Notas de Aula de Macroeconomia 2

Rodrigo Nobre Fernandez

Pelotas
2021

Prefácio

Esta apostila é um resumo das notas de aula da disciplina de Macroeconomia 2 do curso de Pós-Graduação em Organizações e Mercados (Mestrado/Doutorado em Economia Aplicada) da Universidade Federal em Pelotas. Em quase sua totalidade essas notas de aula transcrevem literalmente ou resumem o conteúdo dos livros de Barro e Sala-i-Martin (2004), Acemoglu (2009) e Romer (2012). Destaco que essa apostila não tem fins comerciais, o texto serve exclusivamente como material de apoio as aulas. Quaisquer erros e omissões são de minha inteira responsabilidade. Contribuições e considerações podem ser enviadas para: **rodrigo.fernandez@ufpel.edu.br** ou **rodrigonobrefernandez@gmail.com**

Sumário

1 Fatos do crescimento econômico **4**

2 Modelo de Solow **5**

2.1 Golden Rule 17

2.2 Modelo de Mankiw, Romer e Weill (1992) 19

2.3 Resíduo de Solow 21

2.4 Introdução de uma economia aberta 24

3 Primeira geração de modelos de crescimento endógeno **26**

3.1 Introdução aos modelos AK 26

3.2 Modelo AK 28

3.3 Equilíbrio 29

3.4 Caracterização do equilíbrio 30

3.5 O modelo AK com capital físico e humano 32

3.6 O modelo AK de dois setores 33

3.7 Crescimento com externalidades 36

3.8 Alocações Pareto ótimas 36

4 Crescimento Neoclássico: O modelo de Ramsey **37**

4.1 As famílias neoclássicas 37

4.2 As empresas 41

4.3 Equilíbrio 42

4.4 Cenários Alternativos 43

4.4.1 Condição Keynes Ramsey 45

4.5 Solução do Planejador Central 46

4.5.1 A dinâmica da transição e a forma da trajetória estável. 46

5 Crescimento com gerações sobrepostas **49**

5.1 Modelo OLG básico 49

5.2 Decisões de consumo 50

5.3 Equilíbrio 52

5.4 O modelo OLG canônico 58

5.5 Sobreacumulação e otimalidade de Pareto no equilíbrio competitivo no modelo OLG 60

5.6 O papel do Seguro Social na acumulação de capital 62

5.6.1 Fully Funded 62

5.6.2 Seguridade Social “Não financiada plenamente” 63

5.6.3 OLG com altruísmo impuro 64
5.7 OLG com juventude perpétua 67
5.8 OLG em tempo contínuo 68

6 Teoria dos ciclos reais de negócios 73
6.1 Base do modelo de RBC 74
6.2 Comportamento das Famílias 76
6.2.1 Otimização da família sobre incerteza 78
6.3 Um caso especial do modelo 79
6.3.1 Discussão 82
6.4 Resolvendo o modelo o caso geral 83
6.4.1 Log-Linearização 83

7 Rigidez Nominal 86
7.1 Caso padrão (ou base guia): Preços fixos 86
7.2 Choques com preços fixos 89
7.3 Rigidez de Preços e Salários: Em mercados competitivos de bens e serviços 90
7.4 Modelando a Rigidez Nominal Exógena 95
7.4.1 Um dilema permanente entre PIB e inflação 96
7.4.2 A taxa natural 96
7.4.3 A curva de Phillips aumentada pelas expectativas 96
7.4.4 Demanda e Oferta Agregada 97
7.5 Fundamentos microeconômicos do ajustamento nominal incompleto 101
7.5.1 Modelo de competição imperfeita e “atribuição de preços” 101
7.5.2 Pequenas fricções são suficientes? 106
7.6 Rigidez Real 109
7.7 O modelo de informação imperfeita de Lucas 110
7.7.1 O modelo 110

8 Modelos DSGE de Flutuações 116
8.1 Modelo de Fisher 120
8.1.1 Solução do Modelo 121
8.2 Modelo de Taylor 123
8.3 Modelo de Calvo 127
8.4 Preço Estado Dependência 129
8.4.1 Modelo de Christiano, Eichebaum e Evans 129
8.5 Modelo Padrão Novo-Keynesiano 133
8.5.1 Solução Fundamental 134
8.5.2 Caso Geral 134

9 Inflação e Política Monetária **136**
9.1 Inflação, Crescimento da Moeda e Taxa de Juros . . . 136
9.1.1 Crescimento da Moeda e da Taxa de Juros . . . 136
9.2 Política Monetária e a Estrutura da Taxa de Juros . . . 137
9.2.1 Teoria das expectativas da estrutura a termo . . . 137
9.3 Fundamentação microeconômica das políticas de estabilização . . . 137
9.4 Política Monetária Ótima: Modelo de Backward-Looking . . . 138
9.5 Política Monetária Ótima: Modelo Forward- Looking . . . 144
9.5.1 Política Ótima . . . 145
9.6 Inconsistência Dinâmica . . . 147
9.6.1 Modelo Kydland e Prescott (1977) . . . 147
9.6.2 O Policy Maker Minimiza . . . 148
9.6.3 Credibilidade - Reputação - Delegação . . . 149
9.7 Senhoriagem e Inflação . . . 150

Referências **152**

1 Fatos do crescimento econômico

Há uma grande variação entre as rendas per capita das economias. Os países mais pobres têm rendas per capitas que são inferiores a 5% da renda per capita dos países mais ricos. As Teorias de Robert Solow (MIT) ajudaram a esclarecer o papel da acumulação de capital físico e destacaram a importância do progresso técnico como motor fundamental do crescimento econômico sustentado.

No início dos anos 80, o trabalho desenvolvido por Paul Romer e Robert Lucas na universidade de Chicago reacendeu o interesse dos macroeconomistas pelo crescimento econômico ao testar a economia das "ideias" e do capital humano.A revista Economist publica um relatório anual de paridade do poder de troca (PPC) com base no preço de um sanduíche BigMac (McDonald's). Se um BigMac custa 2 dólares nos EUA e 300 ienes no Japão então a taxa de câmbio calculada pelo PPC, baseada no BigMac, é de 150 ienes por dólar.

Fato 2 - As taxas de crescimento econômico variam substancialmente de um país para o outro

- Robert Lucas em seu artigo "On the Mechanics of Economic Development" (1988) mostra uma regra prática que um país cresce a taxa g% ao ano dobrará sua renda per capita a cada 70g/anos.

Seja $y(t)$ renda per capita e considere y_0 : valor inicial da renda per capita. Então $y(t)$: y_0e^{gt}. O tempo levado para dobrar a renda per capita pelo tempo t^* em que $y(t) = 2y_0$, portanto:

$$2y_0 = y_0e^{gt}$$

$$ln2 + lny_0 = lny_0 + gtlne$$

$$ln2 = gt$$

$$t^* = \frac{ln2}{g}$$

Fato 3 - As taxas de crescimento não são necessariamente constantes ao longo do tempo

Fato 4 - A posição relativa de um país na distribuição mundial da renda não é imutável. Os países podem passar de "pobres" a "ricos" e vice-versa.

Fato 5 - No último século nos EUA

- A taxa de retorno real sobre o capital. r, não mostra a tendência crescente ou decrescente.
- As participações da renda destinada ao capital, rK/Y e à mão de obra, wL/Y, não apresentam tendência; e
- A taxa de crescimento médio do produto per capita tem sido positiva e constante ao longo do tempo.

Fato 6 - O crescimento do produto e o crescimento do produto e o crescimento do volume de comércio internacional estão estritamente ligados.

- Volume de comércio soma das importações e das exportações.

Fato 7 - Trabalhadores qualificados e não qualificados tendem a migrar de países pobres para países ou regiões ricas.

- Os retornos relacionados a mão de obra devem ser mais elevados em regiões de alta renda do que de baixa renda.

2 Modelo de Solow

- O mundo considerado neste capítulo será formado por países que produzem e consomem um único bem homogêneo;
- Em termos empíricos é conveniente pensar neste produto como unidades do PIB;
- A tecnologia é uma variável exógena no modelo;
- As pessoas poupam uma fração constante do seu tempo acumulando qualificações;
- Função de produção Cobb-Douglas com retornos constantes de escala;

$$Y = F(K, L) = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

K= Capital
L = Trabalho
Y= Produto

- As empresas pagam um salário w, um aluguel r a cada unidade de capital

A estrutura de mercado é a de concorrência perfeita

$$Max_{K,L}F(K,L) - rK - wL$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = 1 - \alpha L^{-\alpha}K^{\alpha} - w = 0 \to \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}(1-\alpha) = w$$

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} - r = 0 \to r = \alpha K^{\alpha-1}L^{1-\alpha} \to r = \frac{\alpha K^{\alpha.}L^{1-\alpha}}{K}$$

- Veja a forma reduzida destas equações

$$Y = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

$$Y = K^{\alpha}\frac{L}{L^{\alpha}}$$

$$\frac{Y}{L} = \frac{K^{\alpha}}{L^{\alpha}}$$

$$y = k^{\alpha}$$

$$\frac{Y}{L}.(1-\alpha)w \text{ e } r = \alpha.\frac{Y}{K}$$

- O pagamento aos insumos ocorrem totalmente o valor do produto gerado de modo que não podem ser auferidos lucros econômicos.

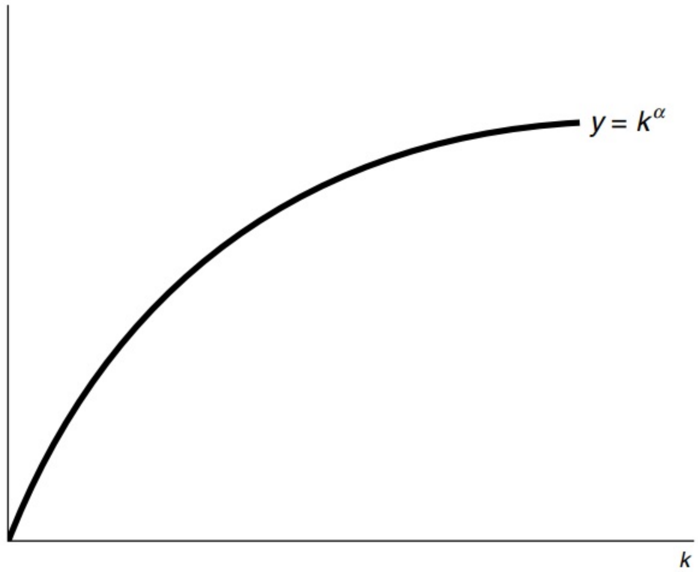
- A função possui retornos constantes a escala

$$k = \frac{K}{L} \text{ e } y = \frac{Y}{L}$$

$$y = k^{\alpha}(Cobb - Douglas)$$

Função de produção Cobb-Douglas:

Figura 1: Função de Produção Cobb-Douglas



$$\dot{K} = sY - \delta K$$

A variação no estoque de capital $\dot{K}$, é igual ao montante do investimento bruto sY, menos o montante da depreciação que ocorre durante o processo produtivo.

$$Y = C + I \text{ (economia fechada sem governo)}$$

$$Y = (1 - s)Y + I$$

$$Y = Y + Ys = I$$

$$Ys = I$$

Exemplo 1:

$$k = \frac{K}{L} = lnK - lnL = ln\alpha$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$$

$$\frac{\partial lnK}{\partial t} = \frac{\partial lnK}{\partial t} - \frac{\partial lnK}{\partial t}$$

$$\frac{\partial K}{\partial t}\frac{1}{K} = \frac{\partial K}{\partial t}\frac{1}{K} - \frac{\partial L}{\partial t}\frac{1}{L}$$

(lembrar que $\frac{\partial K}{\partial t} = \dot{K}$etc...)

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$$

Exemplo 2:

$y = k^{\alpha}$

$$lny = \alpha lnk$$

$$\frac{\partial lny}{\partial t} = \alpha\frac{\partial lnk}{\partial k}$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = \alpha\frac{\dot{k}}{k}$$

Veja porque n é a taxa de crescimento populacional

$$L(t) = Lo.e^{nt}$$

$$lnL(t) = lnLo + ntlne$$

$$lnL(t) = lnLo + nt$$

$$\frac{\partial lnl(t)}{\partial t} = \frac{\partial lnlo}{\partial t} + n\frac{\partial t}{\partial t}$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = n$$

Agora combinaremos o exemplo 1 com a equação (3)

$$K = s\dot{Y} - \delta K \ (3)$$

Dividindo a equação (3) por K

$$\frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - \delta$$

Rearranjando a equação do Exemplo 1:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}$$

$$\frac{\dot{K}}{K} + \frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{K}}{K}$$

Substituindo em (3)

$$\frac{\dot{K}}{K} + n = s\frac{Y}{K} - d$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - (d+n)$$

(multiplicando por k)

$$\dot{K} = s\frac{Y}{K}k - (d+n)K$$

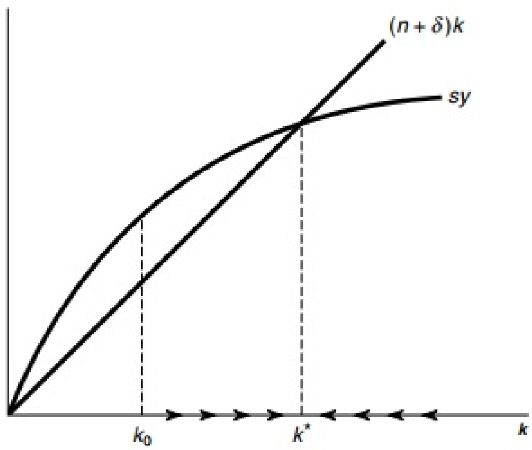
$$\dot{K} = s\frac{Y}{K}.\frac{K}{L} - (d+n)K$$

$$\dot{K} = sy - (n+d)K$$

$$(y = \frac{Y}{L})$$

Esta equação diz que a variação do capital por trabalhador é determinada por 3 termos. Se não houver novos investimentos nem depreciação o capital por trabalhador se reduzirá devido ao aumento na força de trabalho. O montante da redução será exatamente nk como se pode ver fazendo $\dot{K}$ igual a zero no exemplo 1. Diagrama de Solow

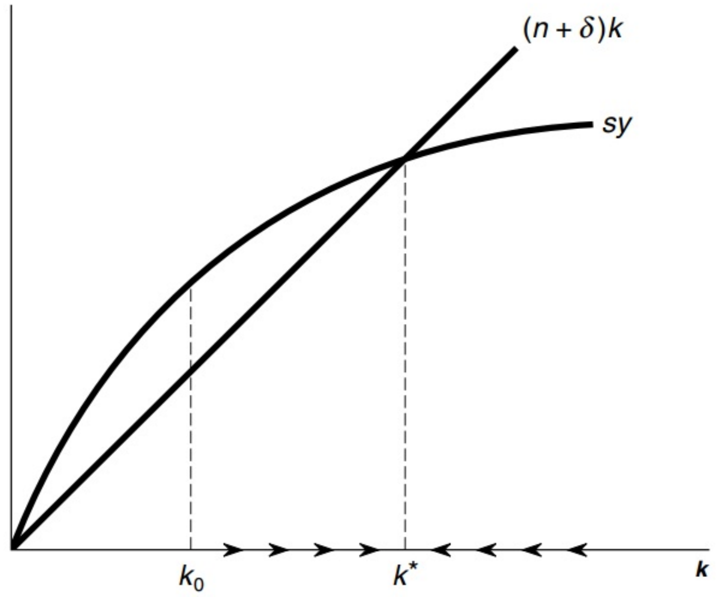
Figura 2: Diagrama de Solow



k_0 é o montante de investimento por trabalhador é superior ao necessário para se manter constante o capital por trabalhador , de modo que se verifica um aprofundamento do capital que continuará até que $k = k^*$, ponto em que $sy = (n+d)k$ de modo que $\dot{k} = 0$. Nesse ponto o montante de capital por trabalhador permanece constante e chamamos tal ponto de estado dicionário (*steady-state)*.

Diagrama de Solow e a função de produção:

Figura 3: Diagrama de Solow e a Função de Produção



Propriedades do estado estacionário

$\dot{k}$ =0, não há variação no estoque de capital, a economia cresce de forma constante)

$$\dot{k} = sy - (n+d)k$$

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - (n+d)k$$

$$0 = sk^{\alpha} - (n+d)k$$

$$sk^{\alpha} = (n+d)k$$

$$\frac{s}{n+d}k^{1-\alpha}$$

$$\left[\frac{s}{n+d}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} = k;$$

Agora desejamos conhecer o produto:

$$y = k^{\alpha} \rightarrow y^* = k^{*\alpha}$$

$$k^* = \left[\frac{s}{n+d}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

(elevando na α)

$$k^{*\alpha} = \left[\frac{s}{n+d}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$y^{*\alpha} = \left[\frac{s}{n+d}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

- Países com altas razões de Poupança/Investimento, tenderão a ser mais ricos
- Estes países acumulam mais capital por trabalhador e com isso detêm um maior nível de produto por trabalhador.
- Os países com uma maior taxa de poupança, tenderão a ser mais pobres.

Dinâmica da transição

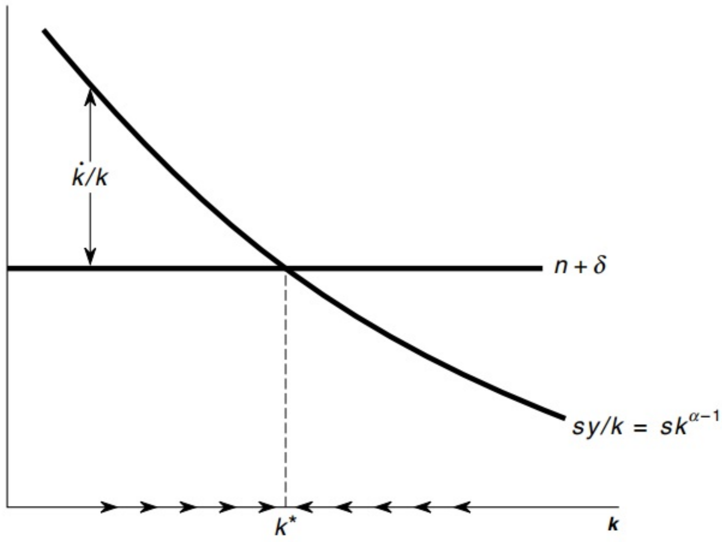
- Quanto mais elevado o nível o nível do capital por trabalhador, tanto menor o produto médio do capital, y/k, em decorrência dos retornos decrescentes à acumulação de capital de capital (α é menor do que 1).
- Portanto a declividade da curva é decrescente, o segundo termo do lado direito da equação é $(n + d)$, que não depende de k por isso é representado por uma linha horizontal .
- A diferença entre as duas linhas na figura abaixo é a taxa de crescimento do estoque de capital ou $\frac{\dot{k}}{k}$.
- Assim, a figura indica claramente que, quanto mais a economia se encontra abaixo do valor de k no estado estacionário, tanto mais rápido será o crescimento da economia.
- E quanto mais acima a economia se encontrar do valor de k no estado estacionário , tanto mais rapidamente k declinará.

$$\frac{\dot{k}}{k} = sk^{\alpha-1} - (n+d)$$

Dinâmica da transição

$$\frac{\dot{k}}{k} = sk^{\alpha-1} - (n+d)$$

Figura 4: Dinâmica de Transição



Tecnologia e o modelo de Solow

$$Y = F(K, AL) = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$$

- Incluída deste modo disse que a variável A é aumentadora de trabalho ou Harrod-Neutra.
- As outras possibilidades são $F(AK, L)$, que é conhecida como aumentadora de capital ou Solow-Neutra e $AF(K, L)$ que é conhecida como tecnologia Hicks-Neutra
- Uma unidade de trabalho é mais produtiva quando o nível da tecnologia é mais elevado.

$$A = A_0 e^{gt}$$

$$lnA = lnA_0 + gtlne$$

$$\frac{\partial lnA}{\partial t} = \frac{\partial lnA_0}{\partial t} + g\frac{\partial t}{\partial t}$$

$$\frac{\dot{A}}{A} = g$$

Reescrevemos a função de produção em termos de produto por trabalhador:

$$\frac{Y}{L} = \frac{K^{\alpha}}{L}\frac{(AL)^{1-\alpha}}{L}$$

$$y = K^{\alpha}.A^{1-\alpha}$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = \alpha\frac{\dot{k}}{k} + (1-\alpha)\frac{\dot{A}}{A}$$

- Uma situação que capital, produto, consumo e população crescem a taxas constantes é denominada trajetória de crescimento equilibrado.

- Capital por trabalhador crescem ambos a taxa de progresso tecnológico g.

O gráfico de Solow com tecnologia

- A variável k deixa de ser constante no longo prazo

- $\widetilde{K} = K/AL$(esta variável representa a razão entre o capital por trabalhador e a tecnologia.)

$$\widetilde{y} = \widetilde{k^{\alpha}}$$

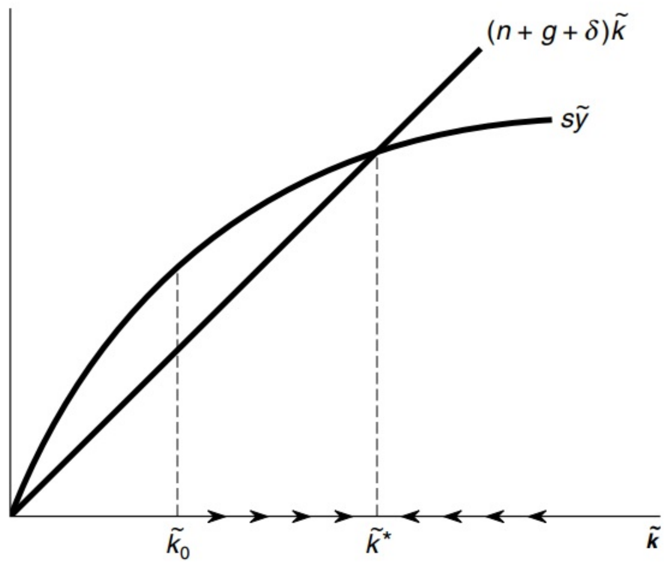
Estas variáveis podem ser chamadas de produto por unidade efetiva de trabalho e capital por unidade efetiva de trabalho.

$$\frac{\dot{\widetilde{k}}}{\widetilde{k}} = \frac{\dot{k}}{k} - \frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{L}}{L}$$

A função de acumulação do capital será:

$$\dot{\widetilde{k}} = s\widetilde{y} - (n+g+d)\widetilde{k}$$

Figura 5: Gráfico do Modelo de Solow com Progresso Tecnológico



- A solução para o estado estacionário

$$\widetilde{k}^* = (\frac{s}{n+g+d})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

- Substituindo na função de produção temos:

$$\widetilde{y}^* = (\frac{s}{n+g+d})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

- Para ver quais são as implicações para o produto por trabalhador, reescrevemos a equação como:

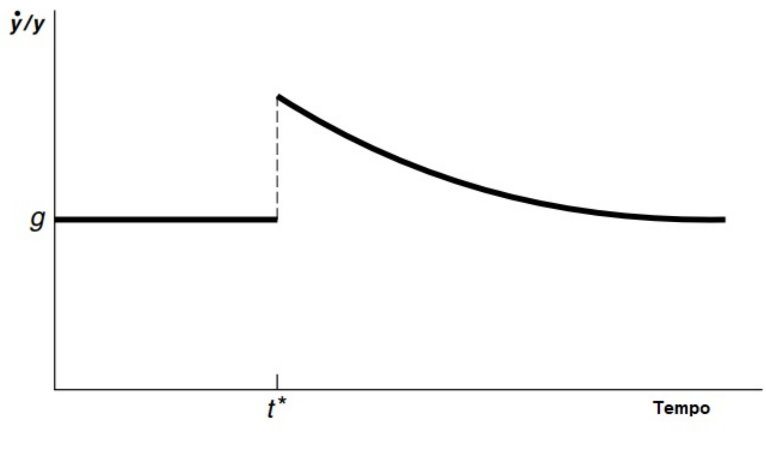
$$y^*(t) = A(t)(\frac{s}{n+g+d})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

- O produto por trabalhador ao longo da trajetória de crescimento equilibrado é determinado pela tecnologia pela taxa de investimento e pela taxa de crescimento populacional.

- É que as variações na taxa de investimento ou na taxa de crescimento populacional afetam o nível de produto por trabalhador no longo prazo, mas não afetam a taxa de crescimento de longo prazo do produto por trabalhador.

- Efeito de um aumento na taxa de investimento sobre o crescimento

Figura 6: Efeito de um aumento na taxa de investimento



As mudanças nas políticas aumentam as taxas de crescimento, mas apenas temporariamente ao longo da trajetória de transição rumo ao novo estado estacionário.

- As mudanças de política não tem efeito de crescimento no longo prazo.

- De acordo com o modelo de Solow, é porque investimos mais e temos taxas de crescimento populacional menores. o que nos permite acumular mais capital por trabalhador e assim aumentar a produtividade da mão de obra.
- O crescimento no modelo de Solow é sustentado elo progresso tecnológico.
- Decomposição do crescimento e redução da produtividade

$$Y = BK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

B é um termo de produtividade Hicks-Neutro

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha\frac{\dot{k}}{k} + (1-\alpha)\frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{B}}{B}$$

$\frac{\dot{B}}{B}$ é conhecido como crescimento da produtividade total dos fatores ou crescimento da produtividade multifatorial. É importante destacar como a economia cresce no estado estacionário:

$$Y = K^{\alpha}\left(AL\right)^{1-\alpha}$$

Dividindo ambos os lados por L:

$$\frac{Y}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} A^{1-\alpha}$$

Chamando $Y/L = yK/L = k$ e aplicando o ln:

$$lny = \alpha lnk + (1-\alpha)\, lnA$$

Derivando em relação ao tempo:

$$\frac{\mathring{y}}{y} = \alpha\frac{\mathring{k}}{k} + (1-\alpha)\, g$$

Lembre que $\tilde{y} = \frac{Y}{AL}$ usando a definição acima podemos dizer que:

$$\tilde{y}A = \frac{Y}{L}$$

$$\tilde{y}A = y$$

Aplicando o ln e derivando em relação ao tempo:

$$ln\tilde{y} + lnA = lny$$

$$\frac{\mathring{\tilde{y}}}{\tilde{y}} + g = \frac{\mathring{y}}{y}$$

No estado estacionário (em termos trabalho eficiente)$\frac{\mathring{\tilde{y}}}{\tilde{y}} = g_{\tilde{y}} = 0$

$$g = \frac{\mathring{y}}{y}$$

Vimos que o PIB per capita cresce a taxa g. Note que o raciocínio será análogo para $\tilde{k} = \frac{K}{AL}$,ou seja, $g = \frac{\mathring{k}}{k}$. Podemos inserir esta informação na função de produção e teremos:

$$\frac{\mathring{y}}{y} = \alpha g + (1 - \alpha)\, g$$

$$\frac{\mathring{y}}{y} = g$$

Acabamos de mostrar que o PIB per capita cresce a taxa g e o estoque de capital per capita também cresce a mesma taxa. No entanto o produto na economia cresce a taxa $n{+}g$, como veremos:

$$Y = K^{\alpha}\,(AL)^{1-\alpha}$$

Aplicando o ln e derivando em relação ao tempo:

$$lnY = \alpha lnK + (1 - \alpha)\,[lnA + lnL]$$

$$\frac{\mathring{Y}}{Y} = \alpha\frac{\mathring{K}}{K} + (1 - \alpha)\,(n + g)$$

Lembre que $\tilde{k} = \frac{K}{AL}$ usando a definição acima podemos dizer que:

$$\tilde{k} = \frac{K}{AL}$$

Aplicando o ln e derivando em relação ao tempo:

$$ln\tilde{k} + lnA + lnL = lnK$$

$$\frac{\mathring{\tilde{k}}}{\tilde{y}} + g + n = \frac{\mathring{K}}{K}$$

No estado estacionário (relação capital por trabalho eficiente)$\frac{\mathring{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = g_{\tilde{k}} = 0$

$$g + n = \frac{\mathring{K}}{K}$$

Substituindo na função de produção:

$$\frac{\mathring{Y}}{Y} = \alpha\,(n + g) + (1 - \alpha)\,(n + g)$$

$$\frac{\mathring{Y}}{Y} = n + g$$

Mostramos que o PIB da economia cresce a taxa n+g.

2.1 Golden Rule

- Qual a relação entre poupança e crescimento econômico? Um nível ais alto de poupança favorece a aceleração do crescimento no curto prazo.
- O aumento da taxa de poupança faz a economia crescer até que alcance o novo estado estacionário.
- Se a economia sustentar um grande nível de poupança, ela também conterá um amplo estoque de capital e um alto nível de produção, mas isto não quer dizer que ela manterá para sempre uma taxa de crescimento acelerada.

Imagine a economia no seu estado estacionário:

$$\dot{k} = sf(k) - (n + d + g)k$$

Qual a taxa de poupança que corresponde ao nível ótimo do estoque de capital?

$$sf(k^*) = (n + d + g)k^*$$

(derivando em relação a k^*)

$$s.\frac{\partial f}{\partial k} = (n + d + g)$$

$$s.Pmgk = (n + g + \alpha)$$

$$s = \frac{1}{Pmgk}.(n + g + d)$$

Se $\rightarrow F(K, AL) = \frac{K}{AL}.\frac{AL}{AL} \rightarrow s = (n + g + d)$

- A regra de ouro do estoque de capital se dá quando o nível de consumo por unidade de trabalho efetivo é maximizado. Para derivar o nível de x tome a equação:

$$k^* = \left[\frac{s}{(n + g + d)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\dot{k} = sf(k) - (n + g + d)k$$

$$\dot{k} = 0, f(k) = k^{\alpha}$$

- A função de produção é uma Cobb-Douglas
- Antes de derivar vamos isolar s:

$$k^{1-\alpha} = \frac{s}{n+g+d}$$

$$k^{1-\alpha}.n+g+d = s$$

- O produto é:

$$y = \left[\frac{s}{(n+g+d)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

- O consumo é: $c = (1-s)y$

$c = (1-s)\left[\frac{s}{(n+g+d)}\right]$ (substituindo s por $k^{1-\alpha}(n+g+d)$)

$$c = \left[1 - \left[k^{1-\alpha}.(n+g+d)\right]\right].\left[\frac{k^{1-\alpha}(n+g+d)}{(n+g+d)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$c = (1 - k^{1-\alpha}.(n+g+d).\left[k^{1-\alpha}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$c = 1 - k^{1-\alpha}(n+g+d).k^{\alpha}$$

$$c = k^{\alpha^*} - (n+g+d)k^*$$

- Derivando o consumo em relação a k:

$$c = k^{\alpha} - (n+g+d)k$$

$$\frac{\partial c}{\partial k} = \alpha k^{\alpha-1} - (n+g+d) = 0$$

$$\alpha k^{\alpha-1} - (n+g+d)$$

$$k^{\alpha-1} = \left[\frac{n+g+d}{\alpha}\right]$$

$$k^{\alpha-1} = \left[\frac{\alpha}{n+g+d}\right]^{-1}$$

(expoente negativo inverterá o sinal do denominador)

$$k = \left[\frac{\alpha}{n+g+d}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Agora vejamos o nível de poupança necessário:

$$s = (n+g+d)k^{1-\alpha}$$

$$s = (n+g+d).\frac{\alpha}{(n+g+d)}$$

$$s = (n+g+d).\frac{\alpha}{(n+g+d)}$$

$s = \alpha \rightarrow$esta é a poupança da Golden-Rule

- Condições de Inada

$$lim_{k\to 0}\left(\frac{\partial k}{\partial k}\right) = lim_{L\to 0}\left(\frac{\partial K}{\partial L}\right) = \infty$$

$$lim_{k\to \infty}\left(\frac{\partial k}{\partial k}\right) = lim_{L\to \infty}\left(\frac{\partial K}{\partial L}\right) = 0$$

2.2 Modelo de Mankiw, Romer e Weill (1992)

Aplicações empíricas dos modelos de crescimento neoclássicos

- Em 1992,Mankiw,Romer, e Weill avaliam algumas implicações empíricas do modelo de Solow e concluem que ele apresenta um bom desempenho.

- Observam que o ajustamento do modelo poderia ser melhorado se fosse adicionado o capital humano.

- Isto quer dizer que diferentes economias tem diferentes níveis de instrução.

- O produto Y é obtido por uma combinação de capital físico,k, e de trabalho qualificado, H, de acordo com uma função Cobb-Douglas com retornos constantes:

$$Y = k^{\alpha}(AH)^{1-\alpha}$$

- 'A' representa a tecnologia, que cresce a uma taxa exógena g

- u é a fração do tem tempo que as pessoas dedicam ao aprendizado de habilidades e como L a quantidade de trabalho (em geral) usado na produção.

- Vamos supor que a mão de obra não qualificada que está aprendendo habilidades durante o tempo u gera o trabalho qualificado H de acordo com

$$H = e^{\Psi u}L \rightarrow lnH = \Psi ulne + lnL$$

$$\frac{\partial lnH}{\partial u} = \Psi$$

$$\dot{k} = skY - \partial k$$

$$y = k^{\alpha}(Aln)^{1-\alpha}$$

- Os três autores consideram que uma economia acumula capital humano tal como acumula capital físico: Abrindo mão do consumo.
- Aqui seguiremos Lucas (1988) na suposição que as pessoas gastam tempo acumulando qualificações, como quando os estudantes frequentam a escola.
- Observe que $ln = e^{\Psi u}$
- Seja u uma constante exógena

$$\widetilde{y} = \widetilde{k}^{\alpha}$$

$$\dot{\widetilde{k}} = sk\widetilde{y} - (n + g + d)\widetilde{k}$$

$$\frac{\widetilde{k}}{\widetilde{y}} = \frac{sk}{n + g + d}$$

$$\widetilde{y}^{*} = \left(\frac{sk}{n + g + d}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\widetilde{y}^{*}(t) = \left(\frac{sk}{n + g + d}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} .lnA(t)$$

- A última equação resume a explicação oferecida pelo modelo de Solow ampliado para as razões pelas quais alguns países são ricos e outros pobres.
- Alguns países são ricos porque têm altas taxas de investimento em capital físico, despendem uma parcela considerável de tempo acumulando habilidades ($ln = e^{\Psi u}$),baixas taxas de crescimento populacional e altos níveis de tecnologia. Mais ainda, no estado estacionário, o produto per capita cresce à taxa do progresso tecnológico, g, tal como no modelo de Solow original.

$$A = (\frac{y}{k})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.\frac{y}{ln}$$

- O modelo de Solow nos ajuda a entender que países que investem grande parcela de seus recursos em capital físico e na acumulação de qualificações são ricos.
- Países que usam este insumo de modo produtivo, são ricos.
- Solow não faz é nos ajudar a entender porque alguns países investem mais do que outros e porque alguns países atingem níveis de tecnologia e de produtividade mais elevados.
- Entre países que apresentam o mesmo estado estacionário, a hipótese da convergência se sustenta, os países pobres crescerão mais rápido, em média, do que os países ricos.
- Princípio da dinâmica de transição: Quanto mais abaixo do seu estado estacionário estiver uma economia, tanto mais ela deverá crescer, quanto mais acima a economia estiver do seu estado estacionário, mais lentamente ela irá crescer.

2.3 Resíduo de Solow

Aqui seguiremos Lucas (1988) na suposição que as pessoas gastam tempo acumulando qualificações, como quando as estudantes frequentam a escola.

- Observe que $h = e^{\Psi u}$.
- Seja u uma constante exógena.

$$\tilde{y} = \tilde{K^{\alpha}}$$

$$\tilde{K} = sk\tilde{y} - (n + g + d)\tilde{K}$$

$$\frac{\tilde{K}}{\tilde{y}} = \frac{sk}{n + g + d}$$

$$\tilde{y^{*}} = (\frac{sk}{n + g + d})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$y^{*}(t) = (\frac{sk}{n + g + d})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}h.A(t)$$

- A última equação resume a explicação oferecida pelo modelo de Solow ampliado para as razões pelas quais alguns países são ricos e outros pobres.

- Alguns países são ricos porque tem altas taxas de investimento em capital físico, despendem uma parcela considerável de tempo acumulando habilidades ($h = e^{\Psi u}$), baixas taxas de crescimento populacional e altos níveis de tecnologia. Mais ainda, no estado estacionário, o produto per capita cresce à taxa do progresso tecnológico, g, tal como no modelo de Solow original.

$$A = (\frac{y}{k})^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.\frac{y}{h}$$

- O modelo de Solow nos ajuda a entender que países investem grande parcela de seus recursos em capital físico e na acumulação de qualificações são ricos.

- Países que usam este insumo de modo produtivo, são ricos.

- Solow não faz é nos ajudar a entender porque alguns países investem mais do que outros e porque alguns países atingem níveis de tecnologia e produtividade mais elevados.

- Entre países que apresentam o mesmo estado estacionário, a hipótese da convergência se sustenta; os países pobres crescerão mais rápido, em média, do que os países ricos.

- Princípio da dinâmica de transição: Quanto mais abaixo do seu estado estacionário estiver uma economia, tanto mais ela deverá crescer; quanto mais acima a economia estiver de seu estado estacionário, mais lentamente ela irá crescer.

$$Y(t) = F(K(t), A(t), L(t))$$

Tome a derivada em t:

$$\dot{Y} = \frac{\partial F}{\partial K}\dot{K} + \frac{\partial F}{\partial A}\dot{A} + \frac{\partial F}{\partial L}\dot{L} \tag{2.1}$$

Divida (1) por Y:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{\dot{K}}{Y} + \frac{\partial F}{\partial A}\frac{\dot{A}}{Y} + \frac{\partial F}{\partial L}\frac{\dot{L}}{Y} \tag{2.2}$$

Multiplique e divida cada termo do seguinte modo:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{\dot{K}}{Y}\frac{K}{K} + \frac{\partial F}{\partial A}\frac{\dot{A}}{Y}\frac{A}{A} + \frac{\partial F}{\partial L}\frac{\dot{L}}{Y}\frac{L}{L} \tag{2.3}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha_K.\frac{\dot{K}}{K} + \alpha_L.\frac{\dot{L}}{L} + R$$

Usando o fato que $\alpha_K + \alpha_L = 1$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} - \frac{\dot{L}}{L} = \alpha_K[\frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L}] + R$$

- R→Resíduo de Solow.
- É interpretado como uma medida da contribuição do programa tecnológico para o crescimento.
- $1. - \alpha_K(K^*)$ ao crescimento do resíduo e a fração $\alpha_K(K^*)$ a acumulação de capital.

Exemplo

$$Y = K^{0,5}[AL]^{0,5} \tag{2.4}$$

$g_Y = 0,045$
$g_K = 0,04$
$n = 0,02$

- Encontrar R e a razão de A com R.
- Aplicando ln em (4)

$$lnY = 0,5lnK + 0,5lnA + 0,5lnL$$

- Derivando em t:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = 0.5\frac{\dot{K}}{K} + 0.5\frac{\dot{A}}{A} + 0.5\frac{\dot{L}}{L}$$

$$g_Y = \alpha_K g_K + \alpha_L g_L + 0.5g_A$$

$$0.045 = 0.5[0.04 + 0.02] + 0.5g_A$$

$$0.045 = 0.5[0.06] + 0.5g_A$$

$$\frac{0.045}{0.5} = 0.06 + g_A$$

$$0.09 - 0.06 = g_A$$

$$g_A = 0.03$$

- O resíduo de Solow é a parte do crescimento que não é explicada pelos fatores de produção.

$$\frac{\dot{Y}}{Y} - 0.5(\frac{\dot{K}}{K} + \frac{\dot{L}}{L}) = R$$

$$4.5 - \frac{1}{2}(6) = R$$

$$R = 1,5$$

$$\frac{g}{R} = 2$$

2.4 Introdução de uma economia aberta

$$Y = BK^{\lambda}H^{n}L^{1-\lambda-n}$$

- K→Capital móvel
- H→Capital imóvel

$$\dot{K} + \dot{H} = BK^{\lambda}H^{n}L^{1-\lambda-n} - C - \delta_K K - \delta_h H$$

- Para simplificar a análise, supomos que as empresas maximizem o produto e vão competir por capital físico e humano até que o produto marginal líquido desses dois tipos seja idêntico.

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \lambda BK^{\lambda-1}H^{n}L^{1-\lambda-n} = \lambda\frac{Y}{K}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial H} = n\frac{Y}{H}$$

- Então pode-se dizer que:

$$n\frac{Y}{H} = \lambda\frac{Y}{K}$$

$$H = (\frac{n}{\lambda}).K$$

- Substituindo esta relação na função de produção teremos:

$$Y = BK^{\lambda}H^{n}L^{1-\lambda-n}$$

$$Y = BK^{\lambda}(\frac{n}{\lambda})^{n}K^{n}L^{1-\lambda-n}$$

$$Y = AK^{\lambda+n}L^{1-\lambda-n}$$

$$A = B(\frac{n}{\lambda})^n$$

$$\alpha = \lambda + n$$

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

- Diferentes países podem pedir emprestado para os mercados internacionais de capital.
- Um mundo com dois tipos de capital, um que pode se movimentar livremente através das fronteiras K, mas o capital humano por suposição não poderia.
- Essa suposição relata que o PmgK tem que ser igual a taxa de juros internacional.

$$\lambda\frac{Y}{K} = (r^* + \delta)$$

- $(r^* + \delta)\rightarrow$ Juros nominais.

$$K = \frac{\lambda Y}{r^* + \delta}$$

$$Y = \beta(\frac{\lambda Y}{r^* + \delta})^{\lambda}H^nL^{1-\lambda-n}$$

$$Y^{1-\lambda} = \beta(\frac{\lambda}{r^* + \delta})^{\lambda}H^nL^{1-\lambda-n}$$

$$Y = \beta^{\frac{1}{1-\lambda}}(\frac{\lambda}{r^* + \delta})^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}H^{\frac{n}{1-\lambda}}L^{\frac{1-\lambda-n}{1-\lambda}}$$

$$\alpha = \frac{n}{1-\lambda}$$

$$(1 - \frac{n}{1-\lambda}) = 1 - \alpha$$

$$A = \beta^{\frac{1}{1-\lambda}}(\frac{\lambda}{r^* + \delta})^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}$$

$$Y = AH^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

- A função de produção de uma economia aberta é igual a de uma economia fechada.

3 Primeira geração de modelos de crescimento endógeno

- Os modelos de crescimento exógeno são uma fonte útil para explicarmos as diferenças de renda entre os países com livre acesso a mesma tecnologia. Contudo, dizem pouco sobre as fontes de diferença tecnológica.

Uma versão simplificada

- Seja $F(K, L, A) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$. Suponha que $\alpha = 1$, isto é:

$$F(K, L, A) = AK$$

- $\alpha = 1$ implica que:

$$\frac{\partial F}{\partial K}.\frac{K}{F} = AK^{-1}$$

$$\frac{K}{AK} = 1$$

- O aumento de 1% no estoque de capital aumenta em 1% a produção na economia.

3.1 Introdução aos modelos AK

Aplicações empíricas dos modelos de crescimento neoclássicos

- Em 1992, Mankiw, Romer e Weill avaliam algumas implicações empíricas do modelo de Solow e concluem que ele apresenta um bom desempenho.

- Observam que o ajustamento do modelo poderá ser melhorado se fosse adicionado o capital humano.

- Isto quer dizer que diferentes economias tem diferentes níveis de instrução

- O produto Y é obtido por uma combinação de capital físico, K, e de trabalho qualificado, H, de acordo com uma função Cobb-Douglas com retornos constantes:

$$Y = K^{\alpha}(AH)^{1-\alpha}$$

- A representa a tecnologia, que cresce a uma taxa exógena$g$

- u é a fração do tempo que as pessoas dedicam ao aprendizado de habilidades e como L a quantidade de trabalho (em geral) usado na produção

- Vamos supor que a mão de obra não qualificada que está aprendendo habilidade durante o tempo u gera o trabalho qualificado H de acordo com

$$H = e^{\psi u}L \rightarrow lnH = \psi ulne + lnL$$

$$\frac{dlnH}{du} = \psi$$

$$\dot{K} = s_k Y - dk$$

$$Y = k^a (Ah)^{1-a}$$

Os três autores consideram que uma economia acumula capital humano tal como acumula capital físico: abrindo mão do consumo. Seja:

$$\dot{K} = sF - \delta K$$

$$k = \frac{K}{L} e \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - n$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = s\frac{F}{K} - \delta - n$$

$$\dot{k} = s\frac{F}{K}k - (n+\delta)k$$

$$\dot{k} = s\frac{F}{L} - (n+\delta)k$$

$$\dot{k} = sAk - (n+\delta)k$$

$$\frac{dk}{k} = (sA - (n+\delta))dt$$

$$\int \frac{dk'}{k} = (sA - (n+\delta)) \int dt$$

$$lnk = (sA - (n+\delta))(t+k)$$

Proposição. *Suponha que $sA - (n+\delta) > 0$ então a taxa de crescimento sustentado do produto per capita é $sA - (n+\delta)$.* Em particular se $k_{(0)} > 0$.

$$k = e^{(sA-(n+\delta))t}k_{(0)}$$

$$y = e^{(As-(n+\delta))t}Ak_{(0)}$$

3.2 Modelo AK

Considere o seguinte problema de otimização:

$$\int_0^\infty e^{-(p-n)t}\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}dt$$

$$\mathring{a} = (r-n)a + w - c$$

Em que temos:

- a : são ativos
- r : taxa de juros
- w: salário per capita

Vamos impor a restrição *non-ponzi*:

$$lim_{t\to\infty}[ae^{-\int_0^t (r-n)ds}] \geq 0$$

A equação de Euller da família representativa é a mesma anterior:

$$\frac{\mathring{c}}{c} = \frac{1}{\theta}[r-p]$$

A condição de transversalidade:

$$lim_{t\to\infty}[ae^{-\int_0^t (r-n)ds}] = 0$$

Vejamos o setor produtivo:

$$Y = AK$$

$$y = ak$$

$$lim_{k\to\infty}f'(k) = A > 0$$

As condições de maximização dos lucros são semelhantes as anteriores e dizem que o produto marginal do capital seja igual ao preço de renda do capita $= R = r + \delta$

$$\pi = AK - wL - (r+\delta)$$

$$\pi_k = A = r + \delta$$

3.3 Equilíbrio

Vamos solucionar o problema de maximização das famílias usando as seguintes hipóteses:

$a = k$ e $r = A - \delta$

$$H = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} e^{-(p-n)t} + \lambda[(A - \delta - n)k - c]$$

$$\mathring{a} = (r - n)a + w - ct$$

$$\mathring{k} = (A - S - n)k + w - c$$

Usando a condição de transversalidade:

$$lim_{t\to\infty} k e^{-(A-n-\delta)t} = 0$$

$$H_c = c^{-\theta} e^{-(p-n)t} - \lambda = 0 \tag{3.1}$$

$$H_k = -\mathring{\lambda} = (A - \delta - N)\lambda = 0 \tag{3.2}$$

$$H_\lambda = \mathring{k} = (A - \delta - n)k - w - c \tag{3.3}$$

Derivando (1) em relação a t:

$$-\theta c^{-\theta-1} \mathring{c} e^{-(p-n)t} + c^{-\theta}(p - n)e^{e(p-n)} = \mathring{\lambda}$$

Note que por (1) $\lambda = c^{-\theta} e^{-(p-n)t}$

$$-\frac{\theta}{c} \lambda \mathring{c} - (p - n)\lambda = \mathring{\lambda}$$

$$\frac{\mathring{\lambda}}{\lambda} = -\theta \frac{\mathring{c}}{c} - (p - n)$$

Para (2) $\frac{\mathring{\lambda}}{\lambda} = -(A - \delta - n)$

$$\theta \frac{\mathring{c}}{c} = A - \delta - n - p - n$$

$$\frac{\mathring{c}}{c} = \frac{1}{\theta}[A - (p + \delta) \ (9)$$

Podemos integração a equação acima e começarmos a avaliar o consumo a partir de um ponto inicial $c_{(0)}$:

$$\int \frac{dc}{c} = \frac{1}{\theta}(A - (p + \delta) \int dt$$

$$lnc = \frac{1}{\theta}(A - (p + \delta)t + c_0$$

$$c = c_0 e^{\frac{1}{\theta}(A-(p+\delta)t} \ (11)$$

Para garantirmos consumo positivo devemos ter:

$$A > (p + \delta) \text{ ou } r > p$$

3.4 Caracterização do equilíbrio

Vamos substituir (11) em (9):

$$\mathring{k} = (A - \delta - n)k - c(0)e^{\frac{1}{\theta}(A-\delta-p)t}$$

Onde:

$$(A - \delta - n)k = a$$

$$c(0)e^{\frac{1}{\theta}(A-\delta-p)t} = b$$

$$\mathring{x} = ax + b$$

$$x = [c + \int_0^t b(0)e^{-\int_0^s a(v)dv} ds]e^{\int_0^t a(s)ds}$$

$$k = [j + \int_0^t be^{-\int_0^t adt} dt]e^{\int^t adt}$$

$$k = [j + \int_0^t be^{-at} dt]e^{at}$$

j é uma constante a ser determinada. Para (12):

$$A > P + \delta \rightarrow (A - \delta)(\theta - 1)\theta^{-1} + \theta^{-1}p - n > 0$$

Substituindo (14) na condição de transversalidade:

$$lim_{t\to\infty}[j+[A-\delta)(\theta-1)\theta^{-1}+\frac{p}{\theta}-n]^{-1}c_0e^{-((A-\delta)(\theta-1)\theta^{-1}+p\theta^{-1}-n)t}]=0$$

Como $(A-\delta)(\theta-1)\theta^{-1}+p\theta^{-1}-n>0$ quando $t\to\infty$ o segundo termo tende a zero mas j é fixo. A condição de transversalidade pode ser somente satisfeita se $j=0$. Temos que:

$$k_0=[(A-\delta)(\theta-1)\theta^{-1}+p\theta^{-1}-n]^{-1}c_0$$

$$k=k_0e^{\frac{1}{\theta}(A-\delta-p)t}\ (15)$$

Logo:

$$c_0=[(A-\delta)(\theta-1)\theta^{-1}+p\theta^{-1}-n]k(0)\ (16)$$

O equilíbrio para a taxa de poupança:

$$S=sY$$

$$I=\mathring{k}+sK$$

$$S=I$$

$$s=\frac{\mathring{k}+\delta K}{Y}$$

Note que $\frac{Y}{K}=A$ e $\frac{\mathring{K}}{K}+\delta=sF$ ou $\frac{\mathring{K}}{K}=sF+\delta$

$$\frac{\mathring{K}}{K}=\frac{\mathring{k}}{k}+n$$

$$s=\frac{\mathring{k}/k+n+\delta}{A}$$

$\frac{\mathring{k}}{k}=(A-\delta-p)/\theta$ no estado estacionário

$$s=\frac{(A-\delta-p)/\theta+n+\delta}{A}$$

$$s=\frac{A-p+\theta n+(\theta-1)\delta}{A}\ (17)$$

3.5 O modelo AK com capital físico e humano

Considere que a função de produção toma a seguinte forma:

$$Y = F(K, H) \ (21)$$

A restrição orçamentária da família representativa

$$\mathring{a} = ra + wh - c - i_h \ (22)$$

$i \rightarrow$ é o investimento em capital humano

$$\mathring{h} = i_h - \delta_h h \ (23)$$

Considere um mercado de fatores competitivo:

$$R(t) \quad = \quad f'(k(t))$$

$$w(t) = f(k) - kf'(k)$$

$k = K/H$

Para caracterizar o equilíbrio utilizaremos o Halmiltoniano em valor corrente:

$$H^*(a, h, c, i_H, \mu_a, \mu_k) = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \mu_a[ra + wh - c - i] + \mu_h[i - \delta_h h]$$

Note que $H^* = He^{+(p-n)t}$

$$\mu_a = \lambda a e^{(p-n)t}$$

$$\mu_h = \lambda_h e^{(p-n)t}$$

$$H_c = c^{-\theta} - \mu_a = 0 \rightarrow c^{-\theta} = \mu_a \rightarrow -\theta c^{-\theta-1} = \mathring{\mu}_a \rightarrow \frac{-\theta}{c}\mathring{c}c^{-\theta} = \mathring{\mu}_a \rightarrow \theta\frac{\mathring{c}}{c} = -\frac{\mathring{\mu}_a}{\mu} \rightarrow \frac{\mathring{c}}{c} = \frac{1}{\theta}[r-p]$$

$$H_a = p\mu_a - \mathring{\mu}_a = [r\mu_a] \rightarrow \mathring{\mu}_a = p\mu_a - r\mu_a \rightarrow \frac{\mathring{\mu}_a}{\mu_a} = [p - r]$$

$$H_h = p\mu_h - \mathring{\mu}_h = [w - \delta_h]\mu_h \rightarrow \frac{\mathring{\mu}_h}{\mu_h} = [p - w + \delta_h]$$

Se $\mu_a = \mu_h \rightarrow \mathring{\mu}_a = \mathring{\mu}_h$ então:

$$\frac{\mathring{\mu}_a}{\mu_a} = \frac{\mathring{\mu}_h}{\mu_h} = p - r = p - w + \delta_h$$

$$r = w - \delta_u \forall t \ (25)$$

Combinando (25) com (24), temos:

$$r = f'(k) - \delta_k$$

$$w = f^*(k) - kf'(k)$$

$$f'(k) - \delta k = f(k) - kf'(k) - \delta_h$$

Como o lado esquerdo é decrescente em k e o lado direito é crescente, a taxa de capital trabalho efetiva deve satisfazer:

$$k = k^* \forall t$$

Proposição. *Considere uma economia na estrutura do modelo AK. Seja k^* dado por:*

$$f'(k^*) - \delta_k = f(k^*) - k^* f'(k^*) - \delta_h \ \textit{(26)}$$

Suponha que $f'(k^*) > p + \delta_k > (1-\theta)(f'(k^*) - \delta) + \delta_k$. Então existe um único equilíbrio de consumo, capital humano e físico, e produto a mesma taxa

$$g \equiv (f'(k^*) - \delta_k - p)/\theta > 0$$

A parcela do capital na renda nacional é constante e menor que 1 para todos os períodos.

$$\frac{\mathring{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - p) \forall t$$

$$g^* = \frac{1}{\theta}(f'(k^*) - \delta_k - p)$$

$$g^* = [f'(k^*) - (p - \delta_k)]/\theta$$

3.6 O modelo AK de dois setores

Suponha que $n = 0$ e que a oferta de mão de obra é perfeitamentamente inelástica.

Setor de bens:

$$c = Bk_c^a L_c^{1-a} \ (27)$$

A equação de acumulação de capital:

$$\mathring{K} = I - \delta K$$

$I \rightarrow$denota o investimento em bens produzidos no segundo setor

$$I = AK_I \ (28)$$

A condição de "market clearing" implica que:

$$K_c(t) + K_I(t) \leq K$$

$$L_c(t) \leq L$$

$$K_c(t) = (1 - \phi(H))K(t) \text{ e } K_I(t) = \phi(t)K(t)$$

A taxa de retorno do capital tem que ser o mesmo quando ele é aplicado nos dois setores: seja o preço do bem de investimento p_I e o bem de consumo p_c:

$$p_I = p_c aB(\frac{L}{(1-\phi)K})^{1-a} \ (29)$$

$$Maxp_c B_c^a L_c^{1-a} \text{s.a.} K_c + K_I \leq k$$

$$Maxp_I I \text{ s.a.} K_c + K_I \leq k$$

Defina o caminho de crescimento balanceado em ϕ constante e igual a algum $\phi^* \in [0,1]$. Defina $p_c = 1 \forall t$ por simplicidade. Derivando (29) em relação a t:

$$\frac{\mathring{p}_I}{p_I} = -(1-\alpha)g_k \ (30)$$

$$lnh_I = ln\alpha + ln\beta + (1-\alpha)[lnL - lnK_c]$$

$$\frac{\mathring{p}_I}{p_I} = -(1-\alpha)\frac{\mathring{K}_c}{K_c}$$

Lembre que $\frac{\mathring{L}}{L} = n = 0$

A equação de Euller de (4) ainda é válida porém a taxa de juros relevante deve ser denominada ou denotada por r_c. Essa taxa mede quantas unidades de consumo de um bem individual irá receber amanhã desistindo de uma unidade de consumo hoje. Desistir de uma unidade de consumo hoje implica em consumir $\frac{1}{p_I}$unidades de bens de capital. Esses bens possuem a taxa instantânea de retorno $r_I(t)$.

$$r_c = \frac{r_I}{p_I} + \frac{\mathring{p}_I}{p_I} - \frac{\mathring{p}_C}{p_C} \ (31)$$

Como $\mathring{p}_C/p_C = 0$

$$R = r + \delta; R = PMgK_I = A$$

$$\frac{r_I}{h_I} = A - \delta$$

$$r_C = A - \delta + \frac{\mathring{h}_I}{h_I}$$

Usando (4):

$$g_c = \frac{1}{\theta}(A - \delta - (1 - \alpha) - P) \ (32)$$

$$C = BK_c^{\alpha} L_c^{1-\alpha}$$

Aplicando o ln e derivando em relação ao tempo:

$$\frac{\mathring{c}}{c} = \alpha \frac{\mathring{k}_c}{k_c}$$

$g_c = \alpha g_k$, já que ϕ é constante então g_{k^*}será:

$$\theta \alpha g_k^* = (A - \delta - (1 - \alpha) g_k^* - p) \ (32)'$$

$$g_k^* = \frac{A - (\delta + p)}{1 - \alpha(1 - \theta)} \ (33)$$

$$g_k^* = \frac{\alpha(A - \delta - p)}{1 - \alpha(1 - \theta)} \ (34)$$

E o que podemos dizer dos salários?

$$w(t) = (1 - \alpha) p_c B (\frac{(1 - \phi)k}{L})^{\alpha}$$

$$lnw = ln(1 - \alpha) + lnp_c + lnB + \alpha[ln(1 - \phi)k - lnL]$$

$$\frac{\mathring{w}}{w} = \frac{\mathring{p}_c}{p_c} + \alpha\frac{\mathring{k}}{k}$$

$$\frac{\mathring{w}}{w} = \alpha g_k^*$$

Proposição. *Proposição No modelo de 2 setores há um único equilíbrio, $\forall k(0) > 0$, o consumo e o trabalho crescem a taxa constante (34) e o estoque de capital cresce a taxa dada por (33).*

3.7 Crescimento com externalidades

Seja $Y_i = F(K_i, AL_i)$, onde a tecnologia é comum entre todas as empresas e $i \in [0, 1]$

Considere:

$$\int_0^1 k_i d_i = k(t) \text{ e } \int_0^1 L_i(t)di = L$$

$$w(t) = \frac{dF}{dL} \text{ e } R(t) = \frac{dF}{dK}$$

Considere também que o estoque de conhecimento de economia é proporcional ao estoque de capital:

$$A = BK \ (36)$$

Usando (36) em (35), temos que:

$$Y = F(K, BKL)$$

Usamos o fato que todas as firmas estão funcionando a mesma taxa de capital trabalho efetiva e F é homogênea de grau 1.

$$\frac{Y}{k} = F(1, BL) = \tilde{f}(L)$$

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{Y}{K}\frac{K}{L} = k\tilde{f}(L)$$

$$w = k\tilde{f}'(L) \ (37) \text{ e } R = \tilde{f}(L) - L\tilde{f}(L) \ (38)$$

3.8 Alocações Pareto ótimas

Vamos caracterizar a alocação que maximiza a utilidade da família representativa. Aqui, a economia é centralizada.

$$\mathring{k} = \widetilde{f}k(t) - c - \delta k$$

$$\hat{H} = \frac{c^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} + \mu[\widetilde{f}(L)K - c - \delta k]$$

$$H_c = c^{-\theta} - \mu = 0 \rightarrow c^{-\theta} = \mu \rightarrow -\theta\frac{\mathring{c}}{c}c^{-\theta} = \mathring{\mu} \rightarrow -\theta\frac{\mathring{c}}{c} = \frac{\mathring{\mu}}{\mu}$$

$$H_k = p\mu - \mathring{\mu} = \mu[\widetilde{f}(L) - \delta] \rightarrow p\mu - \widetilde{f}(L) + \delta = \mathring{\mu} \rightarrow -\theta\frac{\mathring{c}}{c}c^{-\theta}$$

$$lim_{t\rightarrow\infty}[e^{-pt}\mu k] = 0$$

Proposição. *O modelo de Romer com externalidades no capital físico, o equilíbrio descentralizado é sub ótimo de Pareto e cresce a uma taxa menor que a alocação que maximiza a utilidade mais lenta da família representativa.*

Equilíbrio competitivo

$$g_c^* = \frac{1}{\theta}(\widetilde{f}(L) - L\widetilde{f}(L) - \delta - p > 0 \ (40)$$

$$g_c^{s^*} - g_c^* = Lf'(L) > 0$$

Essencialmente o planejador social que ao acumular mais capital ele está melhorando a produtividade no futuro. Como esse efeito é externo as empresas na economia descentralizada elas falham em internalizar este “spillover”.

4 Crescimento Neoclássico: O modelo de Ramsey

O modelo de decisão intertemporal do consumo foi primeiramente desenvolvido por Ramsey (1929) e continuado ou aperfeiçoado por Cass (1965) e Koopman (1965). A seguir apresentaremos uma versão simplificada deste modelo.

4.1 As famílias neoclássicas

Os habitantes de nossa economia maximizam sua utilidade da seguinte forma forma.

$$U(0) = \int_0^\infty e^{-pt}u(c_t)L_t dt = \int_0^\infty e^{-pt}\frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}L_t.dt \tag{4.1}$$

A utilidade agregada é a soma das utilidades descartadas ao decorrer do tempo. A questão intertemporal do modelo de 0 a $+\infty$ pode ser tratada conforme Barro (1974) como um altruísmo intergeracional. O número de agente pertencentes a cada família é L_t.

$$L_t = e^{nt} \rightarrow lnL_t = nt \rightarrow \frac{\dot{L}}{L} = n$$

Suponha que U_1é a função de um pai de família no período 1. O pai de família vive exclusivamente no período 1 e seus filhos vivem no período 2. Supomos que a utilidade do filho afete o bem estar do pai, da seguinte forma:

$$U_1 = u(c_1) + \frac{1+n}{1+p} U_2 \tag{4.2}$$

Do mesmo modo, para a próxima geração

$$U_2 = u(C_2) + \left[\frac{1+n}{1+p}\right] u(C_3) \tag{4.3}$$

Generalizando

$$U_1 = \sum_{t=1}^{\infty} u(C_t) \left(\frac{1+n}{1+p}\right)^{t-1} \tag{4.4}$$

A função de utilidade é côncava. As pessoas consomem em média a mesma coisa a cada dia.

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$

Elasticidade intertemporal é constante. Se as preferências são côncavas o nível de concavidade $\theta > 0$.Quanto maior o θ mais elevado é o desejo de alisar o consumo durante o tempo. Quanto $\theta \rightarrow 1$ a função de utilidade se transforma em uma função logarítmica.

$$lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} = \frac{c_t^{1-\theta}}{1-\theta}$$

Aplicando-se o L'hopital (derivando em relação a θ)

$$lim_{\theta \rightarrow 1} = \frac{-c_t^{1-\theta} ln\left(c_t\right)}{-1} = ln\left(c_t\right)$$

As famílias possuem ativos B_t, que podem ser positivas se as mesmas são credoras ou negativas se elas possuem dívidas.

$r_t B_t$: pagamento de juros

$w_t L_t$: pagamento de salários aos membros da família

Supomos que todas os membros da família estão empregados. A restrição orçamentária da família é dada pela seguinte relação:

$$\dot{b} = w + rb - c - nb \tag{4.5}$$

$$\dot{B} = wL + rB - c \tag{4.6}$$

$$b = \frac{B}{L}$$

$$bL = B$$

$$lnb + lnL = lnB$$

$$\frac{\dot{b}}{b} + n = \frac{\dot{B}}{B}\ (6'')$$

Dividindo (6) por B:

$$\frac{\dot{B}}{B} = w\frac{L}{B} + r - \frac{c}{B}$$

Inserindo (6")

$$\frac{\dot{b}}{b} + n = w$$

$$\frac{L}{B} + r - \frac{c}{B}$$

$$B = bL; \frac{L}{B} = \frac{1}{b}; c = \frac{C}{L}$$

$$\frac{\dot{b}}{b} + n = w.b^{-1} + r - \frac{c}{bL}$$

$$\frac{\dot{b}}{b} = w.b^{-1} + r - \frac{c}{b}$$

$$\dot{b} = w + br - c - nb$$

$$\dot{b} = w - c + b(r - n) \tag{4.7}$$

Lembre que $L_t = e^{nt}$. Então o problema da família pode ser escrito da seguinte forma

$$maxU(0) = \int_0^{\infty} e^{-(p-n)t} \left(\frac{c^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} \right) dt$$

sujeito a

$$b = w + r\dot{b} - c - nb$$

Para que o objetivo das famílias seja finito. devemos impor algumas restrições. Os termos incluídos no interior da integral devem se aproximar de zero quando $t \to \infty$. Isto requer a seguinte condição:

$$lim_{t\to\infty} e^{-(p-n)t} \left(\frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) = 0 \quad (4.8)$$

Portanto

$$p > n \quad (4.9)$$

Para solucionar-se este problema utilizamos o Hamiltoniano.

$$H(c, b, v, t) = e^{-(p-n)t} \left(\frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) + v[w + (r-n)b - c] \quad (4.10)$$

$$H_c = c^{-\theta} e^{-(p-n)t} - v = 0 \quad (4.11)$$

$$H_b = -\dot{v} = v(r-n) \quad (4.12)$$

$$\underset{t\to\infty}{lim} b_t v_t = 0 \quad (4.13)$$

Tomando o ln em (11)

$$-\theta lnc - (p-n)t = lnv$$

Derivando em relação ao tempo

$$-\theta \frac{\dot{c}}{c} - (p-n) = \frac{\dot{v}}{v} \ (11')$$

Dividindo (12) por v

$$\frac{\dot{v}}{v} = (n-r) \ (12')$$

Inserindo (12') em (11') temos:

$$-\theta \frac{\dot{c}}{c} - (p-n) = n - r$$

$$-\theta \frac{\dot{c}}{c} = -(-p + r)$$

$$g_c = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - p) \tag{4.14}$$

$$p + \theta\frac{\dot{c}}{c} = r \ (14')$$

Algumas considerações:

- p - representa o aumento da utilidade no consumo presente e não no futuro;
- O consumidor deseja suavizar o consumo através do tempo se $\theta > 0$.Sempre que prevê-se que $\frac{\dot{c}}{c} > 0$ o consumidor desejará aumentar o seu consumo presente o que sugere trajetórias pouco lisas (suaves);
- A expressão (14) mostra o nível de indiferença entre consumo e poupança dos indivíduos;
- Quanto maior o θ, mais se deve aumentar r para que uma determinada "relação" $\frac{\dot{c}}{c}$ seja aceitável;
- A condição de transversalidade $lim_{t\to\infty} b_t v_t = 0$ garante que não há herança, ou seja, os indivíduos otimizadores não desejam deixar nada para as gerações seguintes após a sua morte.
- O modelo de Ramsey supõe que os indivíduos "falecem" no infinito.

4.2 As empresas

A economia é competitiva e as empresas contratam os trabalhadores pagando o salário w_t. A taxa de arrendamento do capital é R_t. A função de produção satisfaz as seguintes propriedades:

1. A função possui retornos constantes de escala (é homogênea de grau 1)
2. A produtividade Marginal dos fatores é positiva, porém decrescente.
3. $F(\cdot)$ satisfaz as condições de Inada. Essas exigem que a produtividade marginal do capital se aproxime de zero quando $k \to \infty$ e tenda ao infinito quando $k \to 0$, isto é,

   $$lim_{k\to 0} Pmgk = \infty.$$

   Condições análogas são aplicadas ao trabalho.

A função de produção é dada pela seguinte equação:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}\alpha \in (0, 1)$$

Em termos per capita $y = Ak^{\alpha}$. A taxa de benefício que os proprietários recebem pelo aluguel do capital é:

$$r = R - \delta \text{ ou } R = r + \delta$$

Nesse mercado, as empresas são maximizadoras de lucro:

$$\pi = F(K, L) - (r + \delta)K - wL \tag{4.15}$$

Podemos escrever (15) em termos per capita:

$$\frac{\pi}{L} = Ak^{\alpha} - (r + \delta)k - w$$

Tomando a condição de primeira ordem em relação a K:

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} - (r + \delta) = 0 \rightarrow f'(k) = (r + \delta) \tag{4.16}$$

Derivando em relação a L:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = (1 - \alpha)AK^{1-\alpha}L^{1-\alpha-1} - w = 0 \tag{4.17}$$

$$(1 - \alpha)k^{\alpha} - w = 0$$

$$f(k) - kf'(k) = w$$

em termos per capita

4.3 Equilíbrio

Numa economia fechada e sem governo o equilíbrio do mercado financeiro exige que a oferta de capital seja não negativa $b = k$ e $S = I$. A dívida líquida dessa economia deve ser igual a zero. Inserindo-se (17) e (16) em (6) tem-se que:

.

$$b = w + rb - c - nb$$

$$\dot{k} = w + rk - c - nk$$

$$\dot{k} = f(k) - kf'(k) + rk - c - nk$$

$$\dot{k} = f(k) - c - (\delta + n)k \tag{4.18}$$

A inserção das empresas no modelo não altera nossa análise. Supomos que a taxa de poupança é constante nesse modelo. Caso contrário suporíamos que $C = (1 - s)f(k)$ e chegaríamos na equação fundamental do modelo de Solow-Swan. Não podemos fazer este pressuposto sobre o consumo, pois não sabemos se nossas consumidores escolherão de forma ótima uma de poupança constante. Se substituirmos (16) em (14) chegaremos em:

$$g_c = \frac{1}{\theta}.(f(k) - p - \delta) \tag{4.19}$$

Essa condição diz que para que o consumidor decida aceitar um caminho de consumo crescente ele deve ser recompensado com um produto marginal superior. A condição de transversalidade é análoga, apenas substituímos b por K e teremos:

$$lim_{t\to\infty} k_t v_t = 0 \tag{4.20}$$

Usando a representação Cobb-Douglas em (19):

$$g_c = \frac{1}{\theta}(\alpha A K^{\alpha-1} - \delta - p) \; (19')$$

4.4 Cenários Alternativos

Consideramos uma solução a la Robinson Crusoé, isto é, imagine uma economia fechada, com um único bem. A produção final pode se dedicar tanto ao consumo, bem como, ao investimento. O capital se deprecia a taxa δ e a população cresce a taxa n. A economia está em pleno emprego.

$$S = I$$

$$Y = C + I$$

$$\dot{K} = F(K, L) - C - \delta K \tag{4.21}$$

$$\frac{\dot{K}}{L} = f(K) - C - \delta K$$

$$k = \frac{K}{L}$$

$$lnk = lnK + lnL$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} + \frac{\dot{L}}{L} \rightarrow \frac{\dot{k}}{kL} = \frac{\dot{K}}{KL} + \frac{\dot{L}}{L}$$

$$\frac{\dot{K}}{L} = \frac{\dot{k}}{L} - \frac{\dot{L}}{L}$$

$$\varepsilon_{Umg} = -c.\frac{U''(c)}{U'(c)} = -c\frac{\theta c^{1-\theta-1}}{c^{-\theta}} = \theta$$

Elasticidade da Umg:

$$\frac{\partial u'(c)}{\partial c}.\frac{c}{u'(c)} = -\left(\frac{u''(c)}{u'(c)}c\right)$$

Exatamente igual ao Arrow-Pratt Relativo

$= 0$ →Risco Neutro

> 0 →Averso ao Risco

< 0 →Propenso ao Risco

$$ESI = \left[\frac{\partial ln(U'(c_1)/U'(c_2))}{\partial ln(c_1/c_2)}\right]^{-1}$$

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$$

$$U'(c_1) = U'(c_2) = c_t^{-\theta}$$

$$\varepsilon = -\left[\frac{\partial ln\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{-\theta}}{\partial ln\left(\frac{C_1}{C_2}\right)}\right]^{-1} = \frac{1}{\theta}$$

$$\varepsilon = -\left[\frac{\partial\left[\frac{U'C_1}{U'C_2}\right]}{\partial\left[\frac{C_1}{C_2}\right]}.\frac{\frac{C_1}{C_2}}{\left(\frac{U'C_1}{U'C_2}\right)}\right]^{-1}$$

$$\varepsilon = \left[\frac{\partial\left[\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{-\theta}\right]}{\partial\left[\frac{C_1}{C_2}\right]}.\frac{\frac{C_1}{C_2}}{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{-\theta}}\right]^{-1}$$

$$\varepsilon = -\left[-\theta\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{-\theta-1}.\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{1+\theta}\right]^{-1}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\theta}$$

4.4.1 Condição Keynes Ramsey

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - p)$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \gamma(c)(r - p)$$

Se a taxa de juros real for igual a taxa de desconto, então seria possível manter o consumo constante.

$$r_t = \frac{1}{\gamma(c)}\frac{\dot{c}}{c} + p \rightarrow r_t - p = \frac{1}{\gamma}.\frac{\dot{c}}{c}$$

O spread entre r_t e p, o consumo será maior para os consumidores com uma alta $ESI = \gamma$. Consumidores com um baixo θ possuem uma alta γ e então ajustarão seus "caminhos" trajetórias "muito mais" para um dado gap entre para a valoração privada e de mercado . Um alto θos consumidores apenas ajustarão seu caminho de consumo entre a diferença de r_t e p.

$$\dot{k} = f(k) - c - (\delta + n)k$$

$$H(.) = e^{-(p-n)t}.\left(\frac{C^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}\right) + \lambda[f(k) - c - (\delta + n)\, k] \tag{4.22}$$

$$H_c = c^{-\theta}.e^{-(p-n).t} - \lambda = 0 \tag{4.23}$$

$$H_k = -\dot{\lambda} = \lambda[f'(k) - (\delta + n)] \tag{4.24}$$

$$H_\lambda = \dot{k} = f(k) - c - (\delta + n)k \tag{4.25}$$

$$lim_{t\to\infty} k_t.\lambda_t = 0 \rightarrow QRND \tag{4.26}$$

$$-\theta ln\,(c) - (p - n)t = ln\lambda$$

$$-\theta\frac{\dot{c}}{c} - p - n = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$$

$$-\theta\frac{\dot{c}}{c} - p - n = -(n + \delta) - f'(k)$$

$$-\theta\frac{\dot{c}}{c} = (n + \delta) - f'(k) + p + n$$

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}.\left[f'(k) - (p + \delta)\right]$$

Note que a solução de mercado é igual a das famílias.

$$\frac{\partial u}{\partial c} = c^{-\theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial c^2} = -\theta c^{-\theta-1}$$

Usando o coeficiente de Arrow Pratt relativo:

$$r_{AP} = -c\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial c^2}}{\frac{\partial u}{\partial c}} = -\theta\frac{c^{-\theta-1}}{c^{-\theta}}c = \theta$$

$\theta \in (0,1)$. O indivíduo é avesso ao risco

4.5 Solução do Planejador Central

- Um planejador que toma todas as decisões corretas.
- O planejador possui o mesmo objetivo dos indivíduos.
- Há uma restrição física, tudo que é produzido é consumido.
- O planejador possui todo o conhecimento, e leva em conta todas as possíveis externalidades quando vai tomar a sua decisão.
- Em outras palavras a solução é idêntica a de mercado.

4.5.1 A dinâmica da transição e a forma da trajetória estável.

Precisamos de 3 equações:

$$\dot{k} = Ak^{\alpha} - C - (\delta + n)k$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(f'(k) - p - \delta)$$

$$f'(k) \to \alpha A k^{\alpha-1})$$

Passo 1:

Construímos as curvas de valores c e k para os quais o aumento de capital é igual a zero. Usando a equação (3.18) e igualando $\dot{k} = 0$

$$C = Ak^{\alpha} - (\delta + n)k$$

$$\dot{k} = sy - (n+\delta)k \rightarrow \dot{k} = y - C - (n+\delta)k$$

Note que essa curva é inicialmente crescente e passa pelas pontas $c = 0$ e $k = 0$ e obtém um nível de estoque de capital máximo que satisfaz $f'(x) = \delta + n$ e logo volta a cair até cruzar-se com o eixo horizontal. O máximo corresponde ao:

$$k_{gr} = \left(\frac{\alpha A}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

.

Passo 2:

Analisamos a dinâmica do capital, acima ou abaixo da curva $\dot{k}$. Devemos nos perguntar como se move o estoque de capital quando nos situamos exatamente na curva $\dot{k} = 0$.

Se analisarmos a equação (18) vemos que um pequeno aumento de c está associado a uma redução de $\dot{k}$. Desta forma $\dot{k}$ cresce quando c diminui, depois de k_{gr}. Até k_{gr}, mesmo com o aumento do consumo o estoque de capital cresce a taxas decrescentes. Em outras palavras a um nível de consumo muito elevado eleva a um $\dot{k} < 0$.Esta região fica acima da equação $\dot{k} = 0$, e possui o sentido $\leftarrow$

Passo 3:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(f'(k) - p - \delta)$$

Há duas formas de satisfazermos $\dot{c} = 0$

1. $c = 0$

2. $f'(k) = (n + p)$

A segunda possibilidade é satisfeita quando:

$$\alpha k^{*\alpha - 1} = p + \delta \rightarrow k^{*} = \left(\frac{\alpha A}{\delta + p}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$c^{*} = k^{*}\left[1 - (\delta + n)\right]$$

Essa quantidade de capital pode ser representada por uma linha vertical em k^{*}.A linha vertical correspondente a $\dot{c} = 0$ se situa a esquerda do máximo da curva $\dot{k} = 0$.

Passo 4:

Nos colocamos em cima da curva $\dot{c} = 0$ e analisamos o comportamento do consumo de acordo com a equação (19):

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(f'(k) - p - \delta) \rightarrow Ak^{*\alpha-1} = -p - \delta$$

Quando nos movemos a direita aumentando k estamos reduzindo dado que $f'(k)$ é uma função decrescente, isto é, um aumento de k reduz o valor de $f'(k)$. Então a direita de k^* o consumo diminui. A direita de k^*as setas apontam para baixo e a esquerda para cima.

Passo 5

Analisamos os estados estacionários. Há um cruzamento dessas curvas em 3 pontos:

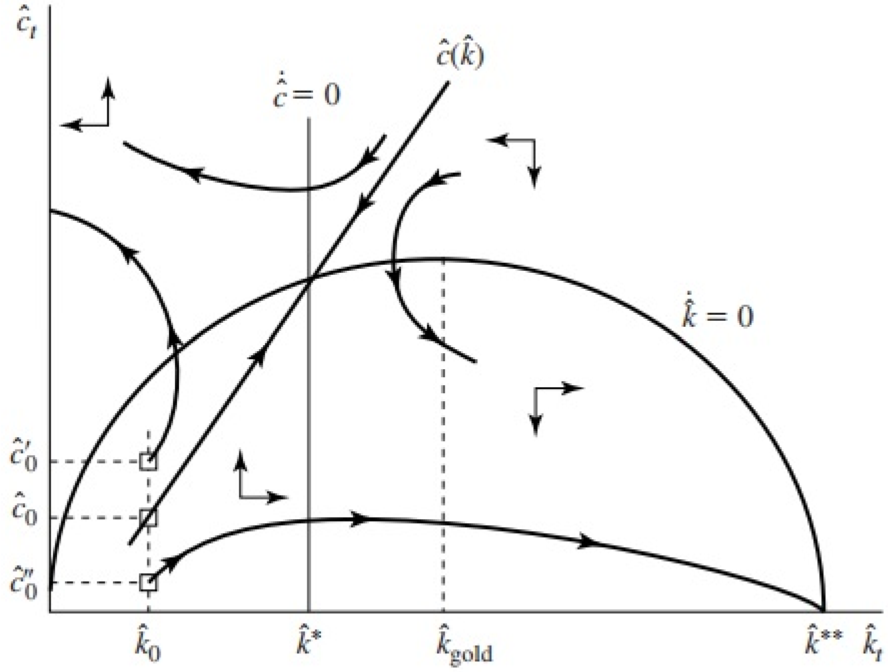
Na origem, onde c e $k = 0$. Em k^{**},para $c = 0$, $\dot{k} = f(k) - (\delta + n)k$

$$\dot{k} = 0 \rightarrow A\frac{k^\alpha}{k} = \delta + n \rightarrow k^{**} = \left(\frac{A}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

A intersecção entre k^*e $\dot{k} = 0$,que resulta em $c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^*$. A origem é um equilíbrio instável. Mas devemos começar por ela para chegarmos no EE. k^{**} é estável visto que todas as retas apontam para si. k^* é um ponto de sela. Se olharmos as retas podemos verificar que chegamos a ele somente por duas regiões. Quando isto ocorre dizemos que há somente uma trajetória estável que converge a este EE.

A forma qualitativa depende, não obstante, de diferentes parâmetros. cuja influência poderíamos apreciar intuitivamente. Note que para valores elevados do parâmetro θ (os agentes estão muito interessados em analisar o seu consumo ao decorrer do tempo, sendo que a trajetória estável é muito próxima a curva que $\dot{k} = 0$. Similarmente para θ muito reduzido, os indivíduos não se importam em ter trajetórias de consenso não lisas. A trajetória ótima para esta situação estaria próxima ao eixo das abcissas para estoque de capital pequenos. Perto do EE a trajetória estável é muito vertical por esta razão os indivíduos escolherão um consumo reduzido e uma acumulação de capital elevada antes de chegar nesse estado.

Figura 7: Diagrama de Fase do Modelo de Ramsey



Ao ir aumentando o estoque de capital na economia (considerando um estoque de capital k_0 inferior ao k^*), o capital cresce a uma taxa decrescente, que acaba sendo zero no EE.

5 Crescimento com gerações sobrepostas

- Esses modelos foram introduzidos por Samuelson e posteriormente por Diamond;
- Esses modelos são interessantes porque capturam o processo de interação entre diferentes gerações;
- Esses modelos dão *insights* sobre o papel da dívida pública e a seguridade social.

5.1 Modelo OLG básico

- Demografia, preferências e tecnologia
- Cada indivíduo vive por dois períodos
- A função de utilidade pode ser descrita na seguinte forma:

$$U_t(c_1(t), c_2(t+1)) = u(c_1(t)) + \beta u(c_2(t+2)) \tag{5.1}$$

A função de utilidade pode ser definida como $u : R^2_+ \to R$, o indivíduo nasce na data t e quando jovem consome $c_1(t)$ e quando velho consome $c_2(t+1)$. Tem-se que $\beta \in (0,1)$ é um fator de desconto.

- O mercado de fatores é competitivo;
- Os indivíduos trabalham no período t e oferecem uma oferta de trabalho perfeitamente inelástica, recebendo o salário de equilíbrio $w(t)$.
- A população cresce a uma taxa exponencial:

$$L(t) = (1+n)^t L(0) \tag{5.2}$$

- A produção pode ser caracterizada por um conjunto de firmas em um mercado competitivo.

$$Y(t) = F(K(t), L(t))$$

- O capital é totalmente depreciado após o seu uso $\delta = 1$. $k \equiv K/L$ isto é a taxa de retorno da poupança é igual a taxa de retorno do capital:

$$1 + r(t) = R(t) = f'(k(t)) \tag{5.3}$$

Define-se que $f(k) \equiv F(k,1)$. Isto é, uma forma de representar a função de produção em termos per capita. Usualmente podemos representar o salário pela seguinte equação:

$$w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)) \tag{5.4}$$

5.2 Decisões de consumo

As taxas de poupança de uma geração t, $s(t)$ são determinadas como uma solução do seguinte problema de maximização

$$max_{c_1(t),c_2(t+1),s(t)} u(c_1(t) + \beta u(c_2(t+1))$$

$$s.a$$

$$c_1(t) + s(t) \leq w(t)$$

$$c_2(t+1) \leq R(t+1)s(t)$$

A taxa de retorno líquida recebida das poupanças é $R(t+1) = 1 + r(t+1)$

- A segunda restrição incorpora a noção que os indivíduos somente gastam dinheiro no "fim" de suas vidas.

- Montando o Lagrangeano:

$L = u(c_1(t)) + \beta u(c_2(t+1)) + \lambda_1[w(t) - c_1(t) - s(t)] + \lambda_2[R(t+1)s(t) - c_2(t+1)]$

Usando as condições de Kuhn-Tucker:

$$L_{c_1} = u'(c_1(t)) - \lambda_1 \leq 0; c_1 \geq 0; L_{c_1}c_1 = 0 \text{ (L.1)}$$

$$L_{c_2} = \beta u'(C_2(t+1)) - \lambda_2 \leq 0; c_2 \geq 0; L_{c_2}c_2 = 0 \text{ (L.2)}$$

$$L_{st} = -\lambda_1 + \lambda_2 R(t+1) \leq 0; st \geq 0; L_{st}.st = 0 \text{ (L.3)}$$

$$L_{\lambda 1} = w(t) - c_1(t) - s(t) \geq 0, \lambda_1 \geq 0; L_{\lambda 1}\lambda_1 = 0 \text{ (L.4)}$$

$$L_{\lambda 2} = R(t+1)s(t) - c_2(t+1) \geq 0, \lambda_2 \geq 0; L_{\lambda 2}\lambda_2 = 0 \text{ (L.5)}$$

Sabemos que $c_{1,}c_2$e $s(t) > 0$ e chutamos que a restrição (L.4) e a (L.5) estão ativas, isto é, λ_1e $\lambda_2 > 0$ obteremos:

$$u'(c_1(t)) = \lambda_1 \text{ (L.1')}$$

$$u'(c_2(t+1)) = \lambda_2 \text{ (L.2)'}$$

$$\lambda_2 R(t+1) = \lambda_1 \text{ (L.3)'}$$

$$s(t) = wt - c_1(t) \text{ (L.4)'}$$

$$c_2(t+1) = R(t+1)s(t) \text{ (L.5)'}$$

Usando (L.1'),(L.2'),(L.3') chegamos na equação de Euller:

$$u'(c_1(t)) = \beta R(t+1)u'(c_2(t+1)) \tag{5.5}$$

Podemos utilizar o teorema da função implícita para determinar $s(t)$. Para isso, usaremos (L.4)' e (L.5)':

$$s(t) + w(t) = c_1(t)$$

$$c_2(t+1) = R(t+1)s(t)$$

$$u'(w(t) - s(t)) + \beta R(t+1)u'(R(t+1)s(t) = 0$$

$$= (w(t), R(t+1) = 0$$

$$s(t) = (w(t), R(t+1)) \tag{5.6}$$

onde s: $s : R^2 \rightarrow R$.Temos que a equação de movimento do capital para nossa economia é:

$$k(t+1) = L(t)s(w(t), R(t+1)) \tag{5.7}$$

5.3 Equilíbrio

Definição 1. Um equilíbrio pode ser representado por sequências "agregadas" de estoque de capital, consumo e preço dos fatores, $\{k, c_{1,}, c_2, R, w\}_{t=0}^{\beta}$ tais que a sequência do preço $\{R, w\}_{t=0}^{\infty}$ é dada por (3) e (4) e as decisões individuais de consumo $\{c_1, c_2\}_{k=0}^{\infty}$são dadas por (5) e (6) e o estoque de capital agregado $\{K\}_{t=0}^{\infty}$ está de acordo com (7)

Para caracterizarmos o equilíbrio de EE (estado estacionário) devemos dividir (7) por $L(t+1) = (1+n)L(t)$:

$$k(t+1) = \frac{s(w(t), R(t+1)}{(1+n)}$$

Usando (3) e (4), teremos que:

$$(1+n)k(t+1) = s\left(f(k(t)) - k(t)f'(k(t), 1 + r(t+1)\right)$$

$$(1+n)k(t+1) = s(f(k) - kf'(k), f'(k(t+1)) \tag{5.8}$$

Como a lei fundamental de movimento da economia o EE é dado pela solução da equação (8) tal que $k(t+1) = k(t) = k^*$

$$k^* = \frac{s(f(k^*) - k^*f'(k^*))}{1+n}, \tag{5.9}$$

Desde que a função de poupança pode (ou possa) assumir qualquer forma funcional, a equação (8) pode levar a múltiplas EE.

$$\Psi(t+1) \equiv \left[1 + \beta^{\frac{-1}{\theta}} R(t+1)^{-(1-\theta)/\theta}\right] > 1$$

Isso indica que a poupança é sempre menor do que os ganhos

$$s_w = \frac{\partial s(t)}{\partial w(t)} = \frac{1}{\Psi(1+t)} \in (0,1)$$

$$s_r = \frac{\partial s(t)}{\partial R(t+1)} = w(t).\frac{1}{-\left[1+\beta^{\frac{-1}{\theta}} R(t+1)^{-1(1-\theta)/\theta}\right]^{\lambda}.\frac{(1-\theta)}{\theta}.R(t+1).B^{\frac{-1}{\theta}}}$$

$$R = \frac{s(t)}{\Psi(t+1)}.\frac{1-\theta}{\theta}.(\beta.R(t+1)^{\frac{-1}{\theta}}$$

$$R = \frac{s(t)}{\Psi(t+1)^2}.\frac{1-\theta}{\theta}.(\beta.R(t+1)^{\frac{-1}{\theta}}$$

Como

$$\Psi(t+1) > 1 \text{ então } s_w \in (0,1)$$

Se $\theta > 1$ $SR < 0$

$s_R > 0$ se $\theta < 1$ e $s_R = 0$ se $\theta = 1$

Por exemplo, quando $\theta = 1$ o efeito renda domina o efeito substituição. Embora R aumenta (e assim o consumo quando se é jovem é relativamente mais caro do que quando se é velho!). Algumas restrições na função de utilidade e nas funções de produção:

$$U_t(c_1(t), c_2(t+1)) = \frac{c_1(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \beta\left(\frac{c_2(t+1)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}\right) \tag{5.10}$$

$\theta > 0, \beta \in (0,1)$ e a tecnologia de produção é dada por uma função Cobb-Douglas: $f(k) = k^{\alpha}$. As CPOs são análogas e então teremos:

$$c_1^{-\theta} = c_2^{-\theta}(\beta - R(t+1))$$

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{\theta} = \beta R(t+1)$$

$$c_1 = w_t - s_t$$

$$c_2 = R(t+1)s_t$$

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{R(t+1)s_t}{w_t - s_t}$$

$$[w(t) - s(t)].B^{\frac{1}{\theta}}R(t+1)^{\frac{1}{\theta}} = s_t R(t+1)$$

$$\frac{c_2}{c_1} = B^{\frac{1}{\theta}}R(t+1)^{\frac{1}{\theta}}$$

Em termos de poupança :

$$s(t)R(t+1) = (w(t) - s(t))B^{\frac{1}{\theta}}R(t+1)^{\frac{1}{\theta}} \tag{5.11}$$

$$s(t) = (w(t)) - s(t))B^{\frac{1}{\theta}}R(t+1)^{\frac{1-\theta}{\theta}}$$

$$s(t) + s(t))B^{\frac{1}{\theta}}.R(t+1)^{\frac{1-\theta}{\theta}} = w(t)B^{\frac{1}{\theta}}.R(t+1)^{\frac{1-\theta}{\theta}}$$

$$s(t)[1 + B.R(t+1)^{\frac{1-\theta}{\theta}}] = w(t)B^{\frac{1}{\theta}}.R(t+1)^{\frac{1-\theta}{\theta}}$$

$$s(t)\left(\frac{1}{B^{\frac{1}{\theta}}.R(t+1)^{\frac{1-\theta}{\theta}}} + 1\right) = w(t)$$

$$s(t) = \frac{w(t)}{\Psi(t+1)} \tag{5.12}$$

Em contraste, quando $\theta < 1$ o efeito substituição domina e os indivíduos reduziram seu consumo quando jovens e assim aumentam suas poupanças. Quando $\theta = 1$ é um caso especial e frequentemente utilizado em muitas aplicações.

$$k(t+1) = s(f(k(t)) - k(t)f'(k(t)), f'k(t+1)).(1+n)^{-1}$$

A solução igual de (8) implica que:

$$k(t+1) = s(t).(1+n)^{-1}$$

$$k(t+1) = \frac{w(t)}{\Psi(t+1)}.(1+n)^{-1}$$

Mais explicitamente:

$$k(t+1) = \frac{f(k(t)) - k(t)f'(k(t))}{(1+n)\left[1 + \beta^{\frac{-1}{\theta}}f'(k(t+1))^{\frac{-(1-\theta)}{\theta}}\right]} \tag{5.13}$$

No estado estacionário:

$$k^* = \frac{f(k^*) - k^* f'(k^*)}{(1+n)\left[1+\beta^{\frac{-1}{\theta}}.f'(k^*)^{\frac{-(1-\theta)}{\theta}}\right]}$$

Usando a forma Cobb-Douglas

$$k^* = \frac{k^{*\alpha} - k^*.(\alpha k^{-\alpha-1})}{(1+n)\left[1+\beta^{\frac{-1}{\theta}}.\left[\alpha k^{-\alpha-1}\right]^{\frac{-(1-\theta)}{\theta}}\right]}$$

$$k^* = \frac{k^{*\alpha}.(1-\alpha)}{(1+n)\left[1+\beta^{\frac{-1}{\theta}}.\left[\alpha k^{-\alpha-1}\right]^{\frac{-(1-\theta)}{\theta}}\right]}$$

$$(1+n)\left[1+\beta^{\frac{-1}{\theta}}.\left[\alpha k^{-\alpha-1}\right]^{\frac{-(1-\theta)}{\theta}}\right] = k^{*\alpha-1}(1-\alpha)$$

Por simplicidade defina $R^* \equiv \alpha(k^*)^{\alpha-1}$como o produto marginal do capital no EE.

$$(1+n)\left[1+\beta^{\frac{-1}{\theta}}R^{*\frac{(\theta-1)}{\theta}}\right] = (1-\alpha)R^*/\alpha \tag{5.14}$$

O estado estacionário de R^* e k^* pode ser determinado (14) possui uma solução única. Vamos substituir a equação (função) Cobb-Douglas em (14) para obter:

$$k(t+1) = \frac{(1-\alpha)K^{\alpha}}{(1+n)\left[1+\beta^{\frac{-1}{\theta}}.\left[\alpha k(t+1)^{-\alpha-1}\right]^{\frac{-(1-\theta)}{\theta}}\right]} \tag{5.15}$$

Proposição. *No modelo de OLG com 2 períodos, com ma tecnologia Cobb-Douglas e preferências CRRA existe um único estado estacionário com a taxa de capital trabalho k^*dadas por (15) e $\forall\theta > 0$ este equilíbrio é globalmente estável $\forall\, k(0) > 0$*

Demonstração.

$$g\left(k(t+1)\right) = k(t) \ (17)$$

A função $g(\cdot)$ é crescente em $k(t+1)$ e possui inversa $g^{-1}(\cdot)$. Além disso, $g(0) = 0$ e $lim_{k\to\infty} g(k) = \infty$, então para o próximo período a razão de capital trabalho é unicamente definida por $k(t+1) = g^{-1}\left(k(t+1)\right)$. No EE sabemos que $k^* = k(t+1) = k^*$,usando esta relação com $k^* > 0$e reescrevendo a equação acima em termos da taxa de retorno do capital $R^* = \alpha(k^*)^{\alpha-1}$,e então obteremos (16)

$$ln(R^*) \equiv 1 + \beta^{\frac{-1}{\theta}} R^{*\frac{(\theta-1)}{\theta}} - \frac{1-\alpha}{(1+n)\alpha} R^* = 0 \tag{5.16}$$

Note que $lim_{R^*\to 0} ln(R^*) < 0$ (ComoR^*cresce mais rápido que $R^{*1-\frac{1}{\theta}}$para $\theta > 0$) então a equação anterior sempre possui uma solução.

Note que a derivada de $ln(R^*)$ é dada por:

$$ln'(R^*) = \beta^{\frac{-1}{\theta}} \left(\frac{\theta - 1}{\theta}\right) R^{*\frac{-1}{\theta}} - \frac{1-\alpha}{(1+n)\alpha}$$

Para $\theta \leq 1$ $ln'(R^*)$ é decrescente o que torna $ln^*(R^*) = 0$ possua uma única solução. Para $\theta > 0, ln(R^*)$ é crescente para um R^*suficientemente pequeno, o que não "sobrepõe" a unicidade do nosso resultado. Em particular quando $\theta > 1$,observamos que ln é decrescente em todas as pontas, isto é, $ln^*(R^*) < 0 \forall R^*$tal que $ln(R^*) = 0$,o que faz com que exista apenas um único ponto de cruzamento.

Para isso $ln(R^*) = 0$ implica

$$\beta^{\frac{-1}{\theta}} (R^*)^{\frac{-1}{\theta}} = \frac{1-\alpha}{(1+n)\alpha} - \frac{1}{R^*}$$

$$ln'(R^*) \mid ln(R^*) = 0, \theta > 1 = \frac{\theta-1}{\theta}\left(\frac{1-\alpha}{(1+n)\alpha} - \frac{1}{R^*}\right) - \frac{1-\alpha}{(1+n)\alpha} = -\frac{1}{\theta}.\frac{1-\alpha}{(1+n)\alpha} - \frac{\theta-1}{\theta}.\frac{1}{R^*} < 0$$

O que comprova nossa "observação". Então $\forall \theta > 0$ existe um único R^*que soluciona $ln(R^*) = 0$. Desse modo existe um único (não-zero) estado estacionário para o sistema (4) dado por $K^* = (\frac{R^*}{\alpha})^{\alpha-1}$. Afirmamos que o sistema $k(t+1) = g^{-1}$é oficialmente estável, tal que a economia converge para um único estado estacionário K^*começando a qualquer $K(0) > 0$.

A análise acima estabelece que a função $g^{-1}(k(t))$ cruza a linha de 45 graus exatamente uma vez. Teremos que:

$$\frac{\partial g^{-1}(k(t))}{\partial k(t)} \mid_{k(t)=k^*} < 1 \ (6)$$

Isso implica que $k(t+1) = g^{-1}(k(t))$ começa sobre a linha de 45º e cruza com ela apenas uma única vez.

$$\frac{\partial g^{-1}(k(t))}{\partial k(t)} = \left(g'(k(t+1))(k(t+1) = g^{-1}(k^*) = k^*\right)^{-1} =$$

$$g(kt+1) = \left(\frac{1+n}{1-\alpha}\right)\left[k(t+1) + \beta^{\frac{-1}{\theta}} \alpha^{\frac{-(1-\theta)}{\theta}} k(t+1)^{\frac{1-\alpha}{\theta}+\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Esse resultado é proveniente da equação (17)

$$\frac{g^{-1}(kt)}{\partial(kt)} = \alpha kt^{\alpha-1} \to \frac{\alpha}{kt^{1-\alpha}}$$

$$g'(kt+1) = \left(\frac{1+n}{1-\alpha}\right)\left[\frac{1}{k(t+1)}\left(k(t+1) + \beta^{\frac{-1}{\theta}} \alpha^{\frac{-(1-\theta)}{\theta}} k(t+1)^{\frac{1-\alpha}{\theta}+\alpha}\right)\right]$$

$g'^{1}(k_t) = (g'((k_{t+1}))^{-1}$ →No EE então

$$\left(\frac{k(1)^{1-\alpha}}{\alpha}\frac{1}{k(t+1)}.\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\left(\beta^{\frac{-1}{\theta}}\alpha^{\frac{-(1-\theta)}{\theta}}\left[\frac{1-\alpha}{\theta}+\alpha\right]k(t+1)^{\frac{1-\alpha}{\theta}+\alpha}\right)\right) \quad (7)$$

Consideramos as casas que $\theta \leq 1$e $\theta > 1$separadamente. Se $\theta \leq 1$ então $\left[\frac{1-\alpha}{\theta}+\alpha\right] \geq 1$, substituindo este termo por 1 e usando a Equação (4)

$$w(t)f(k(t)) - kf'(kt)$$

$$k^{\alpha} - k.\alpha k^{\alpha-1}$$

$$k^{\alpha}(1-\alpha)$$

$$\left(\frac{k(t)^{1-\alpha}}{\alpha}.\frac{1}{k(t+1)}.k(t)^{\alpha}\right)^{-1} \geq \frac{dg^{-1}(k(t))}{k(t)}$$

$$k(t) = k^{*}$$

Agora substituiremos no expoente de $[k(t+1)]$em (7)

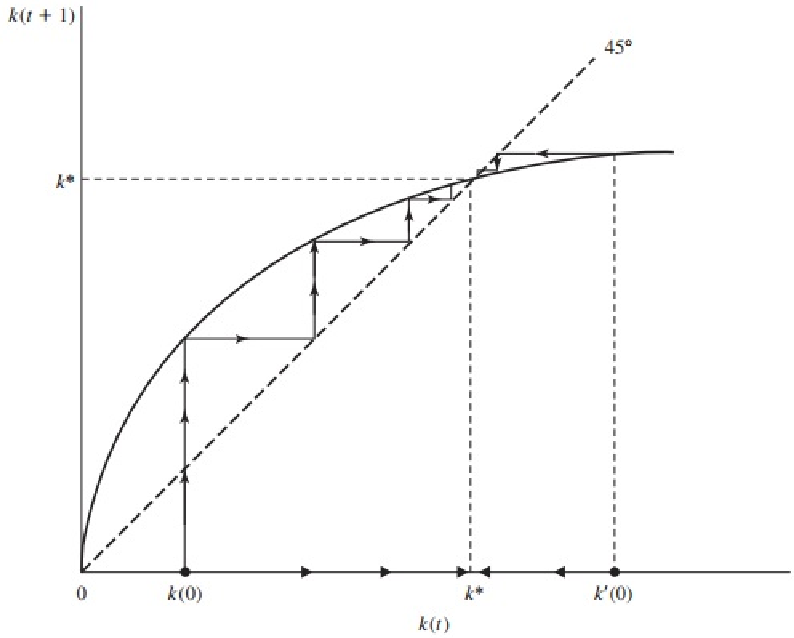
$$\frac{dg^{-1}(k(t))}{\partial k(t)} \mid k(t) = k^{*} \leq \left(\frac{1}{\alpha}k(t)^{1-\alpha}\frac{\frac{1-\alpha}{\theta}+\alpha}{k(t+1)}k(t)^{\alpha}\right)^{-1} (k(t) = k^{*} = k(t+1)$$

Podemos notar que $\left(\frac{1-\alpha}{\theta}+\alpha\right)^{-1} < 1$ isso prova que a equação (6) também é válida para o caso que $\theta > 0$.

A intuição econômica para a estabilidade global é a seguinte. Quando θé menor que 1 o efeito substituição domina o efeito renda e então as famílias poupam uma grande parte da sua renda quando a taxa de juros é alta. Quando a razão capital/trabalho na economia é menor do que no nível do estado estacionário, a taxa de juros é alta o que induz as famílias a pouparem mais e aumenta a razão capital/trabalho a frente do estado estacionário. Uma segunda força estabilizadora que aplica-se $\forall\theta > 0$,advém dos retornos decrescente da função de produção.

Quando a razão capital trabalho é menor do que a de estado estacionário, o $PMgk$ é alto e a taxa de renda do capital também é alta, o que tende a aumentar a acumulação de capital (controlando o efeito da poupança). Assim, quando $\theta < 1$, ambas forças ajudam a estabilizar o sistema. Quando $\theta > 1$,as duas forças vão em direções opostas, mas a análise mostra que o efeito da diminuição do retorno domina o efeito da poupança então o sistema é globalmente estável. $\square$

Figura 8: Dinâmica do equilíbrio no modelo OLG Canônico



$k'(0) > k^*$o estoque de capital para trabalho se reduz a cai para k^*. Nesse equilíbrio bem "comportado" a dinâmica é bastante similar ao modelo de Solow. Há convergência n/k^*. Em particular a razão capital trabalho $k(0) < k^*$a economia (estabilidade) acumula mais capital e converge para k^*

5.4 O modelo OLG canônico

Usando a tecnologia Cobb-Douglas e $\theta = 1$ definimos as preferências dos indivíduos como logarítmicas. Em outras palavras, isto quer dizer que os efeitos renda e substituição se anulam, ou seja, a taxa de juros não afeta a taxa de poupança. Dessa forma essa estrutura faz com que o modelo de OLG fique (torne-se) essencialmente idêntico ao modelo de Solow.

$$U_t(c_1(t), c_2(t+1)) = lnc_1(t) + \beta lnc_2(t+1)$$

$\beta \in (0,1), f(k) = k^\alpha$então a equação de Euller torna-se mais simples:

$$\frac{c_2(t+1)}{c_1(t)} = \beta R(t+1)$$

E isso implica que as poupanças devem satisfazer:

$$s(t) = \frac{\beta}{1+\beta} w(t) \ (19)$$

$$c_1 = w_t - s_t$$

$$c_2 = R(t+1)s_t$$

$$\frac{R(t+1)s_t}{w_t - s_t} = \beta R(t+1)$$

$$s_t = \beta(w_t - s_t)$$

$$s_t(1+\beta) = \beta w_t$$

$$s_t = \frac{\beta}{1+\beta} w_t$$

Combinando (19) com (8)

$$k(t+1) = \frac{s(w(t), R(t+1))}{1+n}$$

$$k(t+1) \frac{wt}{1+\beta} . \frac{\beta}{1+n}$$

Sabendo que $w(t) = (1-\alpha)k(t)^{\alpha}$

$$k(t+1) = \frac{\beta(1-\alpha)k(t)]^{\alpha}}{(1+n)(1+\beta)}$$

No EE a $k^* = k(t+1) = k(t)$

$$k^* = \frac{\beta(1-\alpha){k^*}^{\alpha}}{(1+n)(1+\beta)}$$

$$k^{*1-\alpha} = \frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)}$$

$$k^* = \left[\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} (20)$$

Para um $k(0) > 0$ a dinâmica é exatamente igual a do gráfico anterior.

Proposição. *No modelo OLG canônico com as preferências em logaritmo e uma tecnologia Cobb-Douglas existe um único estado estacionário, com a taxa de capital trabalho* k^* *dado por (20). Começando por qualquer* $k(0) \in (0, k^*)$*,a dinâmica de equilíbrio são tais que* $k(t) \uparrow k^*$*,começando por qualquer* $k'(0) > k^*$ *a dinâmica de equilíbrio envolve* $k(t) \downarrow k^*$.

5.5 Sobreacumulação e otimalidade de Pareto no equilíbrio competitivo no modelo OLG

Vamos comparar o problema geral de OLG, com a escolha de um planejador social que deseja maximizar a utilidade de todas as gerações e por uma mídia ponderada. Suponha que o planejador social maximiza:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \xi_t Ut(C_1(t), C_2(t+1))$$

ξ_t é o peso que o planejador social atribui a cada utilidade em cada t suponha que $\sum_{t=0}^{\infty} \xi_t < \infty$ o que define o problema do planejador como bem comportado. Essa expressão implica que o planejador maximiza

$$\sum_{t=0}^{\infty} \xi_t (U(c_1(t))', \beta u(c_2(t+1))$$

$$s.a$$

$$F(K(t), L(t)) = K(t+1) + L(t) + c_1(t) + L(t-1)c_2(t)$$

Dividindo por $L(t)$ e usando (2) tem-se que:

$$f(k,t) = (1+n)k(t+1) + c_1(t) + c_2(t+1)(1+n)^{-1}$$

O problema do planejador central implica que a condição de primeira ordem seja:

$$u'\left((c_1(t)\right) = \beta f'\left(k(t+1)\right) u'(c_2(t+1))$$

Como $R(t+1) = f'(k(t+1))$ essa equação é idêntica a (5)

- A alocação realizada pelo planejador social é idêntica a alocação que seria realizada numa economia de mercado.

- No entanto, essa alocação pode ser diferenciada, se o planejador social atribui diferentes pesos as gerações.

- Um ponto interessante é olharmos se a alocação deste equilíbrio competitivo é Pareto ótima. Para isso suponha que o nível k^*é maior que kgold.

- No modelo de OLG quando $k^* > k_{gold}$ a redução das poupanças pode aumentar o consumo para cada equação. Em particular, no EE da economia deste modelo teremos:

$$f(k^*) - (1+n)k^* = c_1^* + (1+n)^{-1}c_2^* \equiv C^*$$

$$\frac{\partial f(k^*}{k^*}) = f'(k^*) - (1+n)$$

$$f'(k^*_{gold}) = 1+n$$

Para a Cobb Douglas:

$$\alpha k^{\alpha-1} = (1+n)$$

$$k^{1-\alpha} = (1+n)$$

$$k^{1-\alpha} = \frac{\alpha}{1+n}$$

$$k^* = \frac{\alpha}{1+n}^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

- Se k^*é maior que kgold então $\frac{\partial c^*}{\partial k^*} < 0$ isso implica que reduzir a poupança pode aumentar o consumo de todos os indivíduos. Nesse caso a economia é dita economicamente ineficiente. Outro modo de expressar isso é $r^* \leq n$ sendo que $R^* - 1 = r^*$.

- No modelo de Ramsey a condição de transversalidade que $r^* > n + g$. Portanto não há ineficiência dinâmica nesse modelo.

- A ineficiência dinâmica surge no modelo OLG pela heterogeneidade entre as famílias, a qual remove a condição de transversalidade no modelo de Ramsey.

- Suponha que no período T (no EE) com $k^* > k_{gold}$.Considere que no próximo período a variação do estoque de capital é reduzia por um pequeno montante. Em particular pela taxa $-\Delta k$ onde $\Delta k \in (0, k^* - kgold)$

- A variação no consumo em T é:

$$\Delta c(T) = (1+n)\Delta k > 0$$

e em *t:*

$$\Delta c(T) = -\left(f'(k^* - \Delta k) - (1+n)\right)\Delta k \ \forall t > T$$

A primeira expressão reflete o aumento direto no consumo devido ao decréscimo na poupança. Além disso como $k^* > kgold$ para um Δk suficientemente pequeno então $f'(k^* - \Delta k) - (1+n) < 0$ e assim $\Delta C(t) > 0 \ \forall t \geq T$.O aumento no consumo em cada geração pode ser igualmente alocado durante os dois períodos de suas, assim necessariamente aumentará a utilidade de todas as gerações. Essa variação claramente cria uma melhoria no sentido de Pareto para todas as gerações e estabelece o seguinte resultado.

Proposição 5.1. *Na economia OLG (padrão) o equilíbrio competitivo não é necessariamente Pareto ótimo. Mais especificamente quando $r^* < n$ a economia é dinamicamente ineficiente. Nesse caso, é possível reduzir o estoque de capital começando de um estado estacionário "competitivo" e aumentando o nível de consumo de todas as gerações.*

- A incompletude dos mercados não é razão para a falha do modelo OLG, mas sim a externalidade pecuniária deixada por cada geração.
- As externalidades pecuniárias refletem os efeitos relacionados a preço relacionadas as decisões de negociação que impactam a utilidade da família.

5.6 O papel do Seguro Social na acumulação de capital

Vamos discutir como lidar com a "sobre" acumulação no modelo OLG. Primeiramente vamos num sistema *Fully Funded* no qual as gerações mais novas contribuem para o sistema de seguridade social e essas contribuições são pagas (ou devolvidas) a geração mais velha. O sistema "não financiado" ou *pay as you go* os jovens pagam diretamente para os mais velhos. Veremos que este sistema não encoraja poupança, mas quando há ineficiência dinâmica não encorajar a poupança pode levar a uma melhoria no sentido de Pareto.

5.6.1 Fully Funded

- Na data t o governo arrecada $d(t)$ da geração jovem.
- O recurso arrecadado é investido no único ativo produtivo na economia que é o estoque de capital e os trabalhadores recebem $R(t+1)d(t)$ quando estão velhos.

Então o problema de escolha individual se torna:

$$Max_{c_1,c_2,r} u(c_1(t)) + \beta u(c_2(t+1))$$

$$s.a$$

$$c_1(t) + s(t) + d(t) \leq w(t)$$

$$c_2(t+1) \leq R(t+1)(s(t) + d(t))$$

- Para uma dada escolha de $d(t)$ por parte do governo. Note que o total investido na acumulação $s(t) + d(t) = (1 + n)k(t + 1)$
- Não necessariamente os indivíduos escolhem $s(t) > 0$
- Se $s(t)$ é livre o equilíbrio competitivo se aplica independentemente da sequência de pagamentos atingíveis de seguridade social $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$
- Quando $s(t) \geq 0$ é imposto como restrição então o equilíbrio competitivo aplica-se para uma dada sequência $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$ a sequência privada ótima de poupança $\{s(t)\}_{t=0}^{\infty}$ tal que $s(t) > 0 \forall t$.

Proposição. *Considere um sistema de seguridade social descrito: Suponha que* $s(t) \geq \forall t$.*Se para uma sequência atingível* $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *de pagamentos de seguridade social, a sequência de poupança* $\{s(t)\}_{t=0}^{\infty} \forall t$ *maximizadora de utilidade é tal que* $s(t) > 0 \forall t$,*então o conjunto de equilíbrio sem seguridade social é o mesmo que o equilíbrio competitivo com seguridade social. Sem a restrição* $s(t) \geq 0$ *para qualquer sequência atingível* $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *o conjunto de equilíbrio competitivo com seguridade social é idêntico aquele sem seguridade social.*

O montante $d(t)$ é totalmente compensado por uma queda em $s(t)$, desde que os indivíduos acumulem poupanças de modo “suficiente”.

5.6.2 Seguridade Social “Não financiada plenamente”

O governo coleta $d(t) = (1 + n)^{-1}b(t)$ e distribui dos jovens para os velhos. Considera-se que existam mais indivíduos jovens do que velhos. O problema de maximização individual torna-se:

$$Max_{c_1 c_2 s(t)} u(c_1(t)) + \beta u(c_2(t + 1))$$

$$s.a$$

$$c_1(t) + s(t) + d(t) \leq w(t)$$

$$c_2(t + 1) \leq R(t + 1)(s(t) + (1 + n)d(t + 1)$$

para uma dada sequência atingível de pagamentos $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$. Nesse ambiente a taxa de retorno sobre os pagamentos de seguridade social é n ao invés de $r(t + 1) = R(t + 1) - 1$, porque esse sistema é de transferências “puras” .

- Somente $s(t)$ ao invés de $s(t) + d(t)$ é utilizado para a acumulação de capital.

- Esse sistema desencoraja o aumento da poupança agregada.
- Nesse modelo a redução da poupança agregada e a acumulação de capital pode levar a uma melhoria no sentido de Pareto quando a economia oscila ineficiência dinâmica.
- Mais especificamente, suponha que os indivíduos da geração t podem escolher quanto contribuir de seguridade social. Qualquer que seja a contribuição, ela é repassada a geração mais velha e os jovens recebem $(1+n)$ por cada dólar investido. Nesse caso não haveria investimento em capital físico ativo $r(t+1) \geq n$,assim esse sistema de previdência poderia aumentar a taxa de juros suficientemente que "removeria" a economia da ineficiência dinâmica.

Proposição. *Considere a economia OLG e suponha que o equilíbrio descentralizado da economia encontra-se numa zona dinamicamente ineficiente. Então existe uma sequência atingível de pagamentos providenciáveis* $\{d(t)\}_{t=0}^{\infty}$ *que leva ao equilíbrio competitivo começando por qualquer data t que Pareto domina o equilíbrio de seguridade social.*

5.6.3 OLG com altruísmo impuro

- A preocupação dos pais com o vetor de consumo dos seus filhos ao invés de preocuparem-se com a sua utilidade.
- Função de produção neoclássica
- Continuam de indivíduos, normalizados para 1.
- Cada indivíduo vive 2 períodos.
- O consumo dos filhos está incorporado ao dos pais.

As preferências do indivíduo *(i,t)* que alcança a fase adulta no período t são:

$$log(c_i(t)) + \beta log(b_i(t)) \ (21)$$

Os filhos iniciam no período seguinte com a sua herança e alugam seu capital para as firmas, ofertam trabalho, tem filhos, consomem e tomam suas decisões referentes a herança. Assume-se que o capital se deprecia totalmente após o seu uso. Essas suposições implicam que o problema de otimização de um indivíduos típico é:

$$Max_{ci(t),bi(t)} log(c_i(t) + \beta log(b_i(t))$$

$$s.a$$

$$c_i(t) + b_i(t) \leq y_i(t) \equiv w(t) + R(t)b_i(t-1)$$

$y_i(t)$ é a renda individual.

$$w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)) \ (24)$$

O salário de equilíbrio $R(1)f'(k(t))$ (25) . Tem-se que $b_i(t-1)$ é a herança individual recebida do seu pai. A taxa total de capital trabalho ao tempo *t+1* é dada pela agregação das heranças de todos os adultos no tempo t.

$$k(t+1) = \int_0^1 b_i(t)d_i \ (26)$$

A distribuição de consumos entre os indivíduos ao tempo t é dada por $[c_i(t)] \, i \in [0,1]$e $[b_i(t)] \, i \in [0,1]$ respectivamente, e assuma que a economia começa com uma distribuição de riquezas $[bi(0)] \, i \in [0,1]$, que satisfaz $\int_0^1 bi(0)di > 0$.

Definição. Um equilíbrio competitivo com preferências "Warm glow" e uma sequência de consumo e heranças para cada família. $\{[c_i(t)] \, i \in [0,1] \, , [b_i(t)] \, i \in [0,1]\}_{t=0}^{\infty}$ que soluciona (22) sujeito a (23); uma sequência de razões capital/trabalho $\{k(t)\}_{t=0}^{\infty}$ dada por (26) com alguma distribuição de riquezas $[b_i(0)] \, i \in [0,1]$; e uma sequência de fatores de preços $\{w(t), R(t\}_{t=0}^{\infty}$ que satisfaça (24) e (25).

A solução de (22) s.a (23) é simples por causa das preferências em logaritmo e resulta:

$$b_i(t) = \frac{\beta}{1+\beta} y_i(t) = \frac{\beta}{1+\beta} \left[w(t) + R(t)b_i(t-1) \right]$$

(27) ∀i e t.

Para obter o equilíbrio no mercado de fatores

$$k(t+1) = \int\limits_0^1 b_i(t)di = \frac{\beta}{1+\beta} \int\limits_0^1 \left[w(t) + R(t)b_i(t-1) \right] di$$

$$\frac{\beta}{1+\beta} \left[w(t) \int\limits_0^1 d_i + R(t) \int\limits_0^1 b_i(t-1)di \right]$$

$$k(t) = \int_0^1 bi(t-1)di$$

$$\frac{\beta}{1+\beta} \left[w(t) + R(t)k(t) \right]$$

Usando (24) e (25)

$$w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t))$$

$$R(t) = f'(k(t))$$

$$w(t) = f(k(t)) - k(t)R(t)$$

$$\frac{\beta}{1+\beta}.f(k(t)) = k(t+1)$$

Resolvendo para o estado estacionário:

$$k = k(t+1) = k^*$$

$$k^* = \frac{\beta}{1+\beta}f(k^*) \ (29)$$

Dinâmica das heranças. Sabemos que $k(t) \rightarrow k^*$

$$w^* = f(k^*) - k^*f'(k^*) \text{ e } R^* = f'(k^*)$$

$$bi(t) = \frac{\beta}{1+\beta}\left[w^* + R^*bi(t-1)\right]$$

A dinâmica da herança individual é dada quando $R^* < \frac{1+\beta}{\beta}$ partindo de qualquer nível $b_i(t)$ que converge a uma única herança dada por:

$$b_i(t) = b_i(t-1) = b^*$$

$$b^*(1+\beta) - \beta R^* b^* = \beta w^*$$

$$b^*\left[1+\beta(1-R^*)\right] = \beta w^*$$

$$b^* = \frac{\beta w^*}{1+\beta(1-R^*)}$$

Podemos verificar que $R^* < \frac{(1+\beta)}{\beta}$

$$R^* = f'(k^*) < \frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{1+\beta}{\beta}$$

Isso decorre da concavidade estrita de $f(\cdot)$ e a última igualdade usamos a equação

(29).

Proposição. *Considere a economia com as preferências Warm Glow. Nesta economia há um único equilíbrio competitivo. Nesse equilíbrio a razão capital trabalho é dada por (28) e monotonicamente converge para k^*(29). A distribuição de heranças e riqueza terminalmente converge para a igualdade estrita, que cada indivíduo tem uma riqueza b^*dado por (30) com $w^* = f(k^*) - k^* f'(k^*)$ e $R^* = f'(k^*)$*

5.7 OLG com juventude perpétua

Cada indivíduo vive infinitamente, mas se depara com uma probabilidade $V \in (0, 1)$.A vida do indivíduo pode terminar a qualquer data e todas as realizações são independentes. A utilidade esperada de um indivíduo é dada por:

$$\sum_{t=0}^{\infty} (\beta(1-v))^t u(C(t))$$

A expectativa de vida individual pode ser escrita como:

$$EV = v + 2(1-v).v + 3(1-v)^2.v + ... \pm \frac{1}{v} < \infty$$

Com a probabilidade V o indivíduo terá o total da sua vida 1 e com $(1-v)v$, ele terá o “comprimento” expectativa de vida 2 e assim por diante. Esse modelo se refere a juventude perpétua embora cada indivíduo tenha uma expectativa de vida finita e todos os indivíduos que sobreviveram até certa data tem a mesma expectativa de vida futura. A idade do indivíduo não é um bom previsor para o quanto ele viverá. O fluxo orçamentário pode ser escrito como:

$$ai(t+1) = (1 + r(t))a_i(t) - c_i(t) + w(t) + z_i(t) \text{ (9.32)}$$

A taxa de poupança bruta é $1 + r(t)$. $z_i(t)$:Transferências individuais decorrentes de heranças acidentais recolhidas pelo governo. $a_i(t) \geq 0$ Para prevenir que os indivíduos acumulem dívidas. Os lucros de uma Companhia de seguros:

$$\pi(a, t) = -(1-v)z(a) + va$$

$z(t)$ poderia ser pensado como o pagamento recebido de uma seguradora. A seguradora paga $z(a(t))$ para o indivíduo e quando ele morre a mesma fica com seus ativos.

Se as seguradoras possuem lucro econômico zero

$$\pi(a, (t), t) = Z(a(t) = \frac{v}{1-v} a(t) \text{ (9.33)}$$

- A população no tempo t é $L(t)$ então há $nL(t)$ novas famílias nascendo. Consequentemente a evolução da população total é dada por:

$$L(t+1) = (1+n-v)L(t)$$

$$L(0) = 1, n > v$$

Demografia para t anos:

$$n(1+n-v)^{t-i}.(1-v)^{1-i}\forall i - 1, ...$$

- O consumo não é o mesmo para todos os indivíduos
- O consumo $\tau \leq t$ por $c(t \mid \tau)$
- Uma alocação deve especificar a sequência inteira $\{c(t \mid \tau)\}_{t=0}^{\infty}, \tau \leq t$. Usando essa notação os contratos do seguro de vida introduzidos por (33), o fluxo orçamentário de um indivíduo da geração τ pode ser escrito como:

$$a(t+1 \mid \tau) = (1 + r(t) + \frac{v}{1-v}a(t \mid \tau) - c(t \mid \tau) + w(t) \text{ (35)}$$

Definição. Um equilíbrio competitivo consiste em caminhos do estoque de capital, taxa de salários e rendas do capital $\{k(t), w(t)R(t)\}_{t=0}^{\infty}$e caminhos de consumo para cada geração $\{c(t \mid \tau)\}_{t=0}^{\infty}, \tau \leq t$, tal que cada indivíduo maximiza a utilidade e o tempo do preço dos fatores $\{w(t), R(t)\}_{t=0}^{\infty}$tal que dado o caminho de estoque de capital e trabalho $\{k(t), L(t)\}_{t=0}^{\infty}$ todos os mercados estão "limpos".

A equação de Euller pode ser escrita:

$$u'(c(t \mid \tau)) = \beta\left[(1 + r(t+1))(1-u) + v\right]u'(c(t+1 \mid \tau)) \text{ (36)}$$

Para pequenas variações de r e v temos

$$(1+r)(1-v) + v \approx 1 + r$$

5.8 OLG em tempo contínuo

Suponha que cada indivíduo se depare com uma "taxa de morte" de $v\epsilon(0, \infty)$. Os indivíduos possuem preferências logarítmicas e uma taxa de desconto $p > 0$.

$$\int_0^{\infty} logc_i(t)e^{-(p+v)t}dt \text{ (37)}$$

O tempo de vida de um indivíduo independe da sua data de nascimento e é igual a $\frac{1}{v} < \infty$. O fluxo de indivíduos ao tempo t se dá por uma taxa de morte $vL(t)$. As famílias sobrevivem a taxa exponencial n>v então temos que:

$$\dot{L}(t) = (n-v)L(t) \text{ (38)}$$

Assumimos que $n - v < p$. O número mínimo de indivíduos que nasceram na coorte ao tempo $\tau < t$ e estão vivos em t é:

$$L((t \mid \tau) = n.e^{(-v(t-\tau)+(n-v)\tau)} \text{ (39)}$$

- A restrição orçamentária

$$\dot{a}(t \mid \tau) = r(t)a(t \mid \tau) - c(t \mid \tau) + w(t) + z(a(t \mid \tau) \mid t, \tau)$$

Em que novamente $Z(a(t \mid \tau) \mid t, \tau)$ é a transferência ou anuidade paga ao tempo t para um indivíduo que nasceu em τ e tinha ativos $a(t \mid \tau)$. Assumimos mercados completos com livre entrada. Os lucros instantâneos de uma seguradora para as anuidades pagas ao tempo t para o indivíduo que nasceu em τ com ativos $a(t \mid \tau)$ é :

$$\pi(a(t \mid \tau) \mid t, \tau) = va(t \mid \tau) - z(a(t \mid \tau) \mid t, \tau)$$

A condição de lucro zero implica:

$$Z(a(t \mid \tau) \mid t, \tau) = va(t \mid \tau)$$

Definição. $[c(t \mid \tau)]_{t=0,\tau \leq t}^{\infty}$, tal que o indivíduo maximiza (37) sujeito a (40), com o caminho "temporal de preços" $[w(t), R(t)]_{t=0}^{\infty}$é dado por (41) e taxa de capital de acordo com (42) :

O Acemoglu maximiza (37) s.a (40) . Em termos práticos cada $c_i(t)$ é equivalente a $c_i(t \mid \tau)$. A condição de transversalidade fica:

$$lim_{t\to\infty} exp(-(\bar{r}(t, \tau) + v))a(t \mid \tau) = 0 \text{ (44)}$$

Em que: $\bar{r}(t, \tau) = \frac{1}{t-\tau} \int_{\tau}^{t} r(s)ds$ é a taxa de juros média entre as datas t e τ. A condição de transversalidade implica que o valor descontado líquido dos ativos em um futuro muito próximo de um indivíduo que nasceu na data τ descontado até este tempo seja zero. Substituindo na restrição orçamentária, obteremos:

$$\dot{a}(t \mid \tau) = (r(t) + v)a(t \mid \tau) - c(t \mid \tau) + w(t) \text{ (40)}$$

$$R(t) = f'(k(t)) \text{ e } w(t) = f(k(t)) - (k(t)f'(k(t)) \text{ (41)}$$

$$a(t) = R(t) - \delta$$

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - (n - v + \delta)k(t) - c(t) \text{ (42)}$$

$c(t)$ é o consumo médio dado por:

$$c(t) = \frac{\int_{-\infty}^{t} c(t \mid \tau) L(t \mid \tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{t} L(t \mid \tau) d\tau}$$

$$c(t) = \frac{\int_{-\infty}^{t} c(t \mid \tau) L(t \mid \tau) d\tau}{L(t)}$$

$L(t \mid \tau)$ tamanho da coorte nascida em τ na data t. O limite $-\infty$ inclui todas as coortes.

Definição. Um equilíbrio competitivo consiste em caminhos de estoque de capital, salários e rendas do capital, $[k(t), w(t), R(t)]_{t=0}^{\infty}$e caminhos de consumo para cada geração.

$$maxU_0 = \int_0^{\infty} lnc_i e^{-(p+v)t}.dt$$

$$\theta = (p + v)$$

$$s.a$$

$$\dot{a}(t \mid \tau) = (r(t) + v)a(t \mid \tau) - c(t \mid \tau) + w(t)$$

Montando o Hamiltoniano:

$$H\left[c(t), a(t \mid \tau), \lambda(t)\right] = \left[lnc + \lambda(r + v)a - c + w\right] e^{-\theta t}$$

$$c(t) = c(t \mid \tau)$$

$$u = \lambda e^{-\theta t} \rightarrow \lambda = ue^{\theta t}$$

$$\dot{u} = -\lambda\theta e^{-\theta t} + \dot{\lambda} e^{-\theta t}$$

Estabelecendo as condições do problema de maximização:

$$H_c = \frac{1}{c} - \lambda = 0 \ (1)$$

$$H_a = -\dot{u} = \lambda e^{-\theta t}.(r + v) \ (2)$$

$$H_\lambda = \dot{a}(t \mid \tau) = (r+v)(a(t \mid \tau) - c(t \mid \tau) + w(t) \ (3)$$

$$lime^{-(r(t,\tau)+v)}.a(t \mid \tau) = 0 \ (4)$$

Derivando (1) em relação ao tempo, antes aplica-se o ln.

$$\lambda c = 1$$

$$ln\lambda + lnc = ln1$$

$$-\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\dot{c}}{c} \ (1')$$

usando $-\dot{u} = \theta\lambda e^{-\theta t} + \dot{\lambda} e^{-\theta t}$

$$\lambda e^{-\theta t}.(r+v) = \theta\lambda e^{-\theta t} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} e^{-\theta t}$$

$$(r-v) = \theta - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$$

$$(r-v-\theta) = -\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$$

$$(r+v-p-v) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$$

$$(r-p) = -\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \ (5)$$

Substituindo em (1'):

$$\frac{\dot{c}}{c} = (r-p)$$

Combinando (43) com (40) e (44):

$$\frac{\dot{c}(t \mid \tau)}{c(t \mid \tau)} = r(t) - p \ (43)$$

$$(\dot{a}(t \mid \tau)) = (r(t)+v)(a(t \mid \tau) - c(t \mid \tau) + w(t)$$

$$c(t \mid \tau) = (p+v)\left[a(t \mid \tau) + w(t)\right] \ (45)$$

Sendo $w(t) = \int_t^{\infty} e^{(-r(s,t)+v)} w(s).ds$ é o valor presente líquido da riqueza individual descontados ao tempo t. A equação (45) implica que cada indivíduo consome uma fração de sua riqueza que é igual a taxa efetiva de desconto $p + v$. Integrando (45) entre as coortes e usando o fato o tamanho da coorte τ ao tempo t é: $exp(-v(t-\tau) + (n-v)\tau)$. O consumo per capita ao tempo t é então obtido como:

$$c(t) = (p+v)(a(t) + w(t)) \ (46)$$

$$a(t) = k(t)$$

$$\dot{c}(t) = (p+v)(\dot{a}(t) + \dot{w}(t)) \ (47)$$

Então a lei de movimento por ativos per capita:

$$\dot{a}(t) = (r(t) - (n-v)a(t) + w(t) - c(t)$$

A riqueza humana em termos per capita satisfaz a seguinte condição:

$$(r(t) + v)w(t) = \dot{w}(t) + w(t)$$

$$(r(t) + v - 1)w(t) = \dot{w}(t)$$

$$(r(t) - (1-v) = \frac{\dot{w}(t)}{w(t)}$$

Substituindo $\dot{a}(t)$ e $\dot{w}(t)$ advindo dessas duas equações em (47), teremos:

$$\dot{c}(t) = (p+v)\left[(r(t) - (n-v)a(t) + w(t) - c(t) + (r(t)+v)w(t) - w(t)\right]$$

$$= (p+v)\left[(r(t)+v)a(t) + w(t) - na(t) - c(t)\right]$$

$$= (p+v)\left[\frac{(r(t)+v)}{(p+v)}c(t) - na(t) - c(t)\right]$$

$$= (r(t) + c(t) - (p+v)na$$

dividindo ambos os lados por $c(t)$ e usando o fato que $a(t) = k(t)$ e $r(t) = f'(k(t)) - \delta$

$$\frac{\dot{c}}{c} = [r(t) - p] - (p+v)\, n.\frac{k}{c}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = f'(k) - \delta - p - (p + v)\, n\frac{k}{c} \ (48)$$

O termo $(p + v)n\frac{k}{c}$ reflete o fato que o crescimento do consumo per capita decai com a chegada de novos indivíduos os quais são mais pobres que o individuo médio. Usando (42) e (48) no EE?

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{f(k(t))}{k(t)} - (n + v + \delta)\frac{k(t)}{k(t)} - \frac{c(t)}{k(t)}$$

$$\frac{c(t)}{c(t)} = f'(k(t)) - \delta - p - (p + v)\frac{k(t)}{c(t)}n$$

$$\frac{c(t)}{k(t)} = \frac{f(k(t))}{k(t)} - (n + v + \delta)$$

$$(p + v)\frac{(k(t))}{c(t)}n = f'(k(t)) - \delta - p$$

$$\frac{c(t)}{k(t)} = \frac{n(p + v)}{f'(k(t)) - \delta - p} \ (49)$$

$$\frac{f(k(t))}{k(t)} - (n + v + \delta) = \frac{n(p + v)}{f'(k(t)) - \delta - p}$$

$$\frac{f(k(t))}{k(t)} = \frac{n(p + v)}{f'(k + t) - \delta - p)} + n + v + \delta$$

Em termos de Estado Estacionário:

$$\frac{f(k^*)}{k^*} - (n - v + \delta) - \frac{(p + v)n}{f'(k^*) - \delta - p} = 0 \ (50)$$

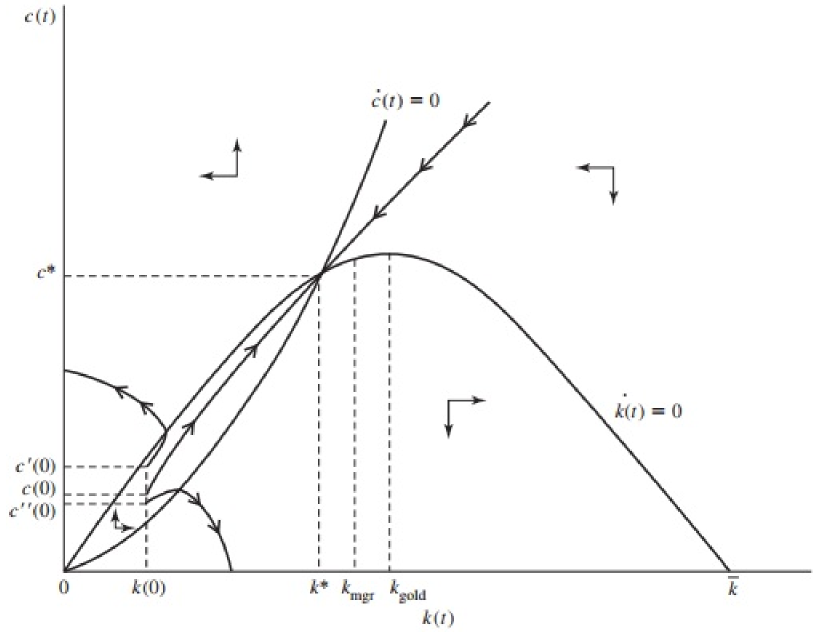
Note que $f'(k^*) > p + \delta$. Deste modo a taxa capital de trabalho é menor do que *kmgr* dado por $f'(kmgr) = p + \delta$. Nesta economia há sempre sub acumulação ou não acumulação. Esse comportamento contrasta com o modelo base de OLG, o qual potencialmente leva a ineficiência dinâmica e a sobre acumulação. Usamos (42) e (48) :

Proposição. *No modelo de juventude perpétua em tempo contínuo existe um único EE* (k^*, c^*) *dado por (49) e (50),* $k^* < kmgr$*,começando por qualquer* $k(0) > 0$ *o equilíbrio dinamicamente converge para um único EE.*

6 Teoria dos ciclos reais de negócios

- As flutuações não exibem qualquer padrão regular ou cíclico

Figura 9: Dinâmica do equilíbrio no modelo OLG Canônico



- Movimentos do produto não são regulares
- Lei de Kung → mudanças no desemprego e no produto
- As taxas de juros geralmente caem (em recessões) enquanto que o estoque real de moeda aparenta não possuir um padrão
- Extensões do modelo de Ramsey, incluem flutuações enfatizadas como choques na tecnologia da economia
- Isto é, mudanças na função de produção período a período
- Trabalho subsequente nesta área enfatiza mudanças nas compras do governo
- Variações no emprego no modelo de Ramsey
- Os modelos de RBC não explicam muito bem as flutuações no mercado de trabalho
- RBC estão preocupados em incorporar flutuações nos modelo Walrasianos
- O RBC falha em envolver "distúrbios" (perturbações) nominais
- Há uma forte evidencia que as perturbações nominais possuem efeitos reais

6.1 Base do modelo de RBC

- O modelo é uma variação do modelo de Ramsey em tempo discreto

- Número de indivíduos idênticos, tomadores de preços (firmas)
- Famílias vivem infinitamente
- Função de produção

$$Y_t = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha,} 0 < \alpha < 1 \tag{6.1}$$

$$K_{t+1} = K_t + I_t - \delta K_t$$

$$= K_t + (Y_t - C_t - G_t) - \delta K_t \tag{6.2}$$

- As compras do governo são financiadas por taxas lump-sum que são assumidas iguais as compras para cada período
- Trabalho e capital são pagos pelos produtos marginais:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \alpha K_t^{\alpha-1}(A_t L_t)^{1-\alpha} \rightarrow \alpha \left(\frac{A_t L_t}{K_t}\right)^{1-\alpha}$$
$$\frac{\partial Y_t}{\partial L_t} = 1 - \alpha K_t^{\alpha}(A_t)^{1-\alpha} L_t^{-\alpha} \rightarrow (1-\alpha)\left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha} \cdot A_t$$

$$\rightarrow w_t = (1-\alpha)({}^{K_t}/_{A_t L_t})^{\alpha} A_t \tag{6.3}$$

$$\rightarrow r_t = \alpha({}^{A_t L_t}/_{K_t})^{1-\alpha} - \delta \tag{6.4}$$

${}^{AL_t}/_{K_t}$: Remuneração do capital;
δ: Taxa de depreciação do capital

Utilidade da família representativa

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} e^{-\rho}\, u(c_t, 1-\ell_t)\frac{N_t}{H} \tag{6.5}$$

N $\rightarrow$ população
H $\rightarrow$ Número de famílias

- A população cresce exógenamente a taxa n

$$lnN_t = \bar{N} + n_t \qquad n < \rho \tag{6.6}$$

$$N_t = e^{\bar{N}+nt}$$

$c = \frac{C}{N}$ e $\ell = \frac{L}{N}$

$u(\cdot)$ é log-linear nos 2 argumentos:

$$u_t = lnc_t + bln(1 - \ell_t), \qquad b > 0 \tag{6.7}$$

- crescimento da tecnologia:

$$lnA_t = \bar{A} + g_t + \tilde{A}_t \tag{6.8}$$

$\bar{A} \rightarrow$ "partidas" da tendência

$$\tilde{A}_t = \rho_A \tilde{A}_{t-1} + \varepsilon_{A,t} \quad -1 < \rho_A < 1 \tag{6.9}$$

$\varepsilon_{A,t} \rightarrow$ruído branco

$$lnG_t = \bar{G} + (n + g)t + \tilde{G}_t \tag{6.10}$$

$$\tilde{G}_t = \rho_G \tilde{G}_{t-1} + \varepsilon_{G,t} \quad -1 < \rho_G < 1 \tag{6.11}$$

6.2 Comportamento das Famílias

- Famílias vivem somente 1 período
- Não possuem riqueza inicial
- Função objetivo

$$lnc + bln(1 - \ell) \tag{6.12}$$

Restrição orçamentária $\rightarrow c = w\ell$

$$L = lnc + bln(1 - \ell) + \lambda[w\ell - c]$$

$$L_c = \frac{1}{c} - \lambda = 0 \ \rightarrow \ \lambda = {}^1\!/_c \tag{6.13}$$

$$L_\ell = \frac{-b}{1 - \ell} + w\lambda = 0 \tag{6.14}$$

$$L_\lambda = c = w\ell$$

$$\frac{w}{w\ell} - \frac{b}{1 - \ell} = 0$$

$$\frac{1}{\ell} - \frac{b}{1 - \ell} = 0 \tag{6.15}$$

- (15) é independente do salário
- Isto acontece porque não há riqueza inicial
- Os efeitos renda e substituição se anulam quando há mudança nos salários
- Resolvendo ℓ para (5.15)

$$\frac{b}{1-\ell} = \frac{1}{\ell}$$

$$b\ell = 1 - \ell$$

$$\ell(1+b) = 1$$

$$\ell = \frac{1}{1+b} \qquad (15')$$

- Não há incerteza sobre a taxa de juros ou sobre o salário no segundo período

$$c_1 + \frac{1}{1+r}c_2 = w_1\ell_1 + \frac{1}{1+r}w_2\ell_2 \tag{6.16}$$

$$L = lnc_1 + bln(1-\ell_1) + e^{-\rho}\left[lnc_2 + bln(1-\ell_2)\right] + \lambda\left[w_1\ell_1 + \frac{1}{1+r}w_2\ell_2 - c_1 - \frac{1}{1+r}c_2\right] \tag{6.17}$$

$$L_{c_1} = \frac{1}{c_1} = \lambda$$

$$L_{c_2} = \frac{1}{c_2}e^{-\rho} - \frac{1}{1+r}\lambda = 0$$

$$L_{\ell_1} = \frac{-b}{1-\ell_2} + \lambda w_1 = 0 \tag{6.18}$$

$$L_{\ell_2} = -\frac{e^{-\rho}}{1-\ell_2}b + \frac{1}{1+r}w_2\lambda = 0 \tag{6.19}$$

$$L_\lambda = c_1 + \frac{1}{1+r}c_2 = w_1\ell_1 + \frac{1}{1+r}w_2\ell_2$$

- Isolando λem (18)

$$\frac{b}{1-\ell_1}\cdot\frac{1}{w_1} = \lambda \qquad (18')$$

- Fazendo o mesmo em (19')

$$\frac{e^{-\rho}b}{1-\ell_2}\frac{1+r}{w_2}=\lambda \qquad (19')$$

- Igualando (18') e (19') teremos

$$\frac{e^{-\rho}\cancel{b}}{1-\ell_2}\frac{1+r}{w_2}=\frac{\cancel{b}}{1-\ell_1}\cdot\frac{1}{w_1} \tag{6.20}$$

$$\frac{1-\ell_1}{1-\ell_2}=\frac{w_2}{w_1}\cdot\frac{e^{\rho}}{1+r} \tag{6.21}$$

⇒A oferta de trabalho nos 2 períodos responde ao salário relativo

⇒A elasticidade de substituição entre os dois períodos é igual a 1

6.2.1 Otimização da família sobre incerteza

- Uma redução no consumo em Δc resulta em um aumento da riqueza no próximo período

$$Umg_t=\frac{1}{c_t}\cdot\frac{N_t}{H}\cdot\Delta c\cdot e^{-\rho t}$$

$$Umg_t=\left(\frac{\Delta c}{c}\right)\left(\frac{N_t}{H}\right)\frac{1}{e^{\rho t}}$$

- Desde que a família tenha e^n vezes "membros" no período $t+1$ como no período t, o aumento no consumo por membro em $t+1$, c_{t+1} é $e^{-n}(1+r_{t+1})\Delta c$

$$Umg_{c_{t+1}}=e^{-\rho(t+1)}\left(\frac{N_{t+1}}{H}\right)\left(\frac{1}{c_{t+1}}\right)$$

- A utilidade esperada no período t é

$$E_t\left[e^{-\rho(t+1)}\left({}^{N_{t+1}}/_{H}\right)e^{-n}{}^{(1+r_{t+1})}/_{c_{t+1}}\right]\Delta c$$

$$e^{-\rho t}\frac{N_t}{H_t}\frac{\Delta c}{c_t}=E_t\left[e^{-\rho(t+1)}\left(\frac{N_{t+1}}{H}\right)e^{-n}\frac{1}{c_{t+1}}(1+r_{t+1})\right]\Delta c \tag{6.22}$$

Desde que $e^{-\rho(t+1)\left(\frac{N_{t+1}}{H}\right)e^{-n}}$ → seja não incerto e desde que $N_{t+1}=N_te^n$

$$e^{-\rho t}\frac{\cancel{N_t}}{\cancel{H_t}}\frac{\cancel{\Delta c}}{c_t}=e^{-\rho(t+1)}\cancel{\frac{N_{t+1}}{H}}\cancel{e^{-n}}E_t\left[\frac{1}{c_{t+1}}(1+r_{t+1})\right]\Delta c$$

$$\frac{1}{c_t}=e^{-\rho}E_t\left[\frac{1}{c_{t+1}}\cdot(1+r_{t+1})\right] \tag{6.23}$$

- O trade-off entre o consumo presente e futuro depende não somente das expectativas da utilidade marginal futura e da taxa de retorno, mas também depende de sua iteração

- A expectativa do produto de duas variáveis é igual ao produto de suas expectativas mais a sua covariância

$$\frac{1}{c_t} = e^{-p}\left\{E_t\left[\frac{1}{c_{t+1}}\right]E_t\left[1+r_{t+1}\right] + cov\left(\frac{1}{c_{t+1}}, 1+r_{t+1}\right)\right\} \tag{6.24}$$

O trade-off entre o consumo e a oferta de trabalho

$$Umg_{\ell_t} = \frac{b}{(1+\ell_t)} \cdot \frac{N_t}{H} \cdot e^{-\rho t}\Delta\ell$$

- Um aumento no consumo por membro pela fração $w_t\Delta\ell$ tem benefício da utilidade de $e^{-\rho t}\left(N_t/H\right)\left(1/c_t\right)w_t\Delta\ell$

$$e^{-\rho t}\frac{N_t}{H}\frac{b}{1-\ell_t}\Delta c = e^{-\rho}\frac{N_t}{H}\frac{1}{c_t}w_t\Delta c \tag{6.25}$$

$$\frac{c_t}{1-\ell_t} = \frac{w_t}{b} \tag{6.26}$$

Este resultado pode ser encontrado sem incerteza pelas equações (13) e (14)

6.3 Um caso especial do modelo

- Eliminar o governo

- Depreciação de 100%

- versão de Long e Plosser (1983)

$$K_{t+1} = Y_t - C_t \tag{6.27}$$

$$1 + r_t = \alpha\left(\frac{A_t L_t}{K_t}\right)^{1-\alpha} \tag{6.28}$$

- A eliminação do governo nos permite isolar choques de tecnologia.

Resolvendo o modelo

$$(1-s)y = c \qquad (23A) \qquad \rightarrow c_t = \frac{Y_t}{N_t}(1-s_t)$$

$$\frac{1}{c_t} = e^{-\rho}E_t\left[\frac{1}{c_{t+1}}(1+r_{t+1})\right] \qquad (23)$$

$$\frac{c_t}{1-\ell_t} = \frac{w_t}{b} \qquad (26)$$

- Usando a equação (23) e inserindo a relação (23A) e aplicando logaritmo

$$1 - ln\left[(1-s_t)\frac{Y_t}{N_t}\right] = -\rho + lnE_t\left[\frac{1+r_{t+1}}{(1-s_{t+1})\frac{Y_{t+1}}{N_{t+1}}}\right] \tag{6.29}$$

- Equação (28)→ $1 + r_{t+1} = \alpha\left(\frac{A_tL_t}{K_t}\right)^{1-\alpha}$
- Equação (2) sem os gastos do governo

$$K_{t+1} = Y_t - C_t$$

$$K_{t+1} = Y_t - 1(1-s_t)Y_t$$

$$K_{t+1} = s_tY_t \qquad (5.2A)$$

- Substituindo (2A) e (28) em (29)

$$-ln\left[(1-s_t)\frac{Y_t}{N_t}\right] = -\rho + lnE_t\left[\frac{\alpha\left(A_{t+1}L_{t+1}/K_{t+1}\right)^{1-\alpha}}{(1-s_t)\frac{Y_{t+1}}{N_{t+1}}}\right]$$

$$-ln(1-s_t) - lnY_t + lnN_t = -\rho + lnE_t\left[\frac{\alpha\left(A_{t+1}L_{t+1}/K_{t+1}\right)^{1-\alpha}}{(1-s_t)\frac{Y_{t+1}}{N_{t+1}}}\right]$$

$Y_{t+1} = K_{t+1}^{\alpha}\cdot(A_{t+1}L_{t+1})^{1-\alpha}$ →equação (1) → 1 passo a frente

$$1 + r_{t+1} = \alpha\left(\frac{A_{t+1}L_{t+1}}{K_{t+1}}\right)^{1-\alpha} \rightarrow (28)$$

$$1 + r_{t+1} = \alpha K_{t+1}^{\alpha-1}\left(A_{t+1}L_{t+1}\right)^{1-\alpha} \rightarrow 1 + r_{t+1} = \alpha\frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}}$$

$$-ln(1-st) - lnY_t + lnN_t = -\rho + lnE_t\left[\frac{\alpha Y_{t+1}}{K_{t+1}(1-s_t)\frac{Y_{t+1}}{N_{t+1}}}\right]$$

$$-ln(1-s_t) - lnY_t + lnN_t = -\rho + lnE_t\left[\frac{\alpha N_{t+1}}{s_t\left(1-s_{t+1}\right)Y_t}\right]$$

$$-ln(1-s_t) - \cancel{lnY_t} + lnN_t = -\rho + ln\alpha + lnN_{t+1} - \cancel{lnY_t} + lnE_t\left[\frac{1}{1-s_{t+1}}\right] - lns_t$$

- Usando o fato que α, N_{t+1}, s_t e Y_t são conhecidos a data t e que N esta crescendo a taxa n

$$lns_t - ln(1-s_t) = -\rho + (lnN_{t+1} - lnN_t) + ln\alpha + lnE_t\left[\frac{1}{1-s_{t+1}}\right] \tag{6.30}$$

como $lnN_{t+1} - lnN_t = n$

$$lns_t - ln\left(1-s_t\right) = -\rho + n + ln\alpha + lnE_t\left[\frac{1}{1-s_{t+1}}\right] \tag{6.31}$$

- As variáveis de estado A e K não entram em (31)
- Se s é constante a algum valor $\hat{s}$ então s_{t+1}não é incerto

$$ln\hat{s} - ln\left(1-\hat{s}\right) = ln\alpha + n - \rho + ln\left[\frac{1}{1-\hat{s}}\right]$$

$$ln\left[\frac{\hat{s}}{1-\hat{s}}\right] - ln\left[\frac{1}{1-\hat{s}}\right] = ln\alpha + n - \rho$$

$$ln\left[\frac{\hat{s}}{1-\hat{s}} \cdot \frac{1-\hat{s}}{1}\right] = -\rho + ln\alpha + n \tag{6.32}$$

$$ln\hat{s} = ln\alpha + n - \rho$$

- Tomando o exponencial

$$\hat{s} = \alpha e^{n-p} \tag{6.33}$$

- Agora considere (26)→ $\frac{c_t}{1-\ell_t} = \frac{w_t}{b}$, desde que $c_t = \frac{C_t}{N_t} = (1-\hat{s})\frac{Y_t}{N_t}$ podemos reescrever (26)

$$ln\left[(1-\hat{s})\frac{Y_t}{N_t}\right] - ln(1-\ell_t) = lnw_t - lnb$$

- Por (2) $w_t = (1-\alpha)K_t^{\alpha}(A_t + L_t)^{-\alpha}A_t$
- Multiplicando por L_tN_t

$$w_t \cdot N_tL_t = (1-\alpha)K_t^{\alpha} \cdot (A_tL_t)^{1-\alpha}N_t$$

$$\frac{w_t}{N_t} = (1-\alpha)\frac{Y_t}{N_tL_t}$$

- Inserindo em (26)

$$ln(1-\hat{s}) + \cancel{lnY_t} - \cancel{lnN_t} = ln(1-\ell_t) + ln(1-\alpha) + \cancel{lnY_t} - \cancel{lnN_t} - ln\ell_t - lnb$$

$$ln(1-\hat{s}) - ln(1-\alpha) + lnb = ln\left(1-\ell_t\right) - ln\ell_t$$

$$ln\left[\frac{b(1-s)}{(1-\alpha)}\right] = ln\left[\frac{1-\ell_t}{\ell_t}\right]$$

Aplicando exponencial

$$\frac{b(1-\hat{s})}{(1-\alpha)} = \frac{1-\ell_t}{\ell_t}$$

$$\ell_t b(1-\hat{s}) = (1-\alpha) - \ell_t(1-\alpha)$$

$$\ell_t\left[b(1-\hat{s}) + (1-\alpha)\right] = (1-\alpha)$$

$$\ell_t = \frac{1-\alpha}{b(1-\hat{s}) + (1-\alpha)} \equiv \hat{\ell}$$

6.3.1 Discussão

A forma específica das flutuações do produto implicadas pelo modelo é determinada pela dinâmica do comportamento do estoque de capital

$$Y = K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}$$

$$lnY_t = \alpha lnK_t + (1-\alpha)\left(lnA_t + lnL_t\right) \qquad (38)$$

$K_t = \hat{s}Y_{t-1}$ e $L_t = \hat{\ell}N_t$ assim

$$lnY_t = \alpha ln\hat{s} + \alpha lnY_{t+1} + (1-\alpha)\left(lnA_t + ln\hat{\ell} + lnN_t\right)$$

$lnA_t = \bar{A} + g_t + \widetilde{A}_t$ e $lnN_t = \bar{N} + n_t$

$$lnY_t = \alpha ln\hat{s} + \alpha lnY_{t-1} + (1-\alpha)\left(ln\bar{A} + lng_t + ln\widetilde{A}_t + ln\bar{N} + lnn_t + ln\hat{\ell}\right)$$

$$lnY_t = \alpha ln\hat{s} + \alpha lnY_{t-1} + (1-\alpha)\left(\bar{A} + g_t\right) + (1-\alpha)\tilde{A}_t + (1-\alpha)\left(ln\hat{\ell} + \bar{N} + n_t\right) \qquad (39)$$

- Os dois componentes do lado direito de (39) que não seguem caminhos determinísticos são αlnY_{t-1} e $(1-\alpha)\widetilde{A}_t$. Então deve ser possível reescrever (39) da seguinte forma

$$\tilde{Y}_t = \alpha\tilde{Y}_{t-1} + (1-\alpha)\tilde{A}_t \qquad (40)$$

- Para vermos como (40) implica na preocupação da dinâmica do produto, note que isto garante que cada período :

$$\tilde{Y}_{t-1} = \alpha\tilde{Y}_{t-2} + (1-\alpha)\tilde{A}_{t-1}$$

$$\tilde{A}_{t-1} = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left(\tilde{Y}_{t-1} - \alpha\tilde{Y}_{t-2}\right) \qquad (41)$$

Lembre que (5.9) $\tilde{A}_t = \rho_A\tilde{A}_{t-1} + \varepsilon_{A,t})$, substituindo este fato em (5.40) e (5.41)

$$\widetilde{Y_t} = \alpha\tilde{Y}_{t-1} + (1-\alpha)\left(\rho_A\tilde{A}_{t-1} + \varepsilon_{A,t}\right)$$

$$\tilde{Y}_t = \alpha\tilde{Y}_{t-1} + (1-\alpha)\left(\rho_A \cdot \frac{1}{1-\alpha}\left(Y_{t-1} - \alpha Y_{t-2}\right) + \varepsilon_{A,t}\right)$$

$$\tilde{Y}_t = \alpha\tilde{Y}_{t-1} + \rho_A\tilde{Y}_{t-1} - \alpha\rho_A\tilde{Y}_{t-2} + (1-\alpha)\varepsilon_{A.t}$$

$$\tilde{Y}_t = (\alpha + \rho_A)\tilde{Y}_{t-1} - \alpha\rho_A\tilde{Y}_{t-2} + (1-\alpha)\varepsilon_{A.t} \qquad (42)$$

6.4 Resolvendo o modelo o caso geral

6.4.1 Log-Linearização

- Este modelo não pode ser solucionado analiticamente
- Isto é, as regras de decisão dos agentes e as equações de movimentos para as variáveis de estado são substituídas por aproximações de Taylor em logs das variáreis relevantes em torno do caminho que a economia deveria seguir na ausência de choques

$$a_{CK}\tilde{K}_t + a_{CA}\tilde{A}_t + a_{CG}\tilde{G}_t + \left(\frac{\ell^*}{1-\ell^*} + \alpha\right)\left(a_{LK}\tilde{K}_t + a_{LA}\tilde{A}_t + a_{LG}\tilde{G}_t\right) = \alpha\tilde{K}_t + (1-\alpha)\tilde{A}_t \qquad (47)$$

Os coeficientes de $\tilde{K}_t$, $\tilde{A}_t$ e $\tilde{G}_t$ devem ser iguais nos dois lados de (47)

$$a_{CK} + \left(\frac{\ell^*}{1-\ell^*} + \alpha\right)a_{LK} = \alpha \qquad (48)$$

$$a_{CA} + \left(\frac{\ell^*}{1-\ell^*} + \alpha\right)a_{LA} = 1-\alpha \qquad (49)$$

$$a_{CG} + \left(\frac{\ell^*}{1-\ell^*} + \alpha\right)a_{LG} = 0 \qquad (50)$$

- (50) relata respostas do consumo e do emprego a movimentos as compras do governo

- As compras do governo não entram diretamente em (5.45) isto é, não afetam o salário para um dado nível da oferta de trabalho
- Se as famílias aumentam sua oferta de trabalho em resposta a um aumento nas compras do governo o salário cai e a desutilidade marginal pelo trabalho aumenta
- Se a oferta de trabalho e o consumo respondem a mudanças nas compras do governo elas devem se mover em direções opostas
- Um aumento em A (49) melhora a tecnologia para um dado nível de oferta de trabalho. Assim nem se a oferta de trabalho ou o consumo respondem, as famílias podem aumentar sua utilidade trabalhando mais e aumentando seu consumo corrente
- A única diferença é que a elasticidade do salário em relação ao capital, dada por L, é α ao invés de 1-α
- Se nós log-linearizamos o modelo em torno do caminho de crescimento não estocástico as regras para o consumo e o emprego devem tomar a forma:

$$C_t \simeq a_{CK}\tilde{K}_t + a_{CA}\tilde{A}_t + a_{CG}\tilde{G}_t \text{ (43)}$$

$$\tilde{L}_t \simeq a_{LK}\tilde{K}_t + a_{LA}\tilde{A}_t + a_{LG}\tilde{G}_t \text{ (44)}$$

- A condição de primeira ordem intratemporal

$$\frac{c_t}{1-\ell_t} = \frac{w_t}{b} \text{ (26)}$$

$$w_t = (1-\alpha)\left(\frac{K_t}{A_t L_t}\right)^{\alpha} A_t \text{ (3)}$$

- inserindo (5.3) em (5.26) e tomando os logs

$$\frac{c_t b}{1-\ell_t} = (1-\alpha)\left[{}^{K_t}/_{A_t L_t}\right]^{\alpha} \cdot A_t$$

$$\ln c_t + \ln b - \ln(1-\ell_t) = \ln(1-\alpha) + \alpha \ln K_t - \alpha\left(\ln A_t + \ln L_t\right) + lnA_t \qquad (45)$$

- Desejamos encontrar aproximações de Taylor no log das variáveis do modelo em torno do caminho de crescimento equilibrado na economia se não houvessem choques

$$\tilde{C}_t + \frac{\ell^*}{1-\ell^*}\tilde{L}_t = (1-\alpha)\tilde{A}_t + \alpha\tilde{K}_t - \alpha\tilde{L}_t \qquad (46)$$

- Substituindo (5.43) e (5.44) em (5.46) temos:

$$a_{CK}\tilde{K}_t+a_{CA}\tilde{A}_t+a_{CG}\tilde{G}_t+\frac{\ell^*}{1-\ell^*}\left(a_{LK}\tilde{K}_t+a_{LA}\tilde{A}+a_{CG}\tilde{G}_t\right)=(1-\alpha)\tilde{A}_t+\alpha\left(a_{LK}\tilde{K}_t+a_{LA}\tilde{A}_t+a_{LG}\tilde{G}_t\right)$$

A condição intertemporal de primeira ordem

$$\frac{1}{C_t}=e^{-\rho}E_t\left[\frac{1}{C_{t+1}}\left(1+r_{t+1}\right)\right] \qquad (23)$$

$\tilde{Z}_{t+1}$ é a diferença entre o log de ${}^{(1+r_{t+1})}/{C_{t+1}}$e o log no caminho de crescimento balanceado

- Usando a equação (5.4) $\rightarrow$ (com a depreciação de 100%) permite expressar $(1+r_{t+1})$ em termos de K_{t+1}, A_{t+1}e L_{t+1} note que (43) e (44) podem ser garantidas a cada data

$$\tilde{C}_{t+1}\simeq a_{CK}\tilde{K}_{t+1}+a_{CA}\tilde{A}_{t+1}+a_{CG}\tilde{G}_{t+1} \qquad (51)$$

$$\tilde{L}_{t+1}\simeq a_{LK}\tilde{K}_{t+1}+a_{LA}\tilde{A}_{t+1}+a_{LG}\tilde{G}_{t+1} \qquad (52)$$

- Podemos linearizar a equação de movimento do capital e escrever $\tilde{K}_{t+1}$em termos de$\tilde{K}_t, \tilde{A}_t, \tilde{G}_t, \tilde{L}_t$ e $\tilde{C}_t$ e use (43) e (44) substitua para $\tilde{L}_t$e $\tilde{C}_t$

$$\tilde{K}_{t+1}\simeq b_{KK}\tilde{K}_A+b_{KA}\tilde{A}_t+b_{KG}\tilde{G}_t \qquad (53)$$

- Substituindo (53) na expressão para $\tilde{Z}_{t+1}$ em termos de $\tilde{K}_{t+1}, \tilde{A}_{t+1}$,e $\tilde{G}_{t+1}$ então nos dá a expressão para $\tilde{Z}_{t+1}$ em termos de $\tilde{A}_{t+1}, \tilde{G}_{t+1}, \tilde{K}_t$ e $\tilde{G}_t$
- O passo final é utilizar isto para encontrar $E_t\left[\tilde{Z}_{t+1}\right]$ em termos de $\tilde{K}_t, \tilde{A}_t$ e$\tilde{G}_t$, as quais nos podemos fazer usando os fatos que $E_t\left[\tilde{A}_{t+1}\right]=\rho_A\tilde{A}_t$ e $E\left[\tilde{G}_{t+1}\right]=\rho_G\tilde{G}_t$
- Substituindo dentro de (23) nos dá três restrições adicionais sobres os $a's$; isto é suficiente para determinar as $a's$ em termos dos parâmetros subjacentes
- Devemos especificar os valores dos $a's$ e dos $b's$ nas equações (43), (44) e (53) especificamente (aproximadamente) como o consumo, emprego e capital respondem a choques para a tecnologia e compras do governo
- As equações restantes podem ser usadas para descrever as respostas do modelo a outras variáveis (produto, investimento, salário e taxa de juros)
- Podemos substituir a equação (44) para $\tilde{L}$ na versão log-linearizada da função de produção para encontrar as implicações do modelo para o produto:

$$L_t=a_{LK}\tilde{K}_t+a_{LA}\tilde{A}_t+a_{LG}\tilde{G}_t \qquad (44)$$

$$\tilde{Y}_t = \alpha\tilde{K}_t + (1-\alpha)\left(\tilde{L}_t + \tilde{A}_t\right)$$

$$\tilde{Y}_t = \alpha\tilde{K}_t + (1-\alpha)\left(a_{LK}\tilde{K}_t + a_{LA}\tilde{A}_t + a_{LG}\tilde{G}_t + \tilde{A}_t\right)$$

$$\tilde{Y}_t = \left[\alpha + (1-\alpha)a_{LK}\right]\tilde{K}_t + \left[(1+a_{LA})(1-\alpha)\right]\tilde{A}_t + (1-\alpha)a_{LG}\tilde{G}_t \qquad (54)$$

7 Rigidez Nominal

Introduzir ajustamento nominal incompleto de preços nada mais é do que adicionar um canal relatando que distúrbios monetários tem efeitos reais.

- Adicionaremos a rigidez nominal ao modelo RBC(Real Business Cycle).
- O objetivo é analisar os efeitos de vários pressupostos, bem como se os preços e/ou os salários são rígidos e qual a natureza da dinâmica inflacionária. (Parte A)
- Na parte B - Veremos os fundamentos microeconômicos da rigidez nominal. A questão chave é considerar se há barreiras ao ajuste nominal. Veremos que elas são certamente pequenas, mas podem levar a rigidez nominal agregada.

7.1 Caso padrão (ou base guia): Preços fixos

Pressupostos:

- Firmas - Produzem usando trabalho como seu único insumo.
- O produto agregado é dado por:

$$Y = F(L), F^{'}(\cdot) > 0, F^{''}(\cdot) \leq 0 \qquad (7.1)$$

- Economia fechada e sem governo
- Não há capital, então isso implica que o consumo e o produto agregado são iguais.
- Normalizamos as famílias para 1, isto é, temos um agente representativo em nossa economia. Ignoramos o crescimento da população.

A função objetivo da família é dada por:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[U(c_t) + \Gamma\left(\frac{M_t}{Pt}\right) - V(L_t)\right], \beta \in (0,1) \qquad (7.2)$$

As funções na equação (2) possuem as seguintes propriedades:

$$U'(\cdot) > 0, U''(\cdot) < 0, \Gamma'(\cdot) > 0, \Gamma''(\cdot) < 0, V'(\cdot) > 0, V''(\cdot) > 0$$

A função de utilidade e da da moeda assumem a forma *CRRA:*

$$U(c_t) = \frac{Ct^{1-\theta}}{1-\theta}, \theta \in \mathbb{R}_+$$

$$\Gamma\left(\frac{M_t}{P_t}\right) = \frac{(M_t/P_t)^{1-V}}{1-V}, V \in \mathbb{R}_+$$

Os indivíduos retém moeda não porque isso os dê utilidade diretamente, mas porque permite que eles possam comprar bens e serviços mais facilmente. Nessa economia há 2 ativos: Moeda: paga juros zero; Ativos: paga a taxa nominal de juros i_t.

- A_t : Riqueza da família no período t;
- $W_t L_t$: Renda do trabalho
- $P_t C_t$: Gastos com consumo

A riqueza da família entre *t* e *t+1* se dá:

$$A_{t+1} = M_t + (A_t + W_t L_t - P_t C_t - M_t)(1 + i_t)$$

- P e W são exógenas (dadas)
- Condição de *Non Ponzi Game*:

$$lim_{t\to\infty} B^t A_{t+1} \geq 0$$

- L: É livre porque desejamos permitir a possibilidade de rigidez nos salários nominais. Então os mercados de trabalhos "não estão limpos". Não nos preocuparemos inicialmente se L é uma variável de escolha da família ou se ela é exógena;
- M: é dado pelo Bacen (oferta, mas as famílias escolhem quanto vão obter) ;
- i: é endógeno (mas as famílias não escolhem).

O objetivo da família é maximizar:

$$L(A_{t+1}, C_t, \lambda_t) = \sum_{t+1}^{\infty} B^t \left[u(c_t) + \Gamma\left(\frac{M_t}{Pt} - V(Lt)\right) + \lambda_t \left[-A_{t+1} + M_t + (A_t + W_t L_t - P_t C_t - M_t)(1 + \right.\right.$$

Condição de transversalidade:

$$lim_{t\to\infty}B^t\lambda_t A_{t+1}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_t}=B^t\left[u'(c_t)-\lambda_t P_t(1+i_t)\right]=0$$

$$\frac{u'(c_t)}{P_t(1+i_t)}=\lambda\forall t=1,...,\infty$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_{t+1}}=-B^t\lambda_t+B^{t+1}\lambda_t+1(1+i_{t+1})=0$$

$$B.\left(\frac{\lambda_{t+1}}{\lambda_t}\right)=\frac{1}{1+i_{t+1}}$$

$$B.\left[\frac{u'(c_{t+1})}{P_{t+1}(1+i_{t+1})}.\frac{P_t(1+i_t)}{u'(c_t)}\right]=\frac{1}{1+i_{t+1}}$$

$$\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}=\frac{1}{B}\frac{P_{t+1}}{P_t(1+i_t)}$$

$$\frac{P_{t+1}}{P_t}\cong 1+\pi_t$$

.

$$\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}=B^{-1}\frac{1+\pi_t}{1+i_t}$$

$$\frac{1+\pi_t}{1+i_t}=\frac{1}{1+r_t}\rightarrow\frac{1+i_t}{1+\pi_t}=1+r_t$$

$$\frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}=\frac{1}{B}.\frac{1}{1+r_t}$$

$$\frac{c_{t+1}^{-\theta}}{c_t^{-\theta}}=B^{-1}(1+r_t)^{-1}$$

$$c_t^{-\theta}=c_{t+1}^{-\theta}B(1+r_t)$$

$$-\theta lnc_t=-\theta lnc_{t+1}+lnB(1+r_t)$$

$$lnc_{t+1}=lnc_t-\frac{1}{\theta}ln\left[B(1+r_t)\right]$$

$$Y_t = C_t$$

Não há poupança (Lei de Walras):

$$B = 1 \text{ e } ln(1 + r_t) \approx r$$

$$lnY_t = lnY_{t+1} - \frac{1}{\theta} r_t \ (8)$$

A equação (8) é a curva IS Novo Keynesiana.

$$\frac{\partial L}{\partial M_t} = \left[\Gamma' \left(\frac{M_t}{P_t} \right) + \lambda_t \left(1 - (1 + i_t) \right) \right] B^t = 0$$

$$\Gamma' \left(\frac{M_t}{P_t} \right) = \left(\frac{1}{P_t} \right) . \frac{(1-v)}{(1-v)} . \left(\frac{M_t}{P_t} \right)^{-v}$$

$$\frac{1}{P_t} . \left(\frac{M_t}{P_t} \right)^{-v} = \lambda_t \left[(1 + i_t) - 1 \right]$$

$$\frac{1}{P_t} . \left(\frac{M_t}{P_t} \right)^{-v} = \lambda_t \left[(1 + i_t) - 1 \right]$$

$$\frac{1}{P_t} . \left(\frac{M_t}{P_t} \right)^{-v} = \frac{u'(c_t)}{P_t(1 + i_t)} i_t$$

$$\left(\frac{Mt}{Pt} \right)^{-v} = c_t^{-\theta} \left(\frac{i_t}{1 + i_t} \right)$$

$$\frac{M_t}{P_t} = Y_t^{\frac{\theta}{v}} \left(\frac{i_t}{1 + i_t} \right)^{-1} \quad (10)$$

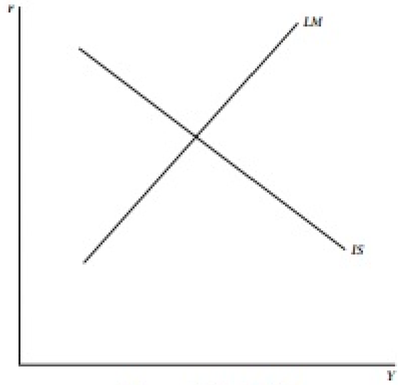
Assim, a demanda por moeda está aumentando na produção e diminuindo na taxa de juros nominal

7.2 Choques com preços fixos

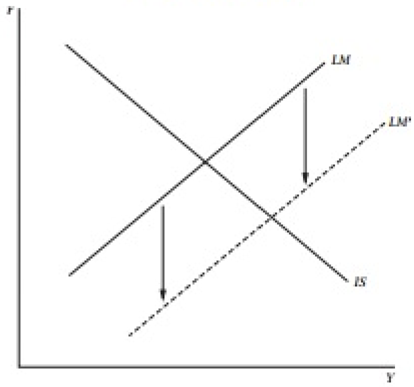
$$P_t = \overline{P} \ \forall t \ (11)$$

Na ausência de qualquer rigidez um aumento na oferta de moeda leva a um aumento de preços e salários, sem nenhum impacto nas quantidades reais. Considere os efeitos de uma rigidez nominal dada uma alteração na oferta de moeda.

Figura 10: Caso Padrão: Preços Fixos



Curvas IS e LM



Efeitos de um aumento temporário na oferta de moeda com preços fixos

Considere um aumento na oferta de moeda no período t. A taxa de juros cai e o produto aumenta. **Conclusão:** Com rigidez nominal, distúrbios (choques) monetários apresentam efeitos reais.

7.3 Rigidez de Preços e Salários: Em mercados competitivos de bens e serviços

- Suponha que inicialmente os mercados estão em equilíbrio.
- Os trabalhadores recebem seu salário igual e compõem desutilidade de ofertas trabalho, e as firmas recebem o preço igual ao seu produto marginal.
- O produto marginal do trabalho cai, quando o insumo trabalho aumenta. As firmas não desejam empregar mais a menos que os preços/salários caiam.
- O resultado é que o produto e o desemprego não se alteram quando há um aumento na oferta de moeda. O aumento da demanda leva não a um aumento no produto mas a um racionamento no mercado de bens.

Caso 1: Modelo de Keynes

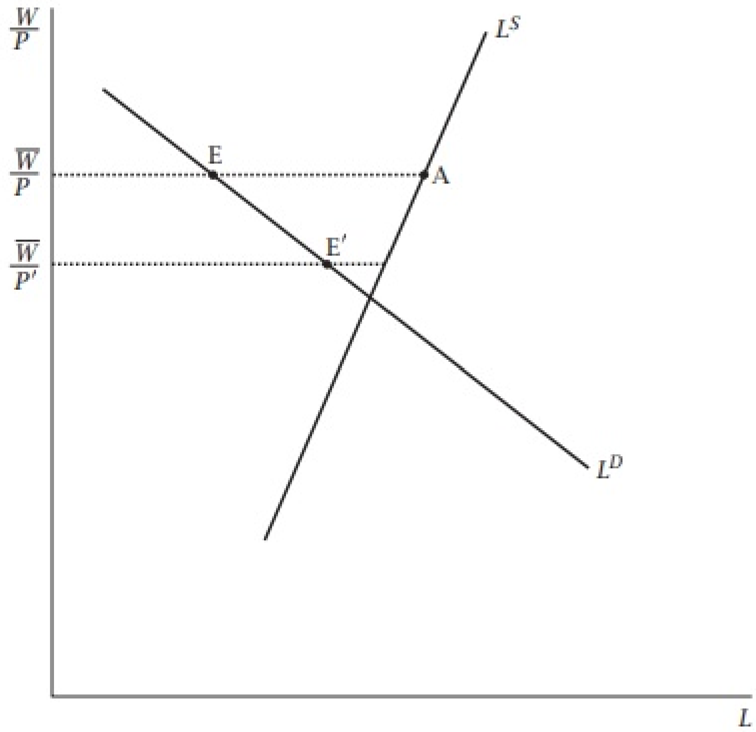
$$W = \overline{W} \ (12)$$

Salários Fixos

$$F'(L) = \frac{W}{P} \ (13)$$

O salário real é igual ao PMgL. O salário real inicial está acima do equilíbrio de mercado.

Figura 11: Mercado de Trabalho com Salários Fixos



- Há desemprego involuntário;
- Imagine uma redução em r;
- A oferta de moeda aumenta LM, para direita, $Y \uparrow, P \uparrow$. $\frac{\overline{W}}{P}$ cai e o desemprego diminui.
- Na visão do lado da oferta da economia isso implica numa resposta contracíclica do salário real a choques na demanda.

Caso 2: Preços Rígidos, Salários Flexíveis e mercado de trabalho competitivo

Os bens possuem preços competitivos e a fonte da rigidez nominal é inteiramente advinda do mercado de trabalho. Destaca-se que os preços podem estar acima do seu custo marginal, porque nesse situação as firmas possuem algum poder de mercado.

O trabalhador escolherá L que maximize a sua utilidade tomando o salário real como dado.

$$L = \sum_{t+1}^{\infty} B^t \left[u(c_t) + \Gamma \left(\frac{M_t}{P_t} - V(L_t) \right) + \lambda_t \left[-A_{t+1} + M_t + (A_t + W_t L_t - P_t c_t - M_t)(1 + i_t) \right] \right]$$

Lembrando que:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \frac{u'(c_t)}{P_t(1+i_t)} = \lambda_t(1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial L} = -v'(L) + \lambda_t W_t (1+i_t) = 0$$

$$\lambda_t = \frac{v'(L)}{W_t(1+i_t)}(2)$$

Igualando (1) e (2):

$$\frac{c_t^{-\theta}}{P_t(1+i_t)} = \frac{v'(L_t)}{W_t(1+i_t)} \to c_t = y_t = F(L_t)$$

$$\frac{W_t}{P_t} = v'(L_t) \left[F(L) \right]^{\theta} (15)$$

Podemos definir implicitamente:

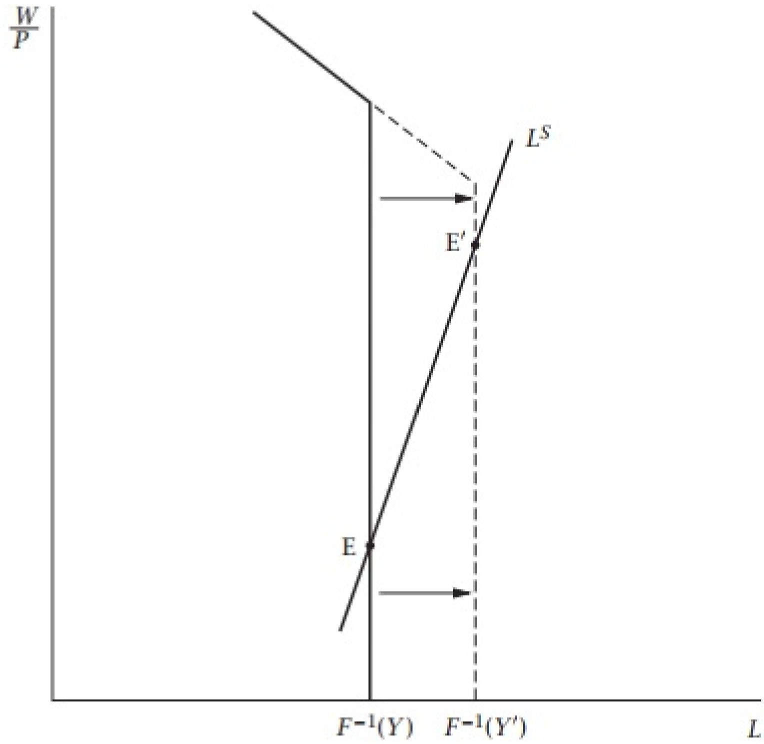
$$L = L^s(\frac{W}{P})$$

$$L^{S'}(\cdot) > 0$$

- De acordo com essas suposições, as flutuações na demanda fazem com que as firmas mudem o emprego e o produto a um nível de preço fixo.
- Um salário real é prócíclico em face a flutuações na demanda.
- Um aumento na demanda, leva a um aumento na demanda por trabalho e um aumento no salário real.
- No entanto o nível de *mark-up* é contra cíclico. Um aumento na demanda leva a um aumento nas custas.

- Porque $\uparrow W$,e o Pmg de $L \downarrow$ quando Y aumenta.

Figura 12: Mercado de trabalho com preços rígidos e salários flexíveis



Caso 3: Preços rígidos, salários flexíveis e imperfeições no mercado de trabalho.

Movimento na demanda por bens pode levar a mudanças no desemprego quando os preços nominais se ajustam lentamente.

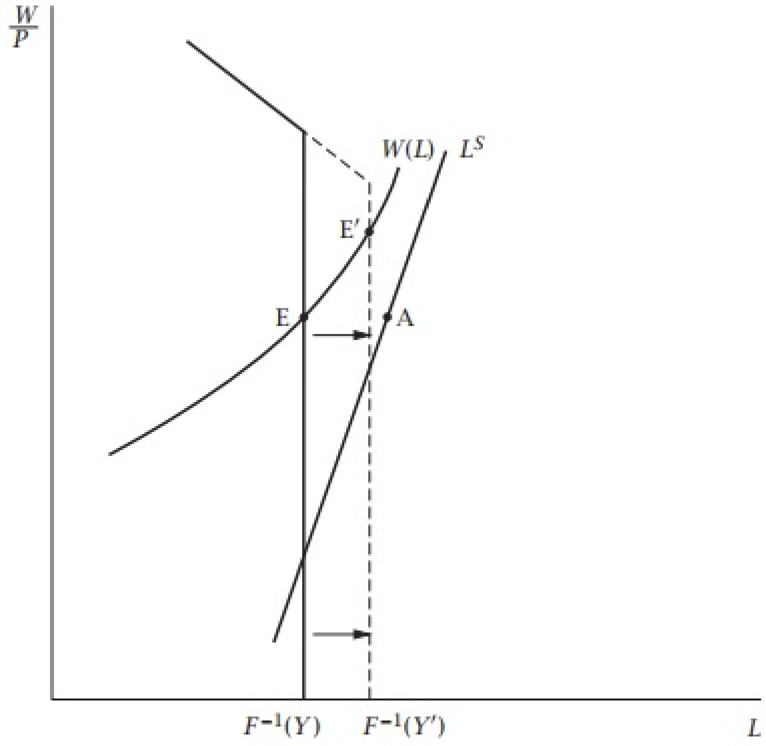
$$\frac{W}{P} = W(L), W'(\cdot) \geq 0 \ (17)$$

As firmas pagam mais do que os salários de equilíbrio, por razões de salário de eficiência.

$$P = \overline{P} \text{ e } Y = F(L)$$

Um aumento na demanda, aumenta o produto até o ponto que o custo marginal exógenamente se iguala a um nível de preços dado.

Figura 13: Mercado de trabalho (não Walrasiano) com preços rígidos e salários flexíveis



- O emprego e o salário real são determinados pela intersecção da curva de demanda efetiva por trabalho e da curva $W(L)$.
- Flutuações na demanda por trabalho levam movimentos ao longo da curva de oferta de trabalho.

Caso 4: Salários rígidos, preços flexíveis e competição imperfeita

- Este caso introduz imperfeições reais no mercado de bens;
- Salário nominal $\overline{W}$é rígido;
- O mercado de bens não é perfeitamente competitivo.
- O preço é um *mark-up* ($\mu(L)$) sobre o Custo Marginal $F'(L)$.

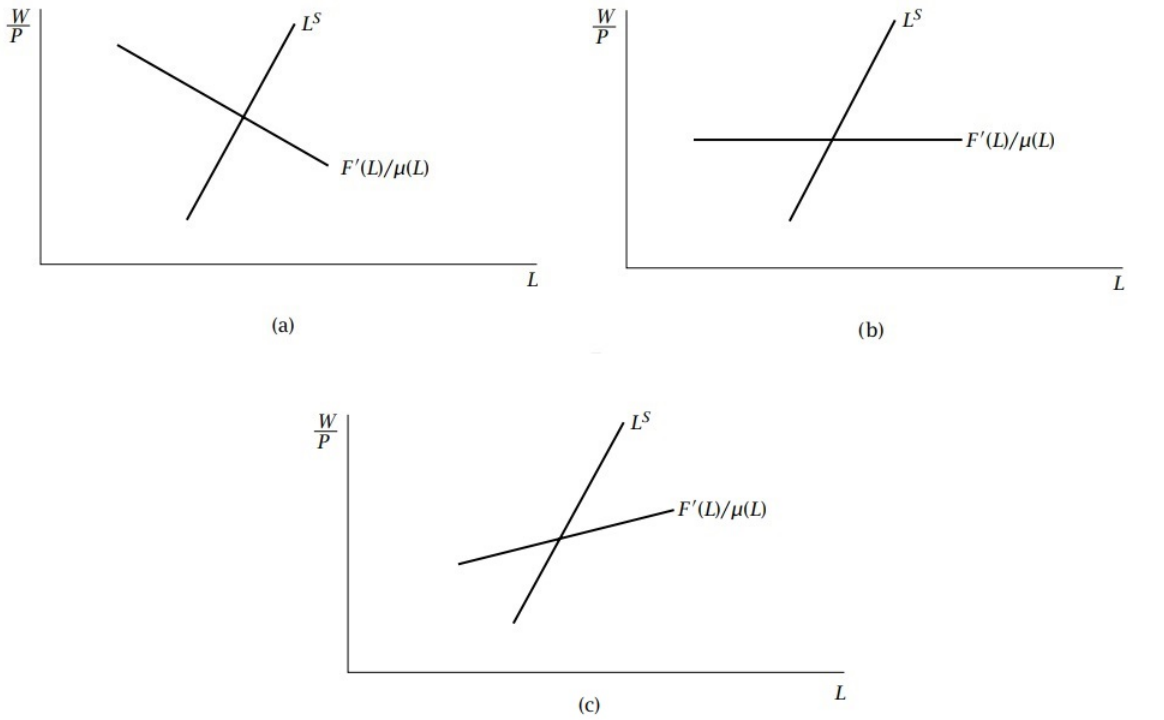
$$P = \mu(L)\frac{W}{F'(L)}(18)$$

- Se μ é constante, o salário real é contracíclico, por causa da diminuição do *PMg* do trabalho, como no caso 1.
- Como $\overline{W}$o nível de preços deve subir quando Y aumenta e novamente há desemprego.

- Se $\mu(L)$ é suficientemente contracíclico, isto é, o *mark-up* é suficiente baixo em *booms* do que em períodos de recuperações.

- A figura abaixo mostra essas implicações para o mercado de trabalho. O salário real é igual a $\frac{F'(L)}{\mu(L)}$o qual pode ser decrescente em L(a), constante em (b) ou crescente (c).

Figura 14: Mercado de trabalho: com preços rígidos, salários flexíveis e mercado de bens imperfeitamente competitivo



.

7.4 Modelando a Rigidez Nominal Exógena

Os modelos apresentados anteriormente são extremamente estilizados. O objetivo principal ao apresentá-los é aguçar a intuição do leitor. Os modelos anteriores assumem que os preços nominais e/ou salários são totalmente fixos, o que de fato não é verdade. É feita a suposição que unicamente o Banco Central determina a oferta de moeda. Embora essa suposição não seja tão evidentemente contrafactual quanto a suposição de rigidez nominal completa, ela fornece uma descrição pobre de como os Bancos Centrais modernos se comportam na economia. Vamos estudar mudanças nesses modelos que irão nos permitir pensarmos sobre problemas reais.

7.4.1 Um dilema permanente entre PIB e inflação

Primeiramente começaremos relaxando a suposição que os preços nunca mudam. Desta forma, $\bar{W}$ é proporcional o preço do período anterior. Os salários são ajustados pela taxa de inflação do período prévio:

$$W_t = AP_{t-1} \text{ com } A > 0$$

Temos que considerar que:

$$F'(L) = \frac{W_t}{P_t}$$

Então:

$$F'(L) = \frac{AP_{t-1}}{P_t}$$

$$F'(L) = \frac{A}{1+\pi_t}$$

Ao permitirem uma alta taxa de inflação, os formuladores de política pública podem aumentar o produto de forma permanente na economia. Assim, com um PIB elevado a taxa de desemprego será baixa.

7.4.2 A taxa natural

Os economistas Mílton Friedman e Edmund Phelps argumentaram que a ideia que variáveis nominais, tais como, a oferta de moeda ou a inflação podem permanentemente afetar as variáveis reais, como o nível de desemprego ou produção na economia. No longo prazo, o comportamento de variáveis reais é determinado unicamente por forças reais. A política monetária expansionista poderia mudar a forma como os preços e os salários são distribuídos. Essas políticas reduzem de modo permanente o salário real.

Em suma, a hipótese da taxa natural afirma que existe uma taxa de desemprego "normal" ou "natural" e que a política monetária não pode manter o desemprego abaixo desse nível indefinidamente. Os determinantes "precisos" da taxa natural não são importantes. O argumento de Friedman e Phelps era simplesmente que era determinado por forças reais em vez de nominais.

7.4.3 A curva de Phillips aumentada pelas expectativas

Apresentaremos primeiramente a Curva de Phillips aumentada pelas expectativas. Essa curva de Phillips não apresenta fundamentos microeconômicos.

$$\pi_t = \pi_t^* + \lambda\left(lnY_t - ln\bar{Y}_t\right) + \varepsilon_t^S \text{ com } \lambda > 0$$

- π_t^*: é a inflação "core"
- $\bar{Y_t}$: é o nível de produto potencial ou nível de produto de pleno emprego;
- $\lambda \left(lnY_t - ln\bar{Y_t} \right)$: é o gap do produto e seu peso inflação no período t;
- ε_t^S: são os choques de oferta.

Considere que:

$$\pi_t^* = \pi_{t-1}$$

Inserindo na curva de Phillips, teríamos que:

$$\pi_t = \pi_{t-1} + \lambda \left(lnY_t - ln\bar{Y_t} \right) + \varepsilon_t^S$$

Com essa suposição, há um trade-off entre o produto e a variação da inflação, mas esse trade-off não é permanente entre essas duas variáveis. Para que a inflação seja mantida estável em qualquer nível, o hiato do produto deve ser nulo. Para que a inflação caia, deve haver um período em que a produção esteja abaixo da taxa natural. Essa formulação é conhecida como a curva de Phillips aceleracionista.

Contudo, poderíamos definir $\pi_t^* = \pi_t^e$ e teríamos a Curva de Phillips com as expectativas de inflação:

$$\pi_t = \pi_t^e + \lambda \left(lnY_t - ln\bar{Y_t} \right) + \varepsilon_t^S$$

A equação acima implica que, a menos que as expectativas sejam grosseiramente irracionais, nenhuma política pode aumentar permanentemente a produção acima de sua taxa natural, uma vez que isso exige que as previsões de inflação dos trabalhadores e das empresas sejam sempre muito baixas. Agora fazendo $\pi_t^* = \Phi\pi_t^e + (1 - \Phi)\,\pi_{t-1}$ temos a curva de Phillips Híbrida:

$$\pi_t = \Phi\pi_t^e + (1 - \Phi)\,\pi_{t-1} + \lambda \left(lnY_t - ln\bar{Y_t} \right) + \varepsilon_t^S$$

Enquanto Φ for estritamente menor que 1, haverá alguma inércia na inflação de salários e preços. Ou seja, há alguma ligação entre a inflação passada e a futura, além dos efeitos que operam por meio das expectativas.

7.4.4 Demanda e Oferta Agregada

Para desenvolvermos esse modelo partiremos das curvas IS-LM Novo Keynesianas:

$$lnY_t = E\left[lnY_{t+1}\right] - \frac{1}{\theta} r_t \text{ (curva IS)}$$

$$\frac{M_t}{P_t} = Y_t^{\frac{\theta}{v}} \left[\frac{1 + i_t}{i_t}\right]^{\frac{1}{v}} \text{(curva LM)}$$

Suporemos que M_t é exógenamente determinado pelo Banco Central. Os aumentos na taxa de juros real reduzem a demanda corrente por bens relativos a demanda futura e aumenta num futuro esperado a renda futura e a demanda corrente. Se os preços não são fixos, as mudanças em P_t ou em π_t^e alteram a curva LM.

Uma suposição interessante é considerarmos que o Banco Central conduz a política monetária em termos de uma regra para taxa de juros, como por exemplo, a regra de Taylor. Assumiremos que o Banco Central conduz política monetária que faz com que a taxa de juros seja uma função crescente do gap entre o produto potencial e a taxa de inflação:

$$r_t = r\left(lnY_t - ln\bar{Y}_t, \pi_t\right), r_1(\cdot) > 0, r_2(\cdot) > 0$$

Se o Banco Central estabelece a taxa de juros seguindo a equação acima, podemos assumir que:

$$\frac{M_t}{P_t} = Y_t^{\frac{\theta}{v}} \left[\frac{1 + r_t + \pi_t^e}{r_t + \pi_t^e}\right]^{\frac{1}{v}}$$

A curva de oferta agregada pode ser escrita como:

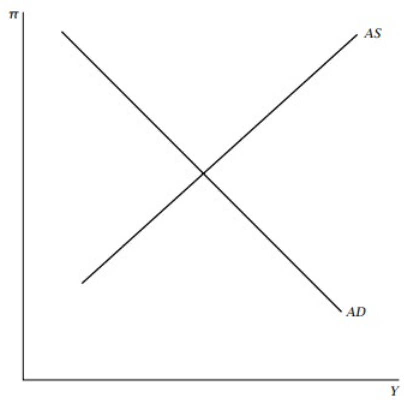
$$\pi_t = \pi_t^* + \lambda\left(lnY_t - ln\bar{Y}_t\right) + \varepsilon_t^S \text{ com } \lambda > 0$$

A curva de demanda agregada pode ser derivada das curvas IS e LM:

$$lnY_t = E\left[lnY_{t+1}\right] - \frac{1}{\theta} r_t\left(, lnY_t - ln\bar{Y}_t, \pi_t\right)$$

Se a regra da taxa de juros é uma função crescente em π, então o aumento da inflação aumenta a taxa de juros real para um certo nível de produção da economia.

Figura 15: Curvas de Oferta e de Demanda Agregada



Exemplo: Choques na curva IS

Faremos algumas suposições simplificadoras:

- A política monetária depende exclusivamente do produto e não da inflação;
- Os choques são processos autorregressivos de ordem 1;
- $ln\bar{Y}_t$ é sempre zero para qualquer período;
- A equação da MP (LM) é linear.

A equação da oferta agregada é dada por:

$$\pi_t = \pi_{t-1} + \lambda Y_t \text{ com } \lambda > 0 \text{ (27)}$$

A curva MP é:

$$r_t = bY_t \text{ com } b > 0 \text{ (28)}$$

A curva IS:

$$Y_t = E\left[Y_{t+1}\right] - \frac{1}{\theta} r_t + u_t^{IS} \text{ com } \theta > 0 \text{ (29)}$$

$$u_t^{IS} = \rho_{IS} u_{t-1}^{IS} + \varepsilon_t^{IS} \text{ com } -1 < \rho_{IS} < 1 \text{ (30)}$$

Considere $\varepsilon_t^{IS} \sim N\left(0, \sigma_{IS}^2\right)$ é um ruído branco. Combinando as equações teremos que:

$$Y_t = E\left[Y_{t+1}\right] - \frac{bY_t}{\theta} + u_t^{IS}$$

$$Y_t = \frac{\theta}{\theta + b}\left(E\left[Y_{t+1}\right] + u_t^{IS}\right)$$

$$Y_t = \phi E\left[Y_{t+1}\right] + \phi u_t^{IS} (31)$$

A equação (31) expressa Y_t não somente como um distúrbio aleatório da curva IS, mas também como a expectativa do valor futuro de uma variável endógena. Podemos adiantar (31) para j períodos a frente:

$$Y_{t+j} = \phi E\left[Y_{t+1+j}\right] + \phi u_{t+j}^{IS} (32)$$

Tomando as expectativas da equação (32):

$$E\left[Y_{t+j}\right] = \phi E\left[Y_{t+1+j}\right] + \phi E\left[u_{t+j}^{IS}\right]$$

$$E\left[Y_{t+j}\right] = \phi E\left[Y_{t+1+j}\right] + \phi \rho_{IS} u_{t+j}^{IS}$$

A lei das projeções iteradas nos diz que: a expectativa atual de uma expectativa futura de uma variável é igual a expectativa atual desta variável. Podemos então iterar (para frente) a equação (31):

$$Y_{t+1} = \phi E\left[Y_{t+2}\right] + \phi u_{t+1}^{IS}$$

$$Y_{t+2} = \phi E\left[Y_{t+3}\right] + \phi u_{t+2}^{IS}$$

E assim por diante. Podemos escrever a equação (31) do seguinte modo:

$$Y_t = \phi u_t^{IS} + \phi\left(\phi E\left[Y_{t+2}\right] + \phi \rho_{IS} u_t^{IS}\right)$$

$$Y_t = \phi u_t^{IS} + \phi^2 \rho_{IS} u_t^{IS} + \phi^2\left(\phi E\left[Y_{t+3}\right] + \phi \rho_{IS}^2 u_t^{IS}\right)$$

E assim sucessivamente até chegarmos que:

$$Y_t = \sum_{i=1}^{\infty} \phi^i \rho_{IS}^{i-1} u_t^{IS} + \sum_{i=1}^{\infty} \phi^i E\left[Y_{t+i}\right]$$

Tomando o limite quando $i \to \infty$ temos que:

$$Y_t = \frac{1}{1 - \phi \rho_{IS}}\, u_t^{IS}$$

sendo que $\sum_{i=1}^{\infty} \phi^i E\left[Y_{t+i}\right] \to 0$ e $|\phi \rho_{IS}| < 1$. Usando a definição de $\phi = \frac{\theta}{\theta + b}$ teremos:

$$Y_t = \frac{\theta}{b + \theta\left(1 - \rho_{IS}\right)}\, u_t^{IS} (35)$$

A expressão (35) mostra como os choques na demanda afetam o produto. Uma política monetária mais agressiva responde a movimentos no produto, isto é, um alto valor de b inibe os efeitos dos choques na curva IS. Na falta do aspecto forward-looking, ou seja, se essa curva é somente $Y_t = -\frac{1}{\theta} r_t + u_t^{IS}$ e o produto é $\frac{\theta}{b+\theta}\, u_t^{IS}$ a equação (35) mostra que a "conta" para o comportamento de olhar apenas para a frente aumenta o coeficiente em u_t^{IS}, desde que $\rho_{IS} > 0$.

As equações (35) e (27) implicam que a inflação é dada por:

$$\pi_t = \pi_{t-1} + \frac{\lambda \theta}{b + \theta\left(1 - \rho_{IS}\right)}\, u_t^{IS}$$

Não há *feedback* da inflação para a taxa de juros real, não há força agindo para estabilizar a inflação. Na verdade, se os choques para a curva IS são positivamente serialmente correlacionados, a mudança na inflação é positivamente serialmente correlacionada.

7.5 Fundamentos microeconômicos do ajustamento nominal incompleto

Algumas considerações:

- Os indivíduos pagam um preço pequeno para se manterem informados sobre o nível de preços agregado;
- Os contratos de dívida na economia podem ser indexados;
- As fricções nominais são pequenas no âmbito microeconômico, mas produzem grandes efeitos macroeconômicos;
- As firmas se deparam com o custo de menu do preço de ajustamento. Esses custos levam a uma rigidez nominal significativa em resposta a um choque monetário único.

7.5.1 Modelo de competição imperfeita e "atribuição de preços"

Nesse modelo os preços são flexíveis. Há um continuum (uma massa) de bens diferenciados por $i \in [0, 1]$. Cada mercadoria é produzida unicamente por uma família (firma).

$$Y_i = L_i$$

As firmas contratam mão de obra num mercado competitivo e vendem as mercadorias num mercado em que a competição é imperfeita. Nesse contexto, as empresas podem determinar livremente o preço das mercadorias. Ainda as famílias são as proprietárias das firmas. Temos então a função de utilidade da família representativa:

$$U = C - \frac{1}{\gamma} L^{\gamma} \text{ com } \gamma > 1$$

Temos que C não é o total do consumo. Se essa variável indicasse isso, os bens poderiam ter substitutos perfeitos e assim as firmas não teriam poder de mercado. Assim, C é um índice que representa o consumo da família de bens individuais. Isso toma a forma da elasticidade de substituição constante:

$$C = \left[\int_{i=0}^{1} C_i^{(\eta-1)/\eta} di \right]^{\frac{\eta}{\eta-1}} \quad \text{com } \eta > 1$$

Se os $C_i's$ são iguais, a elasticidade da demanda por cada bem é maior que 1 e isso implica que os preços que maximizam os lucros das firmas não são infinitos. Consideramos que a economia é fechada e não possui governo.

$$Y \equiv C$$

$$Y = \frac{M}{P}$$

Em seu trabalho em 2003, Woodford destaca que M é o alvo do Banco Central para o PIB nominal. O comportamento da família se dá da seguinte forma:

$$S = \int_{i=0}^{1} P_i C_i di \text{ (restrição orçamentária)}$$

$$L = \left[\int_{i=0}^{1} C_i^{(\eta-1)/\eta} di\right]^{\frac{\eta}{\eta-1}} + \lambda \left[S - \int_{i=0}^{1} P_i C_i di\right]$$

A condição de primeira ordem para a família em relação a C_i:

$$L_{C_i} = \frac{\eta}{\eta-1}\left[\int_{j=0}^{1} C_j^{(\eta-1)/\eta} dj\right]^{\frac{1}{\eta-1}} C_i^{1/\eta} = \lambda P_i$$

$$L_{C_i} = \frac{1}{\lambda P_i}\frac{\eta}{\eta-1}\left[\int_{j=0}^{1} C_j^{(\eta-1)/\eta} dj\right]^{\frac{1}{\eta-1}} = C_i^{1/\eta}$$

$$L_{C_i} = \left[\frac{1}{\lambda P_i}\frac{\eta}{\eta-1}\right]^{\eta}\left[\int_{j=0}^{1} C_j^{(\eta-1)/\eta} dj\right]^{\frac{\eta}{\eta-1}} = C_i$$

$$A = \left[\frac{1}{\lambda}\frac{\eta}{\eta-1}\right]^{\eta}\left[\int_{j=0}^{1} C_j^{(\eta-1)/\eta} dj\right]^{\frac{\eta}{\eta-1}}$$

$$C_i = AP_i^{-\eta}$$

Para encontrar A devemos substituir C_i na restrição orçamentária:

$$S = \int_{j=0}^{1} AP_j^{1-\eta} di$$

$$S = A\int_{j=0}^{1} P_j^{1-\eta} di$$

$$A = \frac{S}{\int_{j=0}^{1} P_j^{1-\eta} di}$$

Substituindo esse resultado na expressão de C_i:

$$C_i = \frac{S}{\int_{j=0}^{1} P_j^{1-\eta} dj} P_i^{-\eta}$$

Depois inserimos na definição de C:

$$C = \left[\int_{i=0}^{1} \left(\frac{S}{\int_{j=0}^{1} P_j^{1-\eta} dj} P_i^{-\eta} \right)^{(\eta-1)/\eta} di \right]^{\frac{\eta}{\eta-1}}$$

$$C = \frac{S}{\int_{j=0}^{1} P_j^{1-\eta} dj} \left[\int_{i=0}^{1} \left(P_i^{1-\eta} di \right) \right]^{\frac{\eta}{\eta-1}}$$

Se *i=j:*

$$C = S \left[\int_{i=0}^{1} \left(P_i^{1-\eta} di \right) \right]^{\frac{1}{\eta-1}}$$

$$C = \frac{S}{\int_{i=0}^{1} \left(P_i^{1-\eta} di \right)^{\frac{1}{1-\eta}}} (46)$$

A equação (46) nos diz que quando as famílias alocam seus gastos entre os bens de maneira ótima, o custo de obtenção de uma unidade de C é:

$$P = \left[\int_{i=0}^{1} \left(P_i^{1-\eta} di \right) \right]^{\frac{1}{1-\eta}}$$

Finalmente essa expressão implica que:

$$A = \frac{S}{P^{1-\eta}}$$

$$C_i = \frac{S}{P^{1-\eta}} P_i^{-\eta}$$

$$C_i = \frac{S}{P} \left(\frac{P_i}{P} \right)^{-\eta}$$

Se todos os $P_i's$ são iguais:

$$C = \frac{S}{P}$$

Então teremos que:

$$C_i = C\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\eta}$$

É importante destacar que a família tem outra variável de escolha que é a sua oferta de trabalho:

$$\max_{L} \frac{WL + R}{P} - \frac{1}{\gamma}L^{\gamma}$$

A condição de primeira ordem em relação a L:

$$L_{L} = \frac{W}{P} - L^{\gamma-1} = 0$$

$$L = \left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (50)$$

A oferta de trabalho é uma função crescente do salário rela com elasticidade $\frac{1}{\gamma-1}$.

Comportamento da firma

Os lucros do produtor monopolista do bem i são suas receitas reais menos seus custos em termos reais:

$$\frac{R_i}{P} = \frac{1}{P}\left(P_i Y_i - WL_i\right)$$

A função de demanda:

$$Y_i = Y\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\eta}$$

tendo em vista que:

$$Y \equiv C \text{ e que } Y_i = L_i$$

Usando essas relações na função receita do monopolista:

$$\frac{R_i}{P} = \frac{1}{P}\left(P_i Y\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\eta} - WY\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\eta}\right)$$

$$\frac{R_i}{P} = \frac{Y}{P}\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\eta}(P_i - W)$$

Fazendo $\left(\frac{P_i}{P}\right) = \theta$

$$\frac{R_i}{P} = Y\theta^{1-\eta} - \frac{YW}{P}\theta^{-\eta}$$

Derivando em relação a θ:

$$(1-\eta)\,Y\theta^{-\eta}+\eta\frac{Y}{P}W\theta^{-\eta-1}=0$$

$$Y\theta^{-\eta}\left[(1-\eta)+\eta\frac{W}{P}\theta^{-1}\right]=0$$

$$\eta\frac{W}{P}\theta^{-1}=(\eta-1)$$

$$\frac{W}{P}\theta^{-1}=\frac{(\eta-1)}{\eta}$$

$$\theta=\frac{W}{P}\frac{\eta}{\eta-1}(55)$$

Esse é o resultado padrão para o produtor monopolista. Esse fabricante atribui o preço acima do custo marginal. O tamanho da margem de lucro do monopolista é determinado pela elasticidade da demanda.

Equilíbrio

$$Y=C=L$$

Usando a equação (50):

$$Y=\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\frac{W}{P}=Y^{\gamma-1}$$

Agora utilizaremos a equação (55):

$$\theta=\frac{W}{P}\frac{\eta}{\eta-1}$$

$$\theta=Y^{\gamma-1}\frac{\eta}{\eta-1}$$

Lembrado que: $\left(\frac{P_i}{P}\right)=\theta$ e que P_i^*é o preço de equilíbrio de cada produtor, teremos que:

$$\frac{P_i^*}{P}=Y^{\gamma-1}\frac{\eta}{\eta-1}$$

Aplicando o logaritmo:

$$lnP_i^*-lnP=(\gamma-1)\,lnY+ln\left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)$$

Usando letras em caixa baixa para substituir os *lns*:

$$p_i^* - p = \phi y + c$$

A condição de equilíbrio exige que cada produtor atribua seu preço tomando P como dado. Então no equilíbrio, o preço relativo: $\frac{P_i^*}{P} = 1$. Essa condição implica em:

$$Y = \left(\frac{\eta - 1}{\eta}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

Sendo esse o nível de produto de equilíbrio. Inserindo esse nível de produção na equação da demanda agregada:

$$Y = \frac{M}{P}$$

$$\left(\frac{\eta - 1}{\eta}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = \frac{M}{P}$$

$$P = M\left(\frac{\eta - 1}{\eta}\right)^{\frac{1}{1 - \gamma}}$$

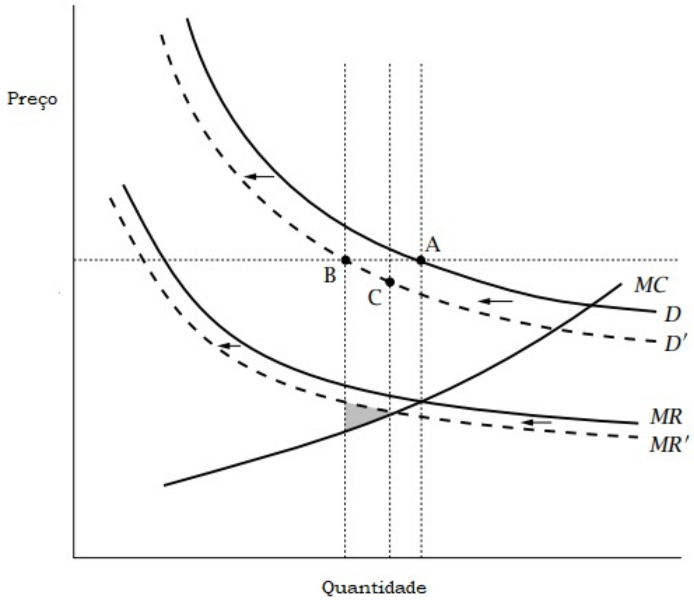
Implicações

- O gap entre o equilíbrio e os níveis ótimos é maior quando os produtores possuem mais poder de mercado, isso ocorre quando η é menor;
- Para pequenos valores γ a oferta de trabalho é mais sensível ao salário real;
- Se há uma redução no nível de preços geral na economia: i) o salário real irá aumentar, desde que as famílias empreguem o mesmo montante de trabalho em sua capacidade como donas das firmas; ii) o aumento no produto agregado aumenta a curva de demanda individual para cada bem; iii) Como as firmas vendem seus bens com preços acima de seus custos marginais, seus lucros aumentam.

7.5.2 Pequenas fricções são suficientes?

Suporemos que as firmas determinam o preço, ele não é dado pelo mercado. No momento inicial o preço de equilíbrio é flexível. Ou seja, o preço de cada empresa é tal que, se a demanda agregada está em seu nível esperado, a receita marginal é igual ao custo marginal. Iremos considerar que cada firma mudará o seu preço pagando um custo de menu e se a companhia faz isso ela está atribuindo seu preço para um novo nível de maximização dos lucros.

Figura 16: O incentivo de uma empresa representativa para alterar seu preço em resposta a uma queda na produção agregada



No ponto A temos que o custo marginal é exatamente igual a receita marginal. Uma queda na demanda agregada (com os outros preços inalterados) faz com que o produto agregado caia. Assim, a curva de receita marginal se desloca. Se a empresa não altera seu preço, sua produção é determinada pela demanda ao preço existente (Ponto B). Nesse nível de produção, a receita marginal excede o custo marginal e, portanto, a empresa tem algum incentivo para reduzir seu preço e aumentar a produção. Se a empresa muda seu preço, ela produz no ponto em que o custo marginal e a receita marginal são iguais (Ponto C).

A área do triângulo sombreado no diagrama mostra os lucros adicionais a serem obtidos com a redução do preço e o aumento da quantidade produzida. Para que a empresa esteja disposta a manter seu preço fixo, a área do triângulo deve ser pequena. O diagrama revela um ponto crucial: o incentivo da empresa para reduzir seu preço pode ser pequeno, mesmo se for muito prejudicado pela queda na demanda. A empresa prefere enfrentar a curva de demanda superior original, mas é claro que só pode escolher um ponto na nova curva de demanda.

Este é um exemplo da uma externalidade causada por alterações na demanda agregada: a empresa representativa é prejudicada pelo fracasso de outras empresas em cortar seus preços em face da queda na oferta de moeda, da mesma forma que é prejudicada no modelo da seção anterior por a decisão de todas as empresas de aumentar seus preços. Como resultado, a empresa pode descobrir que o ganho com a redução de seu preço é pequeno, mesmo que a mudança em sua curva de demanda seja grande. Assim, não há contradição entre a visão de que as recessões têm grandes custos e a hipótese de que são causadas por quedas na demanda agregada e pequenas barreiras ao ajuste de preços.

Um exemplo quantitativo

$$Y_i = Y\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\eta}$$

$$\frac{W}{P} = Y^{\gamma-1}$$

$$\frac{R_i}{P} = \frac{1}{P}\left(P_i Y\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\eta} - WY\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\eta}\right)$$

$$\frac{R_i}{P} = Y\left(\frac{P_i}{P}\right)^{1-\eta} - Y^{\gamma-1}Y\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\eta}$$

Fazendo $v = 1/(\gamma-1)$ o que implica que $\frac{1}{v} = \gamma - 1$.

$$\pi_i = Y\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\eta}\left[\frac{P_i}{P} - Y^{\frac{1}{v}}\right]$$

Sabendo que:

$$Y = \frac{M}{P}$$

$$\pi_i = \frac{M}{P}\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\eta}\left[\frac{P_i}{P} - \frac{M}{P}^{\frac{1}{v}}\right]$$

$$\pi_i = \frac{M}{P}\left(\frac{P_i}{P}\right)^{1-\eta} - \frac{M}{P}^{\frac{v+1}{v}}\left(\frac{P_i}{P}\right)^{-\eta}$$

Se a firma representativa não deseja pagar o custo de menu e ajustar seu preço, esta condição é dada por:

$$\pi_{ADJ} - \pi_{FIXO} < Z$$

Sendo Z o custo de menu. Considerando os preços fixos, teremos que:

$$\pi_{FIXO} = \frac{M}{P} - \frac{M}{P}^{\frac{v+1}{v}}$$

Lembrando que:

$$\left(\frac{\eta-1}{\eta}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{M}{P}$$

$$\frac{P_i}{P} = Y^{\gamma-1}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)$$

O que implica que:

$$\frac{P_i}{P} = \frac{M}{P}^{1/v}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)$$

Substituindo essa relação na equação de lucros:

$$\pi_i = \frac{M}{P}\left(\frac{M}{P}^{1/v}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)\right)^{1-\eta} - \frac{M}{P}^{\frac{v+1}{v}}\left(\frac{M}{P}^{1/v}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)\right)^{-\eta}$$

$$\pi_i = \frac{M}{P}^{\frac{1+v-\eta}{v}}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)^{1-\eta} - \frac{M}{P}^{\frac{v+1-\eta}{v}}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)^{-\eta}$$

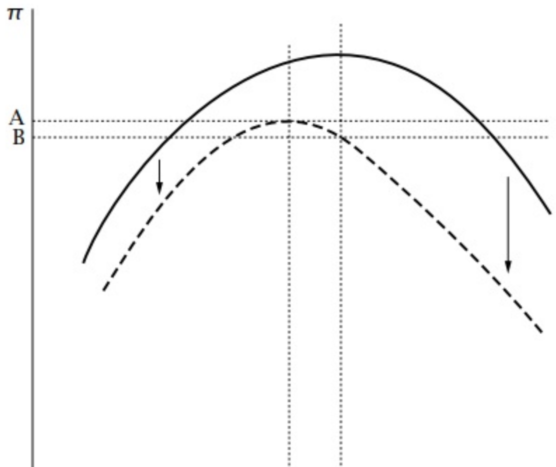
$$\pi_{ADJ} = \frac{M}{P}^{\frac{1+v-\eta}{v}}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)^{-\eta}\left(\frac{1}{\eta-1}\right)$$

$\pi_{ADJ} = \pi_{FIXO}$ quando M/P é igual a seu preço flexível de equilíbrio, caso contrário $\pi_{ADJ} > \pi_{FIXO}$.

7.6 Rigidez Real

Suponha que há uma queda no produto. A demanda do bem produzido pela firma i faz a função tende a ir para baixo. Haveria um efeito reverso no salário.

Figura 17: O impacto de uma queda na produção agregada nos lucros da empresa representativa em função do seu preço



Se o firma não paga o custo de menu, o preço permanece o mesmo. A distância AB depende de dois fatores, a diferença entre o velho e o novo preço maximizador de lucros e a curvatura da função lucro. A “pequena resposta” dos preços reais em resposta a alteração no produto agregada é chamada de rigidez real.

Segundo exemplo quantitativo

$$\frac{W}{P} = AY^{\beta}$$

O comportamento cíclico do salário real é determinado pela função de salário real ao invés da elasticidade da oferta de trabalho.

$$\left[\frac{1}{A}\frac{M}{P}\right]^{\frac{1}{\beta}} = Y$$

$$\frac{P_i^*}{P} = \frac{\eta}{\eta-1}AY^{\beta}$$

$$\frac{P_i^*}{P} = A\frac{\eta}{\eta-1}\left(\frac{M}{P}\right)^{\beta}$$

$$\pi_i = \frac{M}{P}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)^{1-\eta} A^{1-\eta}\left(\frac{M}{P}\right)^{\beta(1-\eta)} - A^{1-\eta}\frac{M}{P}^{1+\beta-\eta\beta}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)^{-\eta}$$

$$\pi_{ADJ} = A^{1-\eta}\left(\frac{M}{P}\right)^{1+\beta(1-\eta)}\left(\frac{\eta}{\eta-1}\right)^{-\eta}\left(\frac{1}{\eta-1}\right)$$

$$\pi_{FIXO} = \frac{M}{P} - A\left(\frac{M}{P}\right)^{1+\beta}$$

7.7 O modelo de informação imperfeita de Lucas

Os trabalhos na década de 1970 de Lucas e Phelps indicam que os produtores muito provavelmente não observam perfeitamente a demanda agregada ao nível de preços. Uma mudança nos preços relativos altera o montante ótimo a ser produzido. Uma mudança no nível de preços agregados, pode deixar a produção da economia inalterada. Em resumo, a oferta e a demanda agregada sofrem choques aleatórios não observáveis pelos os produtores.

7.7.1 O modelo

Primeiramente devemos considerar que o mercado é competitivo. Os produtores ignoram o impacto de suas escolhas de produção nos preços de outros bens.

$$U_i = C_i - \frac{1}{\gamma} L_i^{\gamma}$$

$$C_i = Y_i \frac{P_i}{P}$$

$$L_i = \frac{1}{\gamma} Y_i^{\gamma}$$

Como o mercado é competitivo o preço é “dado”. Em outras palavras, as empresas são tomadoras de preço.

$$Max\ U_i = Y_i \frac{P_i}{P} - \frac{1}{\gamma} Y_i^{\gamma}$$

Tomando a condição de primeira ordem em relação a Y_i.

$$Y_i = \left(\frac{P_i}{P}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}$$

Aplicando os logs:

$$y_i = \frac{1}{\gamma - 1} \left(p_i - p\right)$$

Temos que a curva de de demanda agregada para o bem i:

$$y_i = y + z_i - \eta \left(p_i - p\right)$$

$$y = m - p$$

Por simplicidade assumimos que:

$$p = \overline{p_i} \text{ e } y = \overline{y_i}$$

O produtor não pode observar z_i e m. Na verdade a firma somente observa o preço de produção do seu próprio bem p_i. Podemos escrever p_i como:

$$p_i = p + \left(p_i - p\right)$$

$$p_i \equiv p + r_i$$

O produtor estima a expectativa de r_i dado p_i e então produz tanto quanto consegue estimar precisamente:

$$y_i = \frac{1}{\gamma - 1} E\left[r_i | p_i\right]$$

Considere que os choques em m e em z_i são normalmente distribuídos. A média de $m = E[m]$ e a variância de m é V_m. Os $z_i's$ tem média zero e variância V_z e é independente de m. A verdadeira expectativa de r_i dado p_i é $E\left[r_i\right]$.

Curva de oferta de Lucas

Considere que r_i e p_i são independentes e normalmente distribuídos.

$$E\left[r_i | p_i\right] = E\left[r_i\right] + \frac{V_r}{V_r + V_p}\left(p_i - E\left[p_i\right]\right)$$

$$E\left[r_i | p_i\right] = \frac{V_r}{V_r + V_p}\left(p_i - E\left[p_i\right]\right)$$

Considere que $p_i = E\left[p_i\right]$ e que $E\left[r_i\right] = 0$. Se, por exemplo, V_p é 0, toda a variação em p_i é devida a r_i, então $E\left[r_i | p_i\right] = p_i - E\left[p\right]$.

$$y_i = \frac{1}{\gamma - 1} E\left[r_i | p_i\right]$$

$$y_i = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{V_r}{V_r + V_p}\left(p_i - E\left[p\right]\right)$$

$b = \frac{1}{\gamma-1}\frac{V_r}{V_r+V_p}$

$$y_i = b\left(p_i - E\left[p\right]\right)$$

Essa curva de oferta de lucas é a mesma curva de Phillips com a inflação "core" substituída pela inflação esperada.

Equilíbrio

$$y = bp - bE\left[p\right]$$

$$y = b\left(m - y\right)p - bE\left[p\right]$$

$$y = \frac{b}{1+b}m - \frac{b}{1+b}E\left[p\right]$$

Considere que:

$$y = bp - bE\left[p\right]$$

$$m - p = bp - bE[p]$$

$$\frac{m}{1+b} + \frac{bE[p]}{1+b} = p$$

Tomando as expectativas:

$$\frac{E[m]}{1+b} + \frac{bE[p]}{1+b} = E[p]$$

$$E[m] = E[p]$$

Sabemos que:

$$m = E[m] + (m - E[m])$$

E temos que:

$$p = \frac{m}{1+b} + \frac{bE[p]}{1+b}$$

$$p = \frac{E[m] + (m - E[m])}{1+b} + \frac{bE[p]}{1+b}$$

Usando o fato que $E[m] = E[p]$.

$$p = \frac{E[p] + (m - E[p])}{1+b} + \frac{bE[p]}{1+b}$$

$$p = \frac{(m - E[p])}{1+b} + \frac{(1+b)E[p]}{1+b}$$

Substituindo $E[p]$ por $E[m]$

$$p - E[p] = \frac{m - E[m]}{1+b}$$

Elevando os dois lados ao quadrado:

$$V_p = \frac{V_m}{(1+b)^2}$$

Retomando a curva de oferta da empresa i:

$$y_i = b(p_i - E[p])$$

$$y_i = b[p + (p_i - p) - E[p]]$$

$$y_i = b\left(p - E\left[p\right]\right) + b\left(p_i - p\right)$$

Igualando a curva de oferta com a demanda:

$$y_i = y + z_i - \eta\left(p_i - p\right)$$

$$y + z_i - \eta\left(p_i - p\right) = b\left(p - E\left[p\right]\right) + b\left(p_i - p\right)$$

Considere que: $y = b\left(p - E\left[p\right]\right)$

$$z_i - \eta\left(p_i - p\right) = b\left(p_i - p\right)$$

$$p_i - p = \frac{z_i}{b + \eta}$$

Sabemos que:

$$r_i = \frac{z_i}{b + \eta}$$

Tomando as expectativas:

$$E\left[r_i\right] = \frac{E\left[z_i\right]}{b + \eta}$$

Subtraindo as duas equações:

$$r_i - E\left[r_i\right] = \frac{z_i - E\left[z_i\right]}{b + \eta}$$

Elevando os dois lados desta equação ao quadrado:

$$\left(r_i - E\left[r_i\right]\right)^2 = \frac{\left(z_i - E\left[z_i\right]\right)^2}{\left(b + \eta\right)^2}$$

$$V_r = \frac{V_z}{\left(b + \eta\right)^2}$$

Lembrando que:

$$b = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{V_r}{V_r + V_p}$$

$$b = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{\frac{V_z}{(b+\eta)^2}}{\frac{V_z}{(b+\eta)^2} + V_p}$$

$$b = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{\frac{V_z}{(b+\eta)^2}}{\frac{V_z}{(b+\eta)^2} + \frac{(b+\eta)^2 V_p}{(b+\eta)^2}}$$

$$b = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{V_z}{V_z + (b+\eta)^2 V_p}$$

É importante recordar que:

$$V_p = \frac{V_m}{(1+b)^2}$$

$$b = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{V_z}{V_z + \frac{(b+\eta)^2}{(1+b)^2} V_m}$$

$$b = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{V_z}{V_z + \frac{(b+\eta)^2}{(1+b)^2} V_m}$$

Se $\eta = 1$.

$$b = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{V_z}{V_z + V_m}$$

A Curva de Phillips e a Crítica de Lucas

$$m_t = m_{t-1} + c + u_t$$

$$p = E[m] + \frac{1}{1+b}(m - E[m])$$

$$E[m] = m_{t-1} + c \text{ e } m - E[m] = u_t$$

$$p_t = m_{t-1} + c + \frac{1}{1+b}u_t$$

Se $E[m] = E[p]$ então:

$$y = \frac{b}{1+b}m - \frac{b}{1+b}E[p]$$

$$y = \frac{b}{1+b}u_t$$

$$p_{t-1} = m_{t-2} + c + \frac{b}{1+b}u_t$$

Subtraindo $p_t - p_{t-1}$:

$$p_t - p_{t-1} = (m_{t-1} - m_{t-2}) + \frac{b}{1+b}(u_t - u_{t-1})$$

$$\pi_t = c + u_{t-1} + \frac{b}{1+b}(u_t - u_{t-1})$$

$$\pi_t = c + \frac{u_t}{1+b} + \frac{b}{1+b}u_{t-1}$$

Considerando que u_t e u_{t-1}não são correlacionados. Isso implica que o produto e a inflação são positivamente correlacionados. Não há um trade-off explorável entre a taxa de inflação e o desemprego. Uma mudança de política poderia mudar os relacionamentos entre os agregados econômicos. Se os formuladores de política pública tentam tomar vantagem de relacionamentos estatísticos os efeitos oriundos por meio das expectativas faz com que esse relacionamento se rompa.

8 Modelos DSGE de Flutuações

Nesse capítulo estudaremos os modelos de equilíbrio geral dinâmicos e estocásticos. Primeiramente, desenvolveremos a economia do nosso modelo. A estrutura de mercado se dá sob competição imperfeita:

$$Y = F(L)$$

Famílias maximizam utilidade tomando trajetórias de $\frac{W}{P}$ e r como dadas. As firmas são de propriedade das famílias e maximizam o valor presente descontado de seus lucros imperfeitos a restrições em seus preços conforme o modelo.

Famílias

Há um número fixo de famílias que vivem infinitamente. Função objetivo

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [U(C_t) - V(L_t)], 0 < \beta < 1 \tag{8.1}$$

C= índice de consumo

$$U(C_t) = \frac{ct}{1-\theta}^{1-\theta}, \theta > 0 \tag{8.2}$$

$$V(L_t) = \frac{\beta}{\gamma} L_t^{\gamma}, \beta > 0, \gamma > 0 \tag{8.3}$$

P= índice de preços correspondente ao índice de consumo. $\gamma = ln(p)$ é uma média do log de preço das firmas.

$$V'(L_t) = U'(C_t)\frac{W_t}{P_t}dL \tag{8.4}$$

L_t- Acréscimo na oferta no período t em dL
$\frac{W_t}{P_t}$- Aumento na renda real da família por $\frac{W_t}{P_t}dL$.
Porque $Y = F(L)$ e $Y = C$ no equilíbrio $C_t = L_t = Y_t$ de (4)

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{V'(y_t)}{U'(y_t)} \tag{8.5}$$

Inserindo (2) e (3) em (5) e resolvendo para

$$\frac{W_t}{P_t} = \frac{\beta L_t^{\gamma-1}}{C_t^{-\theta}}$$

$$\frac{W_t}{P_t} = \beta y_t^{(\theta+\gamma)-1} \tag{8.6}$$

$$lny_t = lnc_t - \frac{1}{\theta}r_t \text{ (curva IS Novo Keynesiana)} \tag{8.7}$$

(Curva IS Novo Keynesiana)

Firmas

$$y_{it} = L_{it}$$

Função de produção da firma é

$$y_{it} = y_t\left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)^{-n}$$

Função de demanda a qual a firma se defronta.

$$R_t = \left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)y_{it} - \left(\frac{W_t}{P_t}\right)y_{it}$$

$$Rt = \left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)y_t\left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)^{1-n} - \left(\frac{W_t}{P_t}\right)y_t\left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)^{-n}$$

$$R_t = y_t\left[\left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)^{1-n} - \left(\frac{W_t}{P_t}\right)\left(\frac{P_{it}}{P_t}\right)^{-n}\right] \tag{8.8}$$

Seja q_t= Probabilidade que o preço a firma estabelece no período zero estar em vigor no período *t*. Desde que o lucro da firma vá para a família, ela avalia o lucro de acordo com a utilidade que ela fornece a família. Seja $\lambda_t = \beta^t u'(c_t)/u'(c_0)$ a utilidade marginal do consumo da família representativa no período t relativo *t=1*. A firma portanto escolhe seu preço no período 0,P_i, para o maximizador:

$$\sum_{t=0}^{\infty} q_t \lambda_t R_t = A$$

Onde R_t é o lucro da firma em t se P_i está ainda em vigor. Inserindo a equação (8)

$$A = \sum_{t=0}^{\infty} q_t \lambda_t y_t \left[\left(\frac{P_i}{P_t} \right)^{1-n} - \left(\frac{W_t}{P_t} \right) \left(\frac{P_i}{P_t} \right)^{-n} \right] \tag{8.9}$$

Assuma que:

1. A inflação está baixa
2. O fator de desconto β está perto de 1.
3. A economia está sempre próxima do equilíbrio de preços flexíveis.

$$A = \sum_{t=0}^{\infty} q_t \lambda_t y_t P_t^{n-1} (P_i^{1-n} - W_t P_i{}^{-n}) \tag{8.10}$$

Pode-se reescrever $(P_i^{1-n} - W_t P_i{}^{-n})$ como $F(pi, pt^*)$:

$$A = \sum_{t=0}^{\infty} q_t \lambda_t y_t P_t^{n-1} F(pi, pt^*) \tag{8.11}$$

onde$p_i = ln(p_i)$ e $p_t^* = ln(P_t^*)$

As suposições simplificadoras possuem dois aspectos importantes sobre (11): A variação em $\lambda_t y_t P_t^{n-1}$ é negligenciável em relação a variação em q_t , p_t^*e $F(\cdot)$ pode ser bem aproximado por uma aproximação de segunda ordem em torno de $p_t = p_t^*$. Os lucros são maximizados a $p_i = p_t^*$:

$$F(p_i - p_t^*) = F(p_i, p_t^*) + F'(p_i, p_t^*) + \frac{(p_i, p_t^*)^2}{2} F''(p_i, p_t^*)^2 + 0(p_i, p_t^*)^3$$

$$F(p_i, p_t^*) \cong F(p_i, p_t^*) - k(p_i, p_t^*)^2, k > 0 \tag{8.12}$$

Esta análise implica que o problema de escolha de P_i que maximiza A pode ser simplificado

$$Min \sum_{t=0}^{\infty} q_t (p_i - p_t^*)^2 \tag{8.13}$$

Condição de primeira ordem para p_i

$$\sum_{t=0}^{\infty} 2q_t (p_i - p_t^*) = 0$$

$$2p_i \sum_{t=0}^{\infty} q_t = 2 \sum_{t=0}^{\infty} q_t p_t^*$$

$$p_i = \frac{\sum\limits_{t=0}^{\infty} q_t p_t^*}{\sum\limits_{t=0}^{\infty} q_t} \tag{8.14}$$

$p_i = \sum\limits_{t=0}^{\infty} w_t p_t^* (4)$ onde $w_t = \frac{q_t}{\sum\limits_{t=0}^{\infty} q_t}$

w_t = Probabilidade de que o preço que a firma estabelece no período zero estará e, vigor no período t dividido pelo número esperado de períodos que o preço estará em vigor. $\sum\limits_{t=0}^{\infty} q_t$. A equação (14) significa que o preço que a firma i estabelece é uma média ponderada do preço maximizante do lucro: durante o tempo que o preço estará em vigor. Sob incerteza, as firmas estabelecem seus preços com base nas expectativas dos $p_t^* s$:

$$p_i = \sum_{t=0}^{\infty} w_t E_0[p_t^*] \tag{8.15}$$

O preço real que maximiza o lucro da firma é:

$$\frac{P^*}{P} = \frac{n}{n-1} . \frac{w_t}{P_t}$$

Da equação (6) temos que:

$$\frac{W_t}{P_t} = \beta y_t^{(\theta+\gamma)-1}$$

Logo:

$$\frac{P^*}{P} = \frac{n}{n-1} B y_t^{\theta+\gamma-1}$$

Aplicando ln e denotando por letras minusculas:

$$p^* = p + ln\left[\frac{n}{n-1}\right] + b + (\theta + \gamma - 1)y \tag{8.16}$$

$$b = lnB$$

$$w_t = lnW_t$$

$$y_t = lny_t$$

$$p^* = p + c + \phi y \ \phi > 0,$$

Assumindo que:

$$m = p + y$$

$$\phi = \theta + \gamma - 1$$

$$ln\left[\frac{n}{n-1}\right] + b = 0$$

Temos:

$$p^* = p + \phi y$$

$$p^* = p + \phi(m - p)$$

$$p^* = p + \phi m - \phi p$$

$$p^* = \phi = (1 - \theta)p + \phi m \quad (8.17)$$

(17) em (15):

$$p^* = \sum^{\infty} W_t E\left[\phi m_t + (1 - \phi)\, p_t\right] \quad (8.18)$$

Essa é a equação chave do modelo.

Banco Central

Assume-se a trajetória de m_t como dada. BC tem um alvo para m_t e conduz a PM para alcançar este alvo. O Banco central usa uma regra de Taylor para a PM.

8.1 Modelo de Fisher

Suposições:

Cada firma escolhe seu preço no período zero estabelecendo um preço para o período 1 e o preço para o período 2. Metade das firmas estão estabelecendo preços para os próximos 2 períodos de acordo com o esquema:

$$t - 2 \to t - 1 \to t \to t + 1 + t + 2 \ldots$$

Em cada período (qualquer ponto) metade dos preços em vigor são aqueles estabelecidos no período anterior e metade são aqueles estabelecidos dois períodos antes. A informação sobre m_t pode ser revelada gradualmente. Ex: $E_{t-1}[m_t]$ pode ser diferente de $E_{t-2}[m_t]$

8.1.1 Solução do Modelo

o preço médio é:

$$p_t = \frac{1}{2}(p_t^1 + p_t^2) \tag{8.19}$$

onde:
pt^1= preço estabelecido para t por firmas que estabeleceram seus preços em $t-1$
pt^2= preço estabelecido para t por firmas que estabeleceram seus preços em $t-2$

$$pt^1 = E_{t-1}\left[\phi m_t + (1-\phi)p_t\right]$$

A expectativa de $p_t^{i^*}$ em *t-1* . Usando (19):

$$pt^1 = \phi E_{t-1}m_t + (1-\phi)\frac{1}{2}(pt^1 + pt^2) \ (20)$$

$$pt^2 = E_{t-2}\left[\phi m_t + (1-\phi)p_t\right]$$

$$pt^2 = E_{t-2}\left[\phi m_t = (1-\phi)\frac{1}{2}(pt^1 + pt^2)\right] \ (21)$$

Objetivo: Descobrir como os níveis de preço e de produto evoluem no tempo, dado o comportamento de m. Resolvendo (20) para pt^1:

$$pt^1 = \phi E_{t-1}m_t + (1-\phi)\frac{1}{2}pt^1 + (1-\phi)\frac{1}{2}pt^2$$

$$pt^1 - (1-\phi)\frac{1}{2}pt^1 = pt^1 = \phi E_{t-1}m_t + (1-\phi)\frac{1}{2}pt^2$$

$$pt^1(0,5 + \frac{\phi}{2}) = \phi E_{t-1}m_t + (1-\phi)\frac{1}{2}pt^2$$

$$pt^1 = \frac{2}{1+\phi}\left[\phi E_{t-1}m_t + (1-\phi)\frac{1}{2}pt^2\right] \ (22)$$

$$pt^1 = \frac{\phi}{1+\phi}2E_{t-1}m_t + \frac{(1-\phi)}{1+\phi}E_{t-2}\left[pt^2\right] \ (23)$$

Usando que$E_{t-2}pt^1 = pt^2$ e a lei das projeções repetidas. Inserindo (23) em (21):

$$pt^2 = \phi E_{t-2}m_t + (1-\phi)\frac{1}{2}(\frac{2\phi}{1+\phi}E_{t-2}m_t + \frac{1-\phi}{1+\phi}pt^2 + pt^2) \ (24)$$

$$pt^2 = \phi E_{t-2}m_t + \frac{(1-\phi)}{1+\phi}\phi E_{t-2}m_t + \frac{(1-\phi)^2}{2(1+\phi)}pt^2 + \frac{(1-\phi)}{2}pt^2$$

$$\left[1 - \frac{(1-\phi)^2}{2(1+\phi)} - \frac{(1-\phi)}{2}\right] pt^2 = \frac{\phi(1+\phi) + (1-\phi)\phi}{1+\phi} E_{t-2}m_t$$

$$\left[\frac{2 + 2\phi - (1 - 2\phi + \phi^2) - 1 + \phi - \phi + \phi^2}{2(1+\phi)}\right] pt^2 = \frac{2\phi}{1+\phi} E_{t-1}m_t$$

$$\frac{4\phi}{2(1+\phi)} pt^2 = \frac{2\phi}{2+\phi} E_{t-2}m_t$$

$$pt^2 = E_{t-2}m_t (25)$$

Inserindo (25) em (22):

$$pt^2 = \frac{2\phi}{1+\phi} E_{t-1}m_t + \frac{1-\phi}{1+\phi} E_{t-2}m_t$$

$$(1+\phi)pt^1 = 2\phi E_{t-1}m_t + E_{t-2}m_t - \phi E_{t-2}m_t - \phi E_{t-2}m_t$$

$$(1+\phi)pt^1 = 2\phi E_{t-1}m_t + E_{t-2}m_t - \phi E_{t-2}mt + \phi E_{t-2}m_t - \phi E_{t-2}m_t$$

$$(1+\phi)pt^1 = 2\phi E_{t-1}m_t + E_{t-2}m_t - 2\phi E_{t-2}m_t + \phi E_{t-2}m_t$$

$$pt^1 = \frac{2\phi}{(1+\phi)} \left[E_{t-1}m_t - E_{t-2}m_t\right] + E_{t-2}m_t \ (26)$$

(25) e (26) em (19) :

$$p_t = \frac{1}{2}\left[E_{t-2}m_t + \frac{2\phi}{1+\phi}(E_{t-1}m_t - E_{t-2}m_t) + E_{t-2}m_t\right]$$

$$2p_t = E_{t-2}m_t + \frac{2\phi}{1+\phi}(E_{t-1}m_t E_{t-2}m_t) + E_{t-2}m_t$$

$$2p_t = 2E_{t-2}m_t + \frac{2\phi}{1+\phi}(E_{t-1}m_t E_{t-2}m_t)$$

$$p_t = E_{t-2}m_t + \frac{\phi}{1+\phi}(E_{t-1}m_t - E_{t-2}m_t) \ (27)$$

De $y_t = m_t - p_t$

$$y_t = m_t - \left[E_{t-2}m_t + \frac{\phi}{1+\phi}(E_{t-1}m_t - E_{t-2}m_t)\right]$$

$$y_t = m_t - E_{t-2}m_t - \frac{\phi}{1+\phi}E_{t-1}m_t + \frac{\phi}{1+\phi}E_{t-2}m_t$$

$$(1+\phi)y_t = (1+\phi)m_t - (1+\phi)E_{t-2}m_t - \phi E_{t-1}m_t + \phi E_{t-2}m_t$$

Soma de ambos lados$E_{t-1}m_t$

$$(1+\phi)y_t = (E_{t-1}m_t - E_{t-2}m_t)1 + (1+\phi)[m_t - E_{t-1}m_t]$$

$$y_t = \frac{1}{1+\phi}(E_{t-1}m_t - E_{t-2}m_t) + (m_t - E_{t-1}m_t)$$

Implicações

1. Surpresa inflacionária tem efeitos reais e afeta y_t na produção de 1 para 1.
2. Parte da informação disponível sobre mt em $t-2$ e $t-1$ afeta y_t e p_t na proporção de $\frac{1}{1+\phi}$ e $\frac{\phi}{1+\phi}$

Respectivamente

O parâmetro chave é ϕ rigidez real. Quanto menor a rigidez real (ϕ menor). Maior efeito s/y. Menor efeito s/p. O que determina ϕ:

$$\phi = (\gamma - 1) \text{ e } N = \frac{1}{\gamma - 1}$$

N - Elasticidade da oferta de trabalho

3. O modelo não fornece uma explicação para os efeitos persistentes dos movimentos na demanda agregada.

- Dados valores de $(E_t m_t - E_{t-2}m_t)$ e $(m_t - E_{t-1}m_t)$ y_t não depende de $E_{t-2}m_t$

8.2 Modelo de Taylor

As firmas estabelecem seus preços em t para t e *t+1* (preços fixos).

$$m_t = m_{t-1} + u_t(29)$$

$$u_t \sim N_{iid}(0, \theta^2)$$

Seja x_t = preços escolhidos pelas firmas de (15)

$$p_i = \sum_{t=0}^{\infty} w_t E_0 [pt^*]$$

$$x_t = \frac{1}{2}(p^*_{it} + E_t p^*_{it+1})$$

Usando

$$p^* = \phi m + (1-\phi)p$$

$$x_t = \phi m + (1-\phi)p$$

$$x_t = \frac{1}{2}\left\{[\phi m_t + (1-\phi)p_t] + [\phi E_t m_{t+1} + (1-\phi)E_t p_{t+1}]\right\}$$

$$x_t = \frac{1}{2}\left\{\left[\phi m_t + (1-\phi)\left[\frac{(x_t + x_{t+1}}{2}\right]\right] + \left[\phi m_t + \frac{(1-\phi)}{2} + (x_t + E_t x_{t+1}\right]\right\}$$

$$x_t = \frac{1}{2}\left\{\left[2\phi m_t + \frac{(1-\phi)}{2}\left[2x_t + x_{t-1} + E_t x_{t+1}\right]\right]\right\}$$

$$x_t = \phi m_t + \frac{1}{4}(1-\phi)(2x_t + x_{t-1} + E x_{t+1}) \ (31)$$

Resolvendo para x_t

$$x_t - \frac{1}{2}(1-\phi)x_t = \phi m_t + \frac{1}{4}(1-\phi)\left[x_{t-1} + E x_{t+1}\right]$$

$$\frac{x_t}{2}(1+\phi) = \phi m_t + \frac{1}{4}(1-\phi)\left[x_{t-1} + E x_{t+1}\right]$$

$$x_t = \frac{1}{1+\phi}[2m_t\phi + \frac{1}{2}(1-\phi)\left[x_{t-1} + E x_{t+1}\right]]$$

$$x_t = A(x_{t-1} + E_t x_{t+1}) + (1-2A)m_t \ (32)$$

$$A = \frac{1}{2}\frac{(1-\phi)}{1+\phi} \to 1 - \frac{2}{2}\frac{(1-\phi)}{1+\phi} \to \frac{2+\phi-1+\phi}{1+\phi} = \frac{2\phi}{1+\phi}$$

Métodos dos coeficientes indeterminados. Sugira um palpite para a forma funcional geral da solução, assuma que:

$$x_t = u + \lambda x_{t-1} + V m_t \ (33)$$

De (17)

$$p^*_t = \phi m_t + (1-\phi)p_t$$

$$p_t^* = p_t + \phi(m_t - p_t)$$

$$p_{it}^* = p_t + \phi y_t$$

Considere que $x_{t+1} = m_t = x_t$

$$u + \lambda m_t + V m_t = m_t \ (34)$$

Para (34) se manter $\lambda + V = 1$e $u = 0$. Assim (33) fica:

$$x_t = \lambda x_{t-1} + (1 - \lambda) m_t \ (35)$$

Adiantando 1 período

$$x_{t+1} = \lambda x_t + (1 - \lambda) m_{t+1}$$

$$E_t x_{t+1} = \lambda x_t + (1 - \lambda) E_t m_{t+1}$$

$$E_t x_{t+1} = \lambda x_t + (1 - \lambda) m_t \ (35\text{'})$$

$$E_t x_{t+1} = \lambda(\lambda x_{t-1} + (1 - \lambda) m_t) + (1 - \lambda) m_t$$

$$E_t x_{t+1} = \lambda^2 x_{t-1} + (1 - \lambda^2) m_t \ (36)$$

Inserindo (36) em (32):

$$x_t = A(x_{t-1} + E_t x_{t+1}) + (1 - 2A) m_t$$

$$x_t = A(x_{t-1} + \lambda^2 x_{t-1} + (1 - \lambda^2) m_t) + (1 - 2A) m_t$$

$$x_t = A\left[(1 + \lambda^2) x_{t-1}\right] + mt\left[(1 - 2A) + (1 - \lambda^2) A \ (37)\right]$$

Se as famílias acreditam que x_t é função linear de x_{t-1} e de m_t da mesma forma que em (35), essas equações (37) e (35) devem ser a mesma.

$$p/x_{t-1} \rightarrow A + A\lambda^2 = \lambda$$

$$p/m_t \to \Big[A(1-\lambda^2)+(1-2A)\Big]\, 1-\lambda \text{ (39)}$$

$$A - A\lambda^2 + 1 - 2A = 1 - \lambda$$

$$-A\lambda^2 - A + \lambda = 0$$

$$\lambda^2 A - \lambda + A = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4.A^2}}{2A}$$

$$A = \frac{1}{2}\frac{1-\phi}{1+\phi}$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-\frac{(1-\phi)^2}{(1+\phi)^2}}}{\frac{(1-\phi)}{(1+\phi)}}$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{(1+\phi)^2\,(1-\phi)\,^2}}{\frac{(1+\phi)^2}{\frac{1-\phi}{1+\phi}}}$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{4\phi}{(1+\phi)^2}}}{\frac{1-\phi}{1+\phi}}$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \frac{2}{1+\phi}\sqrt{\phi}}{\frac{1-\phi}{1+\phi}}$$

$$\lambda = 1 \pm \frac{2}{1-\phi}\sqrt{\phi}$$

$$\lambda_1 = 1 - \frac{2\sqrt{\phi}}{1-\phi} \to \frac{1-\phi-2\sqrt{\phi}}{1-\phi} = \frac{(1-\sqrt{\phi})^2}{1-\phi} \text{ (41)}$$

$$\lambda_2 = 1 - \frac{2\sqrt{\phi}}{1-\phi} = \frac{(1+\sqrt{\phi})^2}{1-\phi} \text{ (42)}$$

Usamos somente $\lambda = \lambda_1$,(quando $\lambda = \lambda_2$ a economia é instável) pois, neste caso, $\mid \lambda \mid < 1$ e a economia é estável. Agora iremos analisar o comportamento de y_t:

$$y_t = m_t - p_t \text{ e } p_t = \frac{(x_{t-1}+x_t)}{2}$$

$$y_t = m_t - \frac{1}{2}\left\{[\lambda x_{t-2} + (1-\lambda)m_{t-1}] + [\lambda x_{t-1} + (1-\lambda)m_t]\right\}$$

$$y_t = m_t - \left[\lambda\frac{1}{2}(x_{t-2} + x_{t-1}) + (1-\lambda)\frac{1}{2}(m_{t-1} + mt)\right] \quad (48)$$

Como $mt = m_{t-1} + u_t$ e $(x_{t-2} + x_{t-1})/2 = p + 1$

$$y_t = m_{t-1} + u_t - \left[\lambda p_{t-1} + (1-\lambda)\frac{1}{2}u_t + (1-\lambda)m_{t-1}\right]$$

$$y_t = m_{t-1} + u_t - \lambda p_{t-1} - (1-\lambda)m_{t-1} - (1-\lambda)\frac{1}{2}u_t$$

$$y_t = m_{t-1} + \frac{u_t}{2} - \lambda p_{t-1} - (1-\lambda)m_{t-1} + \frac{\lambda}{2}u_t$$

$$y_t = \lambda(m_{t-1} - p_{t-1}) + u_t + \frac{(1+\lambda)}{2}$$

$$y_t = \lambda y_{t-1} + (1+\lambda)\frac{u_t}{2} \quad (44)$$

A equação (44) é a equação de movimento do produto. Possíveis implicações do modelo:

- Como λ_1 é positivo se $(\phi < 1)$, choques para a demanda agregada têm efeito persistente no produto meso após todas as firmas terem alterado seus preços.
- A economia apresenta inércia para o nível de preço.
- No momento do choque $\left[1 + \frac{(1+\lambda)}{2}\right]$
- Nos períodos subsequentes $1 - \lambda$
- A fonte dos efeitos reais persistentes é novamente a relutância das firmas ajustarem seus prêmios relativos.

$$\phi = 1 \rightarrow \lambda = 0$$

$$y_t = \frac{1}{2}u_t$$

8.3 Modelo de Calvo

As mudanças nos preços surgem estocasticamente. Essas alterações seguem um processo de Poisson: A probabilidade que uma firma é capaz de alterar seu preço é a mesma a cada período, independentemente de quando ela foi capaz de alterá-lo pela última vez. Os preços são fixos entre as vezes que eles são ajustados. Seja $\alpha \in]0,1[$ é fração das firmas (escolhidas aleatoriamente) que estabelecem maiores preços.

Assim:

$$p_t = \alpha x_t + (1-\alpha)p_{t-1}$$

Onde:

p_t: preço médio no período t

x_t: preço médio cobrado pelas firmas que estabelecem preços novos em t.

p_{t-1}: o preço médio cobrado pelas firmas que não alteram seus preços .

Subtraindo-se p_{t-1} de ambos os lados:

$$p_t - p_{t-1} = \alpha x_t + (1-\alpha)p_{t-1} - p_{t-1}$$

$$\pi_t = \alpha(x_t - p_{t-1}) \ (54)$$

A inflação é determinada pela fração de firmas que alteram seus preços. Estendendo a equação (7.14): $p_i = \sum\limits_{t=0}^{\infty} w_t p_t^*$,onde $w_t = q_t / \sum\limits_{t=0}^{\infty} q_t$, para o caso de um fator de desconto (aproximadamente 1 em fator Taylor e Fisher), implica:

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta^j q^j}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta^k q_k} E_t p_{t+j}^* (55)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k q_k \rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} B^k (1-\alpha)^k$$

Onde:

β =fator de desconto

q_j = probabilidade que o preço ainda estará em vigor no período *t+j*.

A suposição Poisson implica que $q_j = (1-\alpha)^j$

$$x_t = [1-\beta(1-\alpha)] \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j (1-\alpha)^j E_t p_{t+j}^*$$

Devemos expressar x_t em termos de p_{t^*} e $E_t x_{t+1}$. As firmas podem estabelecer seus preços no período *t+1* e se defrontam com um problema similar. O produto t não é mais relevante e todos os outros períodos ganham proporcionalmente um peso maior.

$$x_t = [1-\beta(1-\alpha)] E_t p_t^* + \beta(1-\alpha) [1-\beta(1-\alpha)] \left[\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j (1-\alpha) E_t p_{t+1+j}^* \right]$$

$$x_t = [1-\beta(1-\alpha)]\, p_t^* + \beta(1-\alpha)E_t x_{t+1} \ (57)$$

Subtraindo p_t de ambos os lados e reescrevendo $x_t - p_t$ como $(x_t - p_{t-1}) - (p_t - p_{t-1})$

$$(x_t - p_{t-1}) - (p_t - p_{t-1}) = [1-\beta(1-\alpha)]\,(p_{t^*} - p_t) + \beta(1-\alpha)(E_t x_{t+1} - p_t)$$

Usando (54):

$$\frac{\pi_t}{\alpha} = (x_t - p_{t-1})$$

Tomando a expectativa em *t+1*:

$$E_t\pi_{t+1} = \alpha(Ex_{t+1} - Ep_t)$$

Usaremos $\frac{E_t\pi_{t+1}}{\alpha}$ e o fato que $p_t - p_{t-1} = \pi_t$ e que $p_{t^*} - p_t = \phi y_t$

$$\frac{\pi_t}{\alpha} - \pi_t = [1-\beta(1-\alpha)]\phi y_t + \beta(1-\alpha)\left[\frac{E_t\pi_{t+1}}{\alpha}\right]$$

$$\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\pi_t = [1-\beta(1-\alpha)]\,\phi y_t + \beta\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\,[E_t\pi_{t+1}]$$

$$\pi_t = \left[\frac{\alpha}{1-\alpha}\,[1-\beta(1-\alpha)\phi]\, y_t + \beta E_t\pi_{t+1}\right]$$

$$\pi_t = ky_t + \beta E_t\pi_{t+1}$$

Agrega o comportamento das *price-sitters* com as possíveis barreiras para ajustar preços. Essa é a Curva de Phillips Novo-Keynesiana. Por quê nova?

1. Micro fundamentada

2. $E_t\pi_{t+1}$- Inclui as expectativas de inflação futura

8.4 Preço Estado Dependência

As firmas alteram seus preços livremente em resposta a eventos econômicos. Estudaremos um modelo com ajustamento lento de preços e inércia inflacionária.

8.4.1 Modelo de Christiano, Eichebaum e Evans

- Processo de Poisson $\alpha =$ fração de firmas que revisam seus preços

- Os preços são indexados (não são fixos) a taxa de inflação do período anterior.

- O preço médio (em t) das firmas que não revisam seus preços do período anterior
- O preço médio (em t) das firmas que não revisam seus preços é dado por: p_{t-1}+π_{t-1} (em log)

O preço médio em t é portanto:

$$p_t = (1-\alpha)(p_{t-1} + \pi_{t-1}) + \alpha X_t \text{ (68)}$$

Onde:
X_t = Preço estabelecido pelas firmas que revisam seus preços

$$X_t - p_t = X_t - [(1-\alpha)(p_{t-1} + \pi_{t-1}) + \alpha X_t]$$

$$X_t - p_t = (1-\alpha)X_t - (1-\alpha)(p_{t-1} + \pi_{t-1})$$

$$X_t - p_t = (1-\alpha)(X_t - p_t) - (1-\alpha)(p_{t-1} + \pi_{t-1} - p_t)$$

$$X_t - p_t = (1-\alpha)(X_t - p_t) - (1-\alpha)(-\pi_t + \pi_{t-1}) \text{ (69)}$$

$$X_t - p_t = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}(\pi_t - \pi_{t-1}) \text{ (70)}$$

Seja $e_{t,t+j}$ a diferença entre o preço que maximiza o lucro e o preço atual t+j é dada por:

$$e_{t,t+j} = (p_t - X_t) + \pi_{t+j} - \pi_t) + \phi y_{t+j} \text{ (71)}$$

Onde (71) se mantém para todo $j \geq 0$ .Similarmente a equação (56) do modelo de Calvo, sem indexação:
β =fator de desconto
$(1-\alpha)$= Probabilidade de não ajustamento de preços a cada período de (72)

$$X_t - p_{t+1} = [1-\beta(1-\alpha)] \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j (1-\alpha)^j [(E_{t+1} + \pi_{t+j} - \pi_{t+1}) + \phi E_{t+1} y_{t+1+j}]$$

Tomando a expectativa em t a e usando $\pi_{t+1} = \pi_t + (\pi_{t+1}$- $\pi_t)$

$$E_t[x_{t+1} - p_{t+1}] = [1-\beta(1-\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j (1-\alpha)^j E[(E_{t+1} + \pi_{t+j} - (\pi_t - (\pi_{t+1} - \pi_t) + \phi E_t y_{t+1+j}] \text{ (74)}$$

$$E_t[x_{t+1} - p_{t+1}] = -E(\pi_{t+1} - \pi_t) + [1 - \beta(1 - \alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j (Et\pi_{t+1+j} - E\pi_t) + Ey_{t+1+j}] \quad (74')$$

De (72):

$$X_t - p_t = [1 - \beta(1 - \alpha)]\beta^j (1 - \alpha)^j [(E_t + \pi_{t+j} - \pi_t) + \phi E_t y_{t+j}]$$

$$X_t - p_t = [1 - \beta(1 - \alpha)]\phi y_t + \beta(1 - \alpha) \left\{ [1 - \beta(1 - \alpha) \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j (1 - \alpha)^j [(E_t \pi_{t+1+j} - \pi_t) + \phi E_t y_{t+1+j}] \right\}$$

Usando (74)'

$$X_t - p_t = [1 - \beta(1 - \alpha)]\phi y_t + \beta(1 - \alpha) \left\{ E_t[X_{t+1} - p_{t+1}] + E_t[\pi_{t+1} - \pi_t] \right\} \quad (75)$$

De (70)

$$X_t - p_t \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} (\pi_t - \pi_{t-1})$$

$$E_t[X_{t+1} - p_{t+1}] = \left[\frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \right] (E_t[\pi_{t+1}] - \pi_t)$$

Substituindo essas expressões em (75) e desenvolvendo a álgebra

$$\frac{(1 - \alpha)}{\alpha} (X_t - p_{t-1}) = a + \beta(1 - \alpha) \left\{ \left[\frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \right] (E_t[\pi_{t+1}] - \pi_t) + E_t[\pi_{t+1} - \pi_t] \right\}$$

Onde

$$a = [1 - \beta(1 - \alpha)]\phi y_t$$

$$\left[\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right] \pi_t - \left[\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right] \pi_{t-1} = a + \beta(1 - \alpha) \left[\frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \right] E_t[\pi_{t+1}] - \beta(1 - \alpha) \left[\frac{(1 - \alpha)}{\alpha} \right] \pi_t + \beta(1 - \alpha) E_t[\pi_{t+1} - \pi_t]$$

$$\left(\left[\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right] + (1 - \alpha)\beta \left[\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right] + \beta(1 - \alpha) \right) \pi_t = a + \left[\left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) \right] \pi_{t-1} + \beta(1 - \alpha) E_t [\pi_{t+1}] \left[\left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) + 1 \right]$$

$$\left(\frac{(1-\alpha)+\beta(1-\alpha)^{\alpha}+\alpha\beta(1-\alpha)}{\alpha}\right)\pi_t = a + \left[\frac{(1-\alpha)}{\alpha}\right]\pi_{t-1} + \beta(1-\alpha)E_t\left[\pi_{t+1}\right]\left[\frac{1}{\alpha}\right]$$

$$[(1-\alpha)(1+\beta(1-\alpha)+\alpha\beta)]\pi_t = \alpha a + (1-\alpha)\pi_{t-1} + \beta(1-\alpha)E\pi_{t+1}$$

$$[(1-\alpha)(1+\beta]\pi_t = \alpha a + (1-\alpha)[\pi_{t-1} + \beta E\pi_{t+1}]$$

$$[(1+\beta)]\pi_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}a + \pi_{t-1} + \beta E\pi_{t+1}$$

$$\pi_t = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{1+\beta}a + \pi_{t-1} + \frac{\beta}{1+\beta}E\pi_{t+1}$$

$$\pi_t = \chi y_t + \left(\frac{\pi_{t-1}}{1+\beta} + \frac{\beta}{1+\beta}E\pi_{t+1}\right)$$

A equação acima é a Curva de Phillips Novo Keynesiana com indexação.

CURVA DA DESINFLAÇÃO

Se $\beta = 1$

$$\pi_t = \chi y_t + \frac{\pi_{t-1}}{\alpha} + \frac{E\pi_{t+1}}{\alpha}$$

Suponha uma desinflação gradual, perfeitamente antecipada que ocorre a uma taxa uniforme

$$\pi_t = \pi_0 \text{ para } t \leq 0$$

$$\pi_t = 0 \text{ para } t \geq T$$

$$\pi_t = (1 - t/T)\,\pi_o \text{ para } 0 < t < T$$

$$\chi y_t = \pi_t - \left(\frac{\pi_{t-1}}{\alpha} - E_t\frac{[\pi_{t+1}]}{\alpha}\right)$$

Em $t = 0$

$$\chi y_t = \pi_0 - \left(\frac{\pi_{-1}}{\alpha} - E_t\frac{[\pi_1]}{\alpha}\right)$$

Em T,

$$\chi y_t = 0$$

$$\pi_t = \frac{1}{2}(\pi_{t-1} - E_t[\pi_{t+1}])$$

Não há custo sistemático em termos de produto com uma desinflação antecipada . Se $\beta < 1$

$$\chi y_t = \pi_t - \frac{1}{1+\beta}\pi_{t-1} - \frac{\beta}{1+\beta}E_t\pi_{t+1} \text{ (76)}$$

Existem custos em termos de produto. Generalizando (76) para:

$$\chi y_t = \pi_t - \gamma\pi_{t-1} - (1-\gamma)E_t\pi_{t+1} \text{ (77)}$$

com $\gamma \in [0,1]$. A equação (77) permite qualquer combinação de pesos nos dois termos de inflação. Por implicarem que a inflação passada tem um impacto direto sobre a inflação corrente e, portanto, que há inércia da inflação, expressões como (76) e (77) costumam aparecer em modelos modernos de equilíbrio geral estocástico dinâmico com rigidez nominal.

8.5 Modelo Padrão Novo-Keynesiano

$$y_t = E_t[y_{t+1}] - \frac{1}{\theta}r_t + u_t^{IS}, \theta > 0 \text{ Curva IS Novo Keynesiana (84)}$$

$$\pi_t = \beta E_t[\pi_{t+1}] + Ky_t + u_t^{\pi}, 0 < \beta < 1, k > 0 \text{ (85) Curva de Phillips}$$

$r_t = \phi_r E_t[\pi_{t+1}] + \phi_y E_t[y_{t+1}] + u_t^{MP}, \phi r > 0, \phi, y > 0$ regra da taxa de juros Forward Looking

Os choques seguem um processo *AR(1)*:

$$u_t^{IS} = \rho_{is}u_{t-1}^{IS} + e_t^{IS}, -1 < \rho_{is} < 1 (87)$$

$$u_t^{\pi} = \rho_{\pi}u_{t-1}^{\pi} + e_t^{\pi}, -1 < \rho_{\pi} < 1 (88)$$

$$u_t^{MP} = \rho_{MP}u_{t-1}^{MP} + e_t^{MP}, -1 < \rho_{MP} < 1 (89)$$

Onde e^{IS}, e^{π} e e^{MP}são ruídos branco e não são correlacionados.

8.5.1 Solução Fundamental

$$y_t = E[y_{t+1}] - \frac{1}{\theta}[\phi_r E_t[\pi_{t+1}] + \phi_y E_t[y_{t+1}] + u_t^{MP}] + u_t^{IS}$$

$$y_t = E_t[y_{t+1}] - \frac{\phi_\pi}{\theta} Et[\pi_{t+1}] - \frac{\phi_y}{\theta} E_t[y_{t+1}] + \frac{u_t^{MP}}{\theta} + u_t^{IS}$$

$$y_t = \left[\frac{\theta - \phi_y}{\theta}\right] E[y_{t+1}] + \frac{1}{\theta}\left(-u_t^{MP} - \phi_\pi E[\pi_{t+1}]\right) + u_t^{IS} \quad (90)$$

Inserindo (90) em (85)

$$\pi_t = \beta E_t[\pi_{t+1}] + k y_t + u_t^\pi$$

$$\pi_t = \beta E_t[\pi_{t+1}] + k\left[\left(\frac{\theta - \phi_y}{\theta}\right) E[y_{t+1}] + \frac{1}{\theta}[-u_t^{MP} - \phi_\pi E[\pi_{t+1}] + u_t^{IS}\right] + u_t^\pi$$

$$\pi_t = Et[\pi_{t+1}] + \left[\frac{\theta\beta - \phi_\pi k}{\theta}\right] + E\left[y_{t+1}\right]\left[\frac{k}{\theta}(\theta - \phi_y)\right] + u_t^\pi - \frac{k}{\theta}u_t^{MP} + k u_t^{IS}$$

Impondo que não há correlação serial entre os choques: $\rho_\pi = \rho_{IS} = \rho_{IS} = 0$ (não existe correlação serial nos choques) e $E_t[y_{t+1}] = E[\pi_{t+1}] = 0$, pois não existem elementos Backward-Looking. Não existe informação sem valores futuros dos choques. Usando essas simplificações nas equações do modelo teremos:

$$y_t = u_t^{IS} - \frac{1}{\theta}u_t^{MP}$$

$$\pi_t = k u_t^{IS} + u_t^\pi - \frac{k}{\theta}u_t^{MP}$$

$$r_t \quad = \quad u_t^{MP}$$

Exemplos de Choques:
$\uparrow u_t^{MP}$ = Política monetária contracionista
$\uparrow u_t^{IS}$ = Choque positivo na demanda privada
$\uparrow u_t^{\pi}$ = Choque de oferta desfavorável

8.5.2 Caso Geral

- Métodos dos coeficientes indeterminados;
- Estrutura linear do modelo ;

- Ausência de comportamento Backward-Looking;

$$y_t = a_{IS}u_t^{IS} + a_\pi u_t^\pi + a_{MP}u_t^{MP}$$

$$\pi_t = b_{IS}u_t^{IS} + b_\pi u_t^\pi + b_{MP}u_t^{MP}$$

Adiantando um passo a frente, inserindo (87) e (89) e tomando as expectativas:

$$E_t[y_{t+1}] = a_{IS}\rho_{IS}u_t^{IS} + a_\pi\rho_\pi u_t^\pi + a_{MP}\rho_{MP}u_t^{MP}$$

$$E_t[\pi_{t+1}] = b_{IS}\rho_{IS}u_t^{IS} + b_\pi\rho_\pi u_t^\pi + b_{MP}\rho_{MP}u_t^{MP}$$

Equação (90):

$$y_t = -\frac{\phi}{\theta}E[\pi_{t+1}] + (\frac{\theta - \phi_y}{\theta})E_t[y_{t+1}] + u_t^{IS} - \frac{1}{\theta}u_t^{MP}$$

Inserindo (95), (95)' e (96)':

$$\begin{gathered} a_{IS}\rho_{IS}u_t^{IS} + a_\pi\rho_\pi u_t^\pi + a_{MP}\rho_{MP}u_t^{MP} = -\tfrac{\phi_\pi}{\theta}\left[b_{IS}\rho_{IS}u_t^{IS} + b_\pi\rho_\pi u_t^\pi + b_{MP}\rho_{MP}u_t^{MP}\right] \\ + \left(\tfrac{\theta-\phi_y}{\theta}\right)\left[a_{IS}\rho_{IS}u_t^{IS} + a_\pi\rho_\pi u_t^\pi + a_{MP}\rho_{MP}u_t^{MP}\right] + u_t^{IS} - \tfrac{1}{\theta}u_t^{MP} \end{gathered} \tag{97}$$

Equação (91):

$$\pi_t = -\beta\left(\frac{\phi_\pi k}{\theta}\right)E_t\left[\pi_{t+1}\right] + \left(\frac{\theta - \phi_y}{\theta}\right)E_t[y_{t+1}] + ku_t^{IS} + u_t^\pi - \frac{k}{\theta}u_t^{MP}$$

Inserindo (96),(95') e (96'):

$$\begin{gathered} b_{IS}\rho_{IS}u_t^{IS} + b_\pi\rho_\pi u_t^\pi + b_{MP}\rho_{MP}u_t^{MP} = \left(-\beta - \left(\tfrac{\phi_\pi}{\theta}k\right)\right)\left(b_{IS}\rho_{IS}u_t^{IS} + b_\pi\rho_\pi u_t^\pi + b_{MP}\rho_{MP}u_t^{MP}\right) \\ + \left(\tfrac{\theta+\phi_y}{\theta}\right)\left(a_{IS}\rho_{IS}u_t^{IS} + a_\pi\rho_\pi u_t^\pi + a_{MP}\rho_{MP}u_t^{MP}\right) + ku_t^{IS} + u_t^\pi - \tfrac{k}{\theta}u_t^{MP} \end{gathered} \tag{98}$$

Os dois lados de (98) e (97) devem ser iguais para u_t^{IS}, u_t^π e u_t^{MP} :

$$u_t^{IS} : a_{IS} = -\frac{\phi r}{\theta}b_{IS}\rho_{IS} + \left(\frac{\theta - \phi_y}{\theta}\right)a_{IS}\rho_{IS} + 1 \text{ (A1)}$$

$$u_t^{IS} : b_{IS} = \left(\beta - \frac{\phi\pi}{\theta}k\right)b_{IS}\rho_{IS} + \left(\frac{\theta - \phi_y}{\theta}\right)a_{IS}\rho_{IS} + k \text{ (A1.2)}$$

$$u_t^\pi : a_\pi = -\frac{\phi r}{\theta}b_\pi\rho_\pi + \left(\frac{\theta - \phi_y}{\theta}\right)a_\pi\rho_\pi \text{ (A2)}$$

$$u_t^{\pi} : b_{\pi} = \left(\beta - \frac{k\phi_{\pi}}{\theta}\right) b_{\pi}\rho_{\pi} + \left(\frac{\theta - \phi y}{\theta}\right) a_{\pi}\rho_{\pi} + 1 \text{ (A2.2)}$$

$$u_t^{MP} : a_{MP} = -\frac{\phi r}{\theta} b_{MP}\rho_{MP} + \left(\frac{\theta - \phi_y}{\theta}\right) a_{MP}\rho_{MP} - \frac{1}{\theta} \text{ (A3)}$$

$$u_t^{MP} : b_{MP} = \left(\beta - \frac{k\phi_{\pi}}{\theta}\right) b_{MP}\rho_{MP} + \left(\frac{\theta - \phi_y}{\theta}\right) a_{MP}\rho_{MP} - \frac{k}{\theta} \text{ (A3.2)}$$

9 Inflação e Política Monetária

9.1 Inflação, Crescimento da Moeda e Taxa de Juros

Condição de Equilíbrio, caso monetário

$$\frac{M}{P} = L(i, y) \tag{9.1}$$

$$P = \frac{M}{L(i, y)} \tag{9.2}$$

y = renda real
M = estoque de moeda
P = nível de preços
L(.) = Função demanda por moeda

Fontes Potenciais da Inflação

- Aumento na oferta de moeda
- Aumento na taxa de juros
- Diminuição do produto real
- Diminuição na demanda por moeda dados i e y

Entendimento da inflação no longo prazo - Crescimento da oferta de moeda

9.1.1 Crescimento da Moeda e da Taxa de Juros

Por definição: $r = i - \prod^e$ ou $i = r + \prod^e$ (identidade de Fisher)

- Inserindo a identidade na equação (2)

$$P = \frac{M}{L(\bar{r} + \prod^e, \bar{y})} \tag{9.3}$$

- Suponha em t_0 um "momento" onde o crescimento da moeda é "permanente"

- Mudanças na inflação esperada é refletida de um para um na taxa de juros (Efeito Fisher)
- Reduz o estoque de moeda
- A política monetária que é consistente com uma permanente queda na inflação é um repentino aumento na oferta de moeda seguido por um baixo crescimento
- COM INCOMPLETA FLEXIBILIDADE DE PREÇOS - Efeito imediato de uma expansão monetária é baixar a taxa nominal de juros no curto prazo (EFEITO LIQUIDEZ)

9.2 Política Monetária e a Estrutura da Taxa de Juros

9.2.1 Teoria das expectativas da estrutura a termo

- Na ausência de incerteza o equilíbrio requer:

$$l_t^n = \frac{l_t^1 + l_{t+1}^1 + ... + l_{t+n-1}^1}{n} \tag{9.4}$$

A taxa de juros do título de longo prazo (it^n) deve ser igual a média das taxas dos títulos de curto prazo.

Com Incerteza

$$l_t^n = \frac{l_t^1 + E_t l_t^1 + ... + E_t l_{t+n-1}^1}{n} + \theta nt \tag{9.5}$$

onde:

θ= prêmio para manter o título no LP

Nas expectativas das taxas de juros futuras: Uma expansão monetária é provável que as taxas de juros se reduzam no curto prazo, mas aumentem no longo prazo.

9.3 Fundamentação microeconômica das políticas de estabilização

- O objetivo final do policy-maker deveria ser a maximização do bem-estar
- Discussão sobre como a inflação e o produto afetam o bem-estar não é obvia

Custos da Inflação

- Benefícios da Inflação: Argumento a favor
- Estabilização do produto: Argumento contra
- Como a política monetária deveria ser conduzida

9.4 Política Monetária Ótima: Modelo de Backward-Looking

$$y_t = -\beta r_{t-1} + u_t^{IS}, \beta > 0 \text{ (15)}$$

$$\Pi_t = \Pi_{t-1} + \alpha\left(y_{t-1} - y_{t-1}^n\right), \alpha > 0 \text{ (16)}$$

$$u_t^{IS} = \rho_{IS} u_{t-1}^{IS} + \varepsilon_t^{IS}, -1 < \rho_{IS} < 1 \text{ (17)}$$

$$y_t^n = \rho_Y y_{t-1}^n + \varepsilon_t^Y, 0 < p_y < 1 \text{ (18)}$$

y^n= Nível de produto com preço flexível
ε_t^{IS}= ruído branco i.i.d,
ε_t^y= ruído branco i.i.d

$$y_t^* - y_t^n = \Delta, \Delta \geq 0 \text{ (19)}$$

y^*= nível de produto Walrasiano. O BC escolhe r_t após observar u_t^{IS}e y_t^n e minimiza:

$$E\left[(y - y^*)^2\right] + \leftthreetimes E\left[\Pi^2\right]$$

Onde $\leftthreetimes$é o peso colocado pelo BC para a inflação. O modelo considera somente regras que são lineares nas variáveis que descrevem o estado da economia. Definir o "GAP" do produto como:

$$\tilde{y} = y - y^n \text{ ou } y = \tilde{y} + y^n$$

De (15):

$$\tilde{y}_t + y_t^n = -\beta r_{t-1} + u_t^{IS}$$

$$\tilde{y}_t = u_t^{IS} - (\beta r_{t-1} + y_t^n) \text{ (20)}$$

De (16):

$$\Pi_t = \Pi_{t-1} + \alpha\left(y_{t-1} - y_{t-1}^n\right), \alpha > 0$$

$$\Pi_t = \Pi_{t-1} + \alpha \tilde{y}_{t-1} \text{ (21)}$$

Observação: A escolha do BC para a r_t não impacta $\tilde{y}_t$, $\Pi_t$ou Π_{t-1}. Seu primeiro impacto é em $\tilde{y}_{t+1}$e assim em Π_{t+1}, Π_{t+2},...,$\tilde{y}_{t+2}$. Teremos uma regra para $E_t\tilde{y}_{t+1}$

De (20):

$$\tilde{y}_{t+1} = -\left(\beta r_t + y^n_{t+1}\right) + u^{IS}_{t+1} \text{ (20')}$$

De (17):

$$u^{IS}_{t+1} = \rho_{IS} u^{IS}_t + \varepsilon^{IS}_{t+1} \text{(17')}$$

De (18):

$$y^n_{t+1} = p_Y y^n_t + \varepsilon^Y_{t+1} \text{(18')}$$

(17') e (18') em (20)

$$\tilde{y}_{t+1} = -\left(\beta r_t + p_Y y^n_t + \varepsilon^Y_{t+1}\right) + p_{IS} u^{IS}_t + \varepsilon^{IS}_{t+1}$$

Tomando as expectativas:

$$E\left[\tilde{y}_{t+1}\right] = -\beta r_t + p_{IS} u^{IS}_t - p_Y y^n_t$$

Note que $E_t\left[y_{t+1}\right]$é determinado pela política monetária do BC em t. Sabemos que Π_{t+1}é conhecido em t, mas não é afetado pela política monetária do BC em t. A política ótima será $E_t\left[y_{t+1}\right]$como função de Π_{t+1}e toma a forma:

$$E_t\left[\tilde{y}_{t+1}\right] = -q\Pi_{t+1} \text{ (22)}$$

Objetivo: Determinar o valor de q^*. Encontrar $E\left[(y - \bar{y}^*)^2\right] + \lambda E\left[\Pi^2\right]$ como função de q.

De (20):

$$\tilde{y}_t = -\beta r_{t-1} + u^{IS}_t - y^n_t$$

$$E_t\left[\tilde{y}_t\right] = -\beta r_{t-1} + p_{IS} u^Y_{t-1} - p_y y^Y_{t-1}$$

$$\beta r_{t-1} = -p_Y y^Y_{t-1} - E_t\left[\tilde{y}_t\right] + p_{IS} u^{IS}_{t-1} \text{ (20')}$$

Inserindo em (20)

$$\tilde{y}_t = +p_y y^Y_{t-1} + E_t\left[\tilde{y}_t\right] - y^n - p_{IS} u^{IS}_{t-1} + u^{IS}_t$$

Por (23) :

$$E_t\left[\tilde{y}_t\right] = -q\Pi_t$$

$$p_y y^Y_{t-1} - y^n = -\varepsilon^Y_t$$

$$-p_{IS}u_{t-1}^{IS}+u_t^{IS}=\varepsilon_t^{IS}$$

$$\tilde{y}_t=-q\Pi_t+\varepsilon_t^{IS}-\varepsilon_t^{Y}$$

De (21):

$$\Pi_t=\Pi_{t-1}+\alpha\tilde{y}_{t-1}$$

$$\Pi_{t+1}=\Pi_t+\alpha\tilde{y}_t \text{ (23)}$$

$$\Pi_{t+1}=\Pi_t+\alpha\left(-q\Pi_t+\varepsilon_t^{IS}-\varepsilon_t^{Y}\right)$$

$$\Pi_{t+1}=\Pi_t\left(1-\alpha q\right)+\alpha\varepsilon_t^{IS}-\alpha\varepsilon_t^{Y} \text{ (24)}$$

Dada a estrutura linear do modelo e a suposição a qual os choques são i.i.d no longo do prazo e a distribuição de $\Pi_t$será constante no tempo e independente das condições iniciais da economia no Longo Prazo.

$$E\left[\Pi_t^2\right]=E\left[\Pi_{t+1}^2\right]$$

Portanto, resolvemos para $E\left[\Pi^2\right]$. Elevando ao quadrado:

$$\left(\Pi_{t+1}\right)^2=\left(\Pi_t\left(1-\alpha q\right)+\alpha\left(\varepsilon_t^{IS}-\varepsilon_t^{Y}\right)\right)^2$$

Tomando as expectativas

$$E\left[\Pi_{t+1}^2\right]=E\left[\Pi_t\left(1-\alpha q\right)+\alpha\left(\varepsilon_t^{IS}-\varepsilon_t^{Y}\right)\right]^{\alpha}$$

$$E\left[\Pi_t^2\right]=\left(1-\alpha q\right)^{\alpha}E\left[\Pi_t^{\alpha}\right]+\alpha^{\alpha}E\left[\left(\varepsilon_t^{IS}-\varepsilon_t^{Y}\right)^{\alpha}\right]$$

$$E\left[\Pi_t^2\right]=\frac{\alpha^2}{\left[1-\left(1-\alpha q\right)^2\right]}.\left[\sigma_Y^2+\sigma_{IS}^2\right]$$

Observe que $Y-Y^*=\left(y_t-y^n\right)-\left(y_t^*-y^n\right)$

$$y-y^*=\tilde{y}-\mathit{\Delta},\text{ já que por }(19)y_t^*-y_t^n=\Delta$$

Substituindo (23):

$$\tilde{y}_t = -q\mathit{\Pi}_t + \varepsilon_t^{IS} - \varepsilon_t^{Y}$$

$$Y_t - Y^* = -q\Pi_t + \varepsilon_t^{IS} - \varepsilon_t^{Y} - \Delta$$

(eleva ao quadrado - toma a expectativa - não há correlação - termos)

$$E\left[(y - y^*)^2\right] = \Delta^2 + q^2 E\left[\Pi^2\right] + \sigma_Y^2 + \sigma_{IS}^2 \text{ (26)}$$

Minimizar a Função Perda:

$$\min_{q^*} FP = \Delta^2 + q^2\left[\frac{\alpha^2}{1-(1-\alpha q)^2}\right]\left[\sigma_Y^2 + \sigma_{IS}^2\right] + \sigma_Y^2 + \sigma_{IS}^2 + \lambda\left[\frac{\alpha^2}{1-(1-\alpha q)^2}\right]\left(\sigma_Y^2 + \sigma_{IS}\right)$$

$$E\left[(y - \bar{y}^*)^2\right] + \lambda E\left[\Pi^2\right]$$

$$FP = \Delta^2 + q^2\left[\frac{\alpha^2}{2\alpha q - (\alpha q)^2}\right]\left[\sigma_Y^2 + \sigma_{IS}^2\right] + \sigma_Y^2 + \sigma_{IS}^2 + \lambda\left[\frac{\alpha^2}{\alpha q\,(2-\alpha q)}\right]\left(\sigma_Y^2 + \sigma_{IS}^2\right)$$

$$FP = \Delta^2 + q\left[\frac{\alpha^2}{2\alpha - \alpha q}\right]\left[\sigma_Y^2 + \sigma_{IS}^2\right] + \sigma_Y^2 + \sigma_{IS}^2 + \lambda\left[\frac{\alpha^2}{\alpha q\,(2-\alpha q)}\right]\left(\sigma_Y^2 + \sigma_{IS}\right)$$

Chamando $\theta = \left[\frac{\alpha^2}{\alpha q(2-\alpha q)}\right](\sigma_Y^2 + \sigma_{IS}^2)$

$$FP = \Delta^2 + q^2\theta + \sigma_Y^2 + \sigma_{IS}^2 + \lambda\theta$$

$$\frac{\partial FP}{\partial q} = 2q.\theta - q^2.\theta.\frac{(2\alpha - 2q\alpha^2)}{(\alpha q\,(2-\alpha q))} - \lambda\theta\frac{(2\alpha - 2q\alpha^2)}{\alpha q\,(2-\alpha q)} = 0$$

$$2q.\theta = \frac{\theta 2\alpha\,(1-\alpha q)}{(\alpha q\,(2-\alpha q))}.\left(q^2 + \lambda\right)$$

$$2q = \frac{2\,(1-\alpha q)}{(q\,(2-\alpha q))}.\left(q^2 + \lambda\right)$$

$$2q^2\,(2-\alpha q) = (2 - 2\alpha q)\,.\left(q^2 + \lambda\right)$$

$$4q^2 - 2\alpha q^3 = 2q^2 + 2\lambda - 2\alpha q^3 - 2\alpha q\lambda$$

$$2q^2 + 2\alpha q\lambda - 2\lambda = 0$$

$$q^2 + \alpha q\lambda - \lambda = 0$$

$$q = -\frac{\alpha\lambda \pm \sqrt{(\alpha\lambda)^2 + 4\lambda}}{\alpha}$$

$$q^* = -\frac{\alpha\lambda \pm \sqrt{(\alpha\lambda)^2 + 4\lambda}}{\alpha}$$

Desejamos apenas os valores positivos de q. O Banco Central sempre conduz a Política Monetária tal que o desvio do produto seja um ruído branco ao redor de zero $\tilde{y} = y - y^n$

De (16):

$$\Pi_t = \Pi_{t-1} + \alpha \left(y_{t-1} - y_{t+1}^n \right)$$

$$\Pi_t = \Pi_{t-1}, \Pi_{t+1} = \Pi_t, \Pi_{t+2} = \Pi_{t+1}$$

A inflação segue um caminho aleatório . Se $\lambda \uparrow \to q \uparrow$ (BC coloca mais peso na estabilização da inflação). Então o produto se afasta do seu nível natural.

$$\text{Se, } \lambda \to \infty\text{, então, } q^* = \frac{1}{\alpha}$$

$$E\left[y_{t+1}\right] = -q\Pi_{t+1}$$

$$E\left[\tilde{y}_{t+1}\right] = -\frac{\Pi_{t+1}}{\alpha}$$

$$\Pi_t = \Pi_{t-1} + \alpha \left(y_{t-1} - y_{t-1}^n \right)$$

$$\Pi_{t+1} = \Pi_t + \alpha \left(\tilde{y}_t \right)$$

$$\Pi_{t+2} = \Pi_{t+1} + \alpha \left(\tilde{y_{t+1}} \right)$$

$$E_t\left[\Pi_{t+2}\right] = E_t\left[\Pi_{t+1}\right] + \alpha E\left[\tilde{y}_{t+1}\right]$$

$$E_t\left[\Pi_{t+2}\right] = E_t\left[\Pi_{t+1}\right] - \alpha\frac{\Pi_{t+1}}{\alpha}$$

E por (26) a variância do produto não se aproxima do infinito. Svensson e Ball: A política ótima pode ser interpretada como tipo de "meta de inflação".

De (24):

$$\Pi_{t+1} = (1-\alpha q)\Pi_t$$

Se:

$$0 \leq q \leq \frac{1}{\alpha} \rightarrow 1 \geq (1-\alpha q) \geq 0$$

Assim a classe ótima de políticas consiste em regras para o comportamento da inflação esperada.

$$E_t\left[\Pi_{t+2}\right] = \phi\Pi_{t+1}, \phi = (1-\alpha q), 0 < \phi < 1$$

Uma regra para o comportamento esperado da inflação.

$$\text{Se } \lambda = \infty \rightarrow q = \frac{1}{\alpha} \rightarrow \phi = 0 \rightarrow E_t\left[\Pi_{t+2}\right] = 0$$

Então o BC é *strict inflation targeter*. Se λ é finito, ϕ está estritamente entre zero e 1. As políticas tomam forma de "metas de inflação flexíveis". Quando $\uparrow \lambda \rightarrow \downarrow \phi$ (A desinflação é rápida) Dessa forma, a regra do BC implica em se concentrar na taxa de juros.

Seja r^n a r que faz $y_{t+1} = y^n_{t+1}$ou $y_{t+1} = 0$

De (20)

$$\tilde{y}_t = -\beta r_{t-1} + u^{IS}_t - y^n_t$$

$$0 = -\beta r^n_{t-1} + u^{IS}_t - y^n_t$$

$$r^n_{t-1} = \frac{1}{\beta}\left(u^{IS}_t - y^n_t\right)$$

$$r^n_t = \frac{1}{\beta}\left(u^{IS}_{t+1} - y^n_{t+1}\right) \ (28)$$

$$\tilde{y}_t = -\beta\left(r_{t-1} - r^n_{t-1}\right)(30)$$

$$E\left[\tilde{y}_{t+1}\right] = -\beta\left(rt - E\left[r^n_t\right]\right)(31)$$

Inserindo (22) em (31) teremos:

$$-q\Pi_{t+1} = -\beta\left(rt - E\left[r_t^n\right]\right) \text{ (31')}$$

(22) $\rightarrow$(31)

$$\Pi_{t+1} = \Pi_t \alpha \tilde{y}_t$$

$$-q\left(\Pi_t + \alpha\tilde{y}_t\right) = -\beta r_t + \beta E\left[r_t^n\right]$$

$$r_t = \frac{q}{\beta}\left(\Pi_t + \alpha\tilde{y}_t\right) - E\left[r_t^n\right] \text{ (33)}$$

A regra ótima pode ser descrita como a regra para a taxa de juros.

9.5 Política Monetária Ótima: Modelo Forward- Looking

$$y_t = E_t\left[y_{t+1}\right] - \frac{1}{\theta}\left(i_t - E_t\left[\Pi_{t+1}\right]\right) + u_t^{IS}, \theta > 0 \text{ (34)}$$

Curva IS Novo Keynesiana

$$\mathit{\Pi}_t = \beta E_t\left[\Pi_{t+1}\right] + k\left(y_t - y_t^n\right), 0 < \beta < 1, k > 0 \text{ (35)}$$

Curva de Phillips Novo Keynesiana

Onde:

y^n= Nível de produto de preço flexível

$$u_t^{IS} = \rho_{IS} u_{t-1}^{IS} + \varepsilon_t^{IS}, -1 < p_{IS} < 1$$

$$y^n = p_Y y_{t-1}^n + \varepsilon_t^Y, -1 < p_Y < 1$$

$$\varepsilon_t^{IS} = \varepsilon_t^y \sim NID\left(0, \sigma^2\right)$$

Objetivo do BC:

- Minimizar o afastamento do produto de y^n
- Minimizar o afastamento da inflação do seu ótimo

Por (35). Se $y_t - y_t^n$e $E_t\left[\Pi_{t+1}\right]$ são zero. $\Pi_t = 0$ $\hookrightarrow$não existe conflito de objetivos

Formalmente:

Suponha que o BC conduz a política ta que $E_t[\Pi_{t+1}] = 0$

De (34):

$$y_t = E_t[y_{t+1}] - \frac{1}{\theta} i_t + u_t^{IS} \text{ (36)}$$

De (35):

$$\mathit{\Pi}_t = k(y_t - y_t^n) \text{ (37)}$$

Se o BC escolhe i_t tal que $y_t = y_t^n$ atinge ambos objetivos simultaneamente ⇒"Coincidência Divina"

9.5.1 Política Ótima

O BC deseja $y = y^n$ e $\Pi = 0$ a cada período. Portanto, ele quer:

,

$$y_t = y_t^n, E_t[y_{t+1}] = E_t\left[y_{t+1}^n\right] \text{ e } E_t[\Pi_{t+1}] = 0$$

Impondo essas condições em (34) temos:

$$\frac{1}{\theta}(i_t) = \left[E_t\left[y_{t+1}^n\right] - y_t^n\right] + u_t^{IS}$$

$$i_t = \theta\left[E_t\left[y_{t+1}^n\right] - y_t^n\right] + u_t^{IS}\theta$$

- Portanto, o BC deveria estabelecer $i_t = r_t^n$(38)

r_t= taxa de juros natural (a que prevaleceria no caso de preços flexíveis)

Problema:

- Equilíbrio "SUNSPOT" → Equilíbrio com crenças auto realizáveis, o que pode conduzir a inflação corrente e a esperada a afastamentos dos seus valores zero:
- Como evitá-lo?
- Seguir uma regra para a taxa de juros que coincida com (38) e que elimine o equilíbrio SUNSPOT

Defina: $\tilde{y} = y - y^n$e considere a regra como

$$i_t = r_t^n + \phi_\Pi E_t[\Pi_{t+1}] + \phi_y E_t[\tilde{y}_{t+1}] \text{ (39)}$$

Suponha $\phi_y = 0$ e $\phi_\Pi > 1$

Por (39), $E_t[\Pi_{t+1}] > 0$ requereria $i_t > r_t^n$. O "trato" para aumentar a taxa de juros em resposta ao aumento da inflação esperada previne o perigo disso ocorrer e então nunca precisaria ser implementado

Formalmente:

Suponha um modelo com uma variável, x_t

$$x_t = AE_t x_{t+1} \ (40)$$

A condição para eliminar o equilíbrio “SUNSPOT” é $|A| < 1$. No caso ondex_t é um vetor : os múltiplos equilíbrios são eliminados se os autovalores da matriz relacionando x_te $E_t x_{t+1}$estão “dentro do circulo unitário”. Admita que não existe choques e $\phi_y = 0$ (implica $r_t^n = 0$). De (39) temos que:

$$i_t = \phi_\Pi E_t \left[\Pi_{t+1}\right] \ (39')$$

(39’) →(34)

$$y_t = E_t \left[y_{t+1}\right] - \frac{1}{\theta}\left(i_t - E_t \left[\Pi_{t+1}\right]\right) + u_t^{IS}, \theta > 0$$

$$\tilde{y}_t = E_t \left[\tilde{y}_{t+1}\right] - \frac{1}{\theta}\left\{\left(\phi_\Pi E_t \left[\Pi_{t+1}\right] - E\left[\Pi_{t+1}\right]\right)\right\}$$

$$\tilde{y}_t = E_t \left[\tilde{y}_{t+1}\right] + E\left[\Pi_{t+1}\right]\frac{(1-\phi_\Pi)}{\theta} \ (34')$$

(34’) →(34)

$$\Pi_t = \beta E_t \left[\Pi_{t+1}\right] + k(y_t - y_t^n), 0 < \beta < 1, k > 0$$

$$\Pi_t = \beta E\left[\Pi_{t+1}\right] + k(E_t \left[\tilde{y}_{t+1}\right] + E\left[\Pi_{t+1}\right]\frac{(1-\phi_\Pi)}{\theta})$$

$$\Pi_t = kE_t \left[\tilde{y}_{t+1}\right] + \left[\frac{k\left(1-\phi_\Pi\right)}{\theta} + \beta\right] E\left[\Pi_{t+1}\right] \ (35')$$

(34’) e (35’) na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_t \\ \Pi_t \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} E_t\tilde{y}_t \\ E_t\Pi_{t+1} \end{bmatrix} \ (41)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-\phi_\Pi}{\theta} \\ k & \beta + k\left(\frac{1-\phi_\Pi}{\theta}\right) \end{bmatrix}$$

$DET\left(A - \gamma_I\right) = 0$. Defina $x = \frac{1-\phi_\Pi}{\theta}$ e $k_x = \alpha$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ k & \beta + \alpha \end{bmatrix} \text{ e } \gamma_I = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

$$A-\gamma_I=\beta\left[\begin{array}{cc}1-\gamma & x\\ k & \beta+\alpha-\gamma\end{array}\right]$$

$$(B)=(1-\gamma)\,(\beta+\alpha-\gamma)-\alpha \text{ pois,} k_x=\alpha$$

$$(B)=\beta+\alpha-\gamma-\gamma\beta-\gamma\alpha+\gamma^2-\alpha$$

$$(B)=\gamma^2-\gamma\,(1+\beta+\alpha)+\beta$$

$$\gamma=\frac{1+\beta+\alpha\pm\sqrt{(1+\beta+\alpha)^2-4\beta}}{2}$$

Onde $\alpha=\frac{k(1-\phi_\Pi)}{\theta}$. Como $\phi_\Pi\leq 1$, tem uma solução positiva para $\gamma\geq 1$ o sistema tem múltiplos equilíbrios. Se o BC adota uma regra:

$$i_t=r_t^n+\phi_\Pi\Pi_t+\phi_y\tilde{y}_t$$

Quando $\phi_y=0$

$$\phi_y>1\rightarrow i_t=r_t^n$$

9.6 Inconsistência Dinâmica

A política monetária se afasta do ótimo

A existência de um trade-off no curto prazo dá origem ao viés inflacionário na condição da PM:

- Aumentar M para $y>y^n$
- Não diminuir M para combater Π e causar recessão

A capacidade de uso da PM discricionária por parte das policymakers resulta em inflação sem quaisquer efeitos no produto

9.6.1 Modelo Kydland e Prescott (1977)

- Mudanças monetárias tem efeitos reais
- Expectativas sobre inflação afetam o comportamento do produto:

$$y^n<y^*$$

Seja a Curva de Oferta de Lucas:

$$y = y^n + b\,(\Pi - \Pi^e)\,, b > 0 \;(53)$$

- Inflação acima de algum nível tem um custo
- O custo marginal da inflação aumenta quando a inflação aumenta

9.6.2 O Policy Maker Minimiza

$$L' = \frac{1}{2}\,(y - y^*)^2 + \frac{1}{2}a\,(\Pi - \Pi^*)\,, y^* > y^n, a > 0 \;(54)$$

a = importância da inflação (produto) no bem-estar

- O policymaker pode influenciar a Demanda Agregada

Análise

Duas formas que a PM e Π^e podem ser determinada

1. O policymaker se compromete a cumprir (e cumpre) com uma inflação antes dela ser determinada

$\Pi^e = \Pi$

De (53) :

$$y = y_n + b\,(\Pi - \Pi^e)\,, b > 0$$

$y = y_n$

$$\min_{\Pi} L\frac{1}{2}\,(y^n - y^*)^2 + \frac{a}{2}\,(\Pi - \Pi^*)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Pi} = a\,(\Pi - \Pi^*) = 0$$

$$\Pi = \Pi^*$$

2. O Policymaker escolhe Π tomando Π^ecomo dada

(53) →(54)

$$\min_{\Pi} L = \frac{1}{2}\,[y^n + b\,(\Pi - \Pi^e) - y^*]^2 + \frac{1}{2}a\,(\Pi - \Pi^*)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Pi} = [y^n + b\,(\Pi - \Pi^e) - y^*]\,b + a\,(\Pi - \Pi^*)^2 = 0 \;(56)$$

$$by^n + b^2\Pi - b^2\Pi^e - by^* + a\Pi - a\Pi^* = 0$$

$$\Pi\left(a+b^2\right) = b^2\Pi^e + a\Pi^* + b\left(y^* - y^n\right)$$

$$\Pi = \frac{b^2\Pi^e + a\Pi^* + b\left(y^* - y^n\right) + b^2\Pi^* - b^2\Pi^*}{a+b^2}$$

$$\Pi = \frac{b^2\left(\Pi^e - \Pi^*\right) + \Pi^*\left(a+b^2\right) + b\left(y^* - y^n\right)}{a+b^2}$$

$$\Pi = \Pi^* + \frac{b}{a+b^2}\left(y^* - y_n\right) + \frac{b^2}{a+b^2}\left(\Pi^e - \Pi^*\right) \quad (57)$$

Sem incerteza de (57)?

$$\Pi^e = \Pi \rightarrow \Pi^{eq}$$

$$\Pi^{eq} = \frac{b}{a+b^2}\left(y^* - y_n\right) + \frac{b^2}{a+b^2}\left(\Pi^{eq} - \Pi^*\right) + \Pi^*$$

$$\Pi^{eq}\left(\frac{a+b^2-b^2}{a+b^2}\right) = \frac{b^2}{a+b^2}\left(y^* - y_n\right) + \frac{b^2}{a+b^2}\Pi^* + \Pi^*$$

$$\Pi^{eq} = \frac{b}{a}\left(y^* - y_n\right) + \Pi^* \quad (58)$$

De (57):

Inclinação:

$$0 < \frac{\partial\Pi}{\partial\Pi^e} = \frac{b^2}{a+b^2} < 1$$

Intercepto:

$$\Pi^* + \frac{b}{a+b^2}\left(y^* - y_n\right)$$

O único equilíbrio é $\Pi = \Pi^e = \Pi^{eq}$ e $(y - y^*)$. Tudo o que a PM discricionária faz, é aumentar a inflação sem o produto. A política de anunciar que a inflação maior após os agentes econômicos terem formado suas expectativas não é dinamicamente consistente.

9.6.3 Credibilidade - Reputação - Delegação

Suponha que a relação produto-inflação e bem-estar social continuem dadas por (53) e (54) e a função objetivo é dada por:

$$L' = \frac{1}{2}\left(y - y^*\right)^2 + \frac{1}{2}a'\left(\Pi - \Pi^*\right)^2 \text{ onde, } y^* > y^n$$

$a' > 0$ da solução do problema de minimização do policymaker:

$$\Pi = \Pi^* + \frac{b}{a'+b^2}\left(y^* - y^n\right) + \frac{b^2}{a'+b^2}\left(\Pi^e - \Pi\right) \;\; (60)$$

$$\Pi_{eq} = \Pi^* + \frac{b}{a'}\left(y^* - y^n\right) \;\; (61)$$

Supondo $a' > a$ (policymaker mais preocupado com a inflação) de (57) e (60)

$$\frac{b^2}{a+b^2} > \frac{b^2}{a'+b^2} \text{ e } \left[\Pi + \frac{b}{a'+b^2}\left(y^* - y^n\right)\right] > \left[\Pi^* + \frac{b}{a'+b^2}\left(y^* - y^n\right)\right]$$

- Se o público tem incerteza sobre a preferência do policymaker o uso da delegação da PM para um policymaker comprometido com a inflação baixa pode superar o problema de inconsistência dinâmica

9.7 Senhoriagem e Inflação

Emissões de moeda para gerar receita

1º caso: As necessidades da senhoriagem são sustentáveis

$$\frac{M}{P} = L\left(i, y\right)$$

$$\frac{M}{P} = L\left(r + \Pi^e, y\right), L_i < 0, L_y > 0$$

M= Moeda de alta potência
L= Demanda de alta potência

- Demandas por moeda se ajustam sistematicamente
- No “SS” $\rightarrow y = \bar{y}$ e $r = \bar{r}$
- Assumimos que $\Pi = \Pi^e$

$$\frac{M}{P} \;=\; L\left(\bar{r} + g_m, \bar{y}\right) \;\; (63)$$

Onde $g_m = \frac{\dot{M}}{M} \rightarrow$ taxa de crescimento da moeda
A necessidade por senhoriagem é dada por

$$S = \frac{\dot{M}}{P}$$

$S = \frac{\dot{M}}{M}.\frac{M}{P} \rightarrow$(64) $\rightarrow$ No estado estacionário a senhoriagem real é igual a taxa de crescimento da moeda vezes a quantidade real da moeda

- S é referida como "receita do imposto inflacionário"

(63) → (64)

$$S = g_m L\left(\bar{r} + g_m, \bar{y}\right)(65)$$

Um acréscimo em g_m aumenta a senhoriagem a taxa pela qual as demandas de moeda real são taxadas, formalmente:

$$\frac{ds}{dg_m} = L\left(\bar{r} + g_m, \bar{y}\right) + g_m L^1\left(\bar{r} + g_m, \bar{y}\right) \ (66)$$

Senhorinhagem no "SS" (Cagan, 1956):

Seja a demanda por moeda dada por

$$ln\frac{M}{P} = a - b_i + lny, b > 0 \ (67)$$

,Em nível

$$e^a \bar{y} e^{-b(\bar{r}+gn)}$$

$$S = g_n e^a \bar{y} e^{-b(\bar{r}+g_n)} \text{ ou } S = C g_n e^{-bg_n}$$

$$C = e^a \bar{y} e^{-b\bar{r}}$$

$$\frac{ds}{dg_n} = Ce^{-bg_n} + \left(-bCg_n e^{-bg_n}\right) \rightarrow \left(1 - bg_n\right) C g_n e^{-bg_n}$$

Temos que:

$$\frac{ds}{dg_n} > 0, g_n < \frac{1}{b}$$

- Estimativa de Cagan 1956 →$\frac{1}{3} < b < \frac{1}{2}$
- Pico ocorre quando $2 < g_n < 3$ →entre 200 a 300% a.a.
- Moderada necessidade de senhoriagem produz inflação alta

2º Caso: As necessidades de senhoriagem são insistentáveis

- SUPOSIÇÃO: Gradual ajuste da demanda por moeda
- O governo pode estabelecar $S > S^{MAX}$ →Hiperinflação

Referências

ACEMOGLU, D. Introduction to Modern Economic Growth. Inglaterra: Londres. Princeton University Press, 2009.

BARRO, R. J.; SALA-I-MARTIN, X. Economic growth. 2nd ed. Cambridge, Mass: MIT Press, 2004.

BÉNASSY, J.-P. Macroeconomic theory. New York: Oxford University Press, 2011.

BLANCHARD, O.; FISCHER, S. Lectures on macroeconomics. Cambridge, Mass: MIT Press, 1989.

JONES, C. I.; VOLLRATH, D. Introduction to Economic Growth. W. W. Norton & Company, Inc. 2013.

ROMER, D. Advanced macroeconomics. 4th ed. New York: McGraw-Hill/Irwin, 2012.

WICKENS, M. Macroeconomic theory: a dynamic general equilibrium approach. 2nd ed. Princeton: Princeton University Press, 2011.