# Notas de Aula de Teoria dos Jogos

**Rodrigo Nobre Fernandez**

**Pelotas**
**2021**

# Prefácio

Esta apostila é um resumo das notas de aula da disciplina de Microeconomia 3 do curso de Ciências Econômicas da Universidade Federal em Pelotas. Em quase sua totalidade essas notas de aula transcrevem literalmente ou resumem o conteúdo do livro de Fiani (2015). Destaco que essa apostila não tem fins comerciais, o texto serve exclusivamente como material de apoio as aulas. Aproveito e agradeço ao aluno Jean Marcel Del Ponte Duarte que colaborou na construção desse material. Quaisquer erros e omissões são de minha inteira responsabilidade. Contribuições e considerações podem ser enviadas para: **rodrigo.fernandez@ufpel.edu.br** ou para **rodrigonobrefernandez@gmail.com**.

# Sumário

# 1 Introdução a teoria dos jogos

## 1.1 O que é um jogo?

Uma situação de interação estratégica em que participantes, sejam indivíduos ou organizações, reconhecem a interdependência mútua de suas decisões. Sempre que um conjunto de indivíduos, empresas, partidos políticos, etc, estiver envolvido em uma situação de interdependência recíproca, em que as decisões tomadas influenciam-se reciprocamente, pode-se dizer que eles se encontram em um jogo.

**Definição.** Modelo

É uma representação simplificada de um objeto de estudo, no caso de uma situação de interação estratégica, em que a situação é apresentada de forma simplificada, em que propositadamente alguns elementos são destacados e outros omitidos.

- A relação dos elementos a serem destacados ou omitidos não é arbitrária. O que é irrelevante é omitido e o essencial é destacado.

**Batalha de Bismarck**

| | Japoneses | |
|---|---|---|
| Aliados | Sul | Norte |
| Sul 1º dia | 3 dias | 1 dia |
| Norte 1º dia | 2 dias | 2 dias |

Os valores dentro da matriz são os dias de bombardeio. O resultado desse jogo seria Norte e Norte. Isso ocorre porque os aliados “adivinharam” a rota dos japoneses apenas considerando o seguinte

1. Os japoneses agiriam racionalmente;
2. Os dados da situação (número de dias de bombardeio).

Há diferentes tipos de interação estratégica:

- Os agentes econômicos estão envolvidos apenas 1 vez;
- Decisão simultânea;
- Repetição no tempo;
- Ordenamento cronológico das ações;
- Informação sobre a decisão do outro jogador.

Exemplo 2:

Jogo de votação da diretoria. Tabela de preferência dos diretores:

| | Diretor 1 | Diretor 2 | Diretor 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | Investir | Aplicar | Ampliar |
| 2 | Aplicar | Investir | Investir |
| 3 | Ampliar | Ampliar | Aplicar |

Os diretores votam em 2 turmas seguindo a ordem de preferência.

T1→ investir ou ampliar

T2→ Opção vencedora em T1 e aplicar no sistema financeiro

T1→D1 (investir); D2 (investir) e D3 (ampliar)

T2→D1 (investir); D2 (aplicar) e D3 (investir)

Essas escolhas se dão sem considerar a decisão das demais. Suponha que D2 resolva considerar a escala de preferências dos demais diretores para a escolha do seu voto Se em T1 D2 votar ampliar, essa seria a opção vitoriosa. Já em T2, as opções seriam ampliar e aplicar e a opção aplicar sairia vitoriosa com os votos de D1 e D2.

- Quando estamos jogando?

Situações que envolvam interações entre agentes racionais que se comporta estrategicamente podem ser analisadas formalmente como um jogo.

- Um jogo é um modelo formal;
- Interações;
- Agentes;
- Racionalidade;
- Comportamento estratégico.

**Definição.** Racionalidade

Um agente racional é aquele que:

1. Aplica a lógica a premissas dadas para chegar às suas conclusões;
2. Considera apenas premissas justificadas a partir de argumentos racionais;
3. Usa evidências empíricas com imparcialidade ao julgar afirmações sobre fatos concretos.

## 1.2 Teoria da escolha racional

O pressuposto básico é que os indivíduos são racionais. Expressaremos as preferências por meio de relações binárias. Exemplo:

$$\text{Capitais} = \{\text{Santiago, Montevidéo, Buenos Aires}\}$$

$$\text{Países} = \{\text{Argentina, Chile, Uruguai}\}$$

A relação entre países e capitais se dá da seguinte forma:

$$R_1 = \{(\text{Buenos Aires,Argenina}),(\text{Santiago,Chile}),(\text{Montevidéu,Uruguai})\}$$

Se chamarmos o primeiro elemento de $x$ e o segundo de $y$, o conjunto $R_1$ expressa a relação "x é a capital de y".

- Suponha o conjunto $S = 2, 3$, poderíamos estabelecer a relação "$x \geq y$"

$$R_2 = \{(2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$$

- xRy define a relação sobre S (no mesmo conjunto)

**Definição.** Relação de preferência

Uma relação de preferência é, então, uma relação particular representada por $\gtrsim$ (pelo menos tão bom quanto). Podemos derivar outras duas relações de preferência a partir de $\gtrsim$, a preferência estrita $>$ e a relação de indiferença. Podemos definir a preferência estrita como:

$$x > y \iff x \gtrsim y, \text{ mas não } y \gtrsim x$$

- Indiferença:

$$x \sim y \iff x \gtrsim y \text{ e } y \gtrsim x$$

- Relações de preferência podem admitir que sejam comparados elementos de dimensões distintas;

- Afirmar que os jogadores são racionais em teoria dos jogos significa afirmar que suas preferências são racionais.

**Definição.** Relação de preferências racionais

1. A relação de preferência $\gtrsim$ sobre um conjunto de escolhas possíveis A é completa se: para qualquer $x, y \in A$ temos que $x \gtrsim y$, $y \gtrsim x$, ou ambos.

2. A relação de preferência $\gtrsim$ sobre um conjunto de escolhas possíveis A é transitiva se para quais quer $x, y, z \in A$ temos que se $x \gtrsim y$ e $y \gtrsim z$ então $x \gtrsim z$

- Preferências completas e transitivas são chamadas de ordinais.

### 1.3 O Paradoxo de Condorcet

Esse paradoxo mostra que o fato de as preferências dos indivíduos, quando tomadas isoladamente, serem transitivas, não implica que as preferências dos indivíduos, quando tomadas em grupo, também são transitivas. Considere um parlamento imaginário, em que os deputados se dividem em 3 partidos, sendo que todos os deputados do mesmo partido possuem as mesmas preferências.

→ Partido conservador (C)
→ Partido Moderado (M)
→ Partido Radical (R)
Há 3 propostas
→ Aumentar o número de programas sociais (G)
→Reduzir o número de programas sociais (D)
→Manter o número de programas sociais (N)
Preferências

$$\begin{array}{ll} \text{C} & D > G > M \\ \text{M} & M > D > G \\ \text{R} & G > M > D \end{array}$$

Preferência do Parlamento
A votação será feita em 3 rodadas. A cada rodada duas propostas são confrontadas.
a) G vs N
C escolhe G, M escolhe N, R escolhe G;
b) N vs D
C escolhe D, M escolhe N, R escolhe N;
c) G vs D
C escolhe D, M escolhe D, R escolhe G.
Teríamos o seguinte ordenamento de preferências:
G>N>D>G, ou seja, um andamento intransitivo.

# 2 A estrutura de representação de jogos

**Definição 1.** *Jogador: um jogador é qualquer indivíduo ou organização envolvido no processo de interação estratégica que tenha autonomia para tomar decisões.*

Assume-se que o objetivo de todo jogador é obter o melhor resultado possível do processo de interação estratégica dadas as suas preferências.

**Definição 2.** *Ação ou movimento*

*Uma ação ou movimento de um jogador é a escolha que ele pode fazer em um dado momento do jogo.*

Cada jogador é representado por um subíndice i, onde $i = 1, 2, 3, ..., n$. O conjunto que lista todas as ações possíveis daquele jogador pode ser representado do seguinte modo:

$$A_i = \{a_i\}$$

Com efeito, as possibilidades de interação estratégica dependem de todas as ações relevantes disponíveis para os jogadores.

$$A_a = \{\text{renova o espaço,não renova}\}$$

Empregando a forma normal (estratégica) para representar um jogo simultâneo.

**Representação do jogo em forma estratégica ou normal**

| | Banco B | |
|---|---|---|
| Banco | Renova | Não Renova |
| Renova | 4,4 | 1,5 |
| Não Renova | 5,1 | 3,3 |

Suponha que uma empresa em dificuldades financeiras tomou 5 milhões de reais em empréstimo com cada banco. Contudo, devido à má gestão, seus ativos valem apenas 6 milhões de reais. Se os bancos renovarem, a perspectiva é que a empresa funcione por mais um ano pagando normalmente os juros devidos. Após esse período, a firma seria obrigada a decretar falência e os bancos dividiriam os ativos de 6 milhões, mais de um milhão para cada banco oriundo do recebimento de juros. Se apenas 1 dos bancos decide não renovar, ele recebe seus 5 milhões e acaba adiantando a falência da empresa. Se ambos não renovam, a empresa decreta falência e paga 3 milhões para cada banco.

**Definição.** Recompensa (payoff)

Uma recompensa é aquilo que todo jogador obtém depois de encerrado o jogo de acordo com suas próprias escolhas e as dos demais jogadores.

Uma "função de recompensa" especifica um valor numérico que nos ajuda a perceber como o jogador avalia determinado resultado o jogo. Por exemplo:

$$f(x) \geq f(y) \text{ sempre que } x > y$$

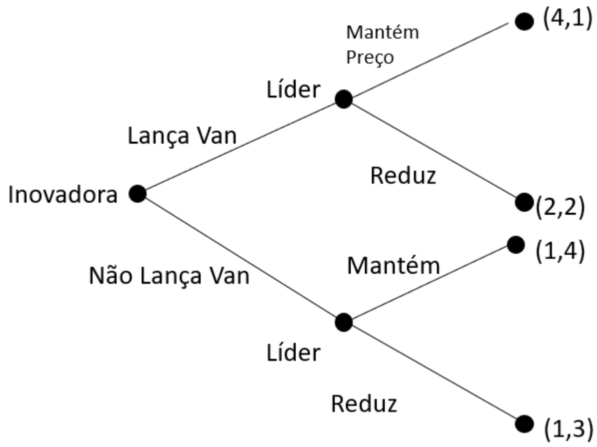
**Definição 3.** *Devemos empregar a função de recompensa apenas para ordenar as preferências de um mesmo jogador e nunca para ordenar as preferências de jogadores diferentes. Quando empregamos valores monetários para expressar as preferências, supomos monotonicidade, isto é, mais é sempre menor que menos. Em outras palavras, a moeda é um bem normal.*

**Definição 4.** *Jogo simultâneo*

*São aqueles em que cada jogador ignora as decisões dos demais no momento em que toma a sua própria decisão, e os jogadores não se preocupam com as consequências futuras de suas escolhas. Vale uma ressalva: o jogador A não sabe exatamente o que B fará, mas considera os possíveis desdobramentos no tempo de sua tomada de decisão.*

## 2.1 Forma estendida para representarmos um jogo sequencial

Para verificarmos possíveis desdobramentos de decisões tomadas ao longo do tempo, vamos utilizar a forma estendida. Aqui as decisões passadas são importantes para "prevermos" o futuro.




Na figura anterior, a empresa Inovadora decide antes se vai ou não introduzir o seu novo modelo de van. Exemplo: se a empresa inovadora lança a nova van e a empresa líder não reduz o preço, suas vendas caem e reduzem seus lucros para 1 milhão, enquanto que a inovador ocupa o mercado e possui lucros de 4 milhões. Para representarmos esse tipo de situação usamos uma árvore de jogos que é composta por ramos e nós. Cada nó representa uma etapa do jogo em que um dos jogadores tem que tomar uma decisão (definição de nó).

**Definição 5.** *Ramo: Um ramo representa uma escolha possível para o jogador, a partir do seu nó, isto é, um ramo é uma ação do conjunto de ações do jogador, em um dado nó.*

*Ramos podem ser representados com flechas para facilitar o entendimento de como o jogo se desdobra.*

O nó inicial de cada jogo não possui predecessor. Nós terminais não possuem sucessores. Na figura anterior, a firma inovador faz o primeiro movimento, ou seja, o nó inicial pertence somente a essa empresa. Dois ramos saem desse nó, a decisão de lançar a van e a decisão de não lançar. Do nó da empresa líder partem 2 ramos, representando duas decisões possíveis: reduzir ou manter o preço

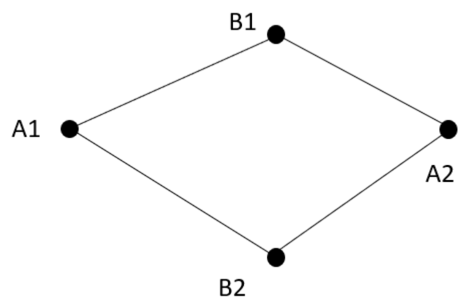
**Definição 6.** *Jogo sequencial*

*Um jogo sequencial é aquele em que os jogadores realizam seus movimentos em uma ordem pré-determinada.*

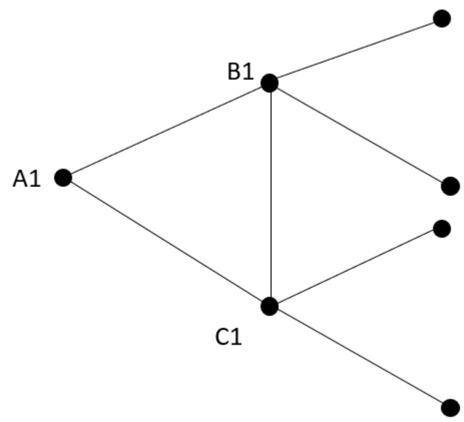
## 2.2 Regras da árvore de jogos

1. Todo nó deve ser precedido por, no máximo, um outro nó apenas;
2. Nenhuma trajetória pode ligar um nó a ele mesmo;
3. Todo nó na árvore de jogos deve ser sucessor de um único nó inicial.

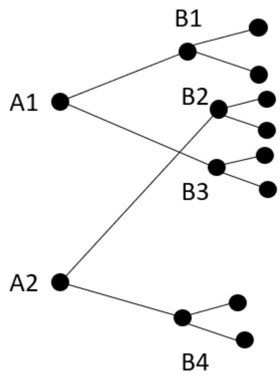
Violando a regra 1




Violando a regra 2



Violando a regra 3




## 2.3 Estratégias e conjunto de informação

**Definição 7.** *Definição: Estratégia*

*Uma estratégia é um plano de ações que especifica, para um determinado jogador, que ação tomar em todos os momentos em que ele terá de decidir o que fazer.*

**Definição 8.** *Espaço de estratégias*

*É o conjunto de estratégias que cada jogador dispõe. Genericamente, $s_j$ é a* j-ésima *estratégia do jogador* i*, o conjunto de estratégias ou espaço de estratégias do jogador* i *é dado por:*

$$S^i = \{s^i_j\}$$

A forma de representar uma combinação de estratégias S qualquer é por meio de um conjunto ordenado no qual cada elemento é uma estratégia para cada um dos n jogadores, na forma:

$$S = (s^1, ..., s^n)$$

$s^1$ é uma estratégia do jogador 1 e assim por diante. Sabemos que uma combinação de estratégias produz recompensas para os jogadores. A função de recompensa pode ser formalizada do seguinte modo:

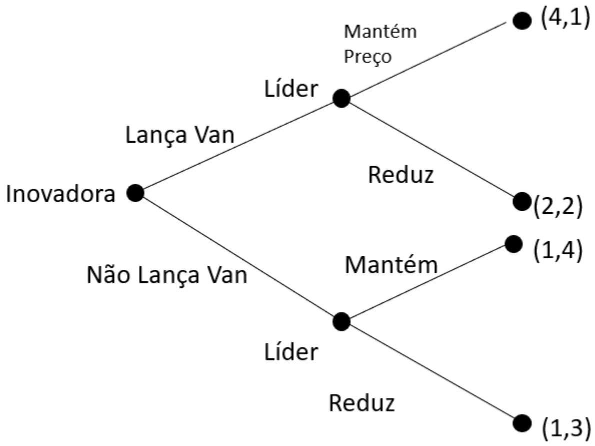
$$U^i = (s^1, ..., s^i, ..., s^n)$$

Denotando a recompensa que o jogador $i$ recebe quando o jogador 1 adota $s^1$ e assim por diante.

**Exemplo.** Líder e inovadora

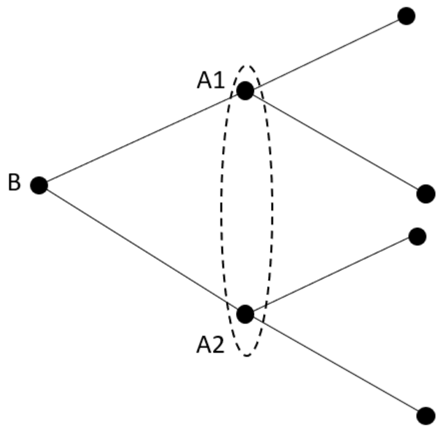
Espaço de estratégias da Inovadora: {Lança, Não Lança};

Líder = {{Mantém se lança, reduz se não lança}}, {{reduz se lança, mantém se não lança}}, {{reduz se lança, mantém se não lança}}, {{reduz se lança, reduz se não lança}}




**Definição 9.** *Conjunto de informação*

*Um conjunto de informação é um conjunto constituído pelos nós que um jogador acredita poder ter alcançado e numa dada etapa do jogo, quando é a sua vez de jogar.*

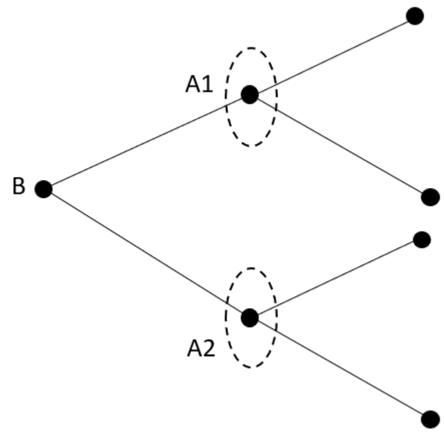



Nesse caso o jogador B não sabe em que nó de informação se encontra, isto é, ele não conhece a história do jogo

**Definição 10.** *Informação*

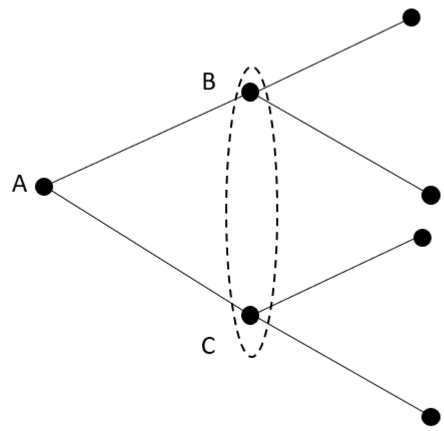
*Um jogo é dito de informação perfeita quando todos os jogadores conhecem toda a história do jogo antes de fazerem suas escolhas. Se algum jogador, em algum momento do jogo, tem de fazer suas escolhas sem conhecer exatamente a história do jogo até ali, o jogo é dito de informação imperfeita.*

Num jogo de informação perfeita, os conjuntos de informação são unitários.

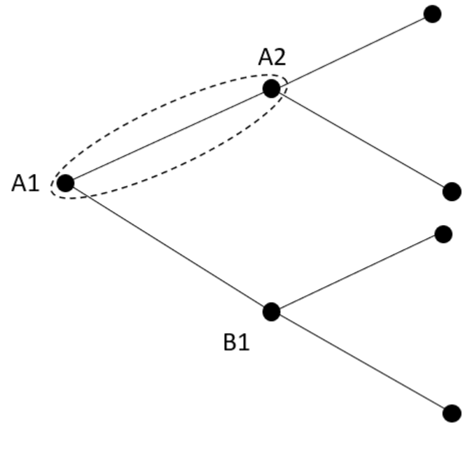



**Definição.** Os conjuntos de informação devem respeitar alguns critérios.

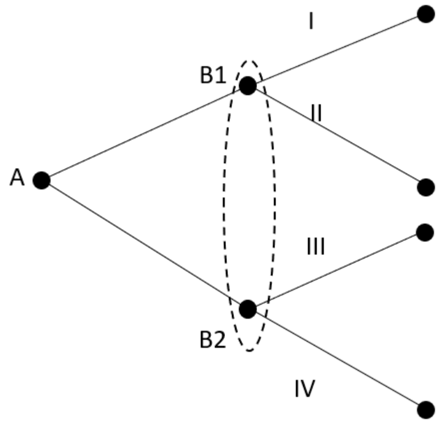
Os conjuntos de informação não podem conter nós que pertençam a jogadores diferentes.




Conjuntos de informação não podem conter nós em sequência.



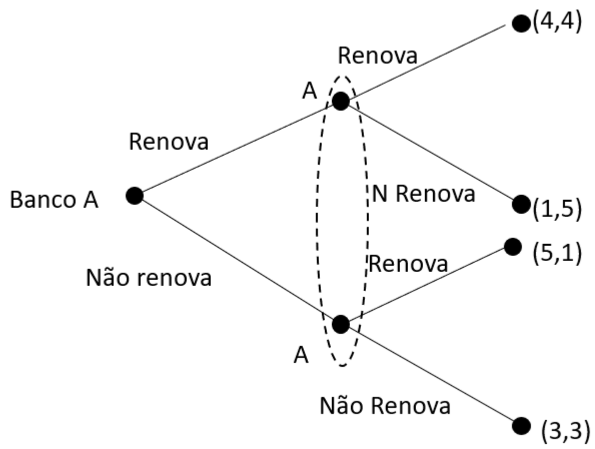
Os nós de um conjunto de informação não podem apresentar diferentes conjuntos de ação.



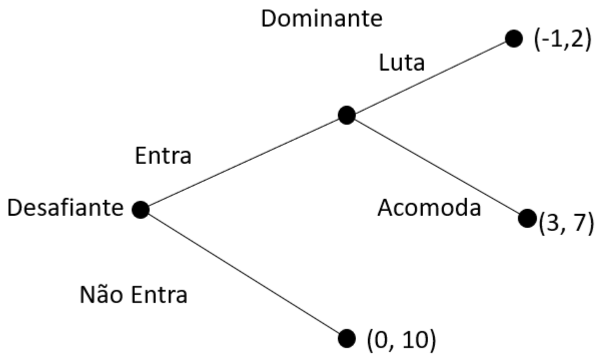

A depender da posição de B, $B_1$ ou $B_2$. Se B possui 4 ações diferentes, ele consegue perceber qual foi a escolha de A.

## 2.4 Forma estratégica vs Forma estendida

Veja o jogo simultâneo de corrida aos bancos na forma estendida. Usaremos aqui a noção de conjunto de informação.




Jogo sequencial em forma estratégica. Considere o seguinte jogo sequencial:




| | Dominante | |
|---|---|---|
| Desafiante | Luta | Acomoda |
| Entra | -1,2 | 3,7 |
| Não Entra | 0,10 | 0,10 |

| | Líder | | | |
|---|---|---|---|---|
| Inovadora | Reduz, Reduz | Reduz, Mantém | Mantém, Reduz | Mantém, Mantém |
| Lança | 2, 2 | 2,2 | 4,1 | 4,1 |
| Não Lança | 1,3 | 1,4 | 1,3 | 1,4 |

Observe a segunda coluna. Reduz preço, mantém preço deve ser lida do seguinte modo. Caso a inovadora lance a van, a líder reduz o preço, caso contrário ela mantém.

# 3 Jogos simultâneos: encontrar as melhores respostas estratégicas

**Definição 11.** *Conhecimento comum*

*Uma informação do jogo é dita de conhecimento comum quando todos os jogadores conhecem a informação, todos os jogadores sabem que todos os jogadores conhecem a informação e assim por diante, até o infinito.*

**Definição 12.** *Informação completa*

*Um jogo é dito de informação completa quando as recompensas dos jogadores são de conhecimento comum.*

Primeira solução: eliminando estratégias estritamente dominadas. Vejamos o seguinte exemplo:

| | Bonito | |
|---|---|---|
| Limpo | Aumentar gastos com publicidade | Não aumentar gastos |
| Lançar produto biodegradável | 2,5 | 7,3 |
| Não lançar produto | 2,4 | 2,7 |

Note que é sempre melhor para a empresa Limpo lançar o produto biodegradável. A estratégica {Lançar} domina a estratégia {Não Lançar}. Podemos dizer que o jogador Limpo possui a estratégia dominante {Lançar o produto}. A estratégia {Não Lançar} é dominada por essa. Como as recompensas da estratégia Lançar o produto são estritamente maiores do que as recompensas da estratégia Não Lançar, dizemos que {Lançar o produto} é estritamente dominante em relação a {Não Lançar}.

Seja $\pi_i$ a função de recompensa do jogador $i$, que especifica a recompensa desse jogador de acordo com a estratégia que ele adota e os demais jogadores adotam. Se uma dada estratégia do jogador $i$, denominada $s_i^*$, é estritamente dominante em relação a uma outra estratégia $s_i^{**}$, para esse jogador temos que :

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}) > \pi_i(s_i^{**}, s_{-i}) \forall\, s_i$$

- Vejamos agora um exemplo de uma estratégia fracamente dominante

| | Bonito | |
|---|---|---|
| Limpo | Aumentar | Não aumentar |
| Lançar | 2,$\underline{5}$ | 7,$\underline{3}$ |
| Não Lançar | 2,$\underline{4}$ | 2,$\underline{7}$ |

Se Bonito aumenta seus gastos, Limpo é indiferente. Contudo, se Bonito não aumentar seus gastos, Limpo obterá lucros maiores. Nesse caso, dizemos que {Lançar o produto} é fracamente dominante em relação a estratégia não lançar. Analogamente {Não Lançar} é fracamente dominada.

Algebricamente:

Se uma estratégia $s_i''$ é fracamente dominante em relação a outra estratégia $s_i'$ para esse mesmo jogador, temos que:

$$\pi_i(s_i'', s_{-i}) \geq \pi_i(s_i', s_{-i}) \forall\, s_i \text{ e}$$

$$\pi_i(s_i'', s_{-i}) > \pi_i(s_i', s_{-i}) \forall\, s_i \text{ para algum } s_{-i}$$

## 3.1 Eliminação iterativa de estratégia estritamente dominadas

Imagine o exemplo de competição no mercado automobilístico:

| | Carro Novo | | |
|---|---|---|---|
| Novo auto | Lançar nova versão | Manter Preço | Reduzir Preço |
| Lançar Modelo Próprio | 1,4 | 4,1 | 1,3 |
| Importar Matriz | 2,2 | 2,1 | 2,3 |
| Não competir com carro novo | 1,1 | 0,6 | 1,0 |

Podemos notar que a empresa carro novo não possui estratégia dominante. No caso da Novo Auto, também não há uma estratégia que seja sempre melhor do que todas as outras, não importando o que a Carro Novo faça. Observe que a estratégia não competir resulta em algo sempre pior que importar da matriz. Independentemente do que Carro Novo faça, {Não competir} é estritamente dominada por {Importar da matriz}.

Assim, podemos eliminar a estratégia {Não competir}. Ao riscarmos a estratégia,{Não Competir}, com a Carro Novo veremos as opções dessa última empresa. Podemos notar que a estratégia Manter Preço passou a ser estritamente dominada tanto por Lançar ova versão, quanto por Reduzir preço. Desse modo ela também pode ser eliminada.

| | Carro novo | |
|---|---|---|
| Novo Auto | Lançar nova versão | Reduzir Preço |
| Lançar modelo | 1,4 | 1,3 |
| Importar | 2,2 | 2,3 |

Após removermos a estratégia manter preço da Carro novo, a estratégia Lançar modelo próprio tornou-se estritamente dominada por importar da matriz.

| | Carro novo | |
|---|---|---|
| Novo Auto | Lançar nova versão | Reduzir Preço |
| Importar da Matriz | 2,2 | 2,3 |

Assim, a estratégia {Lançar Nova Versão} é estritamente dominada por {Reduzir Preço} para Carro novo. O resultado final constitui um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes (Importar da matriz, Reduzir preço).

## 3.2 Estratégias Racionalizáveis e Melhor Resposta

Quando a eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas nos deixa apenas uma estratégia para cada jogador, dizemos que o jogo é solucionável por dominância. As estratégias que resultam do processo de eliminação são denominadas de racionalizáveis. Em teoria dos jogos, quando um fato é de conhecimento comum, isso quer dizer que todos os jogadores conhecem esse fato. Quando a racionalidade dos jogadores é de conhecimento comum, dizemos que a hipótese de conhecimento comum da racionalidade está sendo adotada.

Formalmente, a melhor resposta do jogador $i$ para uma estratégia $s_{-i}$ é:

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}) \geq \tilde{\pi}_i(s_i^,, s_{-i}) \text{ para algum } s_i \text{ e todos} s_i^* \neq s_i^,$$

Uma estratégia nunca será a melhor resposta para um dado jogador qualquer que seja a estratégia que os outros jogadores decidam jogar. Uma estratégia $s_i^{**}$ nunca é a melhor resposta para qualquer outra estratégia que os demais jogadores decidam jogar se:

$$\pi_i(s_i^{**}, s_{-i}) < \pi_i(s_i^*, s_{-i}) \text{ para algum } s_i^* \neq s_i^{**} \text{ e todo} s_{-i}$$

Podemos concluir que uma estratégia estritamente dominada nunca é a melhor resposta do jogador $x$ para alguma estratégia do jogador $y$. Essas estratégias podem ser ditas como não racionalizáveis. As estratégias restantes no processo de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas são chamadas de racionalizáveis. A limitação do método de eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas.

| | Potencial | | |
|---|---|---|---|
| Dominante | Não exporta | Exporta em peq.escala | Exporta em larga |
| Investe | 2,1 | 1,0 | 0,-1 |
| Não investe | 1,0 | 2,1 | -1,2 |

Podemos notar que não há uma estratégia estritamente dominante para a entrante potencial.

## 3.3 Solucionando um jogo simultâneo: O equilíbrio de Nash

**Definição 13.** *Equilíbrio de Nash (EN)*

*Uma combinação de estratégias constitui um equilíbrio de Nash quando cada estratégia é a melhor resposta possível às estratégias dos demais jogadores e isso é verdade para todos os jogadores.*

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq \pi_i(s_i, s_{-i}^*) \text{ para todo } s_i \text{e para todo } i$$

O asterisco indica que a estratégia faz parte de um EN.

| | Potencial | | |
|---|---|---|---|
| Dominante | Não exporta | Exporta em peq.escala | Exporta em larga |
| Investe | (l) 2,1 (c) $\leftarrow$ | 1,0 $\leftarrow$ (l) | 0,-1 |
| Não investe | $\uparrow$ 1,0 | (l) $\downarrow$ 2,1 $\rightarrow$ | $\uparrow$ -1,2 (c) |

O EN é a combinação de estratégias (Investe, Não exporta).

No caso acima temos um EN estrito. Uma vez que para a empresa Dominante não existe nenhuma estratégia melhor que investir dado que a empresa entrante tenha decidido não exportar. Em contrapartida, não há nenhum resultado melhor para a entrante potencial que Não Exportar caso a empresa dominante tenha decidido investir.

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) > \pi_i(s_i, s_{-i}^*) \text{ para todo } s_i \text{ e todo } i$$

Um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes necessariamente é um EN?

| | País B | |
|---|---|---|
| País A | Tarifa alta | Tarifa baixa |
| Tarifa Alta | 800,800 | 2300,700 |
| Tarifa Baixa | 700,2300 | 1700,1700 |

O EN é (tarifa alta, tarifa alta). Esse EN é estrito. Assim, se um jogo apresenta um equilíbrio em estratégias estritamente dominantes, esse equilíbrio é necessariamente um equilíbrio de Nash estrito. Formalmente:

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}^*) > \pi_i(s_i, s_{-i}^*) \text{ para todo} s_i \text{ e todo } i \text{ (EN estrito)}$$

## 3.4 Equilíbrio em estratégias dominantes

$$\pi_i(s_i^*, s_{-i}) > \pi_i(s_i, s_{-i}) \forall\, s_i, s_{-i}\, e\, i$$

O equilíbrio de Nash é o melhor resultado em termos sociais?

**Definição 14.** *Melhoria paretiana*

*Quando a situação de pelo menos um agente melhora, sem piorar a situação de nenhum dos outros agentes, dizemos que houve uma melhoria no sentido de Pareto.*

**Definição 15.** *Ótimo de Pareto*

*Em uma dada situação, não é mais possível melhorar a situação de um agente sem piorar a de outro, dizemos que essa situação é um ótimo de Pareto, o que significa que dadas as circunstâncias, ganhos de eficiência não são mais possíveis.*

No jogo anterior, um ótimo de pareto seria a combinação de estratégias (tarifa baixa, tarifa baixa). Essa distinção mostra que as decisões individuais não necessariamente são as melhores que quando essas decisões são tomadas em conjunto. É possível termos mais que apenas um EN. Vejamos o seguinte exemplo:

| | Antiv | |
|---|---|---|
| Sysop | Atualiza | Não atualizar |
| Desenvolve | 2,1 | -1,-2 |
| Não desenvolve | 0,-1 | 1,2 |

Há dois equilíbrios: EN1 (desenvolver, atualizar) e EN2 (Não desenvolver, não atualizar). Note que o resultado do jogo anterior abre espaço para ideia de cooperação no sentido que os agentes devem coordenar suas ações para chegarem num melhor resultado.

**Definição 16.** *Ponto Focal*

*Um ponto focal é um elemento que se destaca de um contexto, e que permite aos jogadores coordenarem suas decisões em um dentre vários outros EN possíveis. O conceito de ponto focal como elemento de coordenação espontânea dos agentes se restringe essencialmente a pequenos grupos, dada a necessidade de familiaridade na interpretação do meio em que interagem. No caso do jogo de coordenação do padrão tecnológico, um exemplo possível de ponto focal seria um colunista especializado em TI que fosse suficientemente famoso para ser lido pelos profissionais das duas empresas.*

## 3.5 Um caso onde não há EN

Nesse jogo, os 2 jogadores exibem, ao mesmo tempo, a moeda que cada um esconde em sua mão. Se ambas as moedas apresentam a mesma face, o segundo jogador da a sua moeda para o primeiro.

| | J2 | |
|---|---|---|
| J1 | Cara | Coroa |
| Cara | 1,-1 | -1,1 |
| Coroa | -1,-1 | 1,-1 |

Esse jogo conhecido como estritamente competitivo ou de soma zero. Há um refinamento no conceito de EN que permite encontrarmos uma solução (estratégias mistas).

## 3.6 Alguns jogos importantes

### 3.6.1 Batalha dos Sexos

| | J2 (ele) | |
|---|---|---|
| J1(ela) | Futebol | Show |
| Futebol | 1,2 | -1,-1 |
| Show | -1,-1 | 2,1 |

Há dois EN: (futebol, futebol), (show, show). Mesmo com preferências distintas, o casal prefere ficar junto.

### 3.6.2 Dilema dos Prisioneiros

| | Ladrão 2 | |
|---|---|---|
| Ladrão 1 | Confessa | Não confessa |
| Confessa | -2,-2 | 0,-4 |
| Não confessa | -4,0 | -1,-1 |

O EN é (confessa, confessa) visto que os ladrões não podem se comunicar.

**Definição 17.** *Jogos não cooperativos*

*Um jogo é dito não-cooperativo quando os jogadores não podem estabelecer compromissos garantidos.*

**Definição 18.** *Jogos cooperativos*

Se os jogadores podem estabelecer compromisso, e esses compromissos possuem garantias efetivas, diz-se que o jogo é cooperativo.

# 4 Modelos de Duopólio

Não faz sentido pensarmos apenas em um conjunto de estratégias discretas, como por exemplo, a opção de entrar ou não entrar em um mercado. Suponha que as empresas estejam decidindo sobre o fato de aumentar ou reduzir o preço. Esse aumento/redução se apresenta num intervalo contínuo de valores. Usaremos como primeiro modelo o jogo simultâneo de estratégias contínuas.

## 4.1 Modelo de Cournot

Esse modelo analisa o comportamento de duas empresas que decidem simultaneamente que quantidade irão produzir.

### 4.1.1 Modelo de Cournot com duas empresas

Temos duas empresas que produzem produtos homogêneos, disputando esse mercado. Cada empresa busca maximizar seus lucros que, nesse jogo, é a recompensa.

### 4.1.2 Função de receita de cada empresa

Suponha que o preço de mercado seja dado por uma função de demanda linear:

$$p(q) = A - bQ$$

$$p(q) = A - b(q_1 + q_2)$$

sendo

$$q_1 + q_2 = q_i + q_j$$

A receita total em função de $q_1$ ou $q_2$ é dada por:

$$R(q_i) = p(Q)q_i = Aq_i - bq_i^2 - bq_iq_j$$

com $i = 1, 2$ e $i \neq j$.

Suponha que o *CMg* de cada empresa seja $c$, então a função custo é dada por $C_i = cq_i$, $i = 1, 2$, $c \in R_{++}$. Note que as empresas não precisam ter o mesmo parâmetro $c$ nem mesmo os mesmos parâmetros na função de demanda. A função de lucros de cada empresa é dada por:

$$\pi_i = Aq_i - bq_i^2 - bq_iq_j - cq_i$$

com $i = 1, 2$ e $i \neq j$. Desejamos então obter a quantidade que maximiza $\pi_i$:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = A - 2bq_i - bq_j - c = 0 \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial q_j} = A - 2bq_j - bq_i - c = 0 \tag{4.2}$$

Usando (1) temos que:

$$\frac{A - bq_j - c}{2b} = qi \tag{4.3}$$

Inserindo (3) em (2):

$$A - 2bq_j - \frac{b(A - bq_j - c)}{2b} - c = 0$$

$$A - 2bq_j - \frac{A}{2} + \frac{bq_j}{2} + \frac{c}{2} - c = 0$$

$$\frac{A}{2} - \frac{3bq_j}{2} - \frac{c}{2} = 0$$

$$\frac{A - c}{3b} = q_j \tag{4.4}$$

Inserindo (4) em (3):

$$\frac{A - c}{2b} - \frac{b}{2b}\frac{(A - c)}{3b} = q_i$$

$$q_i = \left(\frac{A - c}{2b}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{A - c}{2b}\right)\frac{2}{3} = \left(\frac{A - c}{3b}\right)$$

Aqui cada empresa toma a sua decisão sem conhecer a da outra empresa $q_i^* = q_j^*$ se tratam de valores que correspondem a EN. Podemos apresentar as funções de reação de cada empresa, de tal modo que:

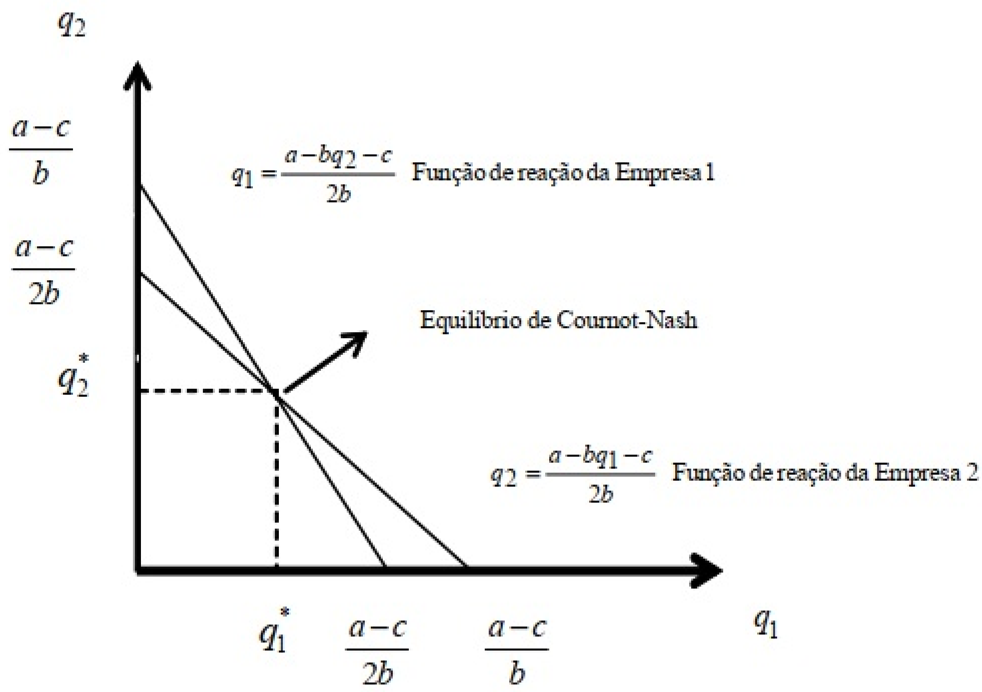
$$q_i = \frac{A - bq_j - c}{2b}$$

oriundas das equações (1) e (2):

$$q_1 = \frac{A - bq_2 - c}{2b}$$

$$q_2 = \frac{A - bq_1 - c}{2b}$$

Figura 1: Funções de Reação das Empresas 1 e 2




## 4.2 O modelo de Cournot e a Eficiência de Pareto: o Cartel

**Definição 19.** *Coalizão*

*Dizemos que empresas formaram uma coalizão quando elas coordenam sua produção ou seus preços.*

**Definição 20.** *Cartel*

*Um cartel é um grupo de empresas competidoras que fizeram uma coalizão, de forma a maximizar seus lucros, comportando-se como se fossem uma empresa monopolista.*

Primeiramente devemos conhecer a receita total do cartel:

$$RT^c = RT_1 + RT_2$$

Seja $p(Q) = A - b(q_1 + q_2) = A - bQ$

$$RT_1 = p(Q)q_1 = Aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2$$

$$RT_2 = p(Q)q_2 = Aq_2 - bq_2^2 - bq_1q_2$$

Sejam os custos: $C_1 = cq_1$ e $C_2 = cq_2$. O custo do cartel é :

$$C_1 + C_2 = c(q_1 + q_2)$$

A receita total do cartel é:

$$RT^c = A(q_1 + q_2) - bq_1^2 q_2^2 - 2bq_1q_2$$

Apenas poderemos igualar as quantidades das empresas porque elas possuem funções de custo idênticas. Então $C^c = 2q^c c$

$$RT^c = A(q_1 + q_2) - bq_1^2 q_2^2 - 2bq_1q_2$$

$$RT^c = 2q^c A - 2bq^{c^2} - 2bq^{c^2}$$

$$RT^c = 2q^c A - 4bq^{c^2}$$

A função de lucros dessa empresa é

$$\pi^c = RT^c - c^c = 2q^c(A - 2q^c b - c) = 2q^c A - 4bq^{c^2} - 2q^c c$$

$$\frac{\partial \pi^c}{\partial q^c} = 2A - 8bq^c - 2c = 0$$

$$A - 4bq^c - c = 0$$

$$\frac{A-c}{4b} = q^c$$

**Proposição.** *Se as empresas possuem os mesmos custos, o lucro do cartel é sempre maior que o de Cournot*

*Demonstração.* Começaremos calculando o lucro do cartel:

$$\pi^c = 2q^c(A - 2bq^c - c) = 2\left(\frac{A-c}{4b}\right)\left(A - 2b\frac{A-c}{4b} - c\right)$$

$$2\left(\frac{A-c}{4b}\right)\left(A - c - \frac{A-c}{2}\right)$$

$$2\left(\frac{A-c}{4b}\right)\left(\frac{A-c}{2}\right) = \frac{(A-c)^2}{4b}$$

$$\pi^c = \frac{(A-c)^2}{4b}$$

Posteriormente calcularemos o lucro de Cournot:

$$q_1 = q_2 = \frac{A-c}{3b}$$

$$\pi_1 = Aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2 - cq_1$$

$$\pi_1 = Aq_1 - bq_1^2 - bq_1^2 - cq_1$$

$$\pi_1 = Aq_1 - 2bq_1^2 - cq_1$$

$$\pi_1 = (A-c)q_1 - 2bq_1^2$$

$$\pi_1 = \frac{A-c}{3b}.(A-c) - 2b.\frac{(A-c)^2}{9b^2}$$

$$\pi_1 = \frac{(A-c)^2}{3b} - \frac{2}{9b}(A-c)^2$$

$$\pi_1 = \frac{(A-c)^2}{3b}\left(1 - \frac{2}{3}\right)$$

$$\pi_1 = \frac{(A-c)^2}{9b}$$

$$\pi_i = \frac{(A-c)^2}{9b} \rightarrow \text{Lucro de cada firma}$$

Como

$$\pi_i + \pi_j = \frac{2}{9}(A-c)^2$$

A soma dos dois é o lucro total de Cournot:

$$\pi^{cournot} = \pi_1 + \pi_2$$

$$\pi^{cartel} - \pi^{cournot} > 0$$

$$\frac{(A-c)^2}{4b} - \frac{2\,(A-c)^2}{9b} > 0$$

$$(A-c)^2\left(\frac{1}{4b} - \frac{2}{9b}\right) > 0$$

$$\frac{(A-c)^2}{b}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{9}\right) > 0$$

$$\frac{(A-c)^2}{b}\left(\frac{9-8}{36}\right) > 0$$

$$\frac{(A-c)^2}{36b} > 0$$

□

No ponto de vista das empresas o EN no modelo de Cournot é ineficiente no sentido de Pareto. Por meio de uma coalizão os lucros das empresas podem ser maiores. Suponha que a estrutura de custos das empresas é diferente. Ainda seria possível que as firmas formem um cartel? Primeiramente, supomos que:

$$C_1 = c_1 q_1 < C_2 = c_2 q_2$$

Como os custos da firma 1 são estritamente menores do que os da firma 2, ela faria a seguinte proposta: operaria como monopolista e pagaria a firma 2 o lucro de Cournot. Suponha que tenhamos uma demanda linear e que a empresa 2 agora produz zero unidades. O lucro da empresa 1 seria:

$$\pi_1 = Aq_1 - bq_1^2 - c_1 q_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = A - 2bq_1 - c_1 = 0$$

$$q_1 = \frac{A - c_1}{2b}$$

Para acharmos o preço temos que:

$$p(Q) = A - b(q_1 + q_2) = A - bq_1$$

$$p(Q) = A - b\left(\frac{A - c_1}{2b}\right)$$

$$p(Q) = \frac{A + c_1}{2}$$

Como a empresa 1 atua como monopolista o preço é estritamente maior que o custo marginal. Calculando o lucro dessa firma temos que:

$$\pi_1 = (p - c_1)\, q_1$$

$$\pi_1 = \left(\frac{A + c_1}{2} - c_1\right) \frac{A - c_1}{2b}$$

$$\pi_1 = \left(\frac{A - c_1}{2}\right)^2 \frac{1}{b}$$

$$\pi_1^M = \frac{(A - c_1)^2}{4b}$$

Vamos comparar esse resultado com o lucro de Cournot da empresa 1:

$$\pi_1^{Cournot} = \frac{(A - c)^2}{9b}$$

Suponha que o parâmetro $c$ do modelo de Cournot seja igual a $c_1$.

$$\pi_1^M - \pi_1^{Cournot} = \frac{(A - c_1)^2}{4b} - \frac{(A - c_1)^2}{9b} = \frac{5\,(A - c_1)^2}{36b} > 0$$

Note que:

$$\left(\pi_1^M - \pi_1^{Cournot}\right) > \pi_1^{Cournot}$$

$$\frac{5\,(A - c_1)^2}{36b} > \frac{1\,(A - c_1)^2}{9b} \text{ ou } \frac{4\,(A - c_1)^2}{36b}$$

### 4.2.1 Modelo de Cournot com mais de duas empresas

A função de demanda para $n$ empresas:

$$p(q) = A - b \sum qi$$

A receita total de uma empresa $i$ qualquer é o produto do preço de mercado pela quantidade produzida e vendida pela empresa.

$$RTi = p(q)q_i = Aq_i - bq_i^2 - bq_i^2 - q_i b \sum_{j \neq i}^{n} q_j$$

As funções de custo são dadas por $C_i = cq_i$ sendo $c \in R_{++}$. A função de recompensa da empresa $i$ é dada por:

$$\pi_i = Aq_i - 2bq_i^2 - q_i b \sum_{j \neq i}^{n} q_j - cq_i$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = A - 2bq_i - b \sum_{j \neq i}^{n} q_j - c = 0$$

Como todas as empresas possuem os mesmos custos marginais e produzem bens homogêneos é razoável supormos que elas irão dividir o mercado igualmente. Isso significa dizermos que $q_i = q_j$ ou simplesmente que

$$\sum_{j \neq i}^{n} q_j = (n-1)q_i$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = A - 2bq_i - b(n-1)q_i - c = 0$$

$$A - bq_i(2 + n - 1) - c = 0$$

$$A - c = bq_i(n+1)$$

$$\frac{A-c}{b(n+1)} = q_i^*$$

A quantidade ofertada pelo mercado será

$$Q = nq_i^*$$

O que aconteceria com o mercado se $n$ fosse muito grande?

$$Q = nq_i^* = \left[\frac{A-c}{b}\right]\left[\frac{n}{n+1}\right]$$

$$\lim_{n \to \infty} Q = \frac{A-c}{b}$$

Para um $n$ muito grande, o resultado do modelo de Cournot se assemelha a de um mercado perfeitamente competitivo. Como $p(q) = c$ o preço será igual ao custo marginal, então teríamos que:

$$p(q) = A - bq = c \to q = \frac{A-c}{b}$$

Um modelo de Cournot com $n \to \infty$ converge para um modelo de concorrência perfeita.

## 4.3 Modelo de Bertrand - Determinação simultânea de preços

### 4.3.1 Sem restrição de capacidade

Suponha que a demanda do mercado seja dada por:

$$q(p) = 100 - p$$

$$q(p) = A - bp$$

Suponha um mercado com duas empresas produzindo bens homogêneos. Além disso, as companhias possuem custos marginais idênticos sendo que suas funções de custo podem ser expressas por:

$$C(q_i) = cq_i \text{ com } c > 0$$

A função de recompensa dessa empresa $i$ é dada por:

$$\begin{cases} (p_i - c)(100 - p_i) & se\, p_i < p_j \\ (p_i - c)(100 - p_i) & se\, p_i = p_i \\ 0 & se\, p_i > p_j \end{cases}$$

Se a empresa $i$ estabelece $p_i > c$ então a melhor resposta de $p_j$ é estabelecer um preço $c < p_j < p_i$, $p_j = p_i - \varepsilon$, isto é, $p_j$ é ligeiramente menor que $p_i$. Adotando essa estratégia a empresa $j$ capturaria todo o mercado. Contudo, a melhor resposta a $p_j$ seria um $p_i$ ligeiramente menor que $p_j$ e assim por diante. Assim, existe um único par de preços $(p_i^*, p_j^*)$ tal que $p_j^* = p_i^* = c$. Esse resultado é conhecido como **Paradoxo de Bertrand**, pois temos um duopólio produzindo o mesmo resultado de um mercado competitivo. Suponho que as empresas escolham $p_j = p_i$, então:

$$p_i = p_j = c$$

### 4.3.2 O modelo de Bertrand com restrição de capacidade

Seja, mais uma vez, uma função de demanda total dada por:

$$q(p) = A - bp$$

Suponha que cada empresa enfrenta uma limitação de capacidade. Considere que cada firma não pode produzir mais do que $\hat{x}$ unidades. Caso a empresa adote um preço muito baixo, ela poderá atrair um número de consumidores maior do que pode atender.

Os consumidores que são atendidos pela firma que cobra mais barato são aqueles que mais valorizam o produto em questão. Esse pode ser o caso se os consumidores que mais valorizam o produto são aqueles que mais se esforçam para obter um menor preço. Nesse caso, diz-se que está sendo adotada a chamada regra de racionamento eficiente como critério de racionamento do produto entre os consumidores.

Suponha que a empresa $i$ estabeleça um preço inferior ao da empresa $j$. Se a quantidade demandada $q(p) > \hat{x}$ a empresa que estiver com o preço mais baixo produzirá apenas $\hat{x}$.

$$min\,\{A - bp, \hat{x}\}$$

Os custos tem as seguintes propriedades:

$$c(q_i) = cq_i \text{ com } c > 0 \text{ se } q_i \leq \hat{x}$$

$$c(q_i) = \infty,\text{se } q_i > \hat{x}$$

A função de recompensa da empresa será:

$$\begin{cases} (p_i - c)min\,\{A - bp, \hat{x}\} & se\, p_i < p_j \\ \frac{(p_i - c)(A - bp_i)}{2} & se\, p_i = p_j \\ 0 & se\, p_i > \hat{y} \\ (p_i - c)(A - bp_i - \hat{x}) & se\, p_i > p_j,\, p_j < \hat{y} \end{cases}$$

$$\hat{x} = A - b\hat{y}$$

Na última equação da função de recompensa $j$ vende $\hat{x}$ mas não atende a todo o mercado por causa da restrição de capacidade restritiva. Então a empresa $i$ atende ao que pode ser definido como uma demanda residual, ou seja, $(A - bp_i - \hat{x})$.

Considere que as empresas possuem funções de custos idênticas, e igualam seu preço ao custo marginal. Nesse caso o lucro será zero. Nessa mesma condição $p =$ Cmg se uma das empresas aumenta ligeiramente o seu preço $p + \epsilon$, a firma que não aumentou seu preço não consegue atender a todo o mercado. Assim, a firma com preço maior atende apenas a demanda residual e obtém um lucro mais elevado.

Agora considere que as firmas cobram um preço superior ao custo marginal. Suponha que as firmas cobrem o mesmo preço. Há um incentivo para a firma $j$ (por exemplo) reduzir o seu preço e obter um nível de lucro ligeiramente maior do que $i$.

Pode-se concluir que: *não há equilíbrio de Nash em estratégias puras no modelo de Bertrand com restrição de capacidade.* Esse resultado é conhecido como o **Paradoxo de Edgeworth**.

### 4.3.3 Modelo de Bertrand com diferenciação de produtos

Os produtos fabricados não são mais homogêneos. A demanda de cada empresa é uma função inversa do seu preço e uma função direta dos preços das demais empresas.

$$q_1 = A - p_1 + p_2$$

$$q_2 = A - p_2 + p_1$$

Embora alguma das empresas perca alguns consumidores ao aumentar o preço, ela não perde todos eles. Supomos que as empresas possuem as mesmas funções de custo: $c_i = cq_i$, $c > 0$. As funções de receita são dadas por:

$$RT_i = p_i q_i = p_i(A - p_i + p_j)$$

As funções de custo devem ser expressas em termos de preço:

$$c_1 = q_1 = A - p_1 + p_2$$

As funções de recompensa são:

$$\pi_1 = RT_1 - c_1 = p_1(A - p_1 + p_2) - c(A - p_1 + p_2)$$

$$\pi_2 = RT_2 - c_2 = p_2(A - p_2 + p_1) - c(A - p_2 + p_1)$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = A - 2p_1 + p_2 + c = 0$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = A - 2p_2 + p_1 + c = 0$$

As funções de reação das empresas são:

$$p_1 = \frac{A + p_2 + c}{2}$$

$$p_2 = \frac{A + p_1 + c}{2}$$

Solucionando o sistema de equações

$$p_1^* = \frac{A + c}{2} + \frac{1}{2}\frac{(A + c + p_2)}{2}$$

$$p_1^* = \frac{3(A+c)}{4} + \frac{p_1^*}{4}$$

$$\frac{3}{4}p_1^* = \frac{3}{4}(A+c)$$

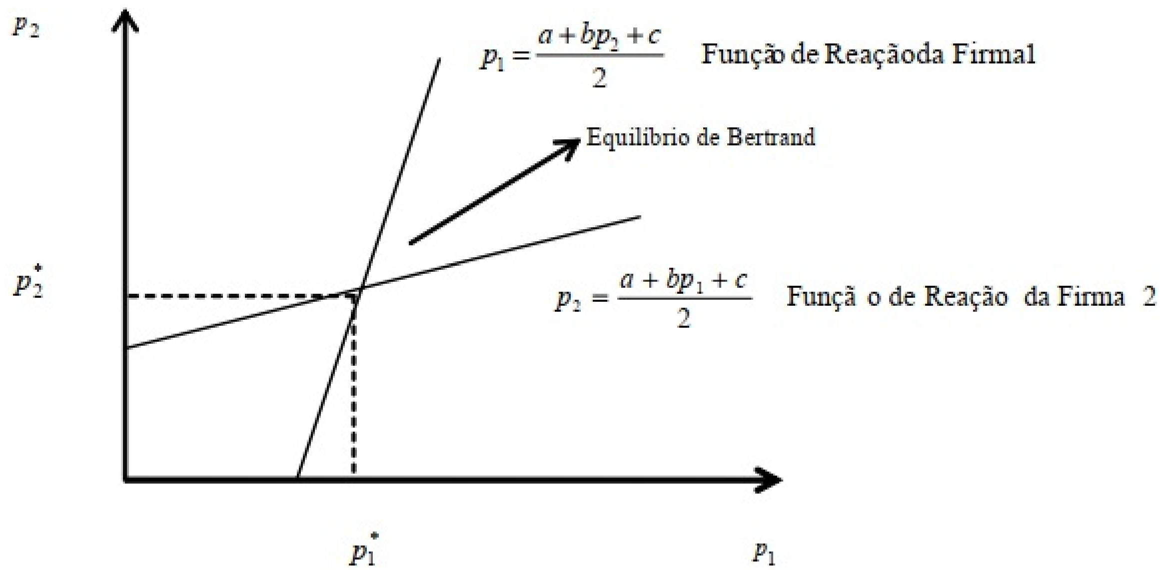
$$p_1^* = A + c$$

Da mesma maneira

$$p_2^* = A + c$$

As funções de reação no modelo de Bertrand com produtos diferenciados são complementares estratégicas.

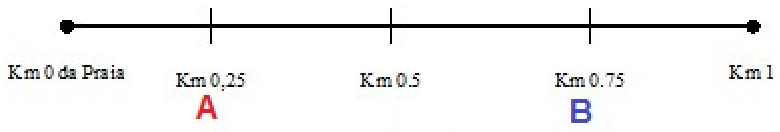
Figura 2: Funções de Reação das Empresas 1 e 2




## 4.4 O jogo da localização

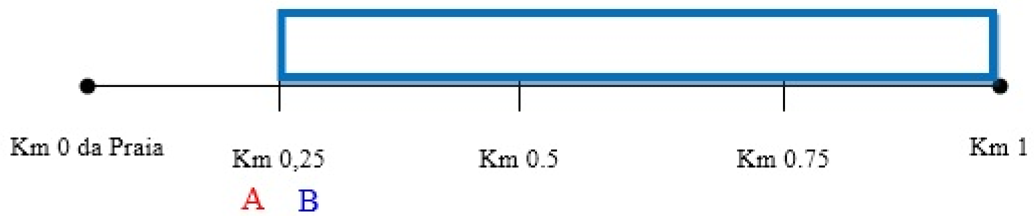
Apresentaremos a versão sem custos de transporte. Imagine duas barracas de sorvete $A$ e $B$, ambas devem escolher sua localização em uma praia de 1 quilômetro de extensão.

Figura 3: Localização das Empresas



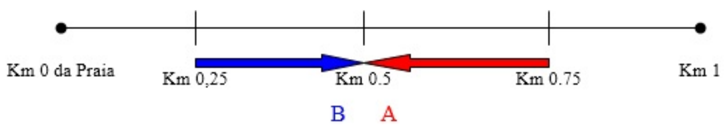

Suponha que A e B vendam exatamente o mesmo tipo de sorvete e cobram o mesmo preço. O que define a escolha por $A$ ou $B$ é somente a distância. Suponha que as barracas possuem os mesmos custos e que esses custos não são afetados pela localização que elas decidem ocupar na praia. Os custos unitários de venda são constantes. Ainda considere que os banhistas se distribuem uniformemente na praia. Também consideramos que cada banhista compra apenas um sorvete. Dadas essas premissas observando a figura anterior a disposição das barracas é um EN? Não, suponha que A esteja fixo em 0.25 e $B$ se aproxime o máximo de $A$, como segue.

Figura 4: Localização das Empresas




Nessa nova distribuição, B atende a um número muito maior de banhistas que $A$. Se $N$ é o número de banhistas a demanda de sorvetes da barraca $B = N(1 - 0.25) = N \times 0.75$. Como ambos os proprietários são racionais e antecipam as estratégias do seu rival a melhor resposta à localização da outra barraca é:

Figura 5: Localização das Empresas




Nesse caso o mercado é dividido igualmente. Podemos perceber que a estratégia 0.5km, 0.5km é um EN.

### 4.4.1 Jogo da localização com custos de transporte

Há agora um custo de deslocamento para cada banhista adquirir o sorvete. Então o preço do banhista é:

$$p^* = p + td$$

Sendo $p$ o preço pago pelo sorvete, $t$ o tempo de deslocamento e $d$ a distância. Pode também haver a um valor máximo que os banhistas estejam dispostos a pagar pelo sorvete, incluindo o custo de caminhar até a barraca. Assim, o valor máximo $V$ é também chamado de preço de reserva. Um banhista comprará o seu sorvete se:

$$p^* \leq V$$

$$p + td \leq V$$

$$\frac{V - p}{t} = d$$

Mantemos a suposição que cada banhista compra apenas 1 sorvete e que o preço de reserva V é o mesmo para todos os banhistas. O preço máximo a ser cobrado deverá ser tal que o banhista mais distante ainda considere adquirir o seu sorvete.

$$p = V - td_m$$

$d_m$ é a distância da barraca que se encontra que se encontra o banhista mais distante. Se considerarmos que A e B estejam posicionadas a 250m de cada extremo o banhista mais distante de cada barraca está a 250 metros de cada uma delas

$$p = V - 0.25t$$

Se cada barraca possuir um custo unitário $c$ e que cada empresa atenda metade da praia com $N$ banhistas distribuídos uniformemente, o lucro de cada barraca será dado por :

$$\pi_i = \frac{1}{2}(p - c) = (V - 0.25t - c)\frac{n}{2}$$

Suponha que as empresas pensem em mudar de posição. Para o banhista qualquer movimento de uma das barracas para os extremos da praia aumenta o seu preço (custo). Então a empresa deve reduzir o seu preço para compensar um eventual custo de deslocamento. Vamos chamar esse preço ajustado para a maior distância (x).

$$p(x) = V - 0,25t - tx = V - t(0,25 + x)$$

O lucro da barraca para qualquer $0 < x < 25$ é dado por:

$$\pi_i = \frac{1}{2}n(p(x) - c) = \frac{1}{2}N\left[V - t(0,25 + x) - c\right]$$

O lucro da barraca é máximo para *x=0*. O equilíbrio de Nash se dá em que cada empresa se situa a 250m de distância do centro.

### 4.5 Representando a escolha por diferenciar produtos

**Definição 21.** *Diferenciação de produtos*

*Diz-se que há diferenciação de produtos quando os consumidores percebem produtos de diferentes marcas, ainda que satisfaçam às mesmas finalidades, como distintos. Esses produtos podem ser ditos como substitutos imperfeitos.*

**Definição 22.** *Diferenciação horizontal*

*A variação dos produtos é uma resposta às diferentes preferências dos consumidores. Ou a diferença nas preferências*

**Definição 23.** *Diferenciação vertical*

*Quando a variação nos produtos corresponde a uma variação no poder aquisitivo dos consumidores.*

Para alguns consumidores, o custo de se deslocar até o outro produto, dadas as suas preferências, é tão elevado que justifica pagar um pouco mais pelo produto mais adequado às suas necessidades.

## 5 Jogos estritamente competitivos e estratégias mistas

### 5.1 Jogos de soma zero (estritamente competitivos)

Aqui, se um jogador ganha, o outro necessariamente perde. Suponha que "$a$" ganhe 1 unidade de recompensa, por consequência "$b$" perderá uma unidade.

Seja $U_a$ a função que para cada combinação de estratégias de $a$ e $b$ determina a recompensa do jogador $a$, e $U_b$ a mesma função para o jogador $b$. Seja $(s_i^a, s_j^a)$ um par de estratégias para o jogador $a$ e $(s_i^b, s_j^b)$ um par de estratégias do jogador $b$.

$$U_a(s_i^a, s_j^b) \geq U_a(s_j^a, s_i^b) \text{ se, e somente se, } U_b(s_j^a,s_i^b) \geq U_b(s_i^a,s_j^b)$$

Uma combinação de estratégias fornece uma recompensa maior ou igual à outra combinação de estratégias para um dos jogadores, se o inverso acontecer com o outro jogador. Se vale que:

$$U_b(s_j^a, s_i^b) = U_b(s_i^a, s_j^b)$$

Temos que ter simultaneamente

$$U_a(s_i^a, s_j^b) \geq U_a(s_j^a, s_i^b)$$

$$U_b(s_j^a, s_i^b) \geq U_b(s_i^a, s_j^b)$$

Para o jogador a:

$$U_a(s_j^a, s_i^b) \geq U_a(s_i^a, s_j^b)$$

$$U_a(s_i^a, s_j^b) \geq U_a(s_j^a, s_i^b)$$

Assim:

$$U_a(s_i^a, s_j^b) = U_a(s_j^a, s_i^b)$$

Em um jogo estritamente competitivo, tem-se que: $U_a(s_i^a, s_j^b) = U_a(s_j^a, s_i^b)$ se, e somente se, $U_b(s_i^a, s_j^b) = U_b(s_j^a, s_i^b)$. Um dos jogadores somente é indiferente entre os resultados de duas combinações de estratégias se o outro jogador também o for: Se $U_a(s_i^a, s_j^b) > U_a(s_j^a, s_i^b)$ se, e somente se, $U_b(s_j^a, s_i^b) > U_b(s_i^a, s_j^b)$

Isso porque, se é verdade que para o jogador b:

$$U_b(s_j^a, s_i^b) > U_b(s_i^a, s_j^b)$$

Então temos de, para um jogador:

$$U_b(s_j^a, s_i^b) \geq U_b(s_i^a, s_j^b)$$

Mas não:

$$U_b(s_j^a, s_i^b) \leq U_b(s_i^a, s_j^b)$$

Pela própria definição de jogos estritamente competitivos, para o jogador a:

$$U_a(s_j^a, s_i^b) \leq U_a(s_i^a, s_j^b)$$

Então:

$$U_a(s_i^a, s_j^b) \leq U_a(s_j^a, s_i^b)$$

Os jogadores preferem estritamente uma combinação de resultados a outra, o outro jogador prefere esta segunda combinação de estratégias à primeira. Em termos algébricos, podemos fazer:

$$U_a(s_i^a, s_j^b) = -U_b(s_i^a, s_j^b)$$

Algebricamente, se somarmos as recompensas:

$$U_a(s_i^a, s_j^b) + U_b(s_i^a, s_j^b) = 0$$

Por esse motivo, os jogos estritamente competitivos são chamados de jogos de soma zero. A característica de jogos estritamente competitivos é que $U_a(s_i^a, s_j^b) > U_a(s_j^a, s_i^b)$ se, e somente se, $U_b(s_j^a, s_i^b) > U_b(s_i^a, s_j^b)$. Em outras palavras, não haja combinação de estratégias preferível a qualquer outra para os dois jogadores simultaneamente.

## 5.2 Equilíbrio em jogos estritamente competitivos: minimax e maxmin

Nesse tipo de situação, cada jogador está tomando suas decisões procurando causar o maior dano possível ao outro jogador. Uma estratégia prudente parece ser a de cada jogador tentar minimizar o dano que o outro jogador pode lhe causar.

Consideramos que os dois jogadores estão adotando essa abordagem estratégia mais prudente no momento de escolher suas estratégias. Representamos o que pior pode acontecer para o jogador que está nas colunas como a maior recompensa em cada linha

$$\max_s U(s, t')$$

Ao calcularmos $\max_s U(s, t')$ estamos calculando o que de pior pode acontecer para o jogador que se encontra nas colunas, caso ele escolha jogar a estratégia representada na coluna *t'*. Vamos apresentar a menor recompensa na linha *s'*, após considerarmos todas as colunas da matriz de recompensa, como sendo:

$$\min_t U(s', t)$$

Ao calcularmos $\min_t U(s', t)$ estamos computando para o jogador linha o que pior pode acontecer, caso ele escolha jogar a estratégia representada na linha *s'*.

| | Comboio Japonês | |
|---|---|---|
| Forças Aliadas | Rota Sul ($t_1$) | Rota Norte ($t_2$) |
| Rota Sul $D_1(s_1)$ | 3 | 1 |
| Rota Norte $D_1(s_2)$ | 2 | 2 |

Observaremos as recompensas do jogador linha. Vejamos as maiores recompensas em cada coluna:

$$\max_s U(s,t_1) = (s_1,t_1) = 3$$

$$\max_s U(s,t_2) = (s_2,t_2) = 2$$

Deixando "fixo" a linha, o próximo passo é encontrarmos o menor valor entre as recompensas máximas de cada coluna.

$$\min_t \left\{ \max_s U(s,t) \right\}$$

É fácil concluir que:

$$\min_t \left\{ \max_s U(s,t) \right\} = (s_2,t_2) = 2$$

Essa combinação de estratégias é o valor minimax do jogo da batalha de Bismarck. É o valor que representa o menor dano que o comboio japonês pode garantir dadas suas opções e as dos aliados. Vamos analisar as menores recompensas em cada linha, considerando todas as colunas.

$$\min_t U(s_1,t) = (s_1,t_2) = 1$$

$$\min_t U(s_2,t) = (s_2,t_1) = 2$$

Entre essas duas recompensas, devemos encontrar a maior delas

$$\max_s \left\{ \min_t U(s,t) \right\} = (s_2,t_2) = (s_2,t_1) = 2$$

A recompensa 2 é o valor maxmin da batalha do mar de Bismarck. É o valor que representa o maior dano que os aliados podem garantir dadas as suas opções e as opções da marinha japonesa. temos que:

$$\text{minimax(nas colunas)} = \text{maxmin (nas linhas)}$$

Sempre que isso ocorre, teremos encontrado um equilíbrio em um jogo estritamente competitivo. Em resumo, há uma combinação de estratégias que, ao mesmo tempo, garante ao comboio japonês o mínimo de dias de bombardeiro entre os piores resultados que pode sofrer, e garante às forças aliadas o máximo possível entre o mínimo de dias de bombardeiro que seus aviões pode obter.

**Vejamos um segundo exemplo.**

| | **J2** | | |
|---|---|---|---|
| **J1** | **A** | **B** | **C** |
| $\alpha$ | 4 | 5 | 4 |
| $\beta$ | 3 | 0 | 1 |

Verificaremos se há equilíbrio minimax-maximin para esse jogo. Começaremos avaliando as escolhas de J1. Esse jogador deve escolher a estratégia que proporciona um maior dano a J2. Em outras palavras fixe a coluna e escolha a estratégia com o maior valor numérico:

$$J1 = \underset{s}{Max}\,(s, t_i) = \begin{cases} (s, t_1) = 4 \\ (s, t_2) = 5 \\ (s, t_3) = 4 \end{cases}$$

Agora J1 escolhe o menor valor na coluna, ou seja:

$$J1 = \underset{t}{Min}\left\{\underset{s}{Max}\,(s, t_i)\right\} = 4$$

Nesse caso J2 obtém o menor dano dados as possíveis escolhas de J1. Faremos o processo inverso. J2 observará nas linhas a menor recompensa possível para J1:

$$J2 = \underset{t}{Min}\,(s_i, t) = \begin{cases} (s_1, t) = 4 \\ (s_2, t) = 0 \end{cases}$$

Então J2 escolherá o maior valor nas linhas:

$$J2 = \underset{s}{Max}\left\{\underset{t}{Min}\,(s_i, t)\right\} = 4$$

Em outras palavras, essa é a maior recompensa que J1 pode obter dadas as opções de J2. Assim, nesse jogo há dois equilíbrios do tipo minmax-maxmin $= (\alpha, A)$ e $(\alpha, C)$.

### 5.2.1 Estratégias Mistas

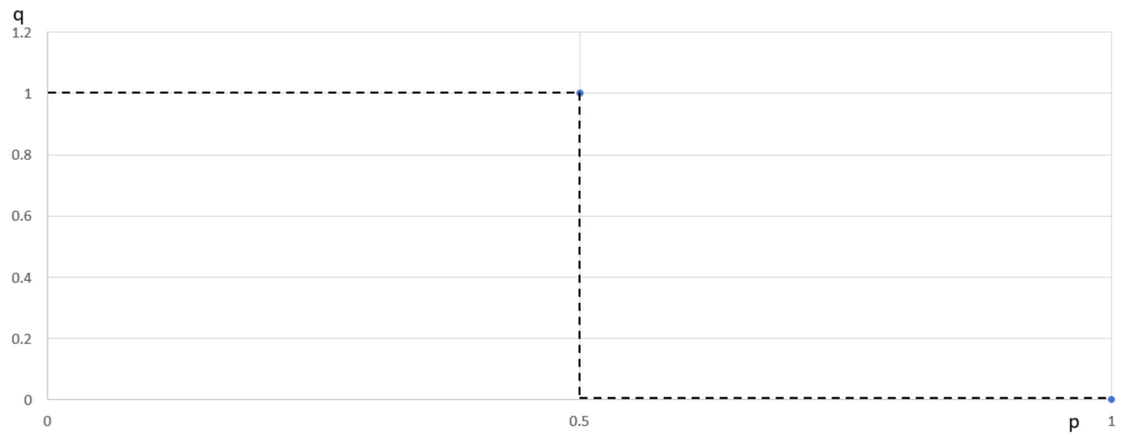
A interpretação mais usual para estratégias mistas é que elas são uma opção estratégica que visa neutralizar os efeitos da estratégia escolhida pelo outro jogador.

**Definição 24.** *Estratégias Mistas*

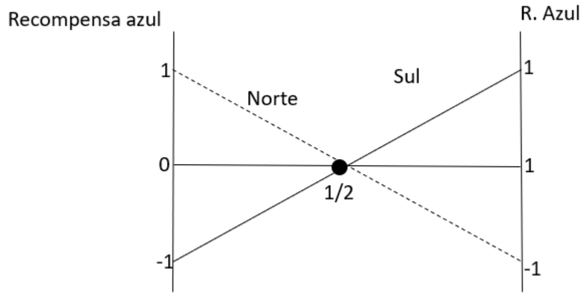
*Quando, em vez de escolher entre suas estratégias uma dada estratégia para jogá-la com certeza, um jogador decide alterná-las aleatoriamente, atribuindo uma probabilidade a cada estratégia escolhida, dizemos que o jogador utiliza estratégias mistas. Caso contrário, dizemos que o jogador emprega estratégias puras.*

**Exemplo de estratégias mistas:** Jogo de prevenção de ataque

| | Vermelho | |
|---|---|---|
| Azul | Sul (q) | Norte (1-q) |
| Sul (p) | 1,-1 | -1,1 |
| Norte (1-p) | -1,1 | 1,-1 |
| Recompensa de Vermelho | $-p+(1-p)=1-2p$ | $p-(1-p)=2p-1$ |




Melhores respostas de vermelho às estratégias mistas de azul



Considere a expressão abaixo como a recompensa esperada de vermelho para qualquer estratégia mista que vermelho e azul adotem:

$$REV = p.q(-1) + p(1-q)(1) + (1-p)(q)(1) + (1-p)(1-q)(-1)$$

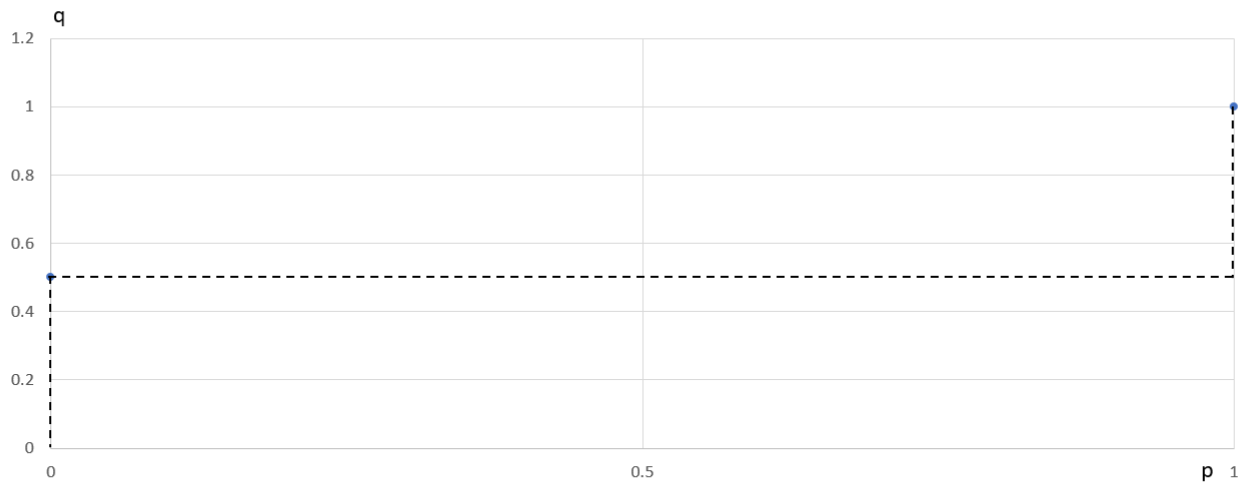
$$= -pq + p + qp + q - pq - (1 - q - p + pq)$$

$$= 2p + 2q - 4pq - 1$$

$$= q(2 - 4p) - 1 + 2p$$

| | Vermelho | | |
|---|---|---|---|
| Azul | Sul (q) | Norte (1-q) | Recompensa Azul |
| Sul (p) | 1,-1 | -1,1 | $q + (-1)(1-q) = 2q - 1$ |
| Norte (1-p) | -1,1 | 1,-1 | $q + (1)(1-q) = 1 - 2q$ |
| Recompensa de Vermelho | $-1(p) + (1-p) = 1 - 2p$ | $p - (1-p) = 2p - 1$ | |

Se $q > \frac{1}{2}$ porto sul, porto norte caso contrário. Melhores respostas de azul dada a estratégia escolhida por vermelho. Para $q < \frac{1}{2}$ Azul deve fazer *p=0*, se $q > \frac{1}{2}$ azul deve fazer $p = 1$. Para o valor $q = \frac{1}{2}$ azul é indiferente para qualquer $p \in [0, 1]$.




A recompensa esperada de azul:

$$REA = pq(1) + p(1-q)(-1) + (1-p)(q)(-1) + (1-p)(1-q)(1)$$

$$= pq - p + pq - q + pq + (1 - q - p + pq)$$

$$= 4pq - 2p - 2q + 1$$

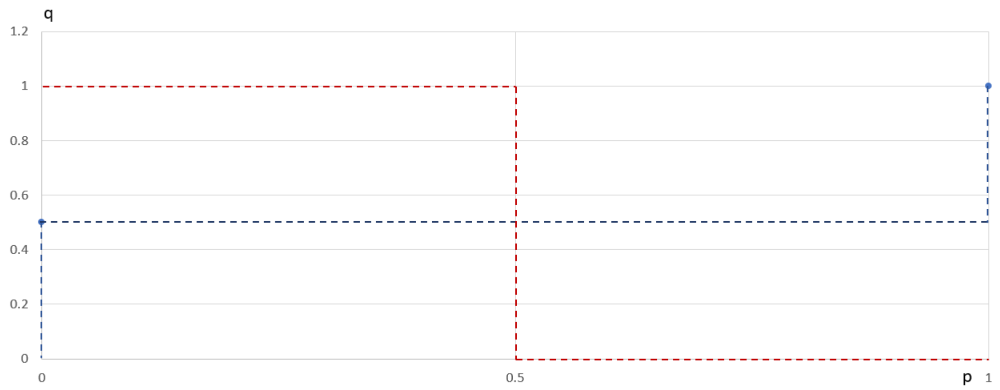
$$= p(4q - 2) - 2q + 1$$

$$\frac{\partial REA}{\partial p} = 4q - 2 = q^* = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial REA}{\partial q} = 4p - 2 = 0 = p^* = \frac{1}{2}$$

Adotar uma estratégia mista indica que não há nada que azul possa fazer para surpreender vermelho. Temos um equilíbrio em estratégias mistas quando $p = q = \frac{1}{2}$ no sentido que nenhum jogador consegue melhorar suas recompensas esperadas alterando a probabilidade de escolha de uma das duas estratégias ou mesmo adotando uma estratégia pura qualquer. Nenhum deles consegue surpreender o outro, o que quer que faça.

$$[(p, (1-p)), (q, (1-q))] = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$$




Uma aplicação de estratégias mistas a jogos não estritamente competitivos

| | União Soviética | |
|---|---|---|
| Estados Unidos | Ameaça(q) | Não ameaça (1-q) |
| Ameaça (p) | -100,-100 | 10,-10 |
| Não ameaça (1-p) | -10,10 | 0,0 |

Esse jogo possui dois EN, em estratégias puras, (Não ameaça, Ameaça) e (Ameaça, Não ameaça).

O problema é que há risco de, na falta de um mecanismo de coordenação, ambos escolham ameaçar. Nesse caso, as estratégias mistas podem ajudar a minimizar as perdas esperadas.

$$REEU = pq(-100) + p(1-q)(10) + (1-p)q(-10) + (1-p)(1-q)(0)$$

$$REUS = qp(-100) + q(1-p)(10) + (1-q)(p)(-10) + (1-q)(1-p)(0)$$

Se conseguirmos encontrar as probabilidades de uma estratégia mista para cada jogador, que o menos façam com que seja indiferente para os jogadores essas estratégias mistas ou quaisquer outras, teremos encontrado o EN em estratégias mistas, num jogo não estritamente competitivo.

$$REEU = -100pq + 10p - 10pq - 10q + 10pq$$

$$= -100pq + 10p - 10q$$

Considere que EU escolhe $p$. Coloque $p$ em evidência:

$$10p(1-10q) - 10q = p(10-100q)$$

$$\text{Se } 1-10q > 0 \to q < \frac{1}{10} \text{ então} p = 1$$

$$\text{Se } 1-10q = 0 \to q = \frac{1}{10} \text{ então} p \in [0,1]$$

$$\text{Se } 1-10q < 0 \to q > \frac{1}{10} \text{então} p = 0$$

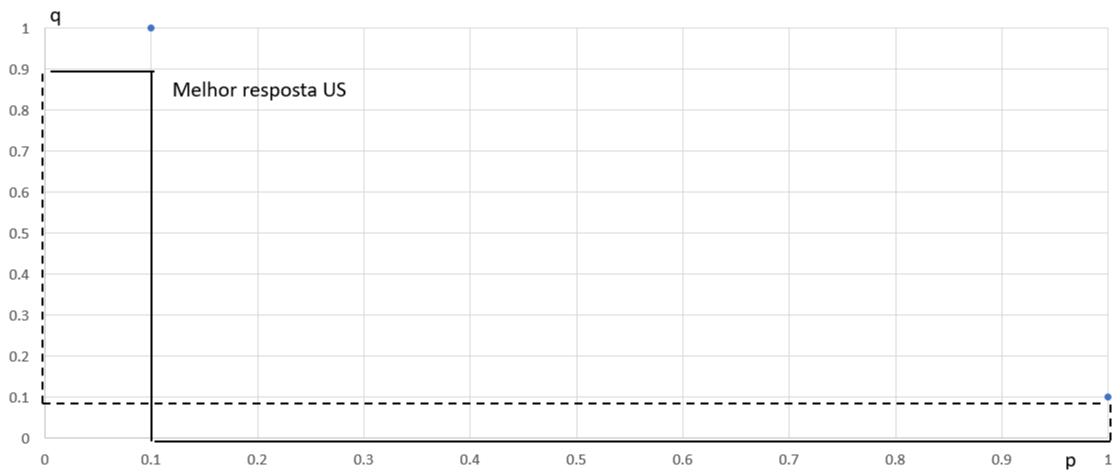
$$\frac{\partial REEU}{\partial p} = 10 - 100q = 0 \to q = \frac{1}{10}$$

$$\text{para US } q = (\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$$

$$\frac{\partial REUS}{\partial q} = 100 + 10 = 0 \to p = \frac{1}{10}$$

$$\text{Para } EU = \left( \overset{p}{\frac{1}{10}}, \overset{1-p}{\frac{1}{10}} \right), (q, 1-q)$$

$$EN = (p, q) = \left( \frac{1}{10}, \frac{1}{10} \right)$$




$$\text{Se } 1 - 10p > 0 \rightarrow p < \frac{1}{10} \text{ então} q = 1$$

$$\text{Se } 1 - 10p = 0 \rightarrow p = \frac{1}{10} \text{então} q \in [0, 1]$$

$$\text{Se } 1 - 10p < 0 \rightarrow \text{p} > \frac{1}{10} \text{ então} q = 0$$

Dada a adoção de estratégias mistas, cada jogador espera uma recompensa média de -1

$$REEU = 10p(1 - 10q) - 10q$$

$$REEU(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}) = 10.\frac{1}{10}(1 - 10.\frac{1}{10}) - 10.\frac{1}{10} = -1$$

$$REUS = q(10 - 100p) - 10p$$

$$REEUS(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}) = -1$$

Pode não parecer bom, mas é o melhor que os jogadores podem obter dada a impossibilidade de coordenarem as suas decisões.

**Teorema.** *Em todo jogo em que há um número finito de jogadores, com um número finito de estratégias, sempre há um equilíbrio de Nash provavelmente em estratégias mistas.*

Para finalizar, vejamos um último exemplo para finalizarmos esse tópico. Dados um batedor de pênaltis e um goleiro, suponha que as chances de que o gol seja marcado sejam dadas pela forma estratégica a seguir, de acordo com o lado que o batedor e o goleiro escolham:

| | | Goleiro | |
|---|---|---|---|
| | | Lado Direito | Lado Esquerdo |
| Batedor | Lado Direito | 30% | 90% |
| | Lado Esquerdo | 80% | 40% |

De acordo com essas informações, verificaremos se há algum equilíbrio do tipo minimax-maxmin e um EN em estrategias mistas.

Note que esse é um jogo estritamente competitivo. Se o Batedor possui 30% de acerto caso chute para o lado direito, então se o Goleiro pular para esse mesmo lado, suas chances são de 70% de defesa:

| | | Goleiro | |
|---|---|---|---|
| | | Lado Direito | Lado Esquerdo |
| Batedor | Lado Direito | 0.3,0.7 | 0.9,0.1 |
| | Lado Esquerdo | 0.8, 0,2 | 0.4,0.6 |

Se subtrairmos 1 da tabela acima e multiplicarmos por 100, chegaremos nos dados da tabela anterior. Começaremos observando as escolhas do Batedor (B): Esse jogador deve escolher a estratégia que proporciona a menor chance defesa para o Goleiro. Em outras palavras fixe a coluna e escolha a estratégia com o maior valor numérico:

$$B = \underset{s}{Max}\,(s, t_i) = \begin{cases} (s, t_1) = 0.8 \\ (s, t_2) = 0.9 \end{cases}$$

Agora $B$ escolhe o menor valor na coluna, ou seja:

$$B = \underset{t}{Min}\left\{\underset{s}{Max}\,(s, t_i)\right\} = 0.8$$

Nesse caso o Goleiro (G) obtém a menor chance de defesa dadas as possíveis escolhas de B. Faremos o processo inverso. G observará nas linhas a menor recompensa possível para B:

$$G = \underset{t}{Min}\left(s_i, t\right) = \begin{cases} (s_1, t) = 0.3 \\ (s_2, t) = 0.4 \end{cases}$$

Então G escolherá o maior valor nas linhas:

$$G = \underset{s}{Max}\left\{\underset{t}{Min}\left(s_i, t\right)\right\} = 0.4$$

Em outras palavras, essa é a maior recompensa que o B pode obter dadas as opções de G. Assim, nesse jogo não equilíbrio do tipo minmax-maxmin. No entanto, devemos verificar se há algum equilíbrio em estratégias mistas. Primeiramente escreveremos os payoffs do seguinte modo:

| | | | G | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | D | E | |
| | | | ***q*** | ***1-q*** | REB |
| B | ***p*** | D | 0.3,0.7 | 0.9,0.1 | *0.3q+0.9(1-q)* |
| | ***1-p*** | E | 0.8, 0,2 | 0.4,0.6 | *0.8q+0.4(1-q)* |
| | REG | | *0.7p+0.2(1-p)* | *0.1p+0.6(1-p)* | |

O próximo passo é encontramos as recompensas esperadas de B e G que computem todas as escolhas estratégicas possíveis, como segue:

$$REB = pq0.3 + p\left(1-q\right)0.9 + q\left(1-p\right)0.8 + \left(1-p\right)\left(1-q\right)0.4$$

$$REB = p\left(0.5-q\right) + 0.4\left(1+q\right)$$

Para que B seja indiferente entre D e E devemos escolher $p$ tal que:

$$\frac{\partial REB}{\partial p} = (0.5-q) = 0$$

$$q = 0.5$$

Quando $q = 0.5$, B é indiferente entre jogar D ou E. O processo é análogo para G:

$$REG = pq0.7 + p\left(1-q\right)0.1 + q\left(1-p\right)0.2 + \left(1-p\right)\left(1-q\right)0.6$$

$$REG = q\left(p-0.4\right) - 0.4q + 0.6$$

Para que G seja indiferente entre D e E devemos escolher $q$ tal que:

$$\frac{\partial REB}{\partial q} = \left(p-0.4\right) = 0$$

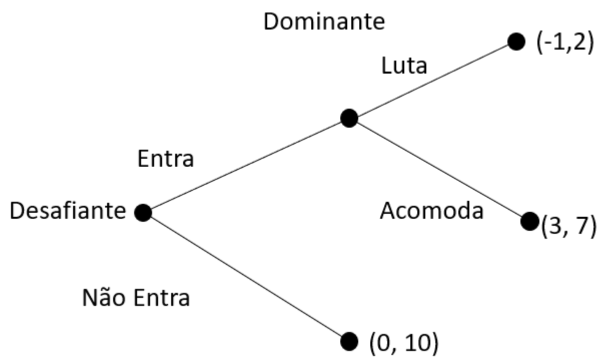
$$p = 0.5$$

Assim, o EN em estratégias mistas é:

$$EN = \left(p,q\right) = \left(0.5, 0.4\right)$$

# 6 Jogos Sequenciais

Analisaremos novamente o jogo da entrada:




Vejamos esse mesmo jogo na forma estratégica

| | Dominante | |
|---|---|---|
| Desafiante | Luta | Acomoda |
| Entra | -1,2 | 3,7 |
| Não Entra | 0,10 | 0,10 |

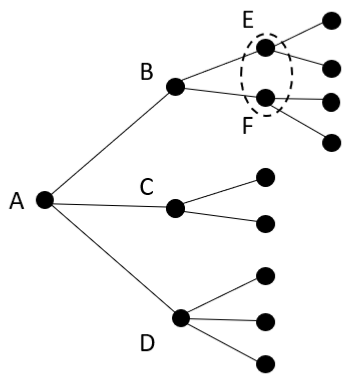
Há dois EN: (Não entra, luta), (Entra, acomoda). Parece que a estratégia luta não faz muito sentido para a empresa dominante. O conceito de EN visto até aqui não está considerando a ordem em que os jogadores estão tomando as decisões. Precisaremos de um refinamento do EN que considere a ordem em que os jogadores tomam suas decisões. A esse refinamento daremos o nome de: EN perfeito em subjogos (ENPS). Primeiramente, definiremos o que é um subjogo:

**Definição 25.** *Subjogo. Um subjogo é qualquer parte de um jogo na forma extensiva que obedece as seguintes condições:*

*Sempre inicia em um único nó de decisão;*

*Sempre contém todos os nós que se seguem ao nó no qual ele se iniciou;*

*Se contiver qualquer nó de um conjunto de informação, ele conterá todos os nós do conjunto de informação*

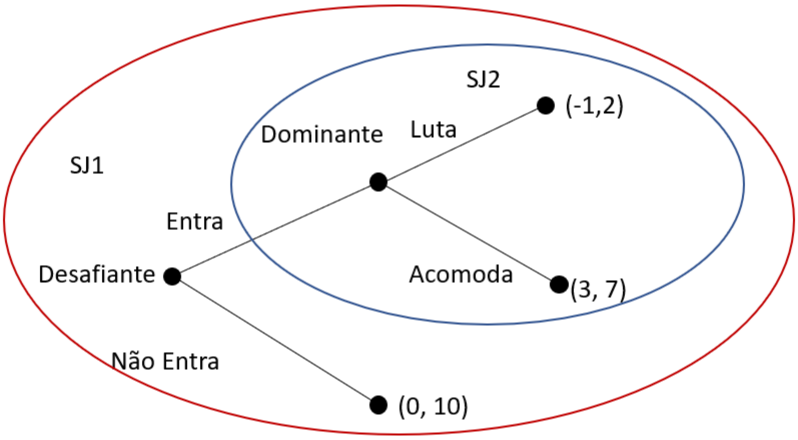



Temos 4 subjogos: A, B, C e D. Há um conjunto de informação em E e F, por isso esses nós não constituem 2 subjogos.

**Definição 26.** *Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos*

*Uma combinação de estratégias é um ENPS se ela preenche simultaneamente as duas condições seguintes: (a) É um EN para o jogo em sua totalidade; e (b)É um EN para cada subjogo*

**Teorema 1.** *Todo ENPS é um EN, mas nem todo EN em um jogo sequencial é necessariamente um ENPS.*



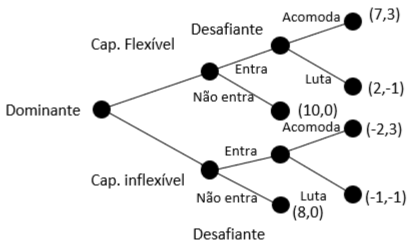

Para “selecionar” os vários possíveis EN de um jogo sequencial, devemos usar o método da indução reversa ou retroativa. Esse método consiste em analisar o jogo de trás para frente, indo das recompensas dos jogadores até o primeiro nó de decisão que aparece isoladamente, e procurando identificar as melhores opções para cada jogador. No SJ2 a estratégia que dá o maior ganho para a dominante é Acomoda, consideremos ela como a melhor opção. Analisando o SJ1 e sabendo que se a desafiante entrar, a dominante acomodará, o ENPS será o conjunto de estratégia (Entra, Acomoda)

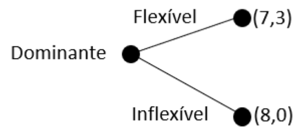
**Definição 27.** *Em um jogo sequencial de informação perfeita, uma combinação de estratégias é um ENPS se, e somente se, essa combinação é selecionada como um EN por intermédio de indução retroativa.*

## 6.1 Tornando ameaças e promessas críveis: movimentos estratégicos

**Definição 28.** *Movimentos Estratégicos*

*São ações adotadas pelos jogadores que visam alterar alguma característica do jogo, em geral a ordem em que os jogadores jogam ou as recompensas dos jogadores.*






ENPS: (Inflexível, não entra)

## 6.2 Jogos sequenciais de estratégias contínuas

### 6.2.1 Modelo de Stackelberg (liderança de quantidades)

Há 2 empresas, a empresa líder (empresa 1) decide antes da outra o quanto irá produzir

$$p(q) = A - bQ$$

Q é a demanda do mercado:

$$Q = q_1 + q_2$$

$$RT_1 = p(q)q_1 = Aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2$$

$$RT_2 = p(q)q_2 = Aq_2 - bq_2^2 - bq_1q_2$$

As funções de custo: $C_1 = cq_1$ e $C_2 = cq_2$. A empresa 2 decide depois da empresa 1 e portanto toma $q_1$ como dado. A função de reação da empresa 2 é:

$$\pi_2 = Aq_2 - bq_1q_2 - bq_2^2 - cq_2$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = A - bq_1 - 2bq_2 - c = 0$$

$$q_2^* = \frac{A - bq_1 - c}{2b}$$

A empresa líder considera $q_2^*$ ao decidir o quanto irá produzir

$$\pi_1 = Aq_1 - bq_1q_2 - bq_1^2 - cq_1$$

$$\pi_1 = Aq_1 - bq_1^2 - bq_1\left(\frac{A - bq_1 - c}{2b}\right) - cq_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = A - 2q_1b - \frac{b^2 2q_1}{2b} - c - \frac{bA}{2b} - \frac{cb}{2b} = 0$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = A - 2q_1 b - \frac{A}{2} - bq_1 - \frac{c}{2} - c = 0$$

$$\frac{A-c}{2} - bq_1 = 0$$

$$\frac{A-c}{2b} = q_1^*$$

$$q_2^* = \frac{A-c}{2b} - \frac{1}{2}q_1^*$$

$$q_2^* = \frac{A-c}{2b} - \frac{1}{2}(\frac{A-c}{2b})$$

$$q_2^* = \frac{A-c}{2b}(1-\frac{1}{2}) = \frac{A-c}{4b}$$

### 6.2.2 Conluio tácito

Suponha que a empresa dominante conhece os custos das empresas menores de tal forma que consiga estimar sua curva de oferta $S_1$ :

$$S_2 = 4p$$

A empresa dominante conhece a demanda de mercado:

$$D = 100 - p$$

A empresa dominante obtém a sua demanda como um resíduo entre a demanda de mercado e a $S_2$ :

$$S_1 + S_2 = D \rightarrow D - S_2 = S_1$$

$$S_1 = 100 - 5p$$

Supomos que o custo total da empresa dominante seja $c_1 = 2S_1$

Os lucros são:

$$\pi = p.S_1 - c = (\frac{100 - S_1}{5}).S_1 - 2S_1$$

$$\pi = 20S_1 - \frac{1}{5}S_1^2 - 2S_1$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial S_1} = 20 - \frac{2}{5}S_1 - 2 = 0 \rightarrow 18 = \frac{2}{5}S_1$$

Então:

$$p = \frac{100 - 45}{5} = 11$$

$$S_2^* = 4p = 44$$

# 7 Jogos Repetidos

A interação estratégica entre duas empresas, relação consumidor-fornecedor, nos dá uma ideia da história de comercialização entre essas duas empresas. Pode acontecer que embora os jogadores conheçam as decisões que foram tomadas em etapas anteriores a cada nova etapa em que são chamados a decidir, eles o façam sem aber o que os demais jogadores estão decidindo naquela etapa. Aplicaremos o conceito de jogos repetidos para cartéis, para isso usaremos o modelo de Cournot.

## 7.1 Modelo de Cournot

Faremos uma breve apresentação do modelo expressando a função de demanda e as funções de custo das duas empresas:

$$P = 100 - Q; Q = q_1 + q_2$$

$$C_1 = 4q_1 \text{ e } C_2 = 4q_2$$

Aqui temos as funções de recompensa:

$$\pi_1 = (100 - q_1 - q_2).q_1 - 4q_1$$

$$\pi_2 = (100 - q_1 - q_2).q_2 - 4q_2$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 100 - 2q_1 - q_2 - 4 = 0 \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 100 - 2q_2 - q_1 - 4 = 0 \tag{7.2}$$

$$q_1 = 100 - 2q_2 - 4 \tag{7.3}$$

$$100 - 2.(100 - 2q_2 - 4) - q_2 - 4 = 0$$

$$100 - 200 + 4q_2 + 8 - q_2 - 4 = 0$$

$$-100 + 3q_2 + 4 = 0$$

$$q_2^* = q_1^* = \frac{96}{3} = 32$$

$$\pi_1 = \pi_2 = 1024$$

Equilíbrio de Nash do Modelo de Cournot: Não coopera, Não coopera

### 7.1.1 Situação em que as duas cooperam

$$q^c = q_1 = q_2$$

$$\pi_1 = 100 - 2q_1^2 - 4q_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 100 - 4q_1 - 4 = 0$$

$$q_1^* = q_2^* = 24$$

$$\pi_1 = 1152$$

Esse é o equilíbrio (Coopera, Coopera) em que as duas empresas cooperam.

### 7.1.2 Monopólio

$$\pi = (100 - q).q - 4q$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial q} = 100 - 2q - 4 = 0$$

$$q = \frac{96}{2} = 48$$

$$p = 52$$

### 7.1.3 Traição

Suponha que a empresa 2 mantém $q^{cartel}$ e a empresa 1 acredita que não há honra entre ladrões e mantém a quantidade de Cournot. O preço de mercado será $p = 100 - q_1^{cournout} - q_2^{cartel} = 100 - 32 - 24 = 44$

$$\pi_2 = pq_2 - cq_2 = (44.24) - 4.24 = 960$$

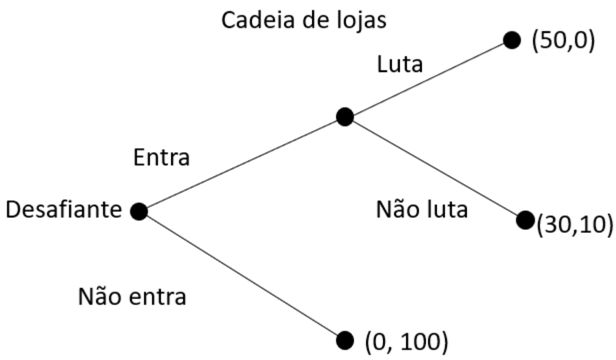
$$\pi_1 = pq_1 - cq_1 = (44.32) - 4.32 = 1290$$

Esse equilíbrio é o Não coopera, Coopera

| | Empresa 2 | |
|---|---|---|
| Empresa 1 | Coopera | Não Coopera |
| Coopera | 1152,1152 | 960,1280 |
| Não Coopera | 1280,960 | 1024,1024 |

O EN é Não coopera, Não coopera e esse tipo de jogo nada mais é do que uma versão do dilema dos prisioneiros. Os jogadores se veem presos a um equilíbrio subótimo, uma vez que os ganhos resultantes de desrespeitar o acordo são suficientemente tentadores para impedir que os agentes cooperem entre si e atinjam uma posição que represente uma melhoria no sentido de pareto. Finalmente, temos um resultado interessante em um jogo finito do tipo dilema dos prisioneiros, não temos razão para acreditar que os jogadores adotarão estratégias cooperativas.

**Vejamos o paradoxo da cadeia de lojas:**




Uma loja de departamentos deve impedir a entrada de uma empresa desafiante em 15 cidades. Veja que na 15ª cidade não seria racional para a cadeia de lojas lutar contra a desafiante. Essa informação é de conhecimento comum entre os jogadores, e não há nenhum ganho de reputação em impedir a entrada na 14ª cidade e assim por diante. As estratégias dos jogadores, em jogos repetidos (sejam finitos ou infinitos) especificam, dada a história do jogo até ali, que ação tomar em cada etapa do jogo.

**Definição 29.** *Subjogo em jogos finitos Em um jogo repetido* n *vezes, um subjogo começando em uma dada etapa do jogo* t *é o jogo repetido que é jogado de* t *até a* n-ésima *(e última) etapa.*

**Exemplo.** Jogo do dilema dos prisioneiros - Primeira Rodada - T1

| | J2 | |
|---|---|---|
| J1 | Coopera | Não Coopera |
| Coopera | 1,1 | -1,2 |
| Não Coopera | 2,-1 | 0,0 |

Suponha que os jogadores decidam cooperar na primeira rodada.

Isso significa que podemos somar (1,1) às recompensas representadas no jogo base que os jogadores obtiveram na primeira etapa. Devemos somar a cada etapa a recompensas da primeira etapa, por exemplo, se o jogo começa por Não Coopera, Coopera devemos somar (2,-1).

| | J2 | |
|---|---|---|
| J1 | Coopera | Não Coopera |
| Coopera | 2,2 | 0,3 |
| Não Coopera | 3,0 | 1,1 |

Se o jogo fosse repetido 3x:

Subjogo começando de CO,CO

| J1 \ J2 | Coopera | Não Coopera |
|---|---|---|
| Coopera | 2,2 | 0,3 |
| Não Coopera | 3,0 | 1,1 |

Subjogo começando de NO,CO

| J1 \ J2 | Coopera | Não Coopera |
|---|---|---|
| Coopera | 3,0 | 1,1 |
| Não Coopera | 4,-2 | 2,-1 |

Subjogo começando de CO,NC

| J1 \ J2 | Coopera | Não Coopera |
|---|---|---|
| Coopera | 0,3 | -2,4 |
| Não Coopera | 1,1 | -1,2 |

Subjogo começando de NC,NC

| J1 \ J2 | Coopera | Não Coopera |
|---|---|---|
| Coopera | 1,1 | -1,2 |
| Não Coopera | 2,-1 | 0,0 |

Na medida que somamos um mesmo valor a todas as recompensas do jogo base, a estrutura do jogo não se modifica e, desse modo, o que era o único EN no jogo base continua EN na n-ésima etapa do jogo repetido.

**Definição 30.** *Qualquer jogo repetido n vezes, em que o jogo base apresente um EN, possui um único ENPS que consiste jogar EN do jogo base em todas as n etapas.*

**Definição 31.** *Em um jogo repetido finito, em que o jogo base apresenta mais de um EN, qualquer sequência de combinações estratégias que sejam EN no jogo base pode constituir um ENPS.*

| Sysop \ Antivírus | Atualizar | Não Atualizar |
|---|---|---|
| Desenvolver | 2,1 | -1,-2 |
| Não Desenvolver | 0,-1 | 1,2 |

**Definição 32.** *Escolha desenvolver no 1º período e então, não desenvolva uma nova ferramenta no segundo, e escolha atualizar no primeiro e então não atualizar no segundo para antivírus é um ENPS. Como temos 2 EN no jogo base, qualquer combinação desses equilíbrios em cada etapa pode constituir um ENPS.*

Há também combinações de estratégia que não envolvam um EN no subjogo, podem, ainda assim, constituir um ENPS.

| Empresa Automobilística | Fornecedor Urgente | Normal | Rápida |
|---|---|---|---|
| Peça Liga Especial | 4,3 | 0,0 | 2,5 |
| Peça Aço Comum | 0,1 | 2,2 | 0,1 |

Há 2 EN: (Aço comum, normal), (liga especial, rápida).

**Definição.** Imagine que o jogo seja repetido (2x) há algum ENPS no qual seja possível jogar (liga especial, urgente).

Imagine um contrato por 2 anos em que no primeiro ano a empresa automobilística vai solicitar a peça com liga especial a ser entregue com urgência e no segundo ano pedirá a mesma peça com entrega rápida. Contudo, se a peça solicitada no 1º ano não for entregue com urgência, no segundo ela pedirá a peça em aço comum com entrega normal.

O fornecedor não possui incentivos a desviar: 1º ganha 3, 2º ganha 5= 3+5=8

$\rightarrow$ Se desviar, os ganhos são 5 e 2 = 7

Assim, jogos repetidos n vezes que possuam mais de um EN no jogo base podem ter ENPS que envolvam resultados, el alguma das n repetições, do jogo base, que não sejam EN desse jogo.

### 7.1.4 Jogos infinitamente repetidos: Tentando promover a cooperação

Suponha que uma autoridade pública deseja impor uma penalização em um jogo de dilema dos prisioneiros, de tal que forma que os indivíduos cooperem

| J1 | J2 Coopera | Não Coopera |
|---|---|---|
| Coopera | 1,1 | $-1, (2-x)$ |
| Não Coopera | $(2-x), -1$ | $(0-x), (0-x)$ |

O valor de x deve ser tal que a estratégia cooperativa se torne estritamente dominante em relação à estratégia não cooperativa

$$1 > 2 - x \rightarrow -1 > -x \rightarrow x > 1$$

O problema aqui é que nem sempre a autoridade externa possui informações suficientes para identificar o valor correto da punição a ser aplicada. Os jogadores podem achar que ainda vale a pena sofrer a punição frente aos ganhos líquidos que podem obter. O número de jogadores também pode aumentar excessivamente o custo de coação por parte de uma agência reguladora.

Contudo, a cooperação pode ocorrer se os jogadores não sabem quando o jogo termina. O processo de iteração estratégica é dito infinito nesse caso.

Quando abordamos o tema de recompensas futuras, em jogos repetidos infinitamente, devemos descontar o recebimento de valores futuros. Por exemplo, 1 real hoje vale certamente mais do que 1 real daqui a 2 anos. Você pode simplesmente pensar no custo de oportunidade de ter esse valor monetário e das oportunidades de investimento.

O fator de desconto incorpora a incerteza dos jogadores quanto ao término do processo de interação estratégica.

Seja $\delta \in ]0,1[$ o fator de desconto associado a uma taxa de juros r>0.

$$\delta = \frac{1}{1+r}$$

Se os jogadores possuem preferências intertemporais e haja ao mesmo tempo uma probabilidade de o jogo terminar a cada repetição, o fator de desconto teria de considerar essas duas dimensões.

$$\delta = \frac{1-p}{1+r}$$

Sendo p a probabilidade do jogo terminar a cada repetição. Suponha que o jogador receba a recompensa de 1 real a cada período. O valor presente pode ser obtido da seguinte forma:

$$1 + 1\delta + 1\delta^2 + 1\delta^3 + ...$$

Sabendo que $\delta$<1, temos a soma dos termos de uma progressão geométrica

$$S = \frac{1}{1-\delta}$$

ou o valor presente descontado.Vamos analisar o dilema dos prisioneiros sob uma estratégia chamada gatilho (trigger).

**Definição 33.** *Estratégia trigger*

*É uma estratégia que determina, para o jogador que a adota, seguir um curso de ação contando que uma determinada condição é satisfeita, e caso essa condição deixe de ser atendida, o jogador deve seguir outro curso de ação.*

**Definição 34.** *Estratégia Grim (severa)*

*O jogador adotará a estratégia coopera, desde que o outro jogador assim o faça. Se o outro jogador deixar de cooperar, o primeiro não cooperará mais durante o restante do jogo.*

**Definição 35.** *Estratégia Tit-for-Tat*

O jogador cooperará na primeira rodada e observará o comportamento do outro jogador. Na segunda rodada, ele fará o que o segundo tiver feito na rodada anterior e assim por diante.

Se a estratégia severa fosse aplicada ao dilema dos prisioneiros:

Suponha que J2 decida não cooperar na 1ª rodada e J1 está adotando a estratégia grim, ou seja, cooperará na primeira rodada e punirá o J2 se ele não cooperar. A recompensa J2 é:

$$2 + 0.\delta + 0.\delta^2 + ... = 2$$

Se J2 também adota a estratégia severa, então ambos cooperam, e os ganhos são $= \frac{1}{1-\delta}$ Qual seria o melhor para J2?

$$\frac{1}{1-\delta} > 2 \text{ ou } S > \frac{1}{2}$$

Se $\delta > \frac{1}{2}$, é melhor para J2 sempre cooperar. Em geral é mais vantajoso cooperar para os jogadores a não ser que $\delta \to 0$. Se *J2* decide cooperar até a etapa t e depois trai, a regra é a seguinte

$$\frac{\delta^t}{1-\delta} > 2.\delta t \text{ ou seja } \frac{1}{1-\delta} > 2$$

Essa análise nos leva a seguinte definição:

**Definição 36.** *Subjogos em jogos infinitamente repetidos*

**Definição.** Em jogos infinitamente repetidos, um subjogo começando em uma dada etapa do jogo t é o jogo repetido, o qual é jogado da etapa t em diante. Desse modo, jogos infinitamente repetidos, cada jogo que se inicia em uma determinada etapa é idêntico ao jogo original.

**Teorema 2.** *Em dilemas dos prisioneiros infinitamente repetidos, dadas as recompensas dos jogadores, se o fator de desconto for suficientemente elevado, isto é, se os jogadores forem suficientemente pacientes, a cooperação pode ser sustentada por meio da adoção de uma estratégia severa.*

**Definição 37.** *ENPS em jogos infinitamente repetidos. Dizemos que um conjunto de estratégias constitui um ENPS em jogos infinitamente repetidos quando, para qualquer que seja a história do jogo até uma dada etapa, essas estratégias maximizam o valor presente das recompensas para os jogadores, daquela etapa em diante*

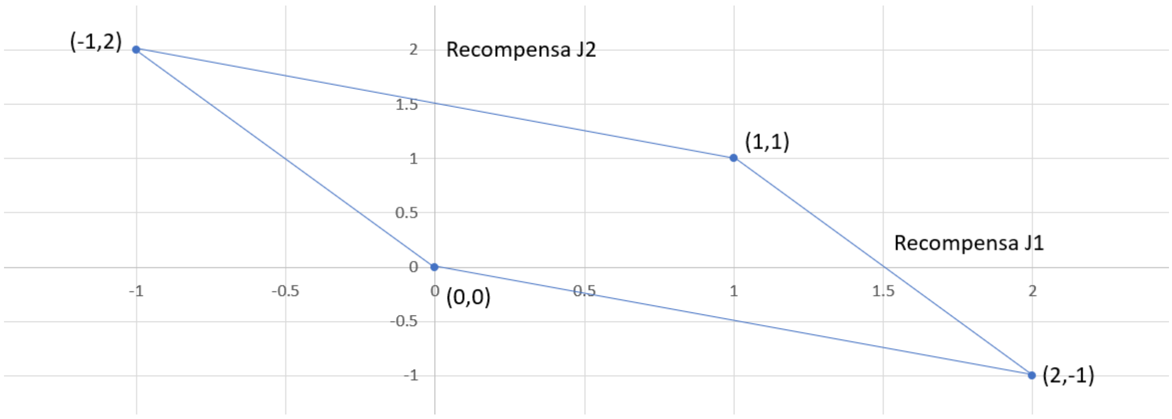
Nesse exemplo que apresentamos, há 2 ENPS: cooperar adotando a estratégia severa e não cooperar.

### 7.1.5 Muitas possibilidades de cooperação

Suponha que $\delta$ é uma série de recompensas em que cada $v_i$ é diferente um do outro. Cabe destacar que os $v_i s$ podem ser iguais entre si, mas deve haver pelo menos um $v_j$ que seja diferente. Seja V a soma descontada da série de recompensas. Para que o jogador seja indiferente entre $v_1 + v_2 + v_3 + ...$ e $a + a + a + ...$ o valor presente das séries deve ser igual

$$V = \frac{a}{1-\delta} \rightarrow V(1-\delta) = a$$

a ou $v(1-\delta)$ são definidos como a recompensa média descontada da série de recompensas $v_1 + v_2 + v_3 + ....$ Se multiplicarmos a ou $V(1-\delta)$ por $(1-\delta)$ obteremos o valor médio dessas recompensas por período.




Os pontos indicam as recompensas dos jogadores no dilema dos prisioneiros. Vetores obtidos como médias ponderadas das recompensas (em que a soma dos pesos é igual a 1) são chamadas de vetores factíveis do jogo base. O ponto chave desses vetores é que se o fator de desconto for muito próximo de 1, o conjunto das recompensas médias descontadas geradas por um jogo infinitamente repetido é aproximadamente igual ao conjunto de vetores factíveis do seu respectivo jogo base.

Seja $a = b = 0,5$ então $a+b = 1$. O vetor $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pode ser obtido pela média ponderada dos vetores (0,0) e (1,1). a(0,0)+b(1,1)=$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Suponha que os jogadores cooperem na primeira rodada e a partir daí alternem entre a estratégia não coopera e coopera. Essa combinação de estratégias produz uma série de recompensas para cada jogador:

$$1 + (0.\delta) + (1.\delta^2) + (0.\delta^3) + ...$$

$$\frac{1}{1-\delta^2}$$

Para chegar a recompensa média bastar multiplicarmos por $(1-\delta)$

$$\frac{1}{1-\delta^2}.(1-\delta) = \frac{1}{(1+\delta)(1-\delta)}.(1-\delta) = \frac{1}{1+\delta}$$

$$\text{Se } \delta \to 1 \text{ então } \frac{1}{1+\delta} \to \frac{1}{2}$$

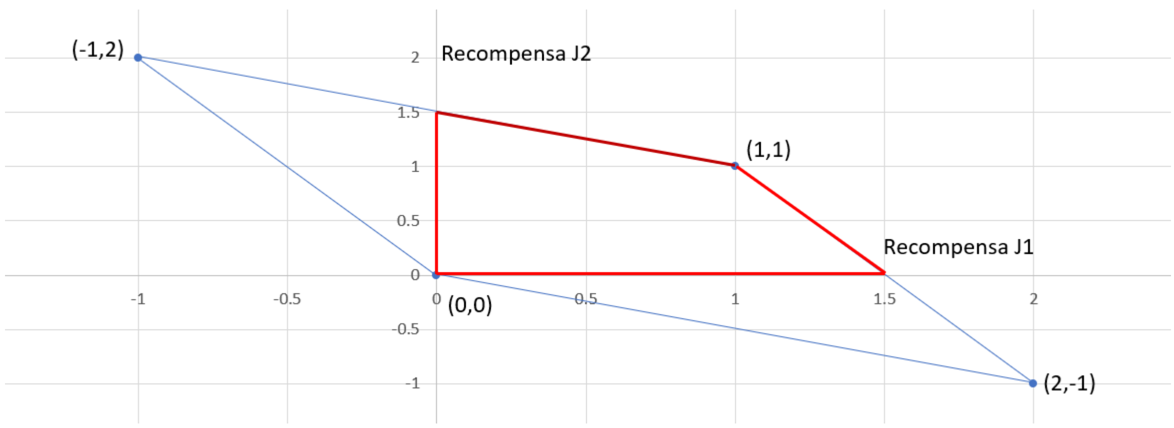
**Teorema.** *Teorema Popular (Folk Theorem)*

1. Para qualquer fator de desconto $\delta \in ]0{,}1[$, a recompensa média descontada de cada jogador em qualquer EN de um jogo infinitamente repetido cujo jogo base é um dilema dos prisioneiros é, ao menos, a recompensa de ambos não cooperarem.

2. Se *(x,y)* é um vetor factível de recompensas de um dilema dos prisioneiros, e as recompensas determinadas por $(x, y)$ para os dois jogadores são estritamente maiores do que as recompensas determinadas pelo EN do dilema dos prisioneiros, então existe um $\delta < 1$ para o qual $(x, y)$ representa médias descontadas dos dois jogadores em um EN perfeito no jogo infinitamente repetido.

3. Para qualquer $\delta \in ]0{,}1[$ o jogo infinitamente repetido do dilema dos prisioneiros possui um EN perfeito em que a recompensa média descontada dos jogadores é dada pela repetição da estratégia (Não coopera, Não coopera).

Se o fator de desconto fosse próximo de 1, os equilíbrios estariam na área hachurada




Caso os jogadores sejam suficientemente pacientes há um número infinito de estratégias que combinam cooperação em maior ou menor grau e podem compor ENPS

## 7.2 Estabilidade em cartéis

Supomos que as 2 empresas produzam a metade da quantidade de monopólio no 1º período e a partir daí continuam repetindo esse procedimento se a outra firma o fizer, caso contrário produzir daí por diante a quantidade do equilíbrio de Cournot.

Sabemos que :

$$\pi_{\frac{monopolio}{2}} > \pi_{cartel}$$

Se a empresa (uma delas) não coopera:

$$\pi_{nc} > \pi_{cartel} > \pi_{cournot}$$

Se as duas obedecem ao cartel:

$$\pi_{cartel} + \delta\pi_{cartel} + \ldots$$

$$\frac{\pi_{cartel}}{1-\delta}$$

Suponha que uma das empresas não obedece a quantidade de cartel na 1ª rodada:

$$\pi_{nc} + \delta\pi_{cournot} + \delta^2\pi_{cournot} + \ldots$$

$$\pi_{nc} + \frac{\delta\pi_{cournot}}{1-\delta}$$

O cartel se sustenta se:

$$\frac{\pi_{cartel}}{1-\delta} > \pi_{nc} + \frac{\delta\pi_{cournot}}{1-\delta}$$

$$\frac{\pi_{cartel-\pi_{cournot}}}{1-\delta} > \pi_{nc}$$

$$\frac{\pi_{cartel-\pi_{cournot}}}{\pi_{nc}} > 1-\delta$$

$$\pi_{cartel} > (1-\delta)\pi_{nc} + \delta\pi_{cournot}$$

$$\pi_{cartel} - \pi_{nc} > \delta(\pi_{cournot} - \pi_{nc})$$

$$\frac{\pi_{nc} - \pi_{cartel}}{\pi_{nc} - \pi_{cournot}} < \delta$$

# 8 Jogos Simultâneos de informação incompleta: Desenho de Leilões

Imagine o problema de uma multinacional que contrata fornecedores, sendo que esses podem agir irresponsavelmente desrespeitando regras trabalhistas ou ambientais. Digamos que o custo de contratar a mão de obra terceirizada de um país emergente é mais barato para a grande companhia. Representaremos o jogo sendo o fornecedor responsável.

| | Multinacional | |
|---|---|---|
| Fornecedor Responsável | Contrata | Não Contrata |
| Age Resposávelmente | 2,2 | 0,-1 |
| Age Irresponsavelmente | -1,-2 | -1,0 |

O problema, contudo, é que quando o preço oferecido pelo fornecedor em uma negociação é baixo, e a empresa multinacional não sabe se esse preço baixo é resultante de economias de escala e/ou de escopo ou apenas de um comportamento socialmente irresponsável oriundo de uma legislação frágil ou de problemas de regulação.

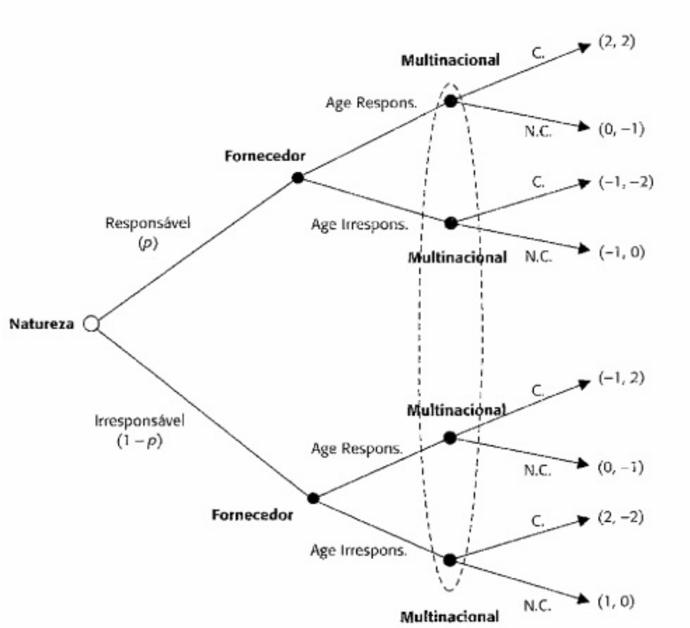
| | Multinacional | |
|---|---|---|
| Fornecedor irresponsável | Contrata | Não Contrata |
| Age Resposávelmente | -1,2 | 0,-1 |
| Age Irresponsavelmente | 2,-2 | 1,0 |

O problema da empresa multinacional é identificar em qual dos jogos ela se encontra.

**Definição 38.** *Informação completa. Um jogo é dito de informação completa quando as características dos jogadores não são de conhecimento comum, o que tem consequências sobre as recompensas dos jogadores, uma vez que é por meio dessas recompensas que expressamos, em jogos, a natureza dos jogadores.*

Em jogos de informação incompleta, temos um *pseudo* jogador chamado *Natureza*, que escolhe ou atribui a probabilidade $p \in [0,1]$ ao tipo do evento. Em nosso exemplo anterior, ao jogador (fornecedor) ser responsável ou irresponsável.

Nesse tipo de jogo é possível que um jogador possa inferir a probabilidade dos demais jogadores serem de determinado tipo a partir dos seu próprio tipo. Por simplicidade, supomos que os jogadores possuem tipos independentes e compartilham de uma crença prévia comum em relação a escolha da natureza. Transformaremos o jogo de informação incompleta em um jogo de informação imperfeita.




A empresa multinacional não sabe a verdadeira característica do fornecedor e se vê obrigada a formar uma crença em relação ao tipo que ele pode ser. Vamos calcular as recompensas do fornecedor:

| | | Multinacional | |
|---|---|---|---|
| | Ação | Contrata | Não Contrata |
| | AR,AR | $2p + (-1)(1-p) = 3p - 1$ | $0p + 0(1-p) = 0$ |
| Fornecedor | AR,AI | $2p + 2(1-p) = 2$ | $0p + (1-p) = 1 - p$ |
| | AI,AR | $-p + (-1)(1-p) = -1$ | $-p + 0(1-p) = -p$ |
| | AI,AI | $-p + 2(1-p) = -3p + 2$ | $-1p + (1-p) = -2p + 1$ |

Analogamente, podemos calcular a recompensa da multinacional. Expressaremos todas as informações reunidas em uma única tabela

| | | Multinacional | |
|---|---|---|---|
| | Ação | Contrata | Não Contrata |
| | AR,AR | *3p-1,2* | *0,1* |
| Fornecedor | AR,AI | *2,4p-2* | *1-p,-p* |
| | AI,AR | *-1, 4p+2* | *-p,p-1* |
| | AI,AI | *-3p+2,-2* | *1-p,0* |

A forma estratégica do jogo da subcontratação é um exemplo da forma estratégica Bayesiana e o jogo é um jogo Bayesiano simultâneo.

**Definição.** Equilíbrio de Nash Bayesiano

Um equilíbrio de Nash Bayesiano é aquele em que a combinação de estratégias adotadas pelos jogadores maximiza as recompensas de cada jogador, dadas as estratégias dos demais jogadores, seus tipos e as probabilidades atribuídas aos tipos dos demais jogadores.

Por simplicidade, assumiremos o valor de $p = 0.5$ para solucionarmos o jogo:

| | | Multinacional | |
|---|---|---|---|
| | Ação | Contrata | Não Contrata |
| | AR,AR | *0.5,2(c)* | *0,1* |
| Fornecedor | AR,AI | *(l)2,0(c)* | *(l)0.5,-0.5* |
| | AI,AR | *-2, 0(c)* | *-0.5,-0.5* |
| | AI,AI | *0.5,-2* | *0,0(c)* |

Para um $p = 0.5$ o ENB é $\{(AR, AI), C\}$.

## 8.1 Modelo de Cournot com informação incompleta

Suponha que a empresa 1 pertença a um grupo homogêneo de empresas e que todas possuem a mesma tecnologia e os mesmos custos, sendo esses últimos de conhecimento comum. Contudo a empresa 2 pertence a uma população que se divide em dois grupos: um de custos elevados e outro de custos baixos. Suponha que há $p$ chances da empresa ser de baixo custo e $(1-p)$ se der de alto.

Seja um mercado compartilhado por essas duas companhias:

$$p(Q) = A - b(q_1 + q_2)$$

Se a empresa 2 for de baixo custo:

$$C_2^B = cq_2^B$$

Se for de alto $C_2^A = c_A q_2^A$ e se for baixo, $C_2^B = c_B q_2^B$ com $c_A > c_B$. A função de recompensa da empresa 2 é:

$$\pi_2^B = \left[A - b\left(q_1 + q_2^B\right) q_2^B\right] - C_B q_2^B$$

$$\pi_2^A = \left[A - b\left(q_1 + q_2^A\right)\right] q_2^A - C_A q_2^A$$

Em relação a empresa 1, seus custos podem ser representados por:

$$C_1 = cq_1$$

A função de recompensa da empresa 1 é:

$$\pi_1 = (1-p)\left[A - b\left(q_1 + q_2^A\right)\right] q_1 + p\left[A - b\left(q_1 + q_2^b\right)\right] q_1 - cq_1$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = p(A - 2bq_1 - bq_2^A) + (1-p)(A - 2bq_1 - bq_2^B) - c = 0$$

$$A - 2bpq_1 - pbq_2^A - (1-p)bq_2^B - c = 0$$

$$q_1^* = \frac{A - pbq_2^A - (1-p)bq_2^B - c}{2b}$$

$$\frac{\partial \pi_2^A}{\partial q_2^A} = A - bq_1 - 2bq_2^A - C_A = 0 \to \frac{A - (C_A + bq_1)}{2b} = q_2^A$$

$$\frac{\partial \pi_2^B}{\partial q_2^B} = A - bq_1 - 2bq_2^B - C_B = 0 \to \frac{A - (C_B + bq_1)}{2b} = q_2^B$$

$$q_1^* = \frac{A-c}{2b} - \frac{p}{2}\frac{[A - (C_A + bq_1^*)]}{2b} - \frac{(1-p)}{2}\frac{[A - (C_B + bq_1^*)]}{2b}$$

$$q_1^* = \frac{2A - pA - (1-p)A - 2c}{4b} - \frac{2pC_A + (1-p)C_B}{4b} + \frac{pbq_1^*}{4b} + \frac{(1-p)bq_1^*}{4b}$$

$$q_1^* = \frac{A - 2c + pC_A + (1-p)C_B}{4b} + \frac{q_1^*}{4}$$

$$q_1^* = \frac{A - 2c + p(C_A - C_B) + C_B}{3b}$$

$$q_2^A = \frac{A - C_A}{2b} - \frac{bq_1^*}{2b}$$

$$q_2^A = \frac{1}{2b}\left[A - C_A - \frac{A - 2c + p(C_A - C_B) + C_B}{3}\right]$$

$$q_2^A = \frac{1}{2b}\left[\frac{3A - 3C_A - A + 2c - p(C_A - C_B) - C_B}{3b}\right]$$

$$q_2^A = \frac{1}{2b}\left[\frac{2A + 2c - 3C_A - pC_A + pC_B - C_B}{3}\right]$$

$$q_2^A = \frac{1}{2b}\left[\frac{2A + 2c - 3C_A - pC_A + pC_B - C_B}{3}\right]$$

$$q_2^A = \frac{2(A + c - C_A) + p(C_B - C_A) - (C_B - C_A)}{6b}$$

$$q_2^A = \frac{2\,(A + C - C_A) + (1 - p)\,(C_A - C_B)}{6b}$$

$$q_2^B = \frac{A - C_B}{2b} - \frac{bq_1}{2b}$$

$$q_2^B = \frac{1}{2b}\left[\frac{3A - 3C_B - A + 2c - p(C_A - C_B) - C_B}{3}\right]$$

$$q_2^B = \frac{1}{2b}\left[\frac{2A + 2C - 3C_B - p(C_A - C_B) - C_B}{3}\right]$$

$$q_2^B = \frac{1}{2b}\left[\frac{2A + 2C - 4C_B - p(C_A - C_B)}{3}\right]$$

$$q_2^B = \frac{A + C - 2C_B}{3b} - \frac{p(C_A - C_B)}{6b}$$

$$q_2^B = \frac{2(A + C - C_B) + p(C_B - C_A)}{6}$$

## 8.2 Desenho de mecanismo

**Definição.** Informação Privada

Uma informação relevante para o jogo é privada quando ela não é do conhecimento de todos os jogadores.

Um exemplo simples de desenho de mecanismo é a privatização de uma empresa pública. Um mecanismo formulado corretamente pode produzir um resultado mais interessante para quem desenha (formula) as regras do jogo. Nesse caso, o governo não conhece o tipo do comprador. Supomos que há dois tipos possíveis: aquele que valoriza muito o aquele que valoriza pouco a empresa pública.

De acordo com seu tipo, o comprador pode estar disposto a pagar um valor “a” de alta avaliação ou o valor “b” de baixa avaliação ($a > b > 0$). Uma hipótese básica do jogo é que o comprador buscará maximizar o excedente extraído na compra da empresa.

Dado o valor $v$ pago pela empresa, se o comprador valoriza muito a empresa ele extrairá um excedente $(a - v)$. Caso ele valorize pouco $(b - v)$.

O governo atribui uma probabilidade $p$ do comprador ser do tipo “alta avaliação” e $(1 - p)$ caso ele seja de baixa avaliação.

Por simplicidade, vamos atribuir valores a esses parâmetros, $a = 30$, $b = 10$ e $p = 0,5$. Há duas possibilidades que produzem o mesmo resultado do ponto de vista prático. A primeira é perguntar o quanto o comprador está disposto a pagar e a segunda é estabelecer um preço que o comprador independentemente de qual for o seu tipo poderá pagar.

No primeiro caso, como $a > b$, o comprador que mais valoriza a empresa declarará que é do tipo que valoriza menos. A consequência que o valor de venda da empresa será $v = b$. Não há como o comprador conseguir um valor inferior $a - b$ , visto que o tipo dos compradores são de conhecimento comum.

$$a - v = a - b = 30 - 10 = 20 \text{ milhões}$$

Suponha que o governo estabeleça um mecanismo em que a venda estaria assegurada para um $v > b$. Suponha que $v = 17$. Se $v < b$ há $p = 0.5$ da venda ser concretizada. Com $v = 17$, o comprador de baixa avaliação preferirá não correr o risco de não efetuar a compra fazendo a oferta mais baixa. Mas valerá a pena para o comprador de alta avaliação? O excedente desse comprador seria de 13,ou seja,$(30 - 17)$. Por outro lado, se o comprador de alta avaliação oferece o preço mais baixo, seu excedente esperado é de:

$$\frac{1}{2}(a - b) + \frac{1}{2}(0) = \frac{1}{2}(30 - 10) = 10$$

Claramente para o consumidor de alta avaliação vale a pena pagar o preço mais alto. E para o governo? Para um comprador de alta avaliação há 50% da venda ser concretizada, já para um de baixa há 50% de vender e 50% de não realizar a venda. Devemos multiplicar $(1 - p)$ por $\frac{1}{2}$ . Como $p = \frac{1}{2}$ a receita esperada do governo será:

$$17(0,5) + 10(0,25) + 0(0,25) = 11$$

Como $11 > 10$, esse mecanismo é melhor para o governo.

Vamos considerar outro mecanismo para a venda. Suponha que a um valor $\alpha$ suficientemente alto, o governo vende a empresa. Já a um $\beta < \alpha$ há uma probabilidade $(1 - \theta)$ de que o governo cancele a privatização.

$$a - \alpha \geq \theta(a - \beta)$$

O comprador de alta avaliação prefere comprar a empresa pagando um valor $\alpha$ mais elevado, desde que o excedente obtido ao comprar certamente seja no limite igual ao excedente esperado de pagar um $\beta$ mais baixo:

$$a \geq \frac{\alpha - \theta}{1 - \theta}$$

Um comprador de baixa avaliação preferirá ofertar o valor baixo $\beta$ se:

$$\theta(b - \beta) \geq b - a$$

Ele preferirá correr o risco de não comprar, oferecendo o valor baixo, desde que o excedente que ele espera obter, pela diferença entre sua avaliação e o valor baixo, dada a chance de a privatização ocorrer, seja pelo menos igual ao excedente que ele obtém com certeza, pagando o valor mais elevado.

$$b \leq \frac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta}$$

Combinando esses dois resultados temos que:

$$a \geq \frac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta} \geq b$$

Essa é a restrição de compatibilidade de incentivos. Graças a ela cada comprador tem a intenção de selecionar o valor pago mais adequado ao seu tipo

$$a \geq \alpha \text{ e } b \geq \beta$$

Essa restrição indica que não haverá coperação (ninguém pagará um preço superior a sua avaliação. Essa restrição se chama de restrição de racionalidade individual. A função de receita esperada do governo é:

$$pa + (1-p)\theta\beta$$

Devemos encontrar $\alpha, \beta, \theta$ que maximizam a receita esperada do governo.

$$\text{Maximizar } pa + (1-p)\theta\beta \text{ sujeita a}$$

$$a \geq \frac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta} \geq b \text{ ou } a \geq \frac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta}$$

$$a \geq \alpha; b \geq \beta \text{ ou } b \leq \frac{\alpha - \theta\beta}{1-\theta}$$

Note que as funções são lineares, mas o conjunto restrição é convexo e fechado. Usando as soluções de canto $a = \alpha$ e $b = \beta$ dizemos que o fornecedor que valoriza a compra pagará o valor mais alto e o que menos valoriza escolherá um $b = \beta$ ou seja, ainda há uma chance $(1-\theta)$ do cancelamento da venda. Organizando a receita do governo

$$pa + \theta(b - pa)$$

Há dois casos possíveis:

$b < pa \rightarrow$ nesse caso, o governo não privatiza e faz $\theta = 0$

$b > pa \rightarrow$ nesse caso, o governo deve fazer $\theta = 1$ e vender com certeza.

### 8.2.1 Princípio da revelação

Suponha que tenhamos dois tipos de jogadores $r(s, y, A)$ ou $r(s, y, B)$ sendo essas suas funções de recompensas. Temos que A e B são os tipos dos jogadores, $s$ é a estratégia e $y$ é o resultado, ou ganho. Suponha também que a atribuição determinada pelo mecanismo é incentivo compatível, o que significa que nenhum outro jogador prefere outra estratégia.

$$r(s^a, y^a, A) \geq r(s, y, A)$$

$$r(s^b, y^b, B) \geq r(s, y, B)$$

O problema do jogador que elabora o mecanismo é encontrar uma alocação compatível em incentivos que, uma vez adotada pelos jogadores voluntariamente, produza a melhor recompensa possível para o jogador que desenhou o mecanismo.

**Definição.** Mecanismo direto

Um mecanismo de revelação direta (direto) é um jogo Bayesiano simultâneo, no qual os jogadores informam seu tipo a um árbitro, o qual utiliza essas informações para determinar a recompensa dos jogadores.

**Definição.** Princípio da revelação

Um mecanismo direto é dito incentivo compatível se para os jogadores informar o seu verdadeiro tipo é um equilíbrio de Nash Bayesiano. Qualquer ENB pode ser representado por um mecanismo direto compatível em incentivar.

## 8.3 Aplicação de jogos de informação incompleta: Leilões

O problema ao se desenhar um leilão é garantir que a utilidade do leiloeiro seja maximizada.

Elementos básicos

**Definição.** Regras do leilão

Chamam-se regras do leilão o conjunto de normas que definem quem pode realizar lances, como esses lances podem ser efetuados, que tipo de lance pode ser aceito, como o leilão se desenvolve, como o vencedor é determinado, etc.

**Definição.** Ambiente do leilão

É formado por um conjunto de arrematadores do leilão, o valor que esses arrematadores atribuem a esse objeto.

Os leilões podem ser abertos, se qualquer um pode realizar lances, ou fechados, se há alguma determinação prévia dos arrematadores. É muito comum que seja atribuído um lance mínimo.

Citamos alguns tipos de leilões:

- envelope lacrado (selado);
- oral;
- lances ascendentes;
- lances descendentes; e
- simultâneos
- O leilão de 1º preço, o arrematador faz o maior lance. No leilão de 2º preço (Vickerey) o vencedor paga o segundo maior lance. Um leilão inglês é um leilão oral de lances ascendentes (1º preço). Um leilão holandês é um leilão oral de preços descendentes.

### 8.3.1 Leilão simultâneo de envelopes lacrados

**Definição.** Dizemos que um ambiente de leilão é caracterizado por valores independentes privados quando o número de arrematadores é fixo e cada arrematador conhece apenas a sua avaliação do objeto do leilão, ignorando a avaliação dos demais.

Esse ambiente do leilão na perspectiva de teoria dos jogos trata-se de um jogo de informação incompleta. Cada jogador possui uma crença $v_i$ sobre os valores dos demais arrematadores $v_i \in [v_{min}, v_{max}]$. A função de oferta dos arrematadores é dada por:

$$s_i = s_i(v_i)$$

A função de recompensa de um jogador $\pi_i(s_i)$ de um leilão de 1º preço será de:

$$\pi_i(s_i) = \begin{cases} v_i - s_i(v_i) & \text{se } s_i > s_j \forall i \neq j \\ 0 & \text{se} s_i \leq s_j \text{para algum } i \neq j \end{cases}$$

Supomos que há apenas dois arrematadores em um leilão: o jogador $i$ e o jogador $j$. Vamos considerar que esses jogadores acreditem que suas avaliações do leilão se distribuem uniformemente no intervalo [0,1].

**Definição.** Recompensas condicionais

As recompensas condicionais de um jogador são suas recompensas ponderadas pela probabilidade de que uma determinada combinação de estratégias se verifique.

Suponha que j faça um lance exatamente igual a metade do que ele acredita que o objeto leiloado valha.

$$s_j = \frac{v_j}{2}$$

A recompensa esperada do jogador $i$ será:

$$\pi_i(s_i) = 0 \times P\{s_i < \frac{v_j}{2}\} + (s_i - v_i)P\{v_i > \frac{v_j}{2}\} + 0,5x(s_i - v_i) \times P\{s_i = \frac{v_j}{2}\}$$

a probabilidade de que o jogador $i$ faça a mesma oferta do jogador $j$ tem de ser ponderada pela probabilidade de que ele ganhe o sorteio.

Se a avaliação é uniformemente distribuída a $P\{s_i < \frac{v_j}{2}\} \to 0$

$$\pi_i(s_i) = (v_i - s_i)P\{s_i > \frac{v_j}{2}\}$$

Como a distribuição é uniforme, a probabilidade de $a \in [0,1]$ é exatamente "a". Vejamos quais valores $P\{s_i > \frac{v_j}{2}\}$ pode assumir. Inicialmente, $2s_i$ , se $2s_i > 1$. Então $P\{2s_i > \frac{v_j}{2}\} = min\{2s_i, 1\}$. $s_i > \frac{1}{2}$ reduz a recompensa esperada de $i$. Podemos reescrever a função de recompensa de i de tal modo que:

$$\pi_i(s_i) = (v_i - s_i) \times 2s_i$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial s_i} = 2v_i - 4s_i = 0 \to s_i = \frac{v_i}{2}$$

A melhor resposta de $i$ é a estratégia do jogador $j$ de oferecer metade do valor que o objeto do leilão vale é justamente fazer o mesmo. Esse resultado é sempre válido se os jogadores forem indiferentes entre receber um valor com certeza ou receber o valor esperado.

### 8.3.2 Leilão de Vickrey

Nesse caso, temos 3 possibilidades:

1. $v_i > v_j \to$ o jogador $i$ corre o risco de perder se ofertar $s_i < v_i$. Se $s_i < v_j < v_i$ i pode oferecer menos do que o objeto vale para ele e menos do que vale para $j$, sendo esse último o vencedor.

2. $v_i = v_j \to$ Nesse caso a recompensa *ex-post* é sempre nula.

3. $v_i < v_j \to$ Aqui o risco é o de ganhar o objeto do leilão pagando mais do que ele vale. A forma de $i$ evitar isso é oferecer o que realmente ele acha que vale. Temos um EN em que os dois jogadores oferecer pelo objeto do leilão a sua verdadeira avaliação.

### 8.3.3 Leilão Holandês, Leilão Inglês e Equivalência Estratégica entre Leilões

No leilão holandês, o leiloeiro reduz o preço até que um dos jogadores indique que deseja comprar o objeto do leilão ao preço corrente

$$s_i = s_i(v_i)$$

A recompensa ex-post de um jogador $\pi_i$ no caso de um leilão holandês será:

$$\pi_i(s_i) = \begin{cases} v_i - s_i(v_i) & \text{se } s_i > s_j \forall i \neq j \\ 0 & \text{se } s_i \leq s_j \text{para algum } i \neq j \end{cases}$$

No leilão holandês e no de primeiro preço com envelope lacrado, os jogadores irão se comportar do mesmo modo.

Vamos imaginar um leilão inglês em que o preço é aumentado progressivamente a partir de um mínimo e aparece em um leilão na frente de todos os jogadores. Cada jogador se inscreve no leilão e anuncia sua saída quando o preço ultrapassa um valor que considere aceitável. Ao fazer isso, ele não pode retornar ao salão.

O vencedor é aquele que paga o preço diante da desistência do penúltimo jogador.

$$\pi_i(s_i) = \begin{cases} v_i - s_i' & \text{se } s_i > s' \text{ onde } s' \text{ é o segundo maior preço} \\ 0 & \text{se } s_i \leq s_j \text{ para algum } i \neq j \end{cases}$$

Essa é a mesma função *ex-post* do leilão de Vickrey. Suponha que um recurso possua o mesmo valor para todos os jogadores. Esse leilão é chamado de valor comum. O problema é que as crenças e informações são diferentes entre os jogadores. Em outras palavras, o vencedor será aquele que superestimar o valor do objeto leiloado. Essa é a chamada *maldição do vencedor.*

# 9 Equilíbrio Perfeito Bayesiano e Sinalização

**Teorema.** *Teorema de Bayes: Seja um conjunto de eventos mutuamente excludentes $A_1, A_2, ...A_n$ do espaço amostral S, sendo que a probabilidade de qualquer um desses eventos é diferente de zero e o conjunto desses eventos esgota todas as possibilidades do espaço amostral S.*

*Para qualquer evento $B \subset S$ com probabilidade diferente de zero, temos:*

$$Prob(A_j \,|B) = \frac{prob(A_j)prob(B \,|A_j)}{\sum prob(A_i)prob(B \,|A_i)}$$

*com $i = 1, ..., n$*

Suponha que uma empresa de jogos eletrônicos está decidindo se faz ou não uma proposta de aquisição de uma concorrente. Contudo, a empresa compradora não possui informação segura sobre as perspectivas de um novo jogo recém lançado pela concorrente.

Após uma pesquisa cuidadosa, a empresa compradora avalia que há uma chance de 50% de o jogo ser bem sucedido. Além disso, a empresa compradora usou como base uma pesquisa sobre a empresa lançadora do software.

A projeção consiste que fracassos de programas se mostram bem sucedidos em 10% das vezes e também sucessos acabam por fracassar em 30%.

| | *Projeção* | |
|---|---|---|
| $Estado\,\Omega$ | $X_1(sucesso)$ | $X_2(fracasso)$ |
| $\Omega_1(sucesso)$ | 0.9 | 0.1 |
| $\Omega_2(fracasso)$ | 0.3 | 0.7 |

Então as probabilidades condicionais de sucesso e fracasso podem ser expressas por:

$$prob(\Omega_2\,|X_2\,) = \frac{prob(\Omega_2)prob(X_2\,|\Omega_2\,)}{prob(\Omega_2)prob(X_2\,|\Omega_2\,) + prob(\Omega_1)prob(X_1\,|\Omega_1\,)}$$

$$prob(\Omega_2\,|X_2\,) = \frac{0.5 \times 0.7}{0.5 \times 0.7 + 0.5 \times 0.1} = \frac{0.7}{0.8} = 0.875$$

$$prob(\Omega_2\,|X_2\,) = \frac{prob(\Omega_2)prob(X_2\,|\Omega_2\,)}{prob(\Omega_2)prob(X_2\,|\Omega_2\,) + prob(\Omega_1)prob(X_1\,|\Omega_1\,)}$$

$$prob(\Omega_1\,|X_2\,) = \frac{prob(\Omega_1)prob(X_2\,|\Omega_1\,)}{prob(\Omega_2)prob(X_2\,|\Omega_2\,) + prob(\Omega_1)prob(X_2\,|\Omega_1\,)}$$

$$\frac{0.5 \times 0.1}{0.5 \times 0.7 + 0.5 \times 0.1} = \frac{1}{8} = 0.125$$

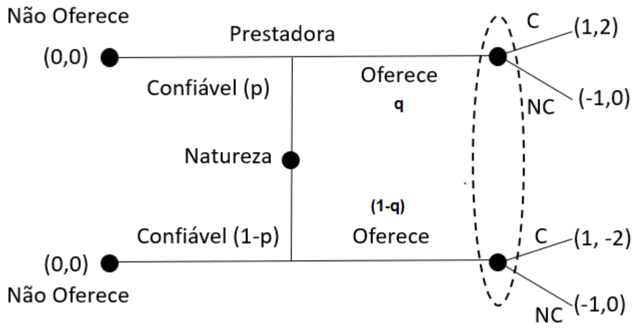
A probabilidade de 87,5% de chances do jogo ser um fracasso da uma boa margem para os executivos desistirem da compra.

## 9.1 Equilíbrio Perfeito Bayesiano em Jogos Sequenciais de Informação Incompleta

Vamos pensar num jogo de contratação. A empresa prestadora pode ser confiável ou não confiável que pratica o *Hold-up*.

**Definição.** Hold-up. Uma vez que o contrato esteja assinado a empresa que prestará o serviço barganha por melhores condições no contrato.

A empresa contratante sabe apenas qual é a probabilidade da empresa prestadora ser confiável ou não confiável.




**Definição.** Um contratante não consegue observar o tipo da prestadora, contudo pode observar se a prestadora oferece ou não um contrato. Em função disso a contratante possuirá uma crença atualizada.

$$q = prob(EC\,|O)$$

$EC$ =empresa confiável
ENC = empresa não confiável
O = oferece
NO = não oferece

$$q = \frac{prob(EC)prob(O\,|EC)}{prob(EC)prob(EC\,|O) + prob(ENC)prob(O\,|ENC)}$$

**Definição.** Equilíbrio Perfeito Bayesiano

Uma combinação de estratégias dos jogadores, assim como as crenças em relação aos nós em todos os conjuntos de informação, é chamada um equilíbrio perfeito Bayesiano se:

(a) as estratégias de cada jogador resultam em ações ótimas;

(b) as crenças dos jogadores são consistentes com o teorema de Bayes sempre que possível.

**Definição.** Equilíbrio Separador

Quando os jogadores se comportam de maneira diferente no equilíbrio, de acordo com seu tipo.

Se os jogadores se comportam da mesma maneira independentemente do seu tipo dizemos que o equilíbrio é agregador.

Há um algoritmo para a determinação do Equilíbrio Bayesiano

1. Inicie com uma estratégia da prestadora, seja ela separadora ou agregadora.

2. Se possível, calcule $q$ empregando o teorema de Bayes. Se não for possível, será necessário testar valores para q com os passos a seguir.

3. Dado $q$, calcule a ação ótima da contratante.

4. Confira se a estratégia da prestadora é a melhor resposta possível a ação da contratante.

Há 4 componentes potenciais de equilíbrios:

- Equilíbrio Separador I: (NO,O)
- Equilíbrio Separador II: (O,NO)
- Equilíbrio Agregador I: (O,O)
- Equilíbrio Agregador II: (NO,NO)

A 1ª estratégia é da prestadora confiável:

Vamos aplicar o roteiro anterior para avaliar cada um desses equilíbrios:

Equilíbrio separador I: Se a empresa confiável não oferece então *q=0*. A ação ótima da prestadora é *NC*. Então a prestadora preferirá não oferecer para não incorrer no custo de enviar o contrato. Assim não há um ENB que a prestadora jogue (NO,O).

Equilíbrio separador II: Temos que *q=1* e a contratante irá contratar. Sabendo disso a empresa não confiável preferiria oferecer o contrato. Assim não há um ENB em que a prestadora jogue (O,NO).

Equilíbrio agregador I (O,O): Aqui a regra de Bayes determina que *q=p*. A contratante escolherá como estratégia ótima contratar se:

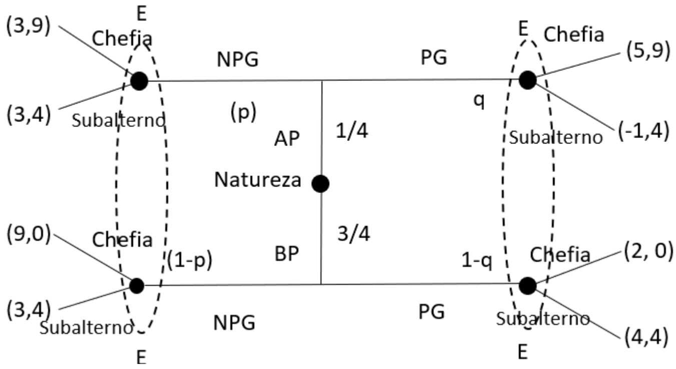
$$2p + (-2)(1 - p) \geq 0$$

$$p \geq \frac{1}{2}$$

Se isso ocorre há um ENB representado por ((O,O),C). Equilíbrio agregador II (NO,NO): O Teorema de Bayes se justifica se a contratante escolher não contratar. A contratante espere por um resultado ruim sempre. Isso ocorre sempre que $q \leq \frac{1}{2}$. Assim há um ENB [(NO,NO),NC].

## 9.2 Jogos de sinalização

Um sinal pode fazer toda a diferença em relação a sua produtividade. Por exemplo, o diploma de uma boa instituição pode abrir portas no mercado de trabalho.




Analisaremos o equilíbrio (PG,PG) sendo que a 1º ação é do candidato AP (Alta Produtividade). Se $q = \frac{1}{4}$ então a recompensa esperada do empregador será: $9(\frac{1}{4})+0(\frac{3}{4}) = 2.25$ se contratar um candidato para chefia. Alternativamente, $4(\frac{1}{4})+4(\frac{3}{4}) = 4$ se contratar o candidato como subalterno, não há um equilíbrio agregador em que o candidato BP (Baixa Produtividade) escolha PG (Pós-Graduação).

Se ambos escolhessem (NPG,NPG) e $p = \frac{1}{4}$ o empregador não consegue discernir entre um candidato AP e de BP. Nesse caso, o nó superior direito nunca será atingido, bastando que $q$ seja compatível a:

$$9q + 0(1-q) < 4(q) + 4(1-q)$$
$$q < \frac{4}{9}$$

Então ((NPG,NPG), (subalterno, subalterno)). Vejamos (NPG, PG) teríamos *p=1* e *q=0,* com isso o empregador adotaria (chefia, subalterno). Nesse caso PG não seria ótimo para BP. Essa estratégia não faz parte de um equilíbrio. Por fim, (PG,NPG), teríamos *p=0* e *q=1* e assim o equilíbrio separador será ((PG,NPG),(chefia,subalterno)) com *p=0* e *q=1.*

# Referências

CHIANG, A.; WAINWRIGHT, K. Matemática para economistas. 4a ed. Elsevier, 2005.

FIANI, R. Teoria dos Jogos com Aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais. 4ª edição. Elsevier, 2015.

GIBBONS, R. Game Theory for applied economists. Princeton University Press, 1992.

MAS-COLELL, A.; WHINSTON, M. D.; GREEN, J. R. Microeconomic Theory, 1995.

SIMON, C.; BLUME, L. Matemática para economistas. Porto Alegre: Bookman, 2004.

VARIAN, HAL. Microeconomia: Princípios Básicos. Campus Elsevier, 9ª ed., 2016.