dá o valor esperado de θ para os trabalhadores que escolhem trabalhar numa firma quando o salário é w. A função é crescente para salários entre $r(\underline{\theta})$ e $r(\bar{\theta})$ e possui valor máximo $E[\theta]$ para $w \geq r(\bar{\theta})$. O valor de equilíbrio w^* expressa os trabalhadores mais eficientes.

Sabemos que $E[\theta] < r(\overline{\theta})$, e se houverem muitos trabalhadores de baixa produtividade, isto faz com que $E[\theta]$ caia. A queda de $E[\theta]$ expulsaria os trabalhadores de produtividade "média" (algo entre $\underline{\theta}$ e $\overline{\theta}$) e o processo se repetiria até que nenhum trabalhador fosse contratado pelas firmas.

Exemplo. B.1a:

Seja $r(\theta) = \alpha\theta$,$0 < \alpha < 1$ e $\theta \sim U[0,1]$. Defina $\Theta(w) = \{\theta : r(\theta) \leq w\} = \left\{\theta : \theta \leq \frac{w}{\alpha}\right\}$. Assim:

$$\Theta(w) = \begin{cases} [0,1], \text{ se } w \geq \alpha \\ [0, w/\alpha], \text{ se } \alpha > w \geq 0 \\ \emptyset, \text{ se } 0 > w \end{cases}$$

e usando o fato que a distribuição de θ é uniforme temos que:

$$E[\theta | \theta \in \Theta(w)] = \begin{cases} 0.5, \text{ se } w \geq \alpha \\ w/2\alpha, \text{ se } \alpha > w \geq 0 \\ 0.5, \text{ se } 0 > w \end{cases}$$

Vamos analisar os três casos:

i) $w^* = 0.5$ e $\Theta^* = [0,1]$. Esse caso ocorre se: $0.5 \geq \alpha > 0$.

ii) Há duas situações possíveis:

$w^* = \frac{w^*}{2\alpha}$ e $\Theta^* = \left[0, \frac{w^*}{\alpha}\right]$. Esse caso ocorre se $\alpha = 0.5$. Note que todo o $w^* \in [0, 0.5)$ é consistente com o equilíbrio.

$w^* = 0$ e $\Theta^* = \{0\}$. Note que todo $\alpha \in (0,1)$ é consistente com esse equilíbrio. No entanto, como há apenas um conjunto de medida nula que se emprega, vamos desconsiderar essa possibilidade.

a) Observamos que há apenas um equilíbrio para $\alpha \in (0, 0.5]$. Logo se $\alpha > 0.5$ não há equilíbrio.

b) Se $\alpha = 0.5$ há infinitos equilíbrios. Para qualquer $w^* \in [0, 0.5]$ o equilíbrio será $(w^*, [0, w^*/\alpha]) = (w^*, [0, 2w^*])$. O equilíbrio que emprega o maior número de pessoas é $(0.5, [0,1])$.

c) Se $\alpha < 0.5$, há um único equilíbrio competitivo, descrito no caso $(0.5, [0,1])$.

6.2 Sinalização

O mecanismo para diferenciar os trabalhadores de alta habilidade dos de baixa é que esses trabalhadores poderiam informar (ou demonstrar) o seu nível de produtividade pelo nível educacional. Nesse sentido, embora o sinal possa não ser um indicador perfeito, presume-se que é menos custoso para um trabalhador de alta produtividade se educar mais. Esse custo não é medido diretamente por unidades monetárias, mas sim, pelo nível de esforço empregado pelo trabalhador.

Por simplicidade consideraremos que há apenas dois tipos de trabalhadores, aqueles que possuem produtividade baixa (θ_L) e os que possuem produtividade alta (θ_H), onde $\theta_H > \theta_L$ e $\lambda = Prob(\theta = \theta_H) \in]0, 1[$. Outro argumento simplificador e que não há correlação entre o nível educacional e produtividade. Isto é, estudar mais não implica tornar-se mais produtivo, essa habilidade é "natural" do indivíduo. O custo para a obtenção da educação é denotado por $\boldsymbol{e}$ para o trabalhador do tipo θ. Esse custo pode ser considerado como monetário, ou mesmo psicológico.

A função de custos é C^2 definida $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sendo $c(e, \theta)$ e possuindo as seguintes características:

$$c(0, \theta) = 0, \frac{\partial c}{\partial e} > 0, \frac{\partial^2 c^2}{(\partial e)^2} > 0; \frac{\partial c}{\partial \theta} < 0 \forall i > 0;$$

$$\frac{\partial c}{\partial e \partial \theta} < 0;$$

$$\frac{\partial c}{\partial e} = c_e$$

Assumimos que:

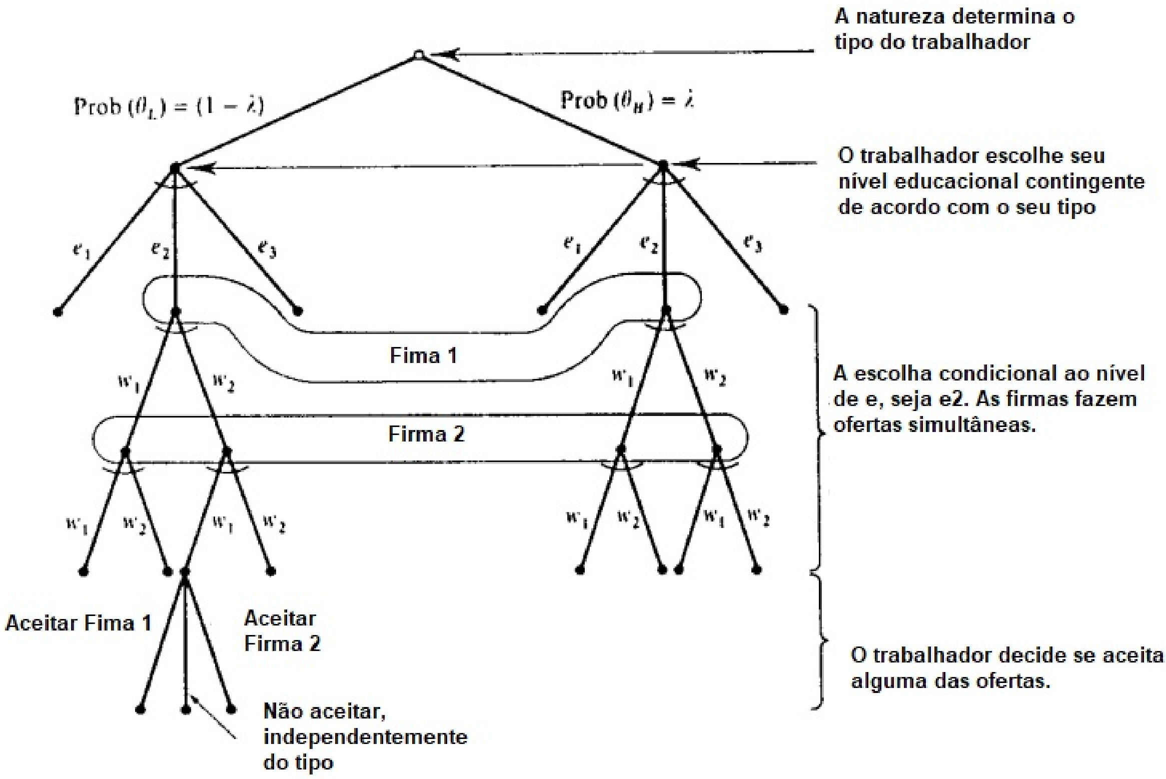
$$c_e(e, \theta_L) > c_e(e, \theta_H)$$

Seja $u\left(w, e(\theta)\right)$ definida como $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $u\left(w, e(\theta)\right) = w - c(e, \theta)$.

Na análise a seguir veremos que a educação pode servir como um sinal para a produtividade não observada. Em particular, o equilíbrio emergirá com trabalhadores mais produtivos escolhendo um nível educacional mais elevado. Também as firmas irão corretamente tomar as diferenças na educação como sinal de habilidade. A sinalização leva a um nível de bem estar mais elevado do que aquele sem sinalização, contudo ainda há um custo para os trabalhadores que não seria necessário se não houvesse o problema informacional.

Nos concentraremos no caso que $r(\theta_H) = r(\theta_L) = 0$,ou seja , que os trabalhadores não escolhem trabalhar em casa.

Figura 13: Forma extensiva do Jogo de Sinalização



A que empregaremos o conceito de ENPB com uma condição adicional. Exigiremos que as crenças das firmas tenham a seguinte propriedade para cada possível escolha de e. Há um número $\mu(e) \in [0, 1]$ tal que:

(1) A crença da Firma 1 é que θ_H é o tipo de trabalhador de alta produtividade, após observar o seu esforço e é $\mu(e)$.

(2) Após o trabalhador ter escolhido o seu nível de esforço, a crença da Firma 2 que o trabalhador seja de baixa produtividade (θ_L), após ver a sua escolha de e, é $\mu(e)\sigma_1^*(w|e)$. Em que $\sigma_1^*(w|e)$ é a probabilidade de equilíbrio da escolha de salário da Firma 1 após observar o nível educacional $\boldsymbol{e}$. A Firma 2 considera a escolha da Fima 1.

Definição. Um conjunto de estratégias e uma função de crenças $\mu(e) \in [0, 1]$ dado probabilidade comum das firmas avaliarem que o trabalhador é de alta habilidade após observar o nível de educação e é um ENPB se:

i) A estratégia do trabalhador é ótima dadas as estratégias das firmas;

ii) A função de crenças $\mu(e)$ é derivada das estratégias dos trabalhadores usando a regra de Bayes quando possível;

iii) As ofertas de salários das firmas seguindo cada escolha de e constituem um EN no jogo simultâneo da oferta de salário em que a probabilidade que o trabalhador seja de alta produtividade é $\mu(e)$.

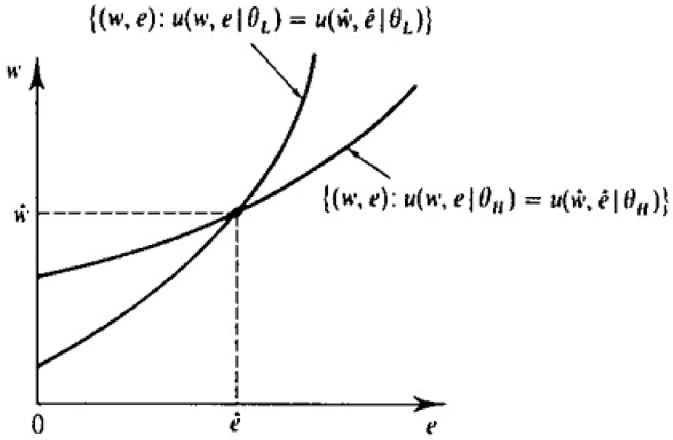
Começaremos a análise pelo fim do jogo. Para algum nível educacional e, as firmas atribuem a probabilidade $\mu(e)$ que o trabalhador é do tipo θ_H. Se isso é verdade a produtividade esperada é de $\mu(e)\theta_H + (1 - \mu(e))\theta_L$. Num jogo simultâneo de oferta de salários, o *Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras* para as firmas é oferecer aos trabalhadores um salário exatamente igual a sua produtividade esperada.

Então, qualquer ENPB em estratégias puras:

$$w = \mu(e)\theta_H + (1 - \mu(e))\theta_L$$

Sabendo desse fato, a escolha do trabalhador do seu nível de educação contingente ao seu tipo passa pelas sua preferências.

Figura 14: Curvas de Indiferença para os Trabalhadores de Alta e Baixa Habilidade



Note que a curva de indiferença do trabalhador do tipo θ_H é menos inclinada.

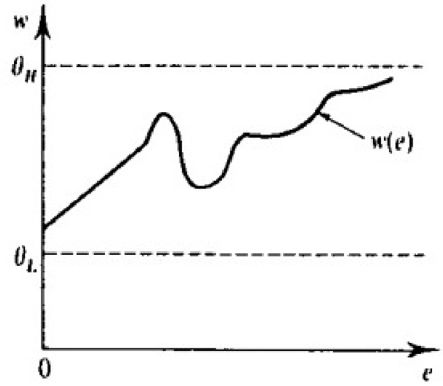
Definição. (*Propriedade de Cruzamento Único*) A taxa marginal de substituição entre salários e educação a qualquer nível *(w,e)* é $(\frac{\partial w}{\partial e})\bar{u} = c_e(e, \theta)$ que é decrescente em θ já que $c_{e\theta}(e, \theta) < 0$.

Nota: *Veja o teorema de função implícita no apêndice M3.*

$$\frac{\partial w}{\partial e} = -\frac{\partial u/\partial e}{\partial u/\partial w}$$

Podemos fazer o gráfico para as ofertas de salário $w(e) = \theta_L + \mu(e)(\theta_H - \theta_L)$

Figura 15: Curva de Ofertas de Salários



6.2.1 Equilíbrio Separador

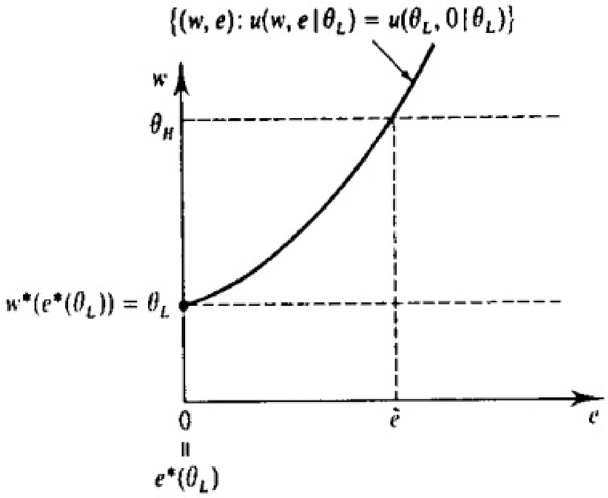
Lema. *(ES1) Em qualquer equilíbrio de Nash Bayesiano separador* $w^* \left(e^*(\theta_H)\right) = \theta_H$ *e* $w^*(e^*(\theta_L)) = \theta_L$*. Isto é, cada tipo de trabalhador recebe um salário que está de acordo com o seu nível de produtividade.*

Demonstração. Se qualquer *ENB* o caminho de equilíbrio deve ser derivado da regra de Bayes. Isso implica que ao ver o nível educacional $e^*(\theta_L)$ as firmas devem atribuir probabilidade 1 para o trabalhador ser do tipo θ_L. Do mesmo modo, usando o nível educacional $e^* \left(\theta_H\right)$ as firmas devem atribuir probabilidade 1 ao trabalhador do tipo θ_H. Os salários resultantes são exatamente θ_L e θ_H respectivamente. □

Lema. *(ES2) Em qualquer ENPB separador* $e^*(\theta_L) = 0$*, ou seja, o trabalhador de baixa produtividade opta por não educar-se.*

Demonstração. (contradição) Suponha que o trabalhador do tipo θ_L escolha um nível de educação estritamente positivo $\hat{e} > 0$. Fazendo isso pelo ***Lema ES1*** o trabalhador receberia um salário igual a θ_L. Contudo, o trabalhador receberia um salário θ_L se ele escolhesse $e = 0$. Fazendo isso, o custo de educação seria poupado e o trabalhador estaria numa situação estritamente melhor, o que é uma contradição já que seu nível de educação de equilíbrio $\hat{e} > 0$. □

Figura 16: Equilíbrio Separador: Trabalhador do Tipo L



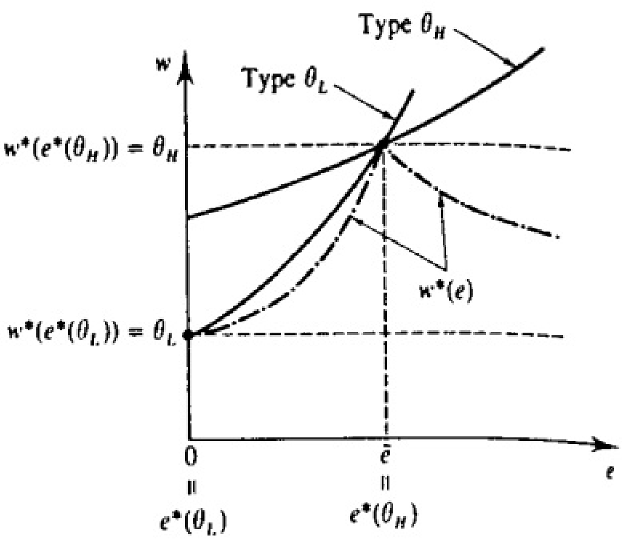
Seja $e^*(\theta_H) = \widetilde{e}$ e considere $e^*(\theta_L) = 0$. As crenças das firmas seguindo a escolha educacional e são:

$$\mu^*(e) = (w^*(e) - \theta_L)/(\theta_H - \theta_L)$$

.

Note que $\mu^*(e) \in [0,1] \; \forall \; e \geq 0$ como $w^*(e) = [\theta_L, \theta_H]$. Para verificarmos que isso é um ENPB somos livres para permitir que as crenças oscilem quando $e \in]0, \widetilde{e}[$. Por outro lado, devemos ter $\mu^*(0) = 0$ e $\mu^*(\widetilde{e}) = 1$. As ofertas de salário que refletem essas crenças são $w^*(0) = \theta_L$ e $w^*(\widetilde{e}) = \theta_H$.

Figura 17: Equilíbrio Separador: O tipo do trabalhador é inferido de acordo com seu nível educacional



Vimos que as estratégias $[e^*(\theta), w^*(e)]$ e as crenças associadas a elas constituem um ENPB. É importante destacarmos que há outro(s) equilíbrio(s) separador(es). Suponha que o trabalhador é certamente de alta produtividade se $e \geqq \tilde{e}$ e de baixa se $e \leqq \tilde{e}$.Os salários resultantes seriam $w^*(e) = \theta_H$ se $e \geqq \tilde{e}$ e $w^*(e) = \theta_L$ se $e \leqq \tilde{e}$.

Algumas considerações:

- Os trabalhadores θ_L "ficam piores" em pior situação sempre que sinalizar é possível. Note que $E[\theta] > \theta_L$.
- Para os trabalhadores θ_H temos que:
  - *(i)* Sinalizar é melhor se a proporção de trabalhadores θ_H e a fração λ não tendem a 1.
  - *(ii)* No equilíbrio separador se um trabalhador do tipo θ_H não incorre em gastos com educação ele é considerado como θ_L ganhando um salário θ_L. Se não houvesse sinalização ele ganharia $E[\theta] > \theta_L$.

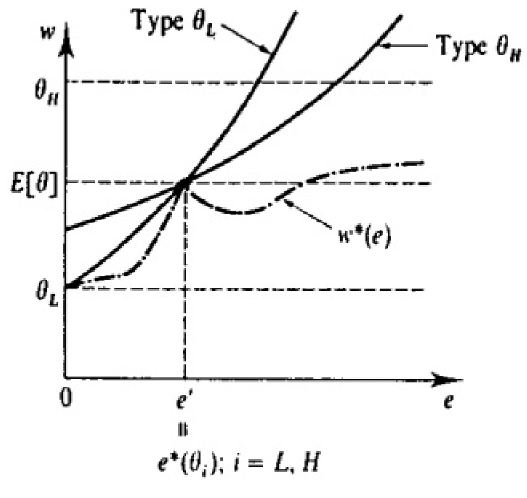
6.2.2 Equilíbrio Agregador

Considere o equilíbrio agregador em que os dois tipos escolhem o mesmo nível de educação $e^*(\theta_L) = e^*(\theta_H) = e^*$.Como as crenças das firmas devem estar corretamente derivados das estratégias de equilíbrio da regra de Bayes quando possível, então suas crenças quando elas observam o nível de educação e^* deve atribuir a probabilidade λ ao trabalhador θ_H.

Em qualquer equilíbrio agregador devemos ter:

$$w^*(e^*) = \lambda\theta_H + (1 - \lambda)\theta_L = E[\theta]$$

Figura 18: Equilíbrio Agregador



Exemplo. Considere o modelo de sinalização exposto acima. Ainda, considere que há dois tipos de agentes $\theta_H = 2$ e $\theta_L = 1$. Suponha que o custo de educação é dado por $c(e,\theta) = \frac{e^2}{\theta}$. A proporção de agentes do tipo θ_H é $\lambda \in (0,1)$.

1. Verificaremos as condições da single-crossing property;
2. Determinaremos os níveis educacionais que permitem um equilíbrio agregador. Além disso, verificaremos qual desses equilíbrios domina no sentido de Pareto os demais;
3. Confirmaremos que no intervalo $e \in [\tilde{e}, e_1]$ existe um equilíbrio separador com o nível educacional $\boldsymbol{e}$ para o tipo alto;

1. Verificaremos a propriedade de cruzamento único:

$c\,(0,\theta) = 0$,$c_e\,(e,\theta) = \frac{2e}{\theta} > 0\,\forall\, e > 0$, $c_{ee}\,(e,\theta) = \frac{2}{\theta} > 0$, $c_\theta\,(e,\theta) = \frac{-e^2}{\theta^2} < 0\,\forall\, e > 0$ e $c_{e\theta}\,(e,\theta) = \frac{-2e^2}{\theta^2} < 0\,\forall\, e > 0$. A condição $c_{e\theta}\,(e,\theta) < 0\,\forall\, e > 0$ gera a propriedade de cruzamento único. Lembre que $u\,(w, e|\theta) = w - c\,(e,\theta)$. Tome um par $(\hat{e}, \hat{w}) \in R^2_+$ no plano onde o salário é medido no eixo das ordenadas e o nível de educação no eixo das abscissas. Então usando o teorema da função implícita:

$$\frac{dw}{de}\Big|_{u(w,e|\theta)} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial e}}{\frac{\partial u}{\partial w}} = c_e\,(e,\theta) > 0\,\forall\, e > 0$$

Como $c_{e\theta}\,(e,\theta) < 0\,\forall\, e > 0$

$$\frac{dw}{de}\Big|_{u(w,e|1)=u(\hat{w},\hat{e}|1)} > \frac{dw}{de}\Big|_{u(w,e|2)=u(\hat{w},\hat{e}|2)}\ \forall\, e > 0$$

Desse modo $\forall\, e > 0$, a inclinação da curva de indiferença dos trabalhadores do tipo mais produtivo é menor do que a inclinação da curva de indiferença dos trabalhadores do tipo menos produtivo e as curvas somente se cruzam no par $(\hat{w}, \hat{e})$.

2. Níveis educacionais que determinam um equilíbrio agregador. Começaremos usando a seguinte definição:

Definição. Um Equilíbrio Bayesiano Perfeito (EBP) desse jogo de sinalização é um perfil de estratégias $(e^*\,(\cdot)\,, w^*\,(\cdot))$,com $e^* : \Theta = \{\theta_L, \theta_H\} \to E = R_+$ e uma função de crenças dada por $\mu : E \to [0,1]$ tais que:

i) $\mu\,(e)$ é a probabilidade do trabalhador com nível de educação e ter produtividade alta, obtida da estratégia do trabalhador pela regra de Bayes (atualização Bayesiana) sempre que possível (ou seja, para $e^*\,(\theta_L)$ e $e^*\,(\theta_H)$);

ii) o nível de educação $e^*\,(\cdot)$ é ótimo para cada agente, isto é:

$$e^*\,(\theta) \in arg\,\underset{e\geq 0}{max} w^*\,(e) - \frac{e^2}{\theta}$$

iii) o EN do subjogo simultâneo entre as firmas para todo nível de esforço maior que zero ou estritamente positivo é:

$$w^*(e^*) = \lambda\theta_H + (1-\lambda)\theta_L = E[\theta]$$

Em um equilíbrio agregador os dois tipos escolhem o mesmo nível de educação. Em outras palavras, $e^*(\theta_H) = e^*(\theta_L) = e^*$. Como as crenças são derivadas corretamente da estratégia do trabalhador e da Regra de Bayes (quando possível), temos que:

$$\mu(e^*) = P(\theta_H|e^*) = \frac{P(e^*|\theta_H)\,P(\theta_H)}{P(e^*|\theta_H)\,P(\theta_H) + P(e^*|\theta_L)\,P(\theta_L)} = \frac{1.P(\theta_H)}{1.P(\theta_H) + 1.P(\theta_L)} = \lambda$$

Por *(iii)* temos que $w^*(e^*) = E(\theta)$. Para outros níveis de educação $e \neq e^*$, sabemos que apenas $\theta_L \leq w(e^*) \leq \theta_H$ dado que $\mu(e) \in [0,1]$.

Lema. *Há um equilíbrio agregador com nível de educação* e^**se, e somente se:*

$$\lambda\theta_H + (1-\lambda)\theta_L - \frac{e^{*^2}}{\theta_L} \geq \theta_L \text{ (1)}$$

Demonstração. Lembre que o trabalhador do tipo baixo sempre pode escolher o nível de esforço igual a zero. Como $w^*(e^*) \geq \theta_L \forall e$, o trabalhador do tipo baixo obterá no mínimo o nível de utilidade θ_L se escolher não se educar. Por (ii), se temos um equilíbrio agregador então (1) deve valer. Suponha que (1) vale. Considere a seguinte crença e o seguinte plano salarial:

$$\mu(e) = \begin{cases} \lambda, \text{ se } e = e^* \\ 0, \text{ se } e \neq e^* \end{cases} \text{ e } w^*(e) = \begin{cases} E(\theta), \text{ se } e = e^* \\ \theta_L, \text{ se } e \neq e^* \end{cases}$$

Assim, é ótimo para o tipo baixo escolher e^*.Ainda, como

$$\lambda\theta_H + (1-\lambda)\theta_L - \frac{e^{*^2}}{\theta_H} \geq \lambda\theta_H + (1\text{-}\lambda)\theta_L\text{-}\frac{e^{*^2}}{\theta_L}$$

vemos que é e^* também é ótimo para o tipo alto. □

Usando o Lema do Exemplo 1, vemos que os níveis educacionais par aos quais existem um equilíbrio agregador devem satisfazer:

$$2\lambda + (1-\lambda) - e^{*^2} \geq 1 \Leftrightarrow e^* \in \left[0, \sqrt{\lambda}\right]$$

Em todos os equilíbrios agregadores os trabalhadores recebem o salário médio (esperado). Dessa forma, um equilíbrio em que $e^* = 0$ Pareto domina os demais.

Resolveremos o ponto 3, isto é, confirmaremos que no intervalo $e \in [\tilde{e}, e_1]$ há um equilíbrio separador com o nível educacional $\boldsymbol{e}$ para o tipo alto.

Agora os trabalhadores escolhem níveis educacionais distintos $e^*(\theta_H) \neq e^*(\theta_L)$. Usando o mesmo raciocínio do item anterior, vemos que $\mu(e^*(\theta_L)) = 0$ e $\mu(e^*(\theta_H)) = 1$, de modo que $w^*(e^*(\theta_H)) = \theta_H$ e $w^*(e^*(\theta_L)) = \theta_L$.

Lema. *Há um equilíbrio separador com níveis de educação $e^*(\theta_H)$ e $e^*(\theta_L)$ se, e somente se*

$$\theta_H - \frac{e^*(\theta_H)^2}{\theta_H} \geq \theta_L \geq \theta_H - \frac{e^*(\theta_H)^2}{\theta_L} \text{ e } e^*(\theta_L) = 0 \ (2)$$

Demonstração. Considere um equilíbrio separador qualquer. Novamente, um trabalhador do tipo baixo obterá no mínimo θ_L se escolher não se educar. Logo, por (ii)

$$\theta_L - \frac{e^*(\theta_L)^2}{\theta_L} \geq \theta_L \Longrightarrow e(\theta_L) = 0$$

Segue que $e^*(\theta_H)$ é estritamente positivo. Mas, o trabalhador do tipo alto também pode não se educar, obtendo no mínimo o nível de utilidade θ_L e a primeira desigualdade deve valor, por (ii). A segunda desigualdade segue novamente de (ii) aplicada ao tipo baixo. Suponha que (2) vale. Considere a seguinte crença e o seguinte programa salarial.

$$\mu(e) = \begin{cases} \lambda, & \text{se } e = e^* \\ 0, & \text{se } e \neq e^* \end{cases} \text{ e } w^*(e) = \begin{cases} \theta_H, & \text{se } e = e^*(\theta_H) \\ \theta_L, & \text{se } e \neq e^*(\theta_H) \end{cases}$$

Segue trivialmente de (2) que $\mu(\cdot), w^*(\cdot), e^*(\theta_H) > 0$ e $e^*(\theta_L) = 0$ é um equilíbrio separador. □

Usando o Lema 2 desse exemplo, vemos que os níveis educacionais do tipo alto, $e^*(2)$, para os quais existe um equilíbrio separador devem satisfazer:

$$2 - \frac{e^*(2)^2}{2} \geq 1 \geq 2 - e^*(2)^2 \Leftrightarrow e(\theta_H) \in \left[1, \sqrt{2}\right]$$

Em todos os equilíbrios separadores os trabalhadores do tipo baixo tem utilidade θ_L e os trabalhadores do tipo alto recebem θ_H.Desse modo, fica claro um equilíbrio separador que $e^*(2) = 1$ Pareto domina os demais.

6.3 Filtragem ou Triagem (Screening)

Consideraremos uma resposta do mercado ao problema da produtividade não observada de uma forma alternativa. As partes não informadas, no mercado de trabalho, isto é, as empresas, realizarão alguns procedimentos para tentar distinguir ou filtrar o perfil de produtividade dos trabalhadores. Suporemos, que os trabalhadores podem se diferenciar no "nível de tarefa" exigidos do trabalhador. Exemplos desse fato são carga horária semanal, velocidade de produção reduzida dentro da fábrica.

Nesse sentido, suporemos que níveis de tarefa elevados não adicionam nada no produto do trabalhador, ao contrário disso, afetam apenas a utilidade desse agente econômico. Assumimos que a utilidade de um trabalhador do do tipo θ que recebe o salário w e se depara com o nível de tarefa $t \geqq 0$.

$$u\,(w, t\,|\theta\,) = w - c(t, \theta)$$

$c(t, \theta)$ possui as mesmas propriedades de $c(0, 0) = 0$ $c_t(t, \theta) > 0$,$c_{tt}(t, \theta) > 0$,$c_\theta(t, \theta) < 0\ \forall t > 0$ e $c_{t\theta}(t, \theta) < 0$.

Estudaremos o ENPS do seguinte jogo de dois estágios:

Estágio 1:

Duas firmas anunciam simultaneamente os contratos oferecidos. Um contrato é o par (w, t). Cada firma pode anunciar qualquer número finito de contratos.

Estágio 2:

De acordo com as ofertas feitas os trabalhadores decidem se aceitam ou não tal oferta. Caso positivo, o trabalhador indicará qual a oferta for aceita. Por simplicidade, consideraremos que o trabalhador é indiferente entre os dois tipos de contrato, ele sempre escolhe aquele com o menor nível de tarefa. Se o contrato é oferecido por ambas as firmas o indivíduo aceitará a oferta de cada uma delas com probabilidade de 0.5.

A firma pode ofertar o contrato (w_L, t_L) somente o trabalhador do tipo θ_L e (w_H, t_H) somente a trabalhadores do tipo θ_H.

Proposição. *Em qualquer ENPS do jogo de triagem com tipos de trabalhadores observáveis; um tipo θ_i aceita o contrato $(w_i^*, t_i^*) = (\theta_i, 0)$ e as firmas obtém lucro zero.*

Demonstração. Primeiramente, qualquer contrato (w_i^*, t_i^*) aceito por trabalhadores do tipo θ_i no equilíbrio deve produzir lucros zero. Isso envolve um salário $w_i^* = \theta_i$. Note que se $w_i^* > \theta_i$, então alguma firma apresenta perda ao ofertar esse contrato e estaria melhor não oferecendo nenhum contrato. Por outro lado, suponha que $w_i^* < \theta_i$ e $\Pi > 0$ (lucros agregados das firmas). Nenhuma das duas firmas deve ganhar mais que $\Pi/2$. Se a empresa desvia fazendo uma oferta $(w_i^* + \varepsilon, t_i^*)$ para qualquer $\varepsilon > 0$, isso irá atrair todos os trabalhadores (do tipo θ_i). Como ε pode ser feito arbitrariamente pequeno, os lucros oriundos dos trabalhadores θ_i são muito próximos de Π e então o desvio aumentaria seus lucros então devemos ter $w_i^* = \theta_i$. Agora suponha que $(w_i^*, t_i^*) = (\theta_i, t)$ para algum $t' > 0$. Qualquer firma poderia desviar e obter lucros estritamente positivos. O único contrato que não há possíveis desvios é $(w_i^*, t_i^*) = (\theta_i, 0)$. Esse contrato maximiza a utilidade do trabalhador sujeito a restrição que as firmas oferecem contratos de "Break-Even". □

Lema. *Em qualquer equilíbrio, separador ou agregador, ambas firmas devem obter lucro zero.*

Demonstração. Seja (w_L, t_L) e (w_H, t_H) os contratos escolhidos pelos trabalhadores de baixa e alta produtividade. Suponha que os lucros agregados são $\Pi > 0$.Uma firma não pode lucrar mais do que $\Pi > \Pi/2$.Considere um desvio pela firma que oferece $(w_i + \varepsilon, t_L)$ atrairá trabalhadores do tipo θ_L e o contrato do tipo $(w_H + \varepsilon, t_H)$ atrairá trabalhadores do tipo θ_H. Note que como θ_i inicialmente prefere o contrato (w_i, t_i) a (w_j, t_j), temos que ,$w_i - c(t_i, \theta_i) \geq w_j - c(t_j, \theta_i)$ e então $(w_i + \varepsilon) - (w_j + \varepsilon) \geq c(t_i, \theta_i) - c(t_j, \theta_i)$. Como $\varepsilon \to 0$, esse desvio faz com que $\Pi_i \to \Pi$. Nesse caso $\Pi_j \leq 0$. A melhor resposta de j também é desviar e assim por diante. Como nenhuma firma pode incorrer numa perda em qualquer equilíbrio, devemos ter ambas as firmas com $\Pi = 0$. □

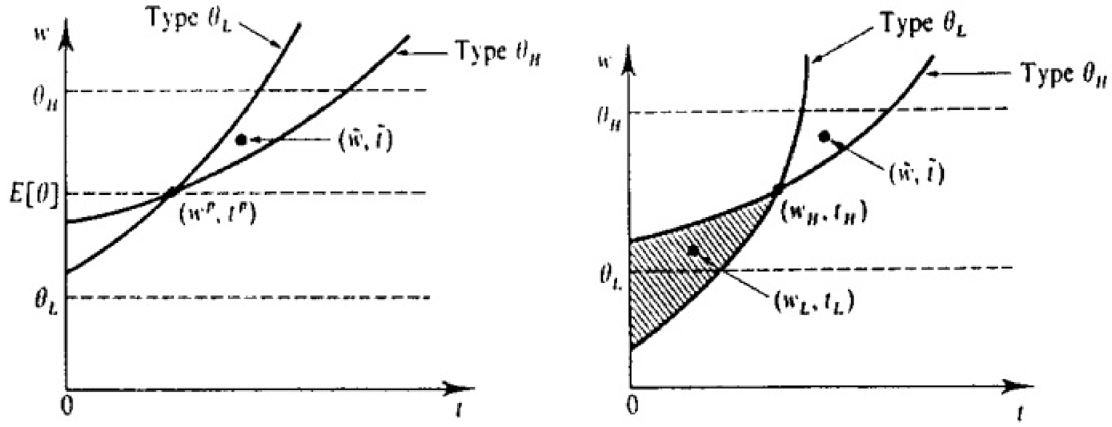
Lema. *Não existe equilíbrio agregador*

Demonstração. Suponha que exista um equilíbrio agregador (w^*, t). Suponha que a firma j oferece esse contrato. Então, uma firma k diferente de j apresenta um desvio que resulta $\Pi_k > 0$. Isto é a firma k oferece um único contrato $(\widetilde{w}, \widetilde{t})$ sendo $\widetilde{w} < \theta_H$.Esse contrato atrai todos os tipos de trabalhadores θ_H mas nenhum θ_L, os quais prefeririam (w^A, t^A) a $(\widetilde{w}, \widetilde{t})$. Além disso, como $\widetilde{w} < \theta_H$ a firma k possui $\Pi_k > 0$ quando θ_H aceitam o contrato. □

Lema. *Se (w_L, t_L) e (w_H, t_H) são os contratos assinados pelos trabalhadores de baixa e alta produtividade, em um equilíbrio separador, então ambos resultam em lucro zero, isto é, $w_L = \theta_L$ e $w_H = \theta_H$.*

Demonstração. Suponha que $w_L < \theta_L$. Então, qualquer firma poderia ter lucros estritamente positivos oferecendo $(\widetilde{w}, t_L)$ onde $\theta_L > \widetilde{w_L} > w_L$. Todos os trabalhadores de baixa produtividade aceitariam esse contrato. Além disso, a firma que desvia apresenta lucros positivos advindos de qualquer trabalhador que aceita o contrato. Como nenhum desvio pode existir no equilíbrio, devemos ter que $w_L \geq \theta_L$ em qualquer equilíbrio separador. Suponha que $w_H < \theta_H$. Se temos um equilíbrio um equilíbrio separador então θ_L deve cair na região hachurada na figura. Como θ_H escolhem o contrato (w_H, t_H) o contrato (w_L, t_L) deve estar sobre ou abaixo a curva de indiferença de θ_H. Como θ_L escolhe (w_L, t_L) a (w_H, t_H) esse último contrato deve estar acima a curva de indiferença de θ_L. Suponha que j oferece o contrato (w_H, t_H). Então a firma k diferente de j poderia ter lucros estritamente positivos desviando e oferecendo somente um contrato caindo na região escura da figura com um salário estritamente menor que θ_H como por exemplo $(\widetilde{w}, \widetilde{t})$. Esse contrato, $w_H < \theta_H$ será aceito por todos os trabalhadores do tipo θ_H e por nenhum do tipo θ_L. Então devemos ter $w_H \geq \theta_H$ para qualquer equilíbrio separador. As firmas ganham lucro zero em qualquer equilíbrio, então devemos ter $w_L = \theta_L$ e $w_H = \theta_H$. □

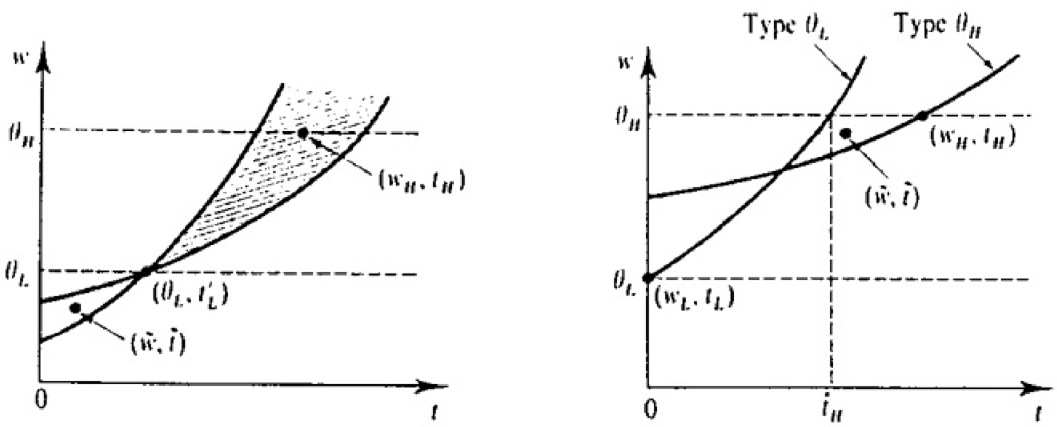
Figura 19: Equilíbrio Separador com Screening



Lema. *Em qualquer equilíbrio separador, os trabalhadores de baixa habilidade aceitam o contrato* $(\theta_L, 0)$*. Isto é, eles recebem o mesmo contrato que seria recebido se não houvessem imperfeições informacionais.*

Demonstração. Pelo *Lema anterior*, $w_L = \theta_L$ em qualquer equilíbrio separador. Suponha que trabalhadores de baixa habilidade "assinam" o contrato $(\theta_L, t_L^{'})$ com $t_L^{'} > 0$. Se isso é verdade então uma firma pode fazer lucros estritamente positivos oferecendo um contrato que cai a região $(\widetilde{w}, \widetilde{t})$. Todos os trabalhadores de baixa habilidade aceitam esse contrato, e o contrato resulta que a firma possui lucros estritamente positivos advindo de qualquer trabalhador que aceita esse contrato. $\square$

Figura 20: Equilíbrio Separador com Screening:$(\theta_L, 0)$ e $(\theta_H, \hat{t}_H)$



Lema. *Em qualquer equilíbrio separador os trabalhadores de alta habilidade aceitam o* $(\theta_H, \hat{t}_H)$ *sendo que* $\hat{t}_H$ *satisfaz* $\theta_H - c(\hat{t}, \theta_L) = \theta_L - c(0, \theta_L)$

Demonstração. Considere a figura anterior. Sabemos que $(w_L, t_L) = (\theta_L, t_L)$ e que $w_H = \theta_H$. Adicionalmente, se o tipo θ_L (desejam) (ou apenas) aceitariam o contrato $(\theta_L, 0)$, que deve ser pelo menos tão grande quanto o nível $\hat{t}_H$ mostrado na figura acima (lado direito). Note que os trabalhadores são indiferentes entre os contratos $(\theta_L, 0)$ e $(\theta_H, \hat{t}_H)$ e então $\theta_H - c(\hat{t}, \theta_L) = \theta_L - c(0, \theta_L)$. Suponha que o contrato de alta habilidade apresenta $t_H > \hat{t}_H$. Então qualquer firma pode ganhar lucros estritamente positivos também oferecendo contratos como $(\widetilde{w}, \widetilde{t})$ em que $\theta_H > w_H$. Esse tipo de contrato atrai todos os trabalhadores de alta habilidade e não muda a escolha dos de baixa habilidade. Assim, em qualquer equilíbrio separador, o contrato para os trabalhadores de alta habilidade deve ser $(\theta_H, \hat{t}_H)$. □

Proposição. *Em qualquer ENPS do jogo de triagem (screening), os trabalhadores de baixa habilidade aceitam o contrato* $(\theta_L, 0)$ *e os de alta* $(\theta_H, \hat{t}_H)$ *em que* $\hat{t}_H$ *satisfaz* $\theta_H - c(\hat{t}, \theta_L) = \theta_L - c(0, \theta_L)$.

Vejamos um exemplo de Screening:

Exemplo. Considere $\theta_H = 2$ e $\theta_L = 1$ sendo $c(t, \theta) = \frac{t^2}{\theta}$. Ademais, considere que a fração de trabalhadores do tipo θ_H é $\lambda \in (0, 1)$. Vamos encontrar o ENPS desse jogo:

O candidato a esse equilíbrio é o par de contratos $(w_L^*, t_L^*) = ((\theta_L, 0), (\theta_H, t_H^*))$ em que t_H^* é dado por $\theta_H - c(t_H^*, \theta_L) = \theta_L$. Assim teremos que:

$$2 - t_H^{*^2} = 1$$

$$t_H^* = 1$$

Lembrando que no equilíbrio separador, $w_L = \theta_L$ e $w_H = \theta_H$. Então, teremos que: $(w_L^*, t_L^*) = ((\theta_L, 0), (\theta_H, t_H^*)) = ((1, 0), (2, 1))$.

Proposição. *Se* $0.5 < \lambda < 1$ *não há ENPS.*

Demonstração. Considere $\bar{u} = \bar{w} - c(0, \theta_H) = \theta_H - c(\theta_H, t_H^*) = 2 - 0.5 = 1.5$. Se $\lambda > 0.5$, $E[\theta] = \lambda\theta_H + (1 - \lambda)\theta_L > 1.5$. Nesse caso, uma firma pode oferecer um contrato $(w, 0)$ com $1.5 \leq w < E[\theta]$, de modo que ambos os tipos de trabalhadores aceitam e a firma obterá lucro positivo. Portanto quanto $\lambda \in (0.5, 1)$ não há equilíbrio. □

A partir deste resultado podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição. *Há um candidato a Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos quando* $\lambda \in (0, 0.5]$.

Demonstração. Se $\lambda \in (0, 0.5]$ isso implica que $E[\theta] \leq 1.5$. Nesse caso uma firma não pode obter lucro positivo oferecendo um contrato que ambos os tipos aceitam, pois para isso acontecer o salário terá que ser tal que $w \geq 1.5$. Como $E[\theta] \leq 1.5$, a firma não obterá lucros positivos. Portanto, se houver um desvio, será da forma que cada tipo aceita um contrato diferente. Podemos mostrar que os melhores desvios possíveis desse tipo (com os menores salários) não são lucrativos, então esse candidato na realidade é de fato um equilíbrio. Os desvios mais lucrativos se dão com uma firma oferecendo um par $((w_L, t_L), (w_H, t_H))$ tal que $t_L = 0$ e $1 < w_L < 1.5$ e as desigualdades

$$w_H - c(t_H, \theta_H) \geq \theta_H - c(t_H^*, \theta_H)$$

$$w_L - c(t_L, \theta_L) \geq w_H - c(t_H, \theta_L)$$

Valem com igualdade:

$$w_H = \theta_H + c(t_H, \theta_H) - c(t_H^*, \theta_H)$$

$$w_H = \theta_H + \frac{t_H^2}{\theta_H} - \frac{t_{H^*}^2}{\theta_H}$$

$$w_H = 2 + \frac{t_H^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$w_H = 1.5 + \frac{t_H^2}{2}$$

$$w_L - c(t_L, \theta_L) = w_H - c(t_H, \theta_L)$$

$$w_L = w_H - t_H^2$$

Igualando as duas equações, teremos que:

$$w_L = 1.5 + \frac{t_H^2}{2} - t_H^2$$

$$w_L = 1.5 - \frac{t_H^2}{2}$$

$$\sqrt{3 - 2w_L} = t_H$$

Consequentemente:

$$w_H = 1.5 + \frac{3 - 2w_L}{2}$$

$$w_H = 3 - w_L$$

isto é, $(w_H, t_H) = \left(3 - w_L, \sqrt{3 - 2w_L}\right)$ e que a expressão abaixo é sempre válida.

$$w_H - c(t_H, \theta_H) \geq w_L - c(t_L, \theta_H)$$

Nesses melhores contratos, a firma paga:

$$\lambda (3 - w_L) + (1 - \lambda) w_L, \text{ com } w_L \in (1, 1.5)$$

Mas para todos esses valores de w_L, esse valor pago é menor do que $E[\theta] = \lambda\theta_H + (1 - \lambda)\theta_L = 2\lambda + 1(1 - \lambda) = \lambda + 1$, pois:

$$\lambda (3 - w_L) + (1 - \lambda) w_L = 3\lambda - 2\lambda w_L + w_L$$

$$(1 - 2\lambda) w_L + 3\lambda = \lambda + 1$$

$$(1 - 2\lambda) w_L + 3\lambda - \lambda - 1 = 0$$

$$(1 - 2\lambda) w_L + 2\lambda - 1 = 0$$

$$-(2\lambda - 1) w_L + (2\lambda - 1) = 0$$

$$(2\lambda - 1)(1 - w_L) = 0$$

$$(2\lambda - 1)(1 - w_L) + \lambda + 1 = 3\lambda - 2\lambda w_L + w_L$$

$$(2\lambda - 1)(1 - w_L) + \lambda + 1 \geq \lambda + 1$$

dado que $\lambda \in (0, 0.5]$ e $1 < w_L < 1.5$. Desse modo, os melhores desvios possíveis não são lucrativos e o único candidato é de fato um Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos. $\square$

7 O problema de agência

Aqui a assimetria de informação se desenvolverá após a assinatura do contrato. Após o dono de uma empresa contratar um gerente, o mesmo pode não conseguir observar o quão esforçado é esse trabalhador. Similarmente, o gerente, em muitas situações, possui um melhor nível de conhecimento sobre as oportunidades de negócio mais vantajosas para a empresa. Nesse sentido, os problemas informacionais oriundos da relação contratual, podem ser descritos como as de ação oculta ou informação oculta. O primeiro caso é conhecido como *risco moral* ou *perigo moral* (*moral hazard*) e pode ser ilustrado pela incapacidade do dono ao efetuar o monitoramento do empenho do gerente. Já a informação oculta surge do melhor conhecimento por parte do gerente sobre as oportunidade de negócios da empresa.

7.1 Ações ocultas (Risco Moral)

Imagine que o dono de uma firma (principal) deseja contratar um gerente (agente) para o desenvolvimento de um projeto por um único período. Os lucros do dono são afetados pelo menos em parte pelas ações do agente. Se as ações são observáveis, o problema contratual é relativamente simples. O contrato deveria explicitar as ações a serem tomadas e os esquemas de compensação devem ser definidos. Se a ação do gerente é não observável o dono deve desenhar um esquema de compensação, de tal modo, que proporcione os incentivos para a tomada da ação correta.

Seja π o lucro (observável) do projeto e a escolha da ação por parte do gerente. o conjunto de ações pode ser definido por $E \subset \mathbb{R}$. Nos referimos a $\boldsymbol{e}$ como o nível de esforço empregado pelo gerente. Suporemos também que os lucros são afetados por $\boldsymbol{e}$, mas não são completamente determinados por ele. Em particular assumimos que $\pi \in [\underline{\pi}, \overline{\pi}]$ e que esse parâmetro está estatisticamente relacionado com e, e esse relacionamento é descrito pela função densidade condicional $f(\pi|e) > 0 \ \forall \ \ e \ e \in E$ e todo $\pi \in [\underline{\pi}, \overline{\pi}]$.

Restringiremos a nossa atenção para apenas dois tipos de esforço e_H e e_L. O primeiro é o esforço alto que conduz a uma maior lucratividade para firma do que e_L, mas implica em uma maior dificuldade para o gerente. Mais especificamente, assumimos que a distribuição π condicional em e_H domina estatisticamente a distribuição condicional em e_L. As funções distribuição satisfazem:

$$F(\pi|e_H) \leq F(\pi|e_L) \ \forall \ \pi \in [\underline{\pi}, \overline{\pi}]$$

Isso implica que o nível de lucros esperados quando o administrador escolhe e_H é maior do que aquele quando e_L é escolhido:

$$\int \pi f(\pi|e_H) d\pi > \int \pi f(\pi|e_L) d\pi$$

O gerente possui uma função de utilidade de Bernoulli $u(w, e)$, satisfazendo as seguintes propriedades:

$$u_w > 0; u_w \leq 0 \ \forall \ (w, e)$$

$$u(w, e_H) < u(w, e_L) \ \forall \ w$$

O gerente prefere mais renda a menos, ele é avesso ao risco sobre loterias monetárias e não gosta de exercer um esforço alto, isto é, exercer e_H gera menos utilidade para este gerente. Focaremos no caso que:

$$u(w, e) = v(w) - g(e)$$

$$v'(w) > 0 \ v''(w) \leq 0 \text{ e } g(e_H) > g(e_L)$$

O dono recebe os lucros do projeto menos qualquer salário pago ao gerente. Assumimos que o dono é neutro ao risco e portanto ele maximiza o retorno esperado.

7.2 Contrato ótimo quando o esforço é observável

Suponha que o dono faça uma oferta ao gerente que pode aceitá-la ou negá-la. O contrato aqui especifica o esforço do gerente $e \in \{e_L, e_H\}$ e o salário como função dos lucros observados. Para aceitar a oferta o gerente deve receber um pagamento que seja igual ou supere $\overline{u}$ (seu nível de utilidade reserva), caso contrário o gerente recebe zero. O dono então resolve o seguinte problema de maximização:

$$\underset{e \in \{e_L, e_H\}, w(\pi)}{Max} \int_{\underline{\pi}}^{\overline{\pi}} (\pi - w(\pi)) \, f(\pi|e) d\pi$$

$$\int_{\underline{\pi}}^{\overline{\pi}} [v(w(\pi)) f(\pi|e) d\pi] - g(e) \geq \overline{u}$$

Dado que o contrato especifica o nível de esforço e, escolher $w(\pi)$ que maximiza:

$$\int (\pi - w(\pi)) f(\pi|e) d\pi = \int \pi f(\pi|e) d\pi - \int w(\pi) f(\pi|e) d\pi$$

É equivalente a minimizar o valor esperado dos custos de compensação do dono da empresa. Isto é:

$$Min_{w(\pi)} \int w\,(\pi)\, f(\pi|e) d\pi$$
$$\text{s.a}$$
$$\int v(w(\pi)) f(w|e) d\pi - g(e) \geq \overline{u}$$

Cabe lembrar que minimizar equivale a "menos maximizar". Seja γ o multiplicador de Lagrange e considere $\gamma > 0$, ou seja, a restrição deve estar ativa no ótimo, temos que:

$$-f(\pi|e) + \gamma v'(w(\pi))f(\pi|e) = 0$$

$$\gamma = \frac{1}{v'(w(\pi))}$$

A condição de primeira ordem para $w(\pi)$ é a derivada tomando a derivada de $w(\pi)$ para cada π separadamente. Assuma que $(\pi_1, ..., \pi_N)$ e $(w_1, ..., w_N)$ para uma versão discreta do modelo. Então a função objetivo seria:

$$Max \ \sum_{i=1}^{N} w(\pi_i) f(\pi_i|e)$$

$$\text{s.a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} v(w(\pi_i)) f(\pi_i|e) - g(e) \geq \overline{u}$$

Se o gerente é estritamente avesso ao risco $v'(w)$ é estritamente decrescente em w. Assim, para a especificação de e o dono oferece um salário fixo w_e^* tal que o gerente recebe seu nível de utilidade reserva.

$$v(w_e^*) - g(e) = \overline{u}$$

Note que como $g(e_H) > g(e_L)$ o salário do gerente será mais alto se o contrato exigir e_H a e_L. Por outro lado, se o gerente é neutro ao risco $v(w) = w$ a condição de primeira ordem é atendida para qualquer função de compensação. Considere a escolha ótima de e. A otimalidade do dono para o nível de esforço $e \in \{e_L, e_H\}$ que maximiza seus lucros esperados menos os pagamentos de salários:

$$\int \pi f(\pi|e) d\pi - v^{-1}(\overline{u} + g(e))$$

O primeiro termo representa o lucro líquido quando o gerente escolhe o nível de esforço e. O segundo termo representa os salários que devem ser pagos para compensar o gerente pelo seu esforço. Se e_H ou e_L é ótimo depende do aumento (incremento) nos seus lucros esperados advindos de e_H sobre e_L comparados com o custo monetário que o esforço causa ao gerente.

Proposição. *(P1) No modelo agente-principal com o esforço gerencial sendo observável um contrato ótimo que especifica que o gerente escolhe o esforço e^* que maximiza:*

$$[\int \pi f(\pi|e) d\pi - v^{-1}(\overline{u} + g(e))]$$

e paga ao gerente um salário fixo w:

$$w^* = v^{-1}(\overline{u} + g(e^*))$$

Esse é o único contrato se $v''(w) < 0 \ \forall \ w$ contrato ótimo quando o esforço é não observável.

7.2.1 Contrato Ótimo quando o esforço não é observável

Começaremos estudando o caso que o gerente é neutro ao risco. Suponha que $v(w) = w$ e aplicamos o resultado da proposição (P1) quando o nível de esforço ótimo é observável.

$$\underset{e \in \{e_L, e_H\}}{Max} \int \pi f(\pi|e) d\pi - g(e) - \overline{u} \text{ (P1)}$$

O lucro do dono é o valor da expressão acima e o gerente recebe em nível de salário exatamente igual ao da sua utilidade reserva.

Proposição. *(P2) No modelo de agente-principal com o esforço gerencial não observável, quando o gerente é neutro ao risco, o contrato ótimo gera a mesma escolha de esforço e as mesmas utilidades esperadas para o gerente e para o dono comparada a situação em que o esforço é observável.*

Demonstração. Suponha que o dono ofereça um esquema de compensação $w(\pi) = \pi - \alpha$. Se o gerente aceita esse contrato ele escolherá e que maximiza a sua utilidade esperada.

$$\int (\pi) f(\pi|e) d\pi - g(e) = \int \pi f(\pi|e) d\pi - \alpha - g(e) \text{ (EP2)}$$

Comparando (EP2) com (EP1), vemos que e^* maximiza (EP2). Assim, esse contrato induz ao nível de esforço de *first-best*. O gerente deseja aceitar o contrato, desde que, receba um nível de utilidade pelo menos $\overline{u}$:

$$\int \pi f(\pi|e^*) d\pi - \alpha - g(e^*) \geq \overline{u} \text{ (EP3)}$$

Seja α^* o nível que (EP3) é satisfeita com igualdade. Note que o esquema de compensação do dono é $w(\pi) = \pi - \alpha^*$. Se rearranjarmos (EP3) podemos ver que:

$$\alpha^* = \int \pi f(\pi|e^*) d\pi - g(e^*) - \bar{u}$$

.

Assim, com o esquema de compensação $w(\pi) = \pi - \alpha^*$ tanto o gerente quanto o dono recebem o mesmo *payoff* de quando o esforço é observado. □

A ideia central da proposição (P2) é que se ambos são neutros ao risco eles irão compartilhar da mesma forma essa *variável*. Em outras palavras, o problema de compartilhamento de riscos é eliminado. Em suma, incentivos eficientes podem ser providos e o gerente receberá o retorno marginal (completo) por exercer esforço.

7.2.2 Gerente avesso ao risco

Quando o gerente é avesso ao risco e seu nível de esforço é não observável pelo dono da empresa, o mesmo deve prover incentivos para que o gerente execute um nível de esforço desejado. Isso significa que devemos incluir uma nova restrição no problema de escolha:

$$\begin{array}{c} Min_{w(\pi)} \int w(\pi) f(\pi|e) d\pi \\ \text{s.a} \\ \textit{(i)} \int v(w(\pi)) f(\pi|w) d\pi - g(e) \geq \overline{u} \\ \textit{(ii)} \text{ e que soluciona } Max_{\tilde{e}} \int v(w(\pi)) f(\pi|\tilde{e}) d\pi - g(\tilde{e}) \end{array} \tag{B9}$$

A restrição *(i)* é conhecida como restrição de participação. Embora não tenhamos mencionado, a motivação para ela é bastante intuitiva. Já a restrição (ii) é chamada de compatibilidade de incentivos, que garante que de acordo com o esquema de compensação $w(\pi)$ a escolha ótima de esforço do gerente é e. Vejamos como se dá a implementação dos níveis de esforço e_H e e_L. Suponha que o dono deseja empregar e_L, nesse caso a otimalidade do dono é oferecer um esquema fixo de pagamento $w_e^* = v^{-1}(\overline{u} + g(e_L))$, que é o mesmo pagamento quando e_L é observável.

Nesse esquema de compensação o gerente escolhe e_L: o seu salário não é afetado pelo esforço já que este lhe proporciona o menor nível de desutilidade. Fazendo isso ele ganha exatamente $\overline{u}$. Assim, o contrato que implementa e_L possui o mesmo custo daquele que o esforço é observado. Contudo, o dono nunca ficará numa situação melhor do que aquela que o nível de esforço é observável, portanto essa deve ser uma solução (B9).

Implementar e_H: Nessa situação a restrição (ii) pode ser escrita como

$$(ii_H) \int v(w(\pi)) f(\pi|e_H) d\pi - g(e_H) \geq \int v(w(\pi)) f(\pi|e_L) d\pi - g(e_L)$$

Seja γ e $\mu \geq 0$ como os multiplicadores de *Kuhn-Tucker*. $w(\pi)$ deve satisfazer a seguinte condição de primeira ordem para cada $\pi \in [\underline{\pi}, \overline{\pi}]$

$$-f(\pi|e_H) + \gamma v'(w(\pi)) f(\pi|e_H) + \mu[f(\pi|e_H) - f(\pi|e_L)] v'(w(\pi)) = 0$$

ou

$$\frac{1}{v'(w(\pi))} = \gamma + \mu[1 - \frac{f(\pi|e_L)}{f(\pi|e_H)}]$$

Nota: Embora o problema não pareça ser de programação convexa, uma simples transformação em (B9) pode solucionar essa questão. Seja $\bar{v}(\pi)$ o nível de utilidade o gerente para cada nível de π. considere $\phi(\cdot) = v^{-1}(\cdot)$ então a função objetivo se torna:

$$\int \phi(\overline{v}(\pi))f(\pi|e_H)d\pi$$

que é convexa em $\overline{v}(\pi)$ e as restrições são lineares em $\overline{v}(\pi)$. assim as condições de *Kuhn-Tucker* são necessárias e suficientes para o máximo.

$$-\phi^{'}(\overline{v}(\pi))f(\pi|e_H) + \gamma f(\pi|e_H) + \mu[f(\pi|e_H) - f(\pi|e_L)] = 0 \ \forall \ \pi \in [\underline{\pi}, \overline{\pi}]$$

Definindo $w(\pi)$ por $v(w(\pi)) = \overline{v}(\pi)$ e notando que $\phi'(v(w(\pi))) = \frac{1}{v'(w(\pi))}$, isso resulta em (B10). Vamos estabelecer uma solução para o problema (B9), onde $e = e_H$ e γ e $\mu > 0$

Lema. *Em qualquer solução de B9 com $e = e_H$, γ e μ ambas devem ser estritamente positivos.*

Demonstração. Suponha que $\gamma = 0$. Como $F(\pi|e_H)$ estocasticamente domina $F(\pi|e_L)$ deve existir um averto de lucros $\tilde{\pi} \subset [\underline{\pi}, \overline{\pi}]$ tal que $\frac{f(\pi|e_L)}{f(\pi|e_H)} > 1 \ \forall \ \pi \in \tilde{\pi}$. Mas se $\gamma = 0$ isso implica que $v'(w(\pi)) \leq 0$ para qualquer π o que é impossível (lembre que $\mu \geq 0$). assim, $\gamma > 0$. Por outro lado, se $\mu = 0$ na solução de B9 então o esquema de compensação ótimo atribui o pagamento de um salário fixo para cada realização do lucro. Mas, sabemos que isso levaria o gerente a escolha de e_L violando a restrição ii_H do problema B9. Assim, teremos $\mu > 0$. Considere agora um exemplo para o pagamento do salário fixo $\hat{w}$ tal que $\frac{1}{v'(\hat{w})} = \gamma$

$$w(\pi) > \hat{w} \text{ se } \frac{f(\pi|e_L)}{f(\pi|e_H)} < 1$$
$$\text{e}$$
$$w(\pi) < \hat{w} \text{ e se } \frac{f(\pi|e_L)}{f(\pi|e_H)} > 1$$

O esquema de compensação ótimo paga mais do que $\hat{w}$ para resultados que são estatisticamente mais prováveis a ocorrerem sob e_H do que e_L. Nesse sentido, $[f(\pi|e_L)/f(\pi|e_H)] < 1$.

Esse resultado nos leva a uma consideração interessante: no esquema de incentivo ótimo a compensação (salário) não necessita ser necessariamente crescente nos lucros. Para o esquema de compensação ser crescente em π (monotonicamente), devemos ter que $[f(\pi|e_L)/f(\pi|e_H)]$ seja decrescente em π, isso é, se π aumenta a probabilidade de conseguir um nível de lucro π se o esforço é e_H relativo ao esforço ser e_L deve crescer. Essa propriedade é conhecida como razão de verossimilhança monótona ou *monote likelihood ratio proprierty. Essa condição não é implicada pela dominância estocástica de primeira ordem.*

Finalmente, note que dada a variabilidade que a otimalidade é introduzida no sistema de pagamento do gerente, o valor esperado(salário) deve ser estritamente maior do que quando o seu salário é fixo. Intuitivamente o gerente deve ser "segurado" com um nível de utilidade $\overline{u}$, o dono deve compensá-lo com um salario médio mais alto para qualquer risco que ele suporta.

Note que $E[v(w(\pi))|e_H] = \overline{u} + g(e_H)$ e $v"(\cdot) < 0$. A desigualdade de Jensen nos diz que:

$$v\left(E[(\pi))|e_H]\right) > \overline{u} + g(e_H)$$

Contudo, sabemos que:

$$v(w^*_{e_H}) = \overline{u} + g(e_H) \text{ e então}$$

$$E[w(\pi))|e_H] > w^*_{e_H}$$

□

Como resultado, a não observabilidade aumenta os custos para o dono implementar o esquema de compensação de e_H.

Proposição. *No modelo agente-principal com o esforço do gerente sendo não observável e esse indivíduo sendo avesso ao risco, há dois esquemas ótimos de compensação envolvendo os níveis de esforço e_H e e_L. Empregar e_H satisfaz B10 e dá ao gerente o nível de utilidade esperada $\overline{u}$ e envolve um grande esquema de pagamento esperado de salário comparado aquele que o esforço não é observado, o esquema de compensação ótimo para empregar e_L envolve o mesmo pagamento de salários fixos do que quando o esforço é observável. Sempre que o nível de esforço ótimo com esforço observável deveria ser e_H a não observabilidade causa perdas em termos de bem estar.*

7.3 Informação oculta

Aqui seguimos o mesmo problema de contratação. Contudo, o nível de esforço é observável, mas a desutilidade de exercer esforço não é observável após a assinatura do contrato. Suporemos que $e \in [0, +\infty[$ e os lucros brutos são uma função determinística do nível de esforço $\pi(e)$, com $\pi(0) = 0$, $\pi'(e) > 0$ e $\pi"(e) < 0 \;\forall\; e$. O gerente possui uma função de utilidade esperada de Bernoulli $u(w, e, \theta)$ e depende do estado da natureza θ que é realizado após o contrato ser assinado e somente é observado pelo gerente. Consideremos $\theta \in \mathbb{R}$ e nos focaremos na seguinte especificação de $u(w, e, \theta)$:

$$u(w, e, \theta) = v(w - g(e, \theta))$$

A função $g(e, \theta)$ é uma desutilidade ao esforço. Assumimos que $g(0, \theta) = 0 \;\forall\; \theta$ e denotaremos as derivadas parciais do seguinte modo:

$$g_e(e,\theta) = \begin{cases} > 0 \text{ para } e > 0 \\ = 0 \text{ para } e = 0 \end{cases}$$

$$g_{ee}(e,\theta) > 0 \ \forall \ e$$

$$g_\theta(e,\theta) < 0 \ \forall \ e$$

$$g_{e\theta}(e,\theta) = \begin{cases} < 0 \text{ para } e > 0 \\ = 0 \text{ para } e = 0 \end{cases}$$

Assumiremos que o gerente é estritamente avesso ao risco $v"(\cdot) < 0$. Para simplificarmos a exposição suporemos que $\theta \in \{\theta_L, \theta_H\}$ com $\theta_H > \theta_L$ e $Prob(\theta_H) = \lambda \in]0,1[$ .Nesse sentido começaremos a exposição mostrando que a relação contratual quando θ é observável e posteriormente veremos os efeitos da não observabilidade.

7.3.1 O estado θ é observável

Um contrato de informação completa consiste nos dois pares de salário - esforço $(w_H, e_H) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ para θ_H e $(w_L, e_L) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ para θ_L o problema de maximização do dono é o seguinte:

$$\begin{array}{cc} Max & \lambda[\pi(e_H) - w_H] + (1-\lambda)[\pi(e_L) - w_L] \\ w_L, e_L \geq 0 & \\ w_H, e_H \geq 0 & \end{array}$$

$$\text{s.a}$$

$$\lambda v(w_H - g(e_H, \theta_H)) + (1-\lambda) v(w_L - g(e_L, \theta_L)) \geq \overline{u}$$

Definimos esse problema como (C1). Em qualquer solução a restrição deve estar ativa:

$$-\lambda + \gamma\lambda v'(w_H^* - g(e_H^*, \theta_H)) = 0 \text{ (C2)}$$

$$-(1-\lambda) + \gamma(1-\lambda) v'(w_L^* - g(e_L^*, \theta_L)) = 0 \text{ (C3)}$$

$$\lambda\pi'(e_H^*) - \lambda\gamma v'(w_H^* - g(e_H^*, \theta_H)) g_e(e_H^*, \theta_H) \begin{array}{c} \leq 0 \text{ se } e_H^* \geq 0 \\ = 0 \end{array}$$

$$(1-\lambda)\pi'(e_L^*) - \gamma(1-\lambda) v'(w_L^* - g(e_L^*, \theta_L)) g_e(e_L^*, \theta_L) \begin{array}{c} \leq 0 \\ = 0 \text{ se } e_L^* > 0 \end{array}$$

Combinando (C2) e (C3):

$$(\lambda)(\gamma v'(H))^{-1} - (1-\lambda)(1 - \gamma v'(e)) = 0$$

$$-\lambda + \gamma\lambda v'(H) - (1-\lambda) + \gamma(1-\lambda)v'(L) = 0$$

$$\gamma\lambda v'(H) - (1-\lambda) + \gamma(1-\lambda)v'(L) = 1$$

$$\gamma\lambda(v'(H) - v'(L)) + \gamma = 1$$

$$\gamma\lambda(v'(H) - v'(L)) = 1 - \gamma$$

Se $\gamma = 1$ então $v'(H) = v'(L)$. De outro modo mais simples: **(verificar)**

$$\frac{\lambda}{(1-\lambda)} = \frac{\gamma\lambda v'(H)}{\gamma(1-\lambda)v'(L)}$$

A condição acima implica que:

$$w_H^* - g(e_H^*, \theta_H) = w_L^* - g(e_L^*, \theta_L)$$

$$v(w_H^* - g(e_H^*, \theta_H)) = v(w_L^* - g(e_L^*, \theta_L))$$

Ou seja, a utilidade do gerente é equalizada entre os estados. Como $g_e(0,\theta) = 0$ e $\pi'(0) > 0$ as condições C4 e C5 devem ser satisfeitas em igualdade para $e_i^* > 0$ combinando C2 com C4 e C3 com C5 temos:

$$\frac{\lambda}{\lambda\pi'(e_H)} = \frac{\gamma\lambda v'(H)}{\gamma\lambda v(H) g_e(H)}$$

$$\pi(e_H) = g_e(e_H^*, \theta_H) \ \forall \ i = L, H \ \text{(C7)}$$

Como $v'(H) = v'(L)$. A condição acima diz que o nível ótimo de esforço θ_i iguala o benefício marginal do esforço em termos do lucro aumentado com sua desutilidade marginal.

Proposição. *No modelo de agência com a variável de estudo θ observável, o contato ótimo envolve o nível de esforço e_i^* no estado θ_i tal que $\pi'(e_i^*) = g_e(e_i^*, \theta_i)$ e completamente segura o gerente, atribuindo seu salário em cada estágio (estado) θ_i ao nível w_i^* tal que $v(w_i^* - g(e_i^*, \theta_i)) = \tilde{u}$.*

7.3.2 O estado θ é somente observado pelo gerente

Aqui há um grande incentivo para o gerente mentir sobre o seu verdadeiro tipo. O dono deverá oferecer um *"menu"* de contratos que incentive adequadamente o gerente a exercer esforço de acordo com o seu tipo.

Proposição. *Principio da revelação. Denote por Θ o conjunto de estado possíveis. A procura do contrato ótimo, o dono pode restringir-se a contratos na seguinte forma:*

(i) Após a realização do estado θ, o gerente deve anunciar o estado ocorrido. o contrato especifica um resultado $[w(\hat{\theta}), e(\hat{\theta})]$ para cada anunciação de $\hat{\theta} \in \Theta$;

(ii) Em cada estado $\theta \in \Theta$ o gerente acredita ser ótimo revelar o estado de θ verdadeiramente.

Vejamos um exemplo do princípio da revelação. Restringimos nossa atenção ao caso que o gerente é infinitamente avesso ao risco. Em particular, tomamos a utilidade esperada do gerente igual ao menor nível de utilidade entre os dois estados. Por exemplo, se a utilidade do gerente é $\bar{u}$ em um estado e $u' > \bar{u}$ em outro, então o esquema de pagamento do dono é mais alto do que o necessário e dá ao gerente um nível de utilidade mais alta que $\bar{u}$.

De acordo com essas suposições temos o seguinte (C8):

$$\begin{array}{cl} Max & \lambda[\pi(e_H) - w_H] + (1-\lambda)[\pi(e_L) - w_L] \\ w_L, e_L \geq 0 & \\ w_H, e_H \geq 0 & \end{array}$$

$$\text{s.a}$$

$$\left.\begin{array}{r} w_L - g(e_L, \theta_L) \geq v^{-1}(\overline{u}) \text{ (i)} \\ w_H - g(e_H, \theta_H) \geq v^{-1}(\overline{u}) \text{ (ii)} \end{array}\right\} \text{Restrição de Participaçãol}$$

$$\left.\begin{array}{r} w_H - g(e_H, \theta_H) \geq w_L - g(e_L, \theta_H) \text{ (iii)} \\ w_L - g(e_L, \theta_L) \geq w_H - g(e_H, \theta_L) \text{ (iv)} \end{array}\right\} \text{Restrição de Compatibilidade de Incentivos}$$

As restrições *(i)* e *(ii)* são as de racionalidade individual (participação) e as duas últimas são restrições de compatibilidade de incentivos, também chamadas de reveladoras (*truth telling*).

Lema. *Por hora ignoremos a restrição (ii). Assim, um contrato é uma solução para o problema (C8) se, e somente se, a solução do problema é derivada (esquecendo ou desconsiderando a restrição (ii)).*

Demonstração. Sempre que *(i)* e *(iii)* são satisfeitas, devemos ter que:

$$w_H - g(e_H, \theta_H) \geq w_L - g(e_L, \theta_H) \geq w_L - g(e_L, \theta_L) \geq v^{-1}(\overline{u})$$

e então *(ii)* também é satisfeita. Isso implica que o conjunto atingível de contratos é exatamente equivalente aquele que não desconsideramos a restrição *(ii)*. □

Lema. *Um contrato ótimo do problema (C8) deve apresentar* $w_L - g(e_L, \theta_L) = v^{-1}(\bar{(u)})$

A prova é deixada como exercício para o leitor, mas intuitivamente podemos perceber que a restrição *(i)* está ativa, isto é, o multiplicador de Lagrange associado a essa restrição será estritamente maior que zero.

Lema. *Em qualquer contrato ótimo:*

$e_L \leq e_L^*$*; isto é o nível de esforço do gerente no estado* θ_L *é não maior do que poderia ser se* θ *fosse observável;*

$e_H = e_H^*$*; ou seja, o esforço do gerente no estado* θ_H *é exatamente igual ao nível que ele seria caso* θ *fosse observável.*

As restrições de compatibilidade de incentivos estão ativas no ótimo. Vale ainda notar que $\hat{e}_L \leq e_L^* < e_H^*$

Lema. *Em qualquer contrato ótimo* $e_L < e_L^*$*, isto é, o nível de esforço no estado* θ_L *é necessariamente estritamente menor que o nível que poderia originar-se de* θ_L *se o estado* θ *fosse observável.*

Proposição. *No modelo de agência com informação oculta e um agente infinitamente avesso ao risco, o contrato ótimo no estado* θ_H *é o mesmo encontrado no first-best ao nível de esforço* e_L *é distorcido (reduzido) para baixo no estado* θ_L *comparado a o seu nível de first-best. Além disso, o agente é assegurado de forma ineficiente, recebendo uma utilidade maior no estado* θ_H *e uma utilidade igual a* $\overline{u}$ *no estado* θ_L*. O payoff esperado do principal é estritamente menor do que aquele que ele recebe quando* θ *é observável, enquanto que a utilidade do agente é a mesma do que a utilidade esperada quando* θ *é observável (igual a* $\overline{u}$*).*

7.3.3 Solução formal do modelo

Apresentaremos a solução formal do problema apresentado anteriormente:

$$\begin{array}{cl} Max & \lambda[\pi(e_H) - w_H] + (1-\lambda)[\pi(e_L) - w_L] \\ w_L, e_L \geq 0 & \\ w_H, e_H \geq 0 & \end{array}$$

$$\text{s.a}$$

$$\left.\begin{array}{c} w_L - g(e_L, \theta_L) \geq v^{-1}(\overline{u}) \text{ (i)} \\ w_H - g(e_H, \theta_H) \geq v^{-1}(\overline{u}) \text{ (ii)} \end{array}\right\} \text{(RCI)}$$

$$\left.\begin{array}{c} w_H - g(e_H, \theta_H) \geq w_L - g(e_L, \theta_H) \text{ (iii)} \\ w_L - g(e_L, \theta_L) \geq w_H - g(e_H, \theta_L) \text{ (iv)} \end{array}\right\} \text{(RP)}$$

Suponha que possamos ignorar a restrição *(ii)*. Sejam (γ, ϕ_H, ϕ_L) os multiplicadores das restrições (i), (iii) e (iv). as condições de primeira ordem podem ser escritas da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{ccc}
L_{w_H} = -\lambda + \phi_H - \phi_L \leq 0; & w_H \geq 0; \quad w_H L_{w_H} = 0 & \text{(BB2)} \\
L_{w_L} = -(1-\lambda) + \gamma - \phi_H + \phi_L \leq 0; & w_L \geq 0; \quad w_L L_{w_L} = 0 & \text{(BB3)} \\
L_{e_H} = \lambda \pi'(e_H) - \phi_H g_e(e_H, \theta_H) + \phi_L g_e(e_H, \theta_L); & e_H \geq 0; \quad e_H L e_H = 0 & \\
L_{e_L} = (1-\lambda)\pi'(e_L) - (\gamma + \phi_L) g_e(e_L, \theta_L) + \phi_H g_e(e_L, \theta_H) \leq 0 & e_L \geq 0; \quad e_L L e_L = 0 & \\
L_\gamma = w_L - g(e_L, \theta_L) - v^{-1}(\overline{u}) \leq 0 & \gamma \leq 0; \quad \gamma L_\gamma = 0 & \\
L_{\theta_H} = w_H - g(e_H, \theta_H) - w_L + g(e_L, \theta_H) \geq 0 & \theta_H \geq 0; \quad \theta_H L_{\theta_H} = 0 & \\
L_{\theta_L} = w_L - g(e_L, \theta_L) - w_H + g(e_H, \theta_L) \geq 0; & \theta_L \geq 0; \quad \theta_L L_{\theta_L} = 0 &
\end{array}
$$

As três últimas condições se referem as derivadas dos multiplicadores e são estritamente positivas se γ, θ_H e $\theta_L = 0$ e podem ser usadas em igualdade se os multiplicadores são estritamente positivos. A análise será procedida em 4 passos:

Passo 1: Seja $\phi_H > 0$ então a restrição *(iii)* pode ser usada com igualdade.

Passo 2: Supondo que w_H e w_L são estritamente maiores que zero L_{w_H} e L_{w_L} podem ser usados com igualdade. Fazendo a soma das duas equações chegamos ao valor de 1 para γ $(\gamma = L)$. Se $\gamma = 1$, L_γ deve estar ativa em qualquer solução ótima.

Passo 3: Suponha que os níveis de esforço são estritamente positivos. Note que se $e_H = 0$ então $\pi'(0) > 0$ e $g_e(0, \theta_i) = 0$ a restrição $L_{eH} > 0$ fica estritamente positiva. O mesmo vale para $e_L = 0$.

Passo 4: Os passos anteriores implicam que $\phi_L = 0$. suponha que não, isto é $\phi_L > 0$. Usaremos o fato $\phi_H = \phi_L + \lambda$ de BB2 nas condições BB4 e BB5. Como $(e_H, e_L) >> 0$ podemos escrever BB4 e BB5 como:

$$\lambda \pi'(e_H) - (\phi_L + \lambda) g_e(e_H, \theta_H) + \phi_L g_e(e_H, \theta_L) = 0$$

$$\lambda[\pi'(e_H) - g_i(e_H, \theta_H)] + \phi_L[g_L(e_H, \theta_L) - g_e(e_H, \theta_H)] = 0$$

e

$$(1-\lambda)[\pi'(e_L) - g_e(e_L, \theta_H)] + (1 + \phi_L)[g_e(e_L, \theta_H) - g_e(e_L, \theta_L)] = 0$$

Mas $\phi_L > 0$ implica que:

$$\pi'(e_L) - g_e(e_L, \theta_H) > 0 > \pi'(e_H) - g_e(e_H, \theta_H)$$

Isso implica que $e_H > e_L$ como $\pi(e) - g(e, \theta_H)$ é concava em e. Mas se $e_H > e_L$ e (iii) está ativa então a restrição (iv) deve estar inativa (*slack*) ou pode ser deixada inativa. Assim temos que:

$$w_H - w_L = g(e_H, \theta_H) - g(e_L, \theta_H)$$

Se (iv) estivesse ativa

$$= \int_{e_L}^{e_H} g_e(e, \theta_H) d_e$$

$$\int_{e_L}^{e_H} g_e(e, \theta_L) d_e = g(e_H, \theta_L) - g(e_L, \theta_L)$$

Nossa contradição.

Passo 5: Como $\phi_L = 0$ sabemos de BB2 que $\phi_H = \lambda$. Substituindo esses dois valores em BB4 e BB5:

$$\pi'(e_H) - g_e(e_h, \theta_h) = 0 \text{ (BB6)}$$

$$[\pi'(e_L) - g_e(e_L, \theta_L)] + \frac{\lambda}{1-\lambda}[g_e(e_L, \theta_H) - g_e(e_L, \theta_L)] = 0 \text{ (BB7)}$$

As condições acima caracterizam os valores ótimos e_H e e_L respectivamente. Os valores ótimos w_L e w_H são determinados de (i) e (iii).

7.4 Exemplos

Risco Moral e Salários Lineares

Exemplo. Considere o problema e uma firma neutra ao risco que deseja escolher a remuneração ótima do seu empregado. O empregado, que possui um nível de utilidade de reserva de $\overline{u} < 0$, escolho um nível de esforço $e \geq 0$ e incorre num custo de esforço (em perda de quantidade de consumo) de $C(e)$. O agente tem função de utilidade CARA, significando que o nível de utilidade de um agente que ganha o salário w e se esforça e é dado por: $u(w, e) = -\exp(-\alpha(w - C(e)))$.

Quando a firma observa o nível de esforço do agente, o nível ótimo de salário de esforços são os seguintes:

$$\underset{(e,w)\in R_+ \times R}{Max} G(e) - w$$
$$s.a\, u(w, e) \geq \overline{u}$$

Equivalentemente:

$$\underset{(e,w)\in R_+\times R}{Max} G(e) - w$$
$$s.a\ -\exp\left(-\alpha\left(w - C(e)\right)\right) \geq \overline{u}$$

Considere que e é estritamente positivo. Então a escolha de w que resolve o problema é tal que:

$$\underset{w\in R}{min} w$$
$$s.a\ -\exp\left(-\alpha\left(w - C(e)\right)\right) \geq \overline{u}$$

Como $u_w > 0$ e a função objetivo é estritamente crescente em w, a restrição deve valer com igualdade. Portanto, $w(e)$ será tal que:

$$-\exp\left(-\alpha\left(w - C(e)\right)\right) = \overline{u}$$

$$w(e) = \frac{ln\left(-\overline{u}\right)}{\alpha} + C(e)$$

Agora, a escolhe de e deve resolver:

$$\underset{e\in R_+}{Max} G(e) - w(e) = \underset{e\in R_+}{Max} G(e) - C(e) + \tfrac{ln(-\overline{u})}{\alpha}$$

Das condições de primeira ordem, segue que:

$$G^{'}\left(e^{FB}\right) = C^{'}\left(e^{FB}\right) \text{ se } e^{FB} > 0$$

$$G^{'}\left(e^{FB}\right) \leq C^{'}\left(e^{FB}\right) \text{ se } e^{FB} = 0$$

Vamos assumir que $G^{'}(0) > C^{'}(0)$, o que implica $e^{FB} > 0$. O salário ótimo será:

$$w\left(e^{FB}\right) = C\left(e^{FB}\right) - \tfrac{ln(-\overline{u})}{\alpha}$$

Suponha que a firma observa o esforço com um ruído, ou seja, ela não observa e mas observa $x = e + \varepsilon$, em que $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$. Isso significa que ela pode contingenciar a remuneração do agente apenas em x. Considere que a firma é restrita a definir salários lineares, ou seja, uma curva de salários descrita por $w(x) = a + bx$, de modo que pode ser escrita por $(a, b) \in R^2$. Vejamos as condições que devem ser impostas sobre (a, b) para que um salário induza um agente a escolha do nível de esforço $\overline{e}$.

Devemos pensar em algumas situações. Considere $\overline{e} = 0$. Nesse caso, basta a firma oferecer $w = \alpha$, sendo que a deve satisfazer:

$$u(a, 0) \geq \overline{u} \Rightarrow a \geq -\tfrac{ln(-\overline{u})}{\alpha}$$

A segunda situação seria quando $\overline{e} > 0$ nesse caso $(a, b) \in R$ deve satisfazer as seguintes condições:

Condição 1 (C1):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u\left(w\left(\bar{e}+\varepsilon\right), \bar{e}\right) f\left(\varepsilon\right) d\varepsilon \geq \bar{u}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -\exp\left\{-\alpha\left[a+b\left(\bar{e}+\varepsilon\right)-C\left(\bar{e}\right)\right]\right\} f\left(\varepsilon\right) d\varepsilon \geq \bar{u}$$

$$-\exp\left\{-\alpha\left[a+b\left(\bar{e}+\varepsilon\right)-C\left(\bar{e}\right)\right]\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} -\exp\left\{-\alpha b\varepsilon\right\} f\left(\varepsilon\right) d\varepsilon \geq \bar{u}$$

$$-\exp\left\{-\alpha\left[a+b\left(\bar{e}+\varepsilon\right)-C\left(\bar{e}\right)\right]\right\} \exp\left\{\alpha^2 b^2 \frac{\sigma^2}{2}\right\} \geq \bar{u}$$

$$a \geq C\left(\bar{e}\right) - b\bar{e} + \frac{\alpha^2 b^2 \sigma^2}{2} - \frac{ln\left(-\overline{u}\right)}{\alpha}$$

Condição 2 (C2):

$$\bar{e} = \underset{\widetilde{e}\in R_+}{\arg\max} \int_{-\infty}^{+\infty} u\left(w\left(\widetilde{e}+\varepsilon\right), \varepsilon\right) f\left(\varepsilon\right) d\varepsilon = \underset{\widetilde{e}\in R_+}{\arg\max} - \exp\left\{-\alpha a - \alpha b\widetilde{e} + \alpha C\left(\widetilde{e}\right) + \frac{\alpha^2 b^2 \sigma^2}{2}\right\}$$

Temos a seguinte condição de primeira ordem valendo com igualdade, pois $\bar{e} > 0$

$$-\exp\left\{-\alpha a - \alpha b\widetilde{e} + \alpha C\left(\bar{e}\right) + \frac{\alpha^2 b^2 \sigma^2}{2}\right\}\left[-\alpha b + \alpha C'\left(\bar{e}\right)\right] = 0$$

Juntando (C1) e (C2), temo que para implementar $\bar{e} > 0$, o par *(a,b)* deve satisfazer:

$$C'\left(\bar{e}\right) = b$$

$$a \geq C\left(\bar{e}\right) - b\bar{e} + \frac{\alpha^2 b^2 \sigma^2}{2} - \frac{ln\left(-\overline{u}\right)}{\alpha}$$

Vejamos agora qual será o salário ótimo na presença de risco moral (moral hazard):

Para que isso ocorra as condições anteriores devem valer em igualdade. Desse modo o nível de salário deve ser:

$$w^*\left(x\right) = \begin{cases} G\left(\bar{e}\right) - C'\left(\bar{e}\right)\bar{e} + \frac{\alpha^2\left[C'\left(\bar{e}\right)\right]^2\sigma^2}{2} - \frac{ln(-\overline{u})}{\alpha} + C'\left(\bar{e}\right)x, \text{ se } \bar{e} > 0 \\ -\frac{ln(-\overline{u})}{\alpha}, \text{ se } \bar{e} = 0 \end{cases}$$

Assim, o contrato ótimo envolverá o nível de esforço e^* tal que:

$$\underset{e\geq 0}{max}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[G\left(e\right)-w^*\left(\bar{e}+\varepsilon\right)\right]f\left(\varepsilon\right)d\varepsilon$$

Se $e^* = 0$, o *payoff* da firma será:

$$G\left(0\right)+\frac{ln\left(-\overline{u}\right)}{\alpha}=\frac{ln\left(-\overline{u}\right)}{\alpha}\text{ (E1)}$$

Se $e^* > 0$, o nível e^*será tal que:

$$e^*=\arg\underset{e>0}{\max}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[G\left(e\right)-C\left(e\right)-C^{'}\left(e\right)e+\frac{\alpha^2\left[C^{'}\left(e\right)\right]^2\sigma^2}{2}-\frac{ln\left(-\overline{u}\right)}{\alpha}+C^{'}\left(e\right)\left(e+\varepsilon\right)\right]f\left(\varepsilon\right)d\varepsilon$$

Isto é:

$$e^*=\arg\underset{e>0}{\max}G\left(e\right)-C\left(e\right)-\frac{\alpha^2\left[C^{'}\left(e\right)\right]^2\sigma^2}{2}+\frac{ln\left(-\overline{u}\right)}{\alpha}$$

Da condição de primeira ordem, temos que e^* é definido implicitamente por:

$$G\left(e^*\right)-C\left(e^*\right)-\alpha C^{'}\left(e\right)C^{'''}\left(\sigma^2\right)\sigma^2=0$$

O payoff da firma será:

$$G\left(e^*\right)-C\left(e^*\right)-\frac{\alpha^2\left[C^{'}\left(e^*\right)\right]^2\sigma^2}{2}+\frac{ln\left(-\overline{u}\right)}{\alpha}\text{ (E2)}$$

Assim, o contrato ótimo dependerá dos valores encontrados nas expressões (E1) e (E2):
Se (E1)>(E2)

$$\left(e^*,w^*\left(x\right)\right)=\left(0,-\frac{ln\left(-\overline{u}\right)}{\alpha}\right)$$

Se (E2)>(E1) então:

$$\left(e^*,w^*\left(x\right)\right)=\left(e^*>0,C\left(e^*\right)-C^{'}\left(e^*\right)e^*-\frac{\alpha^2\left[C^{'}\left(e^*\right)\right]^2\sigma^2}{2}-\frac{ln\left(-\overline{u}\right)}{\alpha}+C^{'}\left(e^*\right)x\right)$$

Se (E1) = (E2), o contrato ótimo poderá ser qualquer um dos dois.

Monopolista

Nossa economia consiste de um monopolista que pode ofertar um certo bem de consumo a um consumidor. Essa unidade de bem pode ser vendida com uma característica (considere qualidade) $q > 0$ a um preço t qualquer. O monopolista pode oferecer um número finito de contratos, os quais são representados por pares (t,q), onde t representa o preço do bem e q sua qualidade. O consumidor pode ser de dois tipos, diferenciados pela preferência que possui pela qualidade:

i) tipo alto: $u(\theta_H, t, q) = \theta_H q - t$

ii) tipo baixo: $u(\theta_B, t, q) = \theta_B q - t$

sendo $\theta_H > \theta_B > 0$. Ao se deparar com um consumidor, o monopolista sabe que com a probabilidade π ele será do tipo alto e com $1 - \pi$ do tipo baixo. O custo de produção é dado por $C(q)$, satisfazendo as seguintes condições: $C(0) = 0, C'(0) = 0, C'(q) > 0\ \forall q$ e $C''(q) > 0\ \forall q > 0$. O *timing* do jogo é o seguinte: o monopolista oferece um contrato, os consumidores respondem se aceitam algum contrato ou não. Caso positivo, o monopolista produz o bem e vende. Assuma que todos os consumidores possuem aversão infinita ao risco e utilidade reserva igual a zero.

1. Suponha que o monopolista observa o tipo do agente após a assinatura do contrato. Vejamos quais seriam as qualidade e preços:

Então o problema do monopolista é o seguinte:

$$\max_{(t_B, t_H, q_B, q_H) \in R^2 \times R^2} \pi [t_H - C(q_H)] + (1 - \pi)[t_B - C(q_B)]$$
$$s.a$$
$$\theta_H q_H - t_H \geq 0$$
$$\theta_B q_B - t_B \geq 0$$

Como o custo marginal é estritamente positivo para toda o *q>0* e a função objetivo é crescente em (t_B, t_H) , então as restrições devem valer em igualdade:

$$L(t_B, t_H, q_B, q_H) = \pi [t_H - C(q_H)] + (1 - \pi)[t_B - C(q_B)] + \lambda(\theta_H q_H - t_H) + \gamma(\theta_B q_B - t_B)$$

As CPOs são as seguintes:

$$L_{t_B} = 1 - \pi - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = (1 - \pi) > 0$$

$$L_{t_H} = \pi - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \pi > 0$$

$$L_{q_B} = -(1 - \pi) C'(q_B^*) + \gamma\theta_B = 0$$

$$L_{q_H} = -\pi C^{'}\left(q_H^*\right) + \lambda\theta_H = 0$$

$$L_\lambda = \theta_H q_H^* - t_H^* = 0$$

$$L_\gamma = \theta_B q_B^* - t_B^* = 0$$

Usando as condições para a função de custos e considerando que as restrições estão ativas teremos que:

$$\theta_H = C^{'}\left(q_H^*\right)$$

$$\theta_B = C^{'}\left(q_B^*\right)$$

Então:

$$C^{'}\left(q_H^*\right) q_H^* = t_H^*$$

$$C^{'}\left(q_B^*\right) q_B^* = t_B^*$$

Para o tipo H a restrição de compatibilidade de incentivos é:

$$\theta_H q_H^* - t_H^* \geq \theta_H q_B^* - t_B^*$$

No caso em questão ela não é válida, já que $\theta_H > \theta_B > 0$ e $q_B^* > 0$. O lado esquerdo da equação acima é igual a zero, porém $\theta_H q_B^* - t_B^* \geq 0$. Para o tipo baixo, temos que:

$$\theta_B q_B^* - t_B^* \geq \theta_B q_H^* - t_H^*$$

Temos que $\theta_H q_H^* - t_H^* = 0$ então $\theta_B q_H^* - t_H^* < 0$ já que $\theta_H > \theta_B$ então $(\theta_B - \theta_H)(q_H^* - t_H^*) < 0$. Em outras palavras, a restrição de compatibilidade de incentivos está ativa para o o consumidor do tipo B.

2. Considere que o monopolista não observa o tipo do agente após a assinatura do contrato. Utilize o princípio da revelação para mostrar que podemos restringir a dois tipos de contratos. Mostraremos que se as restrições de compatibilidade de incentivos forem satisfeitas, então as alocações devem ser não decrescentes.

$$\theta_H q_H - t_H \geq \theta_H q_B - t_B \text{ (ICH)}$$

$$\theta_B q_B - t_B \geq \theta_B q_H - t_H \text{ (ICB)}$$

Somando as duas restrições, temos que:

$$(\theta_H - \theta_B)(q_H - q_B) \geq 0$$

Como $(\theta_H - \theta_B) > 0$, segue que $(q_H - q_B) \geq 0$. Ainda de (ICH) e (ICB) temos que:

$$\theta_H (q_H - q_B) \geq t_H - t_B \geq \theta_B (q_H - q_B)$$

Como $\theta_B > 0$ e $q_H \geq q_B$ segue que $t_H \geq t_B$.

3. Se uma das restrições de participação for satisfeita, assim como as restrições de compatibilidade de incentivos consequentemente a outra valerá:

Dada a aversão ao risco infinita do consumidor, temos que as seguintes restrições de participação:

$$\theta_H q_H - t_H \geq 0 \text{ (RPH)}$$

$$\theta_B q_B - t_B \geq 0 \text{ (RPB)}$$

Se (ICH) e (RPB) são válidas, então temos que (RPH) é válida pois:

$$\theta_H q_H - t_H \geq \theta_H q_B - t_B \geq \theta_B q_B \text{-} t_B \geq 0$$

4. Se apenas uma restrição de compatibilidade de incentivos está ativa, qual delas estaria?

O problema do monopolista é:

$$\max_{(t_B,t_H,q_B,q_H)\in R^2\times R^2} \pi \left[t_H - C(q_H)\right] + (1-\pi)\left[t_B - C(q_B)\right]$$
$$s.a \text{ (ICH), (ICB) e (RPB)}$$

Por suposição considere que (ICB) não está ativa. Se a solução encontrada satisfizer (ICB), tal solução será a solução do problema restrito. Assim queremos encontrar (t_B, t_H, q_B, q_H) tais que:

$$\max_{(t_B,t_H,q_B,q_H)\in R^2\times R^2} \pi \left[t_H - C(q_H)\right] + (1-\pi)\left[t_B - C(q_B)\right]$$
$$s.a$$
$$\theta_H q_H - t_H \geq \theta_H q_B - t_B$$
$$\theta_B q_B - t_B \geq 0$$

O Lagrangeano associado será:

$L(t_B, t_H, q_B, q_H) = \pi [t_H - C(q_H)] + (1-\pi)[t_B - C(q_B)] + \lambda (\theta_H q_H - t_H - \theta_H q_B + t_B) + \gamma (\theta_B q_B - t_B)$

As CPOs são as seguintes:

$$L_{t_B} = 1 - \pi + \lambda - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 1 > 0$$

$$L_{t_H} = \pi - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \pi > 0$$

$$L_{q_B} = -(1-\pi) C'(q_B^*) + \gamma\theta_B + \lambda\theta_H \leq 0 \Rightarrow C'(q_B^*) \geq \frac{\theta_H - \pi\theta_B}{1-\pi} (=, \text{se } q_B^* > 0)$$

$$L_{q_H} = -\pi C'(q_H^*) + \lambda\theta_H \leq 0 \Rightarrow C'(q_H^*) \geq \theta_H (=, \text{se } q_H^* > 0)$$

Como $C'(0) = 0$ e $\theta_H > 0$, segue que $q_H^* > 0$ e $C'(q_H^*) = \theta_H$. Sendo $(\lambda, \gamma) >> 0$ temos ainda

$$\theta_H q_H^* - t_H^* = \theta_H q_B^* - t_B^* \text{ e } \theta_H q_B^* - t_B^* = 0$$

Resta checar, se essa solução do problema satisfaz (ICB). Usando as igualdades acima, podemos notar que:

$$\theta_B q_B^* - t_B^* \geq \theta_B q_H^* - t_H^*$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq \theta_B q_H^* + \theta_H q_B^* - t_B^* - \theta_H q_H^*$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq \theta_B q_H^* + \theta_H q_B^* - \theta_H q_H^* - \theta_B q_B^*$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq (\theta_B - \theta_H)(q_H^* - q_B^*)$$

Assim, se provamos que $(q_H^* - q_B^*) \geq 0$, teremos o resultado. Isso segue imediatamente se $q_B^* = 0$. Se $q_B^* > 0$ temos que:

$$C'(q_B^*) \geq \frac{\theta_H - \pi\theta_B}{1-\pi} = \frac{\theta_B - \pi\theta_B + \theta_B\pi - \pi\theta_H}{1-\pi} = \theta_B + \frac{\pi(\theta_B - \theta_H)}{1-\pi} < \theta_B < \theta_H = C'(q_H^*)$$

Como $C''(\cdot) > 0$ para $q > 0$ segue que $q_H^* > q_B^*$ e então (ICB) valerá.

Referências

AKERLOF, G. A. The Market For Lemons: Quality, Uncertainty and the Market Mechanism. Quarterly Journal of Economics, v. 84, n.3, p. 488-500, 1970.

GIBBONS, R. Game Theory for applied economists. Princeton University Press, 1992.

JEHLE, G. A., RENY, P. J. Advanced Microeconomic Theory. 3ed. Pearson, 2011.

MAS-COLELL, A. WHINSTON, M. D. GREEN, J. R. Microeconomic Theory, 1995.

VARIAN, HAL. Microeconomia: Princípios Básicos. Campus Elsevier, 9ª ed., 2016.