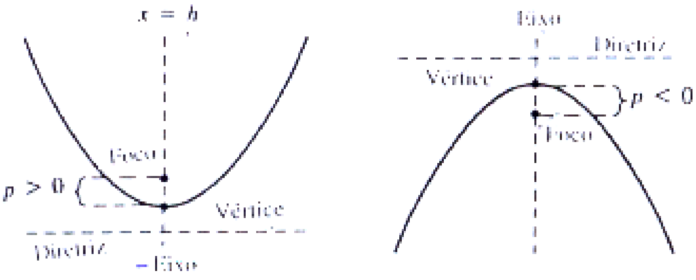
UFPEL – IFM – DME – CÁLCULO 3 – PROFª. REJANE PERGHER

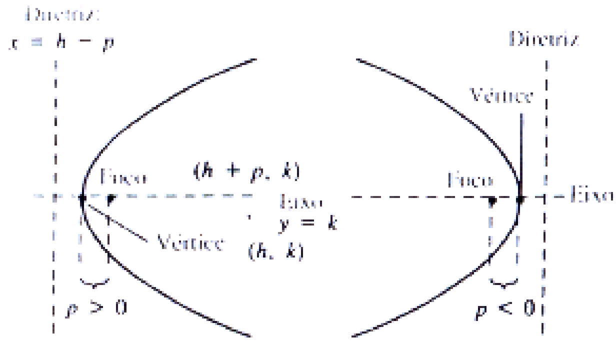
REVISÃO:

CÔNICAS – PARÁBOLAS:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \qquad \text{eixo vertical}$$
$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \qquad \text{eixo horizontal}$$



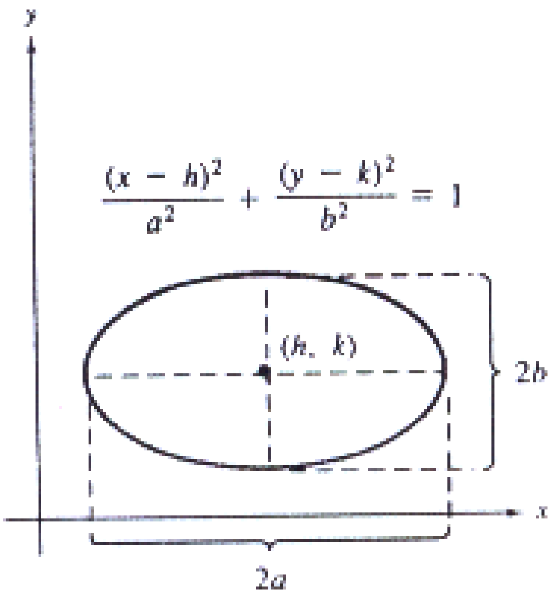
$(x - h)^2 = 4p(y - k)$

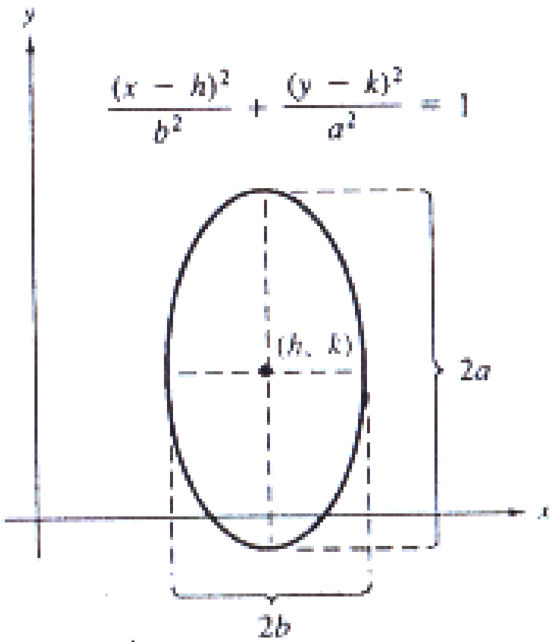


$(y - k)^2 = 4p(x - h)$

ELIPSES:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{eixo maior é horizontal}$$
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \qquad \text{eixo maior é vertical}$$

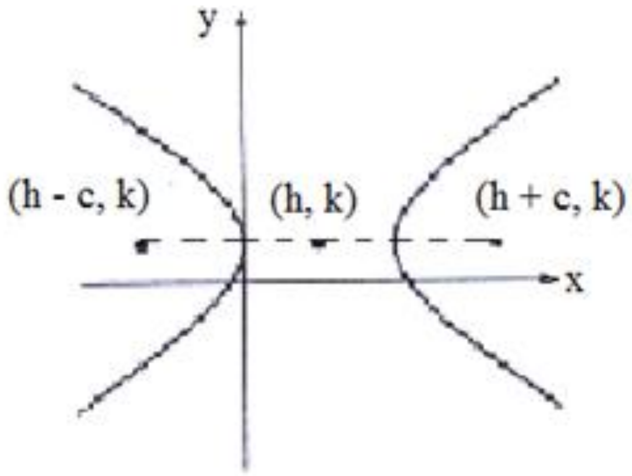


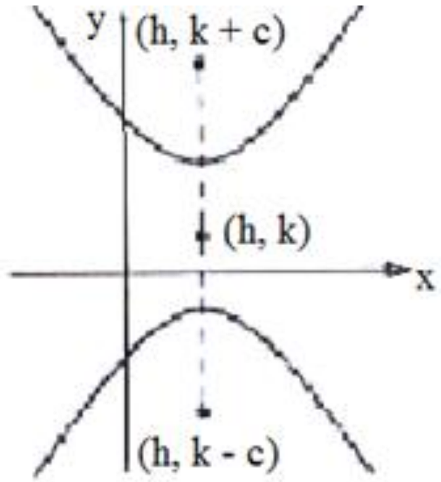


HIPÉRBOLES:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad \text{eixo focal é horizontal}$$

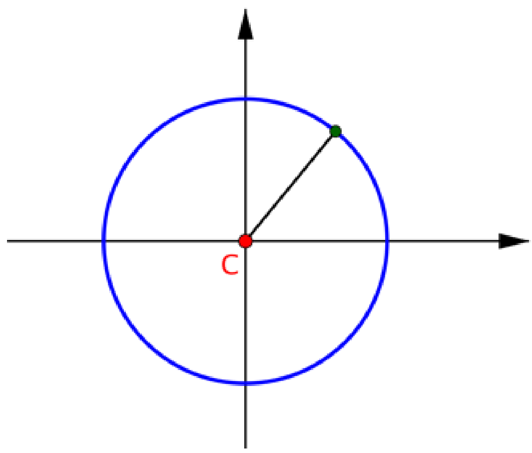
$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \qquad \text{eixo focal é vertical}$$





CIRCUNFERÊNCIA:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$



FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL: y= f(x)

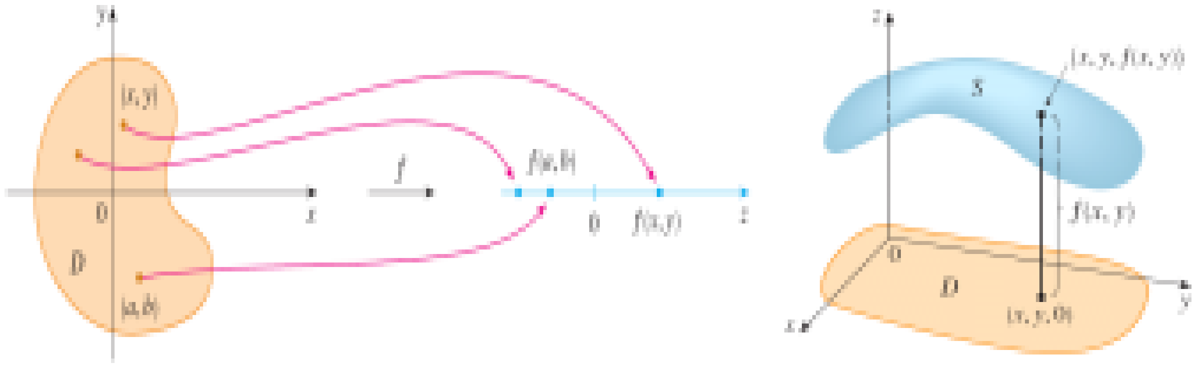
D(f)= $\mathbb{R}$

Im(f)= $\mathbb{R}$

1. FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

1.1 Funções de Duas Variáveis

DEFINIÇÃO 1: **Seja D um conjunto de pares ordenados de números reais. Uma função de duas variáveis é uma correspondência que associa a cada par (x, y) em D exatamente um número real, denotado por $f(x, y)$. O conjunto D é o domínio de f. O contradomínio de f consiste em todos os números reais $f(x, y)$, com (x, y) em D.**



Exemplo 1: Índice de sensação térmica. por exemplo, se a temperatura é de $50^\circ\ C$ e a velocidade do vento é $50\ km/h$, então a sensação térmica será $f(-5, 50) = -15^\circ C$.

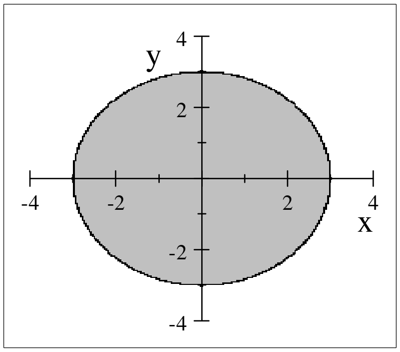
	Wind speed (km/h)										
Actual temperature (°C) T \ v	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80
5	4	3	2	1	1	0	−1	−1	−2	−2	−3
0	−2	−3	−4	−5	−6	−6	−7	−8	−9	−9	−10
−5	−7	−9	−11	−12	−12	−13	−14	−15	−16	−16	−17
−10	−13	−15	−17	−18	−19	−20	−21	−22	−23	−23	−24
−15	−19	−21	−23	−24	−25	−26	−27	−29	−30	−30	−31
−20	−24	−27	−29	−30	−32	−33	−34	−35	−36	−37	−38
−25	−30	−33	−35	−37	−38	−39	−41	−42	−43	−44	−45
−30	−36	−39	−41	−43	−44	−46	−48	−49	−50	−51	−52
−35	−41	−45	−48	−49	−51	−52	−54	−56	−57	−58	−60
−40	−47	−51	−54	−56	−57	−59	−61	−63	−64	−65	−67

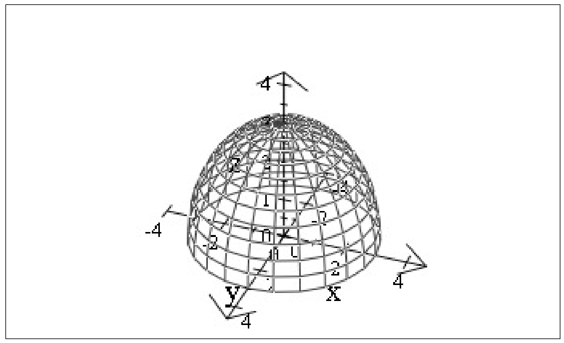
Exemplo 2: Seja f a função dada por $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Esboce o gráfico de f e exiba os traços nos planos $z = 0$, $z = 2$, $z = 4$, $z = 6$ e $z = 8$.

Solução: domínio D=$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$, pode ser representado por todos os pontos do círculo $x^2 + y^2 \leq 9$.

O gráfico de f tem a equação $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ .Elevendo ao quadrado ambos os lados da equação temos $z^2 = 9 - x^2 - y^2$ ou $z^2 + x^2 + y^2 = 9$ uma esfera de raio 3 mas com $z \geq 0$. Para achar o traço no plano xy, conciderамos $z = 0$ e temos $x^2 + y^2 = 9$ um círculo de raio 3. No plano xz conciderамos $y = 0$ e temos $x^2 + z^2 = 9$ um semi círculo de raio 3.No plano yz conciderамos $x = 0$ e temos $y^2 + z^2 = 9$ um semi círculo de raio 3.

Unindo os três planos temos um esboço do gráfico.



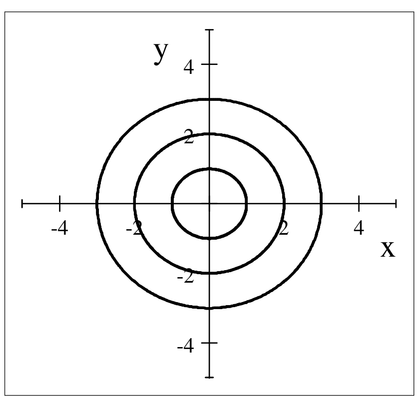


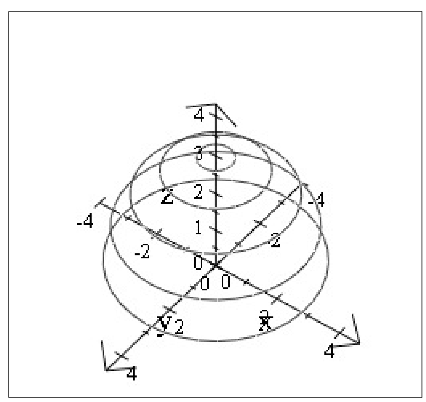
$x^2 + y^2 \leq 9$ $\qquad$ $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

1.2 Curvas de Nível

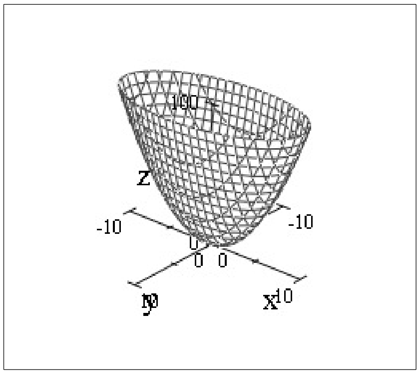
Projetando o traço do gráfico de f no plano $x = k$ para o plano xy, obtemos uma curva C de equação $f(x, y) = k$. Se um ponto $(x, y, 0)$ se move ao longo de C, os valores $f(x, y)$ são sempre iguais a k. C é chamada de **curva de nível** de f.

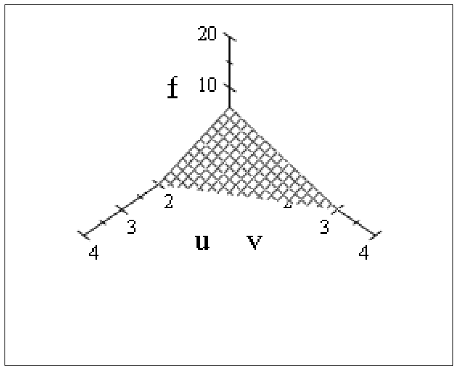
Exemplo 3: Esboce algumas curvas de nível da função do exemplo 2:
Solução: As curvas de nível são gráficos, no plano xy, de equações da forma $f(x, y) = k$, isto é, $\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k$ ou $x^2 + y^2 = 9 - k^2$. Essas curvas são círculos, desde que $0 \leq k \leq 3$. Fazendo $k = 0, \sqrt{5}$ e $\sqrt{8}$, obtemos os círculos de raios $3, 2$ e 1.





Exemplo 4: Descreva o domínio de f , ache os valores indicados, faça um esboço do gráfico e de três curvas de nível:
a) $f(x, y) = 4x^2 + y^2, \quad f(-2, 5), f(5, -2), f(0, -2).$
b) $f(u, v) = 6 - 3u - 2v, \quad f(2, 3), \quad f(-1, 4).$



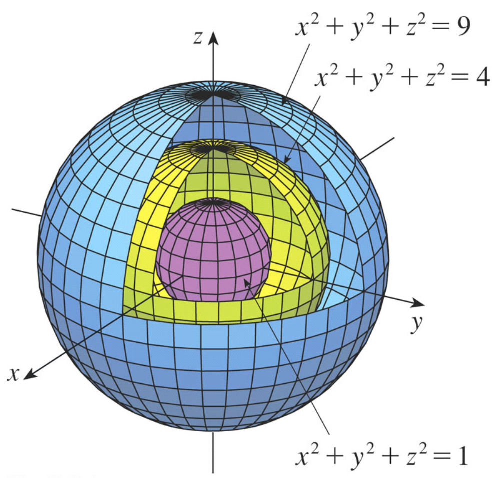


a) $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ b) $f(u,v) = 6 - 3u - 2v$

1.3 Funções com Três Variáveis

DEFINIÇÃO 2: Uma função de três variáveis (reais) é definida analogamente, com a diferença que o domínio D é agora um subconjunto de $\Re^3$. Para cada (x,y,z) em D está associado um número real $f(x,y,z)$.

Exemplo 5. Determine as curvas de superfície da função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. (exemplo 15 página 895)



1.4 LISTA DE EXERCÍCIOS 1

1) Seja $f(x,y) = \ln(x+y-1)$. a) Estime $f(1,1)$. b) Estime $f(e,1)$. c) Determine o domínio e a imagem de f.

2) Seja $f(x,y) = x^2e^{3xy}$. a) Estime $f(2,0)$. b) Determine o domínio e a imagem de f.

3) Descreva a região R no plano xy que corresponde ao domínio da função dada e encontre a imagem da função:

a) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$ R.: $D = \{(x,y)\backslash x^2+y^2 \le 4\}$; $\mathrm{Im} = [0,2]$
b) $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-4y^2}$ R.: $D = \{(x,y)\backslash \frac{x^2}{4}+y^2 \le 1\}$; $\mathrm{Im} = \{z \in \Re\backslash 0 \le z \le 2\}$
c) $z = \frac{x+y}{xy}$ R.: $D = \{(x,y)\backslash x \ne 0, y \ne 0\}$; $\mathrm{Im} = \Re$
d) $f(x,y) = \ln(4-x-y)$ R.: $D = \{(x,y)\backslash y < 4-x\}$; $\mathrm{Im} = \Re$

e) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ R.: $D = \{(x,y)\backslash y \neq 0\}$; $\text{Im} = \Re_+^* = \{z \in \Re \backslash z > 0\}$

4) Descreva as curvas de nível de cada função, correspondentes aos níveis c dados:

a) $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ $c = 0, c = 3, c = 5$
b) $f(x,y) = xy$ $c = \pm 1, \pm 3, \pm 6$
c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ $c = 9$

5) Esboce o gráfico da superfície definida pela função:

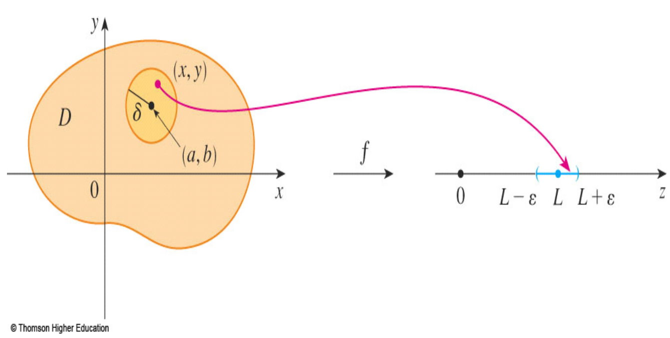
a) $z = 4 - x^2 - y^2$; b) $z = y^2$; c) $z = 6 - 2x - 3y$; d) $f(x,y) = 3$; e) $f(x,y) = 1 - x - y$; f) $f(x,y) = y$; g) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; h) $f(x,y) = \cos x$.

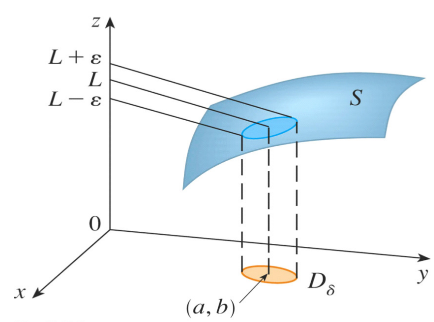
6) Trace as curvas de nível de $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Esboce o gráfico da superfície definida por esta função. Dê o domínio e a imagem:

7) Trace as curvas de nível de $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Esboce o gráfico da superfície definida por esta função:

1.5 Limites e Continuidade de funções de Duas Variáveis

DEFINIÇÃO 3: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ sempre que $(x,y) \in D$ e $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$ ou seja $f(x,y) \to L$ quando $(x,y) \to (a,b)$.





Exemplo 6: Ache $\lim_{(x,y)\to(2,-3)} (x^3 - 4xy^2 + 5y - 7)$. Resp.: -86

Observação: Se $f(x,y) \to L_1$ quando $(x,y) \to (a,b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x,y) \to L_2$ quando $(x,y) \to (a,b)$ ao longo do caminho C_2, com $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe.

Exemplo 7: Mostre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe. Solução: Aproximando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo do eixo x tomando $y = 0, (f(x,0) = \dfrac{x^2}{x^2} = 1)$; posteriormente $(x,y) \to (0,0)$ ao longo do eixo y tomando $x = 0. (f(0,y) = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1)$.

Exemplo 8: Mostre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ não existe. (use a reta $x = y$).

DEFINIÇÃO 4: Uma função $f(x,y)$ é dita contínua em (a,b) se $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$. Dizemos que f é contínua em D se f for contínua em todo ponto (a,b) de D.

Exemplo 9: verifique se $f(x,y) = x^3 - 4xy^2 + 5y - 7$ é contínua em $(x,y) = (2,-3)$.

Exemplo 10: Onde a função $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ é contínua?

Exemplo 11: Onde a função $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é descontínua?

1.7 Lista de Exercícios 2: Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy}$ R.: $-\frac{2}{3}$	g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ R.: Não existe
b) $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},1)} \frac{y+1}{2-\cos x}$ R.: 1	h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\cos y}{3x^2+y^2}$ R.: Não existe
c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$ R.: 0	i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ R.: 0
d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3-2x^2y+3y^2x-2y^3}{x^2+y^2}$ R.: 0	j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ R.: Não existe
e) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,3,1)} \frac{y^2-4y+3}{x^2z(y-3)}$ R.: $\frac{1}{2}$	k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+1)}-1}$ R.: 2
f) $\lim\limits_{(x,y)\to(5,-2)} (x^5+4x^3y-5xy^2)$ R.: 2025	

2. DERIVADAS PARCIAIS

Da definição de derivada $f'(x)$ para uma função de uma variável, temos:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Exemplo 1: Calcule a derivada da função $y = 1 + x^2$. Calcule o valor dessa derivada para $x = 1$. Esboce o gráfico da função y e interprete o valor da derivada no ponto $(1,2)$.

Bem, como estamos estudando funções de duas variáveis, o que representa a derivada de uma função de duas variáveis??

Consideremos $u(x,y)$, para (x,y) que varia numa determinada região do plano xy, uma função que representa a temperatura de uma placa retangular.

Observe que a temperatura em cada ponto da placa, depende da posição do ponto. Observe também, que

x e y podem ambas variar ou pode uma variar e a outra ficar fixa. Assim podemos considerar a taxa de variação em relação a cada uma das variáveis independentes. Ou seja, podemos considerar a taxa de variação de u em relação à x, enquanto y permanece constante e a taxa de u em relação a y , enquanto x permanece constante. Essa idéia conduz ao conceito de derivadas parciais.

Definição de derivadas parciais (primeiras) de f em relação a x e y, como as funções f_x e f_y tais que

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

e

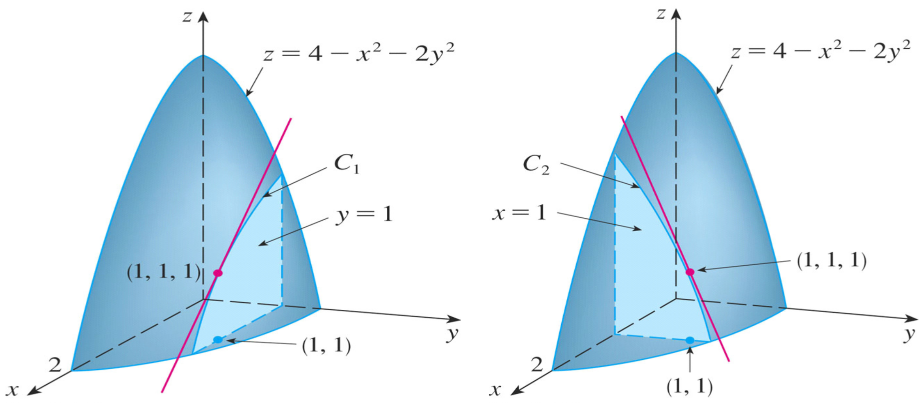
$$f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Exemplo 2: Se $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2$, ache:

a) $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$
b) $f_x(3,-2)$ e $f_y(3,-2)$

2.1 Interpretação das Derivadas Parciais

Exemplo 3: Seja $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$; ache $f_x(1,1)$ e $f_y(1,1)$.



Observação 1: Valem para derivadas parciais fórmulas análogas às das funções de uma variável. Por exemplo, se $u = f(x,y)$ e $v = g(x,y)$, então:

$$\frac{\partial}{\partial x}(u.v) = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}$$

Exemplo 4: Encontre $\frac{\partial w}{\partial y}$ se $w = xy^2e^{xy}$:

Aplicando a regra do produto para $u = xy^2$ e $v = e^{xy}$, obtemos $\frac{\partial w}{\partial y} = (x^2y^2 + 2xy)e^{xy}$

Exemplo 5: Se $w = x^2y^3\sin z + e^{xz}$, ache $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ e $\frac{\partial w}{\partial z}$:

Resp.:
$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy^3\sin z + ze^{xz}$; $\frac{\partial w}{\partial y} = 3x^2y^2\sin z$; $\frac{\partial w}{\partial z} = x^2y^3\cos z + xe^{xz}$

2.2 Derivadas Parciais Segundas

NOTAÇÃO: $f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e $f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

2.2.1 **DERIVADAS PARCIAS SEGUNDAS MISTAS**

TEOREMA 1: Seja f uma função de duas variáveis x e y. Se f, f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} são contínuas em uma região aberta R, então $f_{xy} = f_{yx}$ em toda região R.

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Exemplo 6: Determine as derivadas parciais de segunda ordem de $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$.

2.3 Equações Diferenciais Parciais

Exemplo 7: Uma função de temperatura de estado estacionário $z = z(x,y)$ para uma placa plana satisfaz a equação de Laplace quando $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. Determine se as funções, a seguir, satisfazem a equação de Laplace:

a) $z = 5xy$ b) $z = e^x \sin y$

2.4 LISTA DE EXERCÍCIOS 3

1) Em um dia claro, a intensidade de luz solar (em velas-pés) às t horas após o nascente e à profundidade oceânica de x metros, pode ser aproximada por $I(x,t) = I_0 e^{-kx} \sin^3\left(\frac{\pi t}{D}\right)$ em que I_0 é a intensidade ao meio-dia, D é a extensão do dia (em horas) e k é uma constante positiva. Se $I_0 = 1000$, $D = 12$ e $k = 0.10$, calcule e interprete $\frac{\partial I}{\partial t}$ e $\frac{\partial I}{\partial x}$ quando $t = 6$ e $x = 5$.
Resposta: $I_t(5,6) = 0$ e $I_x(5,6) = -60,65$ velas-pés/m

2) Se um gás tem densidade de ρ_0 gramas por centímetro cúbico, a 0$\circ C$ e 760 milímetros de mercúrio (mm), então sua densidade a T$\circ C$ e pressão P mm é $\rho(T,P) = \rho_0\left(1 + \frac{T}{273}\right)\frac{760}{P}\ g/cm^3$. Quais são as taxas de variação da densidade em relação à temperatura e à pressão?
Resposta: $\rho_T(T,P) = \frac{760\rho_0}{273P}$ g/cm^3/$\circ$C e $\rho_P(T,P) = -\frac{760\rho_0}{P^2}\left(1 + \frac{T}{273}\right)$ g/cm^3/mm.

3) A análise de certos circuitos elétricos envolve a fórmula $I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + L^2w^2}}$, em que I é a corrente, V a voltagem, R a resistência, L a indutância e w uma constante positiva. Ache e interprete $\frac{\partial I}{\partial R}$ e $\frac{\partial I}{\partial L}$:
Resposta: $I_R = -\frac{VR}{\sqrt{(R^2 + L^2w^2)^3}}$ A/Ω e $I_L = -\frac{VLw^2}{\sqrt{(R^2 + L^2w^2)^3}}$ A/H.

4) Calcule as derivadas parciais abaixo indicadas:

a) $f(x,y) = 3x^2y - 4x^3y^2$, f_{xxx} , f_{yyy} R.: $f_{xxx} = -24y^2$, $f_{yyy} = 0$
b) $f(x,y) = 3x^4 - 2x^2y + xy - y^2$, $f_{xx}(1,-2)$ R.: $f_{xx}(1,-2) = 44$
c) $f(x,y) = \sin 2x \cos 3y$, f_{xyx} R.: $f_{xyx} = 12\sin 2x \sin 3y$
d) $f(x,y) = (x+y)^2 3x^2$, $f_{yxy}(-1,0)$ R.: $f_{yxy}(-1,0) = -12$
e) $f(x,y) = x\sin^2 3y$, f_{xyx} R.: $f_{xyx} = 0$
f) $f(x,y) = \frac{y}{x}$, $f_{xxx}(-1,1)$ R.: $f_{xxx}(-1,1) = -6$
g) $f(x,y) = \dfrac{3x^2 - y}{(x+y)^2}$ R.: $f_{xx} = \dfrac{6(y^2 - y - 2xy)}{(x+y)^4}$

5) Mostre que cada uma das funções dadas satisfaz a equação do calor $\frac{\partial z}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

a) $z = e^{-t}\cos\frac{x}{c}$
b) $z = e^{-t}\sin\frac{x}{c}$

6) Uma corda fixada nas extremidades, esticada ao longo do eixo x é posta em vibração. Com base em conceitos físicos é possível mostrar que o deslocamento representado pela função $y = y(x,t)$, onde (x,t) representa a corda na posição x e no instante t, satisfaz a equação unidimensional da onda $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, onde a constante a depende da densidade e da tensão da corda. Mostre que as funções que seguem satisfazem essa equação:

a) $y(x,t) = \sin kx \cos kat$ (k, a são constantes);
R. $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -k^2a^2\sin kx\cos kat$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2\sin kx\cos kat$.
Como $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, **a equação** $y(x,t) = \sin kx\cos kat$ **satisfaz a equação da onda**.

b) $y(x,t) = \cosh(3(x - at))$
R. $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9a^2\cosh(3x - 3at)$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 9\cosh(3x - 3at)$.
Como $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, **a equação** $y(x,t) = \cosh(3(x - at))$ **satisfaz a equação da onda**.
c) $z = \sin(x + at)$.
d) $z = \sin wat \sin wx$.

7) Mostre que cada uma das funções dadas satisfaz a equação de Laplace $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

a) $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
R. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$.
Como $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \neq 0$, **a equação** $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ **não satisfaz a equação de Laplace**.

b) $u(x,y) = e^{-x}\sin y$
R. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x}\sin y$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-x}\sin y$
Como $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, **a equação** $u(x,y) = e^{-x}\sin y$ **satisfaz a equação de Laplace**.

c) $z = 5xy$

d) $z = e^x \sin y$

8) Verifique que $w_{xy} = w_{yx}$:

a) $w = x^3 e^{-2y} + y^{-2}\cos x$ R.: $w_{xy} = w_{yx} = -6x^2 e^{-2y} + 2y^{-3}\sin x$

b) $w = x^2 \cosh \frac{z}{y}$ R.: $w_{xy} = w_{yx} = -\frac{2xz}{y^2}\sinh\frac{z}{y}$

c) $w = \dfrac{x^2}{x+y}$ R.: $w_{xy} = w_{yx} = \dfrac{-2x^2y - 2xy^2}{(x+y)^4}$

9) Ache todas as derivadas parciais segundas de f :

a) $f(x,y) = x^3y^2 - 2x^2y + 3x$ R.: $f_{xx} = 6xy^2 - 4y$; $f_{yy} = 2x^3$; $f_{xy} = f_{yx} = 6x^2y - 4x$

b) $z = x^2y - 3y^2x$ R.: $z_{xx} = 2y$; $z_{yy} = -6x$; $z_{xy} = z_{yx} = 2x - 6y$

c) $u = 4x^2y - 3x^2y^2 + xy - x^2 + y^2$ R.: $u_{xx} = 8y - 6y^2 - 2$;
$u_{yy} = -6x^2 + 2$; $u_{xy} = u_{yx} = 8x - 12xy + 1$

d) $z = \sin x \cos y$ R.: $z_{xx} = z_{yy} = -\sin x \cos y$; $z_{xy} = z_{yx} = -\cos x \sin y$

e) $z = (x^2+y^2)^3$ R.: $z_{xx} = 6(x^2+y^2)^2 + 24x^2(x^2+y^2)$;
$z_{yy} = 6(x^2+y^2)^2 + 24y^2(x^2+y^2)$;
$z_{xy} = z_{yx} = 24xy(x^2+y^2)$

f) $f(x,y) = x^2\cos(xy)$

R. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\cos xy - 4x(\sin xy)y - x^2(\cos xy)y^2$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^4\cos xy$

$\frac{\partial z}{\partial y \partial x} = -3x^2\sin xy - x^3(\cos xy)y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3x^2\sin xy - x^3(\cos xy)y$

10) Considere $w(x,y,z) = x\sin(yz)$ Calcule:$w_{xy}(1,2,1)$;$w_{yz}(x,y,z)$;$w_{zx}(-1,2,1)$

R. $w_{xy}(x,y,z) = z\cos yz;\quad w_x(1,2,1) = 1\cos 2 = -0.41615.$

$w_{yz}(x,y,z) = x\cos yz - xyz\sin yz.$

$w_{zx}(x,y,z) = y\cos yz;\quad w_{zx}(-1,2,1) = 2\cos 2 = -.83229.$

11) Mostre que qualquer função dada por $w = (\sin ax)(\cos by)e^{-\sqrt{a^2+b^2}\,z}$ satisfaz a equação de Laplace em três dimensões $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$

12) Se $u = v\sec rt$, ache $u_{rvr} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)\right)$. (Lembre que $\dfrac{d\sec x}{dx} = \sec x\tan x$ e $\dfrac{d\tan x}{dx} = \sec^2 x$).

R.: $t^2\sec(rt)(\sec^2(rt) + \tan^2(rt))$

13) Considere a função produção $f(x,y) = 60x^{\frac{3}{4}}y$que fornece o número de unidades de determinados bens produzidos, sendo utilizadas x unidades de mão de obra e y unidades de capital. Calcule $f_x(81,16)$,

R. $f_y(81,16) = \frac{405}{8}$. Essas quantidades são chamadas de produtividade marginal de mão de obra e produtividade marginal de capital. $f(x,y) = 60x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}};\quad f_x(x,y) = \dfrac{45y^{\frac{1}{4}}}{x^{-\frac{1}{4}}}.$

14) Resolva os exercícios ímpares do número 13 ao 45 do livro: Cálculo James Stewart volume 2 páginas 917 a 920.

13–34 □ Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

13. $f(x, y) = 3x - 2y^4$

14. $f(x, y) = x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$

15. $z = xe^{3y}$

16. $z = y \ln x$

17. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

18. $f(x, y) = x^y$

19. $w = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$

20. $f(s, t) = st^2/(s^2 + t^2)$

21. $f(r, s) = r \ln(r^2 + s^2)$

22. $f(x, t) = \operatorname{arctg}(x\sqrt{t})$

23. $u = te^{w/t}$

24. $f(x, y) = \int_y^x \cos(t^2)\, dt$

25. $f(x, y, z) = xy^2z^3 + 3yz$

26. $f(x, y, z) = x^2e^{yz}$

27. $w = \ln(x + 2y + 3z)$

28. $w = \sqrt{r^2 + s^2 + t^2}$

29. $u = xe^{-t} \operatorname{sen} \theta$

30. $u = x^{y/z}$

31. $f(x, y, z, t) = xyz^2 \operatorname{tg}(yt)$

32. $f(x, y, z, t) = \dfrac{xy^2}{t + 2z}$

33. $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

34. $u = \operatorname{sen}(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

35–38 □ Determine as derivadas parciais indicadas.

35. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $f_x(3, 4)$

36. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 3y)$; $f_y(-6, 4)$

37. $f(x, y, z) = x/(y + z)$; $f_z(3, 2, 1)$

38. $f(u, v, w) = w \operatorname{tg}(uv)$; $f_v(2, 0, 3)$

39–40 □ Use a definição de derivadas parciais como limites (4) para achar $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

39. $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$

40. $f(x, y) = \sqrt{3x - y}$

41–44 □ Use a diferenciação implícita para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

41. $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

42. $yz = \ln(x + z)$

43. $x - z = \operatorname{arctg}(yz)$

44. $\operatorname{sen}(xyz) = x + 2y + 3z$

45–46 □ Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

45. (a) $z = f(x) + g(y)$ (b) $z = f(x + y)$

46. (a) $z = f(x)g(y)$ (b) $z = f(xy)$ (c) $z = f(x/y)$

Respostas ímpares

13. $f_x(x, y) = 3$, $f_y(x, y) = -8y^3$

15. $\partial z/\partial x = e^{3y}$, $\partial z/\partial y = 3xe^{3y}$

17. $f_x(x, y) = 2y/(x + y)^2$, $f_y(x, y) = -2x/(x + y)^2$

19. $\partial w/\partial \alpha = \cos \alpha \cos \beta$, $\partial w/\partial \beta = -\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

21. $f_r(r, s) = \dfrac{2r^2}{r^2 + s^2} + \ln(r^2 + s^2)$, $f_s(r, s) = \dfrac{2rs}{r^2 + s^2}$

23. $\partial u/\partial t = e^{w/t}(1 - w/t)$, $\partial u/\partial w = e^{w/t}$

25. $f_x = y^2z^3$, $f_y = 2xyz^3 + 3z$, $f_z = 3xy^2z^2 + 3y$

27. $\partial w/\partial x = 1/(x + 2y + 3z)$, $\partial w/\partial y = 2/(x + 2y + 3z)$, $\partial w/\partial z = 3/(x + 2y + 3z)$

29. $\partial u/\partial x = e^{-t} \operatorname{sen} \theta$, $\partial u/\partial t = -xe^{-t} \operatorname{sen} \theta$, $\partial u/\partial \theta = xe^{-t} \cos \theta$

31. $f_x = yz^2 \operatorname{tg}(yt)$, $f_y = xyz^2t \sec^2(yt) + xz^2 \operatorname{tg}(yt)$, $f_z = 2xyz \operatorname{tg}(yt)$, $f_t = xy^2z^2 \sec^2(yt)$

33. $\partial u/\partial x_i = x_i/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ **35.** $\frac{3}{5}$ **37.** $-\frac{1}{3}$

39. $f_x(x, y) = 2x - y$, $f_y(x, y) = 4y - x$

41. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{3yz - 2x}{2z - 3xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{3xz - 2y}{2z - 3xy}$

43. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1 + y^2z^2}{1 + y + y^2z^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-z}{1 + y + y^2z^2}$

45. (a) $f'(x)$, $g'(y)$ (b) $f'(x + y)$, $f'(x + y)$

2.5 A REGRA DA CADEIA

Se f e g são funções de uma variável real tais que $w = f(u)$ e $u = g(x)$, então a função composta de f e g é $w = f(g(x))$. Aplicando a regra da cadeia, temos $\dfrac{dw}{dx} = \dfrac{dw}{du}\dfrac{du}{dx}$.

Exemplo 8: Calcule a derivada de:

1) $y = \cos^2 x$ R.: $y' = -2\cos x\, senx$

2) $y = sen^3(4x)$ R.: $y' = 12sen^2(4x)\cos(4x)$
3) $y = e^{2x}$ R.: $y' = 2e^{2x}$
4) $y = \ln(2x^2)$ R.: $y' = \frac{2}{x}$
5) $y = e^{-3x}(3x^2+1)^3$ R.: $y' = -3e^{-3x}(3x^2+1)^3 + 18xe^{-3x}(3x^2+1)^2$

Sejam f, g e h funções de duas variáveis tais que $w = f(u,v)$ com $u = g(x,y)$ e $v = h(x,y)$, então a função composta é $w = f(g(x,y), h(x,y))$.
Por exemplo, se $w = u^2 + u\sin v$, com $u = xe^{2y}$ e $v = xy$, então $w = x^2e^{4y} + xe^{2y}\sin(xy)$.

DEFINIÇÃO 1: **Se** $w = f(u,v)$ **com** $u = g(x,y)$ **e** $v = h(x,y)$ **e se** f, g **e** h **são diferenciáveis**, **então**

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \textbf{e} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Exemplo 9: Dada $w = \ln\sqrt{u^2+v^2}$, com $u = xe^y$ e $v = xe^{-y}$, calcule $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$:
R.: $w_x = \frac{1}{x}$ e $w_y = \dfrac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} + e^{-2y}}$

Generalizando a regra da cadeia, temos para uma função de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cada uma delas função de outras m variáveis $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Supondo que as derivadas parciais existam $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$ com $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, m$, então

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial u}{\partial y_m} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_m} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_m}$$

Observação 2: A regra da cadeia generalizada envolve tantos termos no segundo membro de cada equação quantas forem as variáveis intermediárias.

Exemplo 10: Seja $z = uv + uw + vw$, onde $u = x$, $v = x\cos t$ e $w = x\sin t$. Encontre $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$:
R.: $z_x = 2x(\cos t + \sin t + \sin t\cos t)$ e $z_t = x^2(\cos t - \sin t + \cos^2 t - \sin^2 t)$.

Observação 3: Supondo que z seja uma função diferenciável de duas variáveis x e y e ambas as funções diferenciáveis de uma única variável t, então, em vez da derivada parcial de z em relação a x, teremos a derivada ordinária de z em relação a t.

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Exemplo 11: Se $z = u^2 + 2uv + v^2$, com $u = x\cos x$ e $v = x\sin x$, ache $\frac{dz}{dx}$:
R.: $2x(1 + 2\sin x\cos x + x\cos^2 x - x\sin^2 x)$.

2.6 LISTA DE EXERCÍCIOS 4

1) Use a regra da cadeia para achar $\frac{\partial w}{\partial z}$ se $w = r^2 + sv + t^3$, com $r = x^2 + y^2 + z^2$, $s = xyz$, $v = xe^y$ e $t = yz^2$.
Resposta: $4z(x^2 + y^2 + z^2) + x^2ye^y + 6y^3z^5$.

2) Use a regra da cadeia para achar $\frac{dw}{dt}$ se $w = x^2 + yz$, com $x = 3t^2 + 1$, $y = 2t - 4$ e $z = t^3$. Resposta: $44t^3 - 12t^2 + 12t$.

3) Ache as derivadas parciais, usando a regra da cadeia:
a) $z = u^2 + v^2$, $u = \cos x \cos y$ e $v = \sin x \sin y$

Resposta: $z_x = 2\sin x \cos x(\sin^2 y - \cos^2 y)$ e $z_y = 2\sin y \cos y(\sin^2 x - \cos^2 x)$
b) $z = \sin(uv)$, $u = 2xe^y$ e $v = y^2e^{-x}$

Resposta: $z_x = 2y^2e^{y-x}\cos(2xy^2e^{y-x})(1-x)$ e $z_y = 2xye^{y-x}\cos(2xy^2e^{y-x})(y+2)$

c) $w = ue^{-v}$, $u = \tan^{-1}(xyz)$ e $v = \ln(3xy + 5yz)$ Lembre que $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$

Resposta:
$$w_x = \frac{1}{(3xy+5yz)}\left(\frac{yz}{1+(xyz)^2} - \frac{\tan^{-1}(xyz)3y}{(3xy+5yz)}\right)$$
$$w_y = \frac{1}{(3xy+5yz)}\left(\frac{xz}{1+(xyz)^2} - \frac{\tan^{-1}(xyz)(3x+5z)}{(3xy+5yz)}\right) \quad w_z = w_y = \frac{1}{(3xy+5yz)}\left(\frac{xy}{1+(xyz)^2} - \frac{\tan^{-1}(xyz)5y}{(3xy+5yz)}\right)$$

d) $z = \sin^{-1}(3u + v)$, $u = x^2e^y$ e $v = \sin xy$

(Lembre que $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$) Resposta: $z_x = \frac{6xe^y + y\cos(xy)}{\sqrt{1-(3x^2e^y + \sin(xy))^2}}$
e $z_y = \frac{3x^2e^y + x\cos(xy)}{\sqrt{1-(3x^2e^y + \sin(xy))^2}}$

4) Ache a derivada total $\frac{dz}{dx}$, usando a regra da cadeia:

a) $w = \sqrt{u^2 + v^2 + z^2}$, $u = \tan x$, $v = \cos x$ e $z = \sin x$ R.: $w' = \frac{\tan x \sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x + 1}}$

b) $z = ve^u + ue^v$, $u = \cos x$ e $v = \sin x$
R.: $z' = e^{\cos x}(\cos x - \sin^2 x) + e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$

c) $w = uv + uz + vz$, $u = x\cos x$, $v = x\sin x$ e $z = x$
R.: $w' = -x^2\sin^2 x + x^2\cos^2 x - x^2\sin x + x^2\cos x + 2x\sin x\cos x + 2x\cos x + 2x\sin x$

5) Seja $w = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$, onde $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$e $z = \frac{1}{t}$calcule $\frac{\partial w}{\partial t}(3)$

Veja que você precisa calcular as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{z}.(-2\sin t\cos t) + \frac{1}{z}(2\sin t\cos t) + \left(\frac{-x-y}{z^2}\right)\left(\frac{-1}{t^2}\right)$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = -2t\sin t\cos t + 2t\sin t\cos t + (\cos^2 t + \sin^2 t)t^2.\frac{1}{t^2}$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = 1$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}(3) = 1$$

6) Resolva os exercícios ímpares do número 1 ao 25 do livro: Cálculo James Stewart volume 2 página 936.

1–6 □ Use a Regra da Cadeia para determinar dz/dt ou dw/dt.

1. $z = x^2y + xy^2, \quad x = 2 + t^4, \quad y = 1 - t^3$

2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = e^{2t}, \quad y = e^{-2t}$

3. $z = \operatorname{sen} x \cos y, \quad x = \pi t, \quad y = \sqrt{t}$

4. $z = x \ln(x + 2y), \quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t$

5. $w = xe^{y/z}, \quad x = t^2, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + 2t$

6. $w = xy + yz^2, \quad x = e^t, \quad y = e^t \operatorname{sen} t, \quad z = e^t \cos t$

7–12 □ Utilize a Regra da Cadeia para determinar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

7. $z = x^2 + xy + y^2, \quad x = s + t, \quad y = st$

8. $z = x/y, \quad x = se^t, \quad y = 1 + se^{-t}$

9. $z = \operatorname{arctg}(2x + y), \quad x = s^2t, \quad y = s \ln t$

10. $z = e^{xy} \operatorname{tg} y, \quad x = s + 2t, \quad y = s/t$

11. $z = e^r \cos \theta, \quad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

12. $z = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \beta, \quad \alpha = 3s + t, \quad \beta = s - t$

15. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(u, v) = f(e^u + \operatorname{sen} v, e^u + \cos v)$. Use a tabela de valores para calcular $g_u(0, 0)$ e $g_v(0, 0)$.

	f	g	f_x	f_y
(0, 0)	3	6	4	8
(1, 2)	6	3	2	5

16. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$. Use a tabela de valores do Exercício 15 para calcular $g_r(1, 2)$ e $g_s(1, 2)$.

17–20 □ Utilize o grafo da árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso dado. Assuma que todas as funções sejam diferenciáveis.

17. $u = f(x, y)$, onde $x = x(r, s, t)$, $y = y(r, s, t)$

18. $w = f(x, y, z)$, onde $x = x(t, u)$, $y = y(t, u)$, $z = z(t, u)$

19. $v = f(p, q, r)$, onde $p = p(x, y, z)$, $q = q(x, y, z)$, $r = r(x, y, z)$

20. $u = f(s, t)$, onde $s = s(w, x, y, z)$, $t = t(w, x, y, z)$

21–26 □ Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas.

21. $z = x^2 + xy^3, \quad x = uv^2 + w^3, \quad y = u + ve^w$;
$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial w}$ quando $u = 2, v = 1, w = 0$

22. $u = \sqrt{r^2 + s^2}, \quad r = y + x \cos t, \quad s = x + y \operatorname{sen} t$;
$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$ quando $x = 1, y = 2, t = 0$

23. $R = \ln(u^2 + v^2 + w^2), \quad u = x + 2y, \quad v = 2x - y, \quad w = 2xy$;
$\dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial R}{\partial y}$ quando $x = y = 1$

24. $M = xe^{y - z^2}, \quad x = 2uv, \quad y = u - v, \quad z = u + v$;
$\dfrac{\partial M}{\partial u}, \dfrac{\partial M}{\partial v}$ quando $u = 3, v = -1$

25. $u = x^2 + yz, \quad x = pr \cos \theta, \quad y = pr \operatorname{sen} \theta, \quad z = p + r$;
$\dfrac{\partial u}{\partial p}, \dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial \theta}$ quando $p = 2, r = 3, \theta = 0$

26. $Y = w \operatorname{tg}^{-1}(uv), \quad u = r + s, \quad v = s + t, \quad w = t + r$;
$\dfrac{\partial Y}{\partial r}, \dfrac{\partial Y}{\partial s}, \dfrac{\partial Y}{\partial t}$ quando $r = 1, s = 0, t = 1$

R:

1. $4(2xy + y^2)t^3 - 3(x^2 + 2xy)t^2$

3. $\pi \cos x \cos y - (\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)/(2\sqrt{t})$

5. $e^{y/z}[2t - (x/z) - (2xy/z^2)]$

7. $\partial z/\partial s = 2x + y + xt + 2yt, \ \partial z/\partial t = 2x + y + xs + 2ys$

9. $\dfrac{\partial z}{\partial s} = \dfrac{4st + \ln t}{1 + (2x + y)^2}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{2s^2 + s/t}{1 + (2x + y)^2}$

11. $\dfrac{\partial z}{\partial s} = e^r\left(t \cos \theta - \dfrac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} \operatorname{sen} \theta\right),$

$\dfrac{\partial z}{\partial t} = e^r\left(s \cos \theta - \dfrac{t}{\sqrt{s^2 + t^2}} \operatorname{sen} \theta\right)$

13. 62 **15.** 7, 2

17. $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}$

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}$

19. $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x},$

$\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y},$

$\dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial v}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial z}$

21. 85, 178, 54 **23.** $\frac{9}{7}, \frac{9}{7}$ **25.** 36, 24, 30

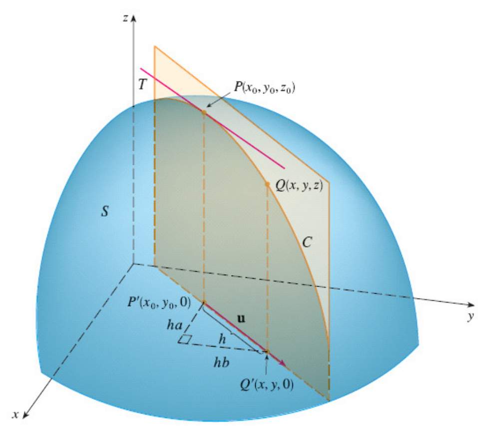
2.7 DERIVADA DIRECIONAL

Se f é uma função das variáveis x e y, então podem ser definidas suas derivadas parciais, f_x e f_y, que representam, respectivamente, a taxa de variação de f na direção do eixo x e a taxa de variação de f na direção do eixo y.

O conceito de derivada parcial pode ser generalizado a fim de que possa ser obtida a taxa de variação de uma função em qualquer direção do plano onde ela está definida. Essa idéia resulta no conceito de **derivada direcional**.

A derivada direcional, que representa a taxa de variação numa determinada direção, pode ser entendida como uma "combinação " das derivadas parciais, ou seja das taxas de variação nos eixos coordenados.

Para obter a taxa de variação de f no ponto (x_0, y_0) na direção e sentido de um vetor unitário $\vec{u} = (a, b)$, consideramos o ponto $P(x_0, y_0, z_0)$. O plano vertical que passa por P na direção de $\vec{u}$ intercepta a superfície S em uma curva C. A inclinação da reta tangente T a C em P é a taxa de variação de f na direção e sentido de $\vec{u}$.



Observe na figura que $\overrightarrow{PQ} = h\vec{u} = (ha, hb)$ para algum valor do escalar h. Dessa forma,

$x - x_0 = ha,\ y - y_0 = hb$, logo $x = x_0 + ha,\ y = y_0 + hb$, e

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h},$$

tomando $h \to 0$ obtemos a derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção e sentido do vetor unitário $\vec{u} = (a, b)$.

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se este limite existir.

TEOREMA 1: Se $f(x, y)$ tem derivadas parciais contínuas de primeira ordem num círculo com centro em (x_0, y_0), então para qualquer vetor unitário $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $D_u f(x_0, y_0)$ existe e é dada pela fórmula:

$$D_u f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) u_2$$

Prova: Definindo $g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb) = f(x(h), y(h))$.

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} = D_u f(x_0, y_0).$$

Usando a regra da cadeia, $g' = \dfrac{\partial g}{\partial x}\dfrac{dx}{dh} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{dy}{dh} = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$ e

$g'(0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b = D_u f(x_0, y_0)$.

Exemplo 12: Determine a derivada direcional da função $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ no ponto $(-1,1)$ na direção do vetor $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j}$. Resp.: $D_u f(-1,1) = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

Exemplo 13: Qual é a derivada de x^2y^5 no ponto $(3,1)$ na direção do vetor de origem $(3,1)$ e extremidade $(4,-3)$?
Resp.: $D_u f(3,1) = -\dfrac{174}{\sqrt{17}}$

Observação 4: Como o vetor unitário formando um ângulo θ com o vetor $\vec{i}$ é $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$, a derivada de f em (x_0, y_0) nessa direção e nesse sentido pode ser escrita na forma $D_u f(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\sin\theta$.

Exemplo 14: Ache a derivada direcional de $x^3 + 5x^2y$ em $(2,1)$ na direção que faz um ângulo $\frac{\pi}{4}$ rad com a orientação positiva do eixo dos x.
Resp.: $D_u f(2,1) = 26\sqrt{2}$.

Exemplo 15: Se $f(x,y) = ye^{xy}$, ache a derivada direcional em $(0,0)$, na direção de $\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.
Resp.: $D_u f(0,0) = \frac{3}{5}$.

Exemplo 16: A temperatura de um disco metálico é dada por $T(x,y) = \frac{25}{x^2+y^2+1}$. Calcule a taxa de variação da temperatura no ponto (**1**,**1**),

a) na direção do eixo x;

b) na direção que forma 30^o com o eixo x;

c) na direção que forma 40^o com o eixo y;

d) na direção do vetor $2i - j$.

Solução:

a) A taxa de variação de T na direção do eixo x, em (1,1) é dada pela derivada parcial na direção do eixo x, ou seja,

$T_x(1,1) = \frac{-50}{(1^2+1^2+1)^2} = -5.5556$

b) a taxa de variação da temperatura no ponto (**1**,**1**), na direção que forma 30^o com o eixo x é a derivada na direção do vetor

cos 30^oi+ sen30^oj que é dada pelo vetor $\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}j$, assim a taxa de variação de T na direção que forma 30^o com o eixo x no ponto (1,1) é $\frac{-25\sqrt{3}-\sqrt{25}}{9} = -5.3668$

c) a taxa de variação da temperatura no ponto (**1**,**1**), na direção que forma 40^o com o eixo y é a derivada na direção do vetor

cos 50^oi+ sen50^oj (pois na definição de derivda direcional o ângulo da direção é considerado o menor ãngulo que o vetor forma com o eixo x, considerando o sentido antihorário como positivo), que é dada pelo vetor

$0,642i + 0,76j$, assim a taxa de variação de T na direção que forma 40 ° com o eixo y no ponto (1,1) é $-7,79$.

d) a taxa de variação da temperatura no ponto (**1**,**1**), na direção do vetor 2i-j é $\frac{-10\sqrt{5}}{9}$.

2.8 Vetor Gradiente

Observação 5: A derivada direcional pode ser expressa como o produto escalar dos vetores $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ e $f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j}$. Este último vetor é denominado **gradiente de** f.

$$\overrightarrow{gradf} = \nabla f(x,y) = f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j}.$$

Dada uma função, como pode ser obtido o seu vetor gradiente, num dado ponto? Por exemplo, se $f(x,y) = x^3e^{2y}$, qual seu vetor gradiente no ponto $(-1,2)$?

O gradiente de uma função define uma função vetorial, ou seja, uma função que a cada ponto de $\Re^2$ associa um vetor. Para entender melhor essa idéia, esboce alguns vetores que representem a função vetorial definida pelo gradiente da função $z = x^2 + 2y^2$. Ou seja, calcule o gradiente de z, para 4 pontos, por exemplo: $(1,1), (-1,1), (-1,-1)$ e $(1,-1)$. Em cada um desses pontos desenhe seu respectivo vetor gradiente. Observe que, para cada ponto do plano, está associado um vetor gradiente, embora você tenha desenhado apenas quatro deles.

Uma função vetorial, como a função gradiente, é chamada de **campo vetorial**.

Da observação 5, sabe-se que a taxa de variação de uma função, numa dada direção, depende do produto escalar entre gradiente e vetor direção. Nesse sentido, a taxa de variação de uma função, numa dada direção, depende do ângulo entre o vetor gradiente e o vetor direção. Essa maneira de interpretar a derivada direcional é útil para resolver diversos problemas dessa área.

Utilize essa maneira de entender a derivada direcional para determinar a taxa de variação da função $h(x,y) = xy$, no ponto $(-1,3)$, na direção do vetor $2\vec{i} + \vec{j}$.

Quando se calcula a derivada direcional de uma função num ponto dado, dependendo da direção, o valor da derivada (taxa de variação) pode ser assumir diferentes valores. Em muitas situações o interesse está em encontrar a direção na qual a taxa de variação (valor da derivada) naquele ponto, é máxima. Ou seja, dentre as infinitas possibilidades de direção, a partir de um ponto dado, qual aquela que fornece a taxa máxima de variação?

Lembre-se de que a taxa de variação de uma função, num dado ponto, depende do angulo entre o vetor gradiente e o vetor direção, nesse ponto. Isso porque a derivada direcional é definida pelo produto escalar entre esses vetores. Relembre o conceito de produto escalar.

Com base nisso, conclua que a taxa de variação máxima ocorre na direção e sentido do vetor gradiente. Analogamente a taxa nula ocorre na direção perpendicular à do gradiente e a taxa mínima ocorre na mesma direção e sentido oposto ao do gradiente.

Considere a função $f(x,y) = xe^y$. Determine em que direção ocorre a taxa máxima de variação de f, no ponto $(2,0)$. Encontre também o valor dessa taxa máxima de variação. Resp.: taxa máxima de variação de f em $(2,0)$ é $\sqrt{5}$ e ocorre na direção do vetor $\vec{i} + 2\vec{j}$.

2.8.1 PROPRIEDADES DO GRADIENTE

Seja f diferenciável no ponto (x,y):

1) Se$\nabla f(x,y) = 0$, então $D_u f(x,y) = 0$ para todo $\vec{u}$.
2) A direção de crescimento máximo de f é dada por $\nabla f(x,y)$. O valor máximo de $D_u f(x,y)$ é $\|\nabla f(x,y)\|$.
3) A direção de crescimento mínimo de f é dada por $-\nabla f(x,y)$. O valor mínimo de $D_u f(x,y)$ é $-\|\nabla f(x,y)\|$.

Exemplo 17: Uma chapa de metal está situada em uma região plana de modo que a temperatura T expressos em graus F, em (x,y) seja inversamente proporcional à distância da origem e a temperatura em P(3,4) é 100^o F. Nessas condições, encontre, em P:

a) a taxa de variação de T em p na direção de i=y;
b) a direção em que T aumenta mais rapidamente;
c) a direção em que T decresce mais rapidamente;
d) a direção em que T é nula.
(a taxa de variação de T em p na direção de i=y é $\frac{-28}{\sqrt{2}}$;

Pelo enunciado, a temperatura é dada por $T(x,y) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$ onde k é uma constante de proporcionalidade como a temperatura em P(3,4) é 100^o F então $T(3,4) = \frac{k}{\sqrt{3^2+4^2}} = 100$ daí $k = 500$
dai $T(x,y) = \frac{500}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Assim,
a) a direção em que T aumenta mais rapidamente é dada pelo vetor $\nabla T\,(3,4) = -12i - 16j$;
b) a direção em que T decresce mais rapidamente é dada pelo vetor $-\nabla T\,(3,4) = 12i + 16j$;
c) a direção em que T é nula é a direção perpendicular ao $\nabla T\,(3,4) = -12i - 16j$;
considerando essa direção (a,b) então devemos ter o produto escalar de (a,b) pelo vetor $-12i - 16j$ igual a zero, ou seja,
$a = \frac{4}{3}b$ assim a direção onde a derivada é zero é dada por múltiplos do vetor $(1,\ \frac{4}{3})$, ou pelo versor $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

Analogamente, obtemos a direção do vetor $(1, \frac{3}{4})$ como outra direção onde a taxa é nula, que também pode ser expressa pelo versor (vetor unitário) $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$.

Exemplo 18: Encontre o gradiente da função dada e o valor máximo da derivada direcional no ponto indicado:

a) $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 \quad P(4,2)$ Resp.: $2\sqrt{17}$
b) $f(x,y) = y\sqrt{x} \quad P(4,2)$ Resp.: $\frac{\sqrt{17}}{2}$
c) $f(x,y) = y\cos(x-y) \quad P(0, \frac{\pi}{3})$ Resp.: aproximadamente 1.

2.9 LISTA DE EXERCÍCIOS 5

1) Encontre a derivada direcional de $f(x,y) = 3x^2 - 2y^2$ em $(-1,3)$, na direção e sentido de $P = (-1,3)$ a $Q = (1,-2)$. Resp.: $\frac{48}{\sqrt{29}}$.

2) Encontre a derivada direcional da função dada na direção de $\vec{v}$ em P :

a) $f(x,y) = 3x - 4xy + 5y$, $P(1,2)$, $\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}\right)$. Resp.: $\frac{\sqrt{3}-5}{2}$

b) $f(x,y) = xy$, $P(2,3)$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ Resp.: $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $P(3,4)$, $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$. Resp.: $-\frac{7}{25}$

d) $f(x,y) = e^x \sin y$, $P(1,\frac{\pi}{2})$, $\vec{v} = -\vec{i}$ Resp.: $-e$

e) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$, $P(1,1,1)$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ Resp.: $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

3) Seja $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e os pontos P(-2,3,1) e Q(3,1,-4).

a) Ache a derivada de f em P na direção de P para Q.

Resposta: A derivada de f em P na direção de P para Q é dada pelo produto escalar do gradiente de f em P, pelo vetor direção unitarizado,

$\nabla f(P) = (-2,3,1)\frac{1}{\sqrt{14}}$ a direção de P para Q é dada pelo vetor $(5,-2,-5)$. a derivada de f em P na direção de P para Q é $\frac{-7}{2\sqrt{21}}$

b) ache um vetor unitário na direção em que f cresce mais rapidamente em P e determine o valor dessa taxa de crescimento.

Resposta: O vetor unitário na direção em que f cresce mais rapidamente em P é o vetor gradiente (que nesse caso é unitário). O valor da dessa taxa , no caso, é 1.

4) A temperatura em uma região do plano é dado por $T(x,y) = \frac{100}{(x^2+y^2)}$.

a) Se a partir do ponto $(1,2)$ nos movermos no sentido positivo do eixo x, a temperatura aumenta ou diminui? Justifique tua resposta.

b) Em que ponto (a,b) a temperatura vale 45^oC, sabendo que a taxa de variação com relação a distância percorrida na direção do eixo y, sentido positivo, nesse ponto, é igual a $12^oC/cm$?

c) Calcule o gradiente da temperatura em $(3,4)$.

Solução:

Determine a partir do ponto (1,2) a direção em a temperatura permanece constante.

a) Se nos movermos no sentido positivo do eixo x, a partir do ponto (1,2), temos a derivada de T na direção do eixo x, em (1,2), que é a derivada parcial de T em relação a x, em (1,2). Seu valor é -8, portanto nessa situação a temperatura diminui, pois o valor da derivada é negativo.

b) O ponto (a,b) onde a temperatura vale 45^oC é dado por $T(a,b) = \frac{100}{(a^2+b^2)} = 45$ ou seja, $(a^2+b^2) = \frac{100}{45} = \frac{20}{9}$.

Nesse ponto a taxa de variação com relação a distância percorrida na direção do eixo y, sentido positivo, é igual a 12, então:

$T_y(a,b) = 12 = \frac{-200b}{(a^2+b^2)^2}$ Então temos duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} (a^2+b^2) = \frac{20}{9} \\ 12 = \frac{-200b}{(a^2+b^2)^2} \end{cases}$$

Resolvendo temos que $b = -\frac{8}{27}$ e $a = -\frac{2}{27}\sqrt{389}$.

5) A temperatura, em graus Celsius, na superfície de uma placa metálica é dada por $T(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$, onde x e y são medidos em polegadas. Em que direção a temperatura cresce mais rapidamente no ponto $(2,-3)$? Qual a taxa de crescimento?

Resp.: $\nabla f = (-16,6)$ e $|\nabla f| \approx 17$.

6) Encontre o gradiente da função dada e o valor máximo da derivada direcional no ponto indicado:

a) $f(x,y) = x\tan y$, $P(2, \frac{\pi}{4})$. Resp.: $\tan y\vec{i} + x\sec^2 y\vec{j}$, $\sqrt{17}$

b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $P(1,4,2)$. Resp.: $\dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 1

7) O potencial elétrico V em (x,y,z) é dado por $V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$

a) Ache a taxa de variação de V em $P(2,-1,3)$ na direção de P para a origem.

Resp.: A taxa de variação de V em P(2,-1,3) na direção de P para a origem, é dada pela derivada de V em P, na direção do vetor $-2i + j - 3k$, que é o produto escalar de $(4,-8,54) \cdot (-2,1,-3)\frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{-178}{\sqrt{14}}$: $D_uV(2,-1,3) = -\frac{178}{\sqrt{14}}$.

b) Ache a direção que produz a taxa máxima de variação de V em P?

Resp.: a taxa de variação de V é máxima em P na direção do vetor gradiente de V em P, que é a direção do vetor $(4,-8,54)$. $\nabla V = (4,-8,54)$.

c) Qual é a taxa máxima de variação em P?

Resp.: O valor dessa taxa máxima é o módulo desse vetor, que é $|\nabla V| = \sqrt{2996} = 54,74$.

8) A superfície de um lago é representada por uma região D no plano xy de modo que a profundidade (em metros) sob o ponto (x,y) é $f(x,y) = 300 - 2x^2 - 3y^2$. Em que direção um bote em $P(4,9)$ deve navegar para que a profundidade da água decresça mais rapidamente? Resp.: $\nabla f = (-16,-54)$ e $-\nabla f = (16,54)$.

9) A temperatura T em (x,y,z) é dada por $T = 4x^2 - y^2 + 8z^2$.

a) Ache a taxa de variação de T em $P(1,2,-1)$ na direção de $-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Resp.: $D_uT(1,2,-1) = \frac{12}{\sqrt{14}}$

b) Em que direção T aumenta mais rapidamente em P? Resp.: $\nabla T = (8,-4,-16)$

c) Qual é esta taxa máxima de variação? Resp.: $|\nabla T| = 18,33$

d) Em que direção T decresce mais rapidamente em P? Resp.: $-\nabla T = (-8,4,16)$

10) Seja $f(x,y) = 3 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}$. Encontre um vetor v ortogonal ao $\nabla f(3,2)$ e determine a taxa de variação de f na direção de v e interprete o significado geométrico desse valor encontrado. É possível generalizar esse resultado, ou seja, a taxa de variação de uma dada função na direção perpendicular ao gradiente é sempre nula? Justifique sua resposta, com base em argumentos da teoria.

Resp.: $\vec{v} = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, 1\right)$ e $D_vf = 0$.

11) Considere a função dada por $g(x,y) = 2x^2 - y^3$, para (x,y) pares de números reais. No ponto $(1,1)$, qual o valor da taxa de variação máxima e em que direção ela ocorre? Resp.: 5, na direção do vetor $(4,-3)$.

12) Dada a função $h(x,y) = x^2e^y$, para (x,y) pares de números reais.
Estando no ponto $(1,0)$, em que direção a taxa de variação é
a)máxima;
b)nula;
c)mínima
Resp.: a) $(2,1)$ b) $(-1,2)$ e $(1,-2)$ c) $(-2,-1)$

13) A temperatura T (em $\circ$ C) em qualquer ponto da região 10≤ x ≤10, -10≤ y ≤10 é dada pela função $T(x,y) = 100 - x^2 - y^2$.
a) Esboce curvas isotérmicas (curvas de temperatura constante) para $T = 100 \circ C, T = 75 \circ C, T = 50 \circ C$, $T = 25 \circ C$ e $T = 0 \circ C$.
b) Suponha que um inseto que procura calor é colocado em qualquer ponto do plano xy. Em qual direção ele deveria mover-se para aumentar sua temperatura mais depressa? Como se relaciona a direção com a curva de nível por esse ponto?

2.10 Máximos e mínimos para função de várias variáveis

Pesquisa de máximos e mínimos locais de funções reais a duas variáveis reais definidas em regiões abertas do plano $z = f(x,y)$.
Os máximos e mínimos locais estarão entre os pontos (x,y) que satisfazem à condição de primeira ordem: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Pontos críticos.

Para decidir se estes pontos são máximos ou mínimos locais usa-se a condição de segunda ordem:
Seja (x^*,y^*) um ponto crítico, ou seja, um ponto que satisfaz às condições de primeira ordem. Seja $H(x^*,y^*)$ o determinante Hessiano $H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$ onde todas as derivadas parciais devem ser calculadas em (x^*,y^*).

1) Se $H > 0$ e $f_{xx} > 0$, então (x^*,y^*) é **mínimo local**.
2) Se $H > 0$ e $f_{xx} < 0$, então (x^*,y^*) é **máximo local**.
3) Se $H < 0$, então (x^*,y^*) é **ponto de sela**. (f não tem nem máximo nem mínimo local)

Exemplo 19: Examine a função $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4 + 1$ para máximos e mínimos.

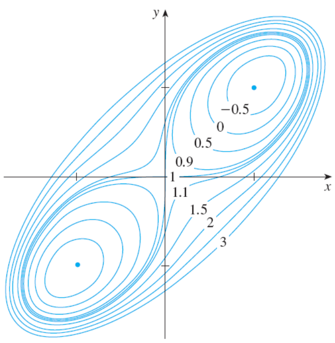
$f_x = 4x^3 - 4y;$ $f_y = 4y^3 - 4x,$ igualando estas duas derivadas a zero, obtemos as equações.
$x^3 - y = 0$ e $y^3 - x = 0;$ substituindo $y = x^3$ da primeira equação na segunda, obtemos.
$x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$

e existem 3 raízes reais: $x = 0, 1, -1$. Os três pontos críticos são: $(0,0)$, $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

Agora calculando as segundas derivadas.

$f_{xx} = 12x^2$; $f_{xy} = -4$; $f_{yy} = 12y^2$; $H = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 144x^2y^2 - 16$.

$H(0,0) = -16 < 0$ então $(0,0)$ é **ponto de sela**.
$H(1,1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$ então $(1,1)$ é **mínimo local e** $f(1,1) = -1$.
$H(-1,-1) = 128 > 0$ e $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0$ então $(-1,-1)$ é **mínimo local e** $f(-1,-1) = -1$.



Exemplo 20: Examine a função $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$ para máximos e mínimos. Resp.: $(0,0)$ é ponto de sela.

Exemplo 21: Examine a função $f(x,y) = 25 + (x-y)^4 + (y-1)^4$ para máximos e mínimos. Resp.: $(1,1)$ nada se pode afirmar.

2.11 Máximos e mínimos vinculados: Multiplicadores de Lagrange

Máximos e mínimos condicionados da função $z = f(x,y)$, quando x e y estão submetidos ao vínculo $g(x,y) = k$. São obtidos da "porção" (x,y) das soluções (x,y,λ) do sistema que descreve as condições de primeira ordem $\nabla f(x,y) - \lambda \nabla g(x,y)$, onde $\lambda \neq 0$.

Exemplo 22: Ache os máximos e mínimos, se houver, de $f(x,y) = xy$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 8$.
Solução:
Para obter as três equações de Lagrange, procedemos da seguinte maneira:
$F(x,y,\lambda) = xy - (x^2 + y^2 - 8)\lambda$.

Calcule as derivadas parciais em relação a x e y:
$f_x = y = g_x = 2x\lambda$; $f_y = x = g_y = 2y\lambda$; $x^2 + y^2 = 8$

Isolando λ nas duas primeiras equações, obtemos:
$\lambda = \frac{y}{2x}$, $\lambda = \frac{x}{2y}$, ou seja, $\frac{y}{2x} = \frac{x}{2y} \Rightarrow 2y^2 = 2x^2 \Rightarrow y^2 = x^2$

Fazendo $y^2 = x^2$ na terceira equação, obtemos: $x^2 + x^2 = 8 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Se $x = 2$, a equação $x^2 = y^2$ leva a $y = 2$ ou $y = -2$

Se $x = -2$, a equação $x^2 = y^2$ também leva a $y = 2$ ou $y = -2$. Assim, os quatro pontos em que podem ocorrer extremos com restrições são: $(2,2),(2,-2),(-2,2)$ e $(-2,-2)$. Como $f(2,2) = f(-2,-2) = 4$ e $f(2,-2) = f(-2,2) = -4$, temos que o valor máximo de $f(x,y)$ é 4, que ocorre nos pontos $(2,2)$ e $(-2,-2)$ e o valor mínimo é -4, que ocorre nos pontos $(2,-2)$ e $(-2,2)$.

Observação: Máximos e mínimos condicionados têm aplicação em diversas áreas, como por exemplo:

Em economia, uma empresa pode tentar maximizar seus lucros, mas só pode produzir de acordo com as propriedades técnicas de sua função produção.

Em engenharia, pode-se precisar adequar a curva de resposta de um determinado componente eletrônico para otimizar seu rendimento, porém está amarrado a esta otimização a faixa de temperatura de operação do mesmo.

Até mesmo em nosso dia-a-dia este problema persiste: geralmente, precisamos maximizar a utilidade de nossos bens de consumo, porém não podemos comprar combinações de bem que excedam nossa renda.

2.12 LISTA DE EXERCÍCIOS 6

1) Se $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$, ache os extremos locais e os pontos de sela de f: Resp.: $(4,2)$ ponto de mínimo e $(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$ ponto de sela.

2) Ache os extremos e os pontos de sela de $f(x,y) = x^3 + 3xy - y^3$. Resp.: $(0,0)$ ponto de sela e $(1,-1)$ ponto de mínimo

3) Dada a equação $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$. Determine os pontos de valor máximo, minimo local ou ponto de sela.
Resp.: máximo local em $(-2,-2)$

4) Encontre todos os máximos locais, mínimos locais e pontos de sela da função $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$. Resp.: ponto de sela em $(0,0)$ e máximo local em $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

5) A temperatura na superfície de uma placa de metal é dada pela equação $T(x,y) = 8y^3 + 12x^2 - 24xy$. Determine os pontos onde a temperatura atinge valor máximo, minimo local ou ponto de sela. Resp.: Nada se pode afirmar.

6)Resolva os exercícios ímpares do número 5 ao 11 da página 959 e 3 ao 11 da página 968 do livro : Cálculo Volume 2 James stewart.

5–18 □ Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Se você tiver um programa para traçar gráficos tridimensionais no computador, utilize-o com a janela de inspeção e o ponto de vista que mostre os aspectos importantes da função.

5. $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

6. $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

7. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$

8. $f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2}$

9. $f(x, y) = (1 + xy)(x + y)$

10. $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

11. $f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2$

3–17 □ Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

3. $f(x, y) = x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = 1$

4. $f(x, y) = 4x + 6y; \quad x^2 + y^2 = 13$

5. $f(x, y) = x^2y; \quad x^2 + 2y^2 = 6$

6. $f(x, y) = x^2 + y^2; \quad x^4 + y^4 = 1$

7. $f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 35$

8. $f(x, y, z) = 8x - 4z; \quad x^2 + 10y^2 + z^2 = 5$

9. $f(x, y, z) = xyz; \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

10. $f(x, y, z) = x^2y^2z^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

11. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2; \quad x^4 + y^4 + z^4 = 1$

12. $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Respostas

5. Máximo $f(-1, \frac{1}{2}) = 11$
7. Mínimo $f(1, 1) = 0$, $f(-1, -1) = 0$, pontos de sela em $(0, 0)$
9. Pontos de sela em $(1, -1)$, $(-1, 1)$
11. f tem um valor máximo local de 1 em todos os pontos da forma (x_0, x_0).

1. $\approx 59, 30$ **3.** Máximos $f(\pm 1, 0) = 1$, mínimos $f(0, \pm 1) = -1$
5. Máximos $f(\pm 2, 1) = 4$, mínimos $f(\pm 2, -1) = -4$
7. Máximo $f(1, 3, 5) = 70$, mínimo $f(-1, -3, -5) = -70$
9. Máximo $2/\sqrt{3}$, mínimo $-2/\sqrt{3}$
11. Máximo $\sqrt{3}$, mínimo 1

2.13 Exercícios Complementares 7

1) Mostre que $u = \sin(x - at) + \ln(x + at)$ é solução da equação da onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

2) Use a regra da cadeia para determinar $\frac{dz}{dt}$ se $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ com $x = e^{2t}$ e $y = e^{-2t}$.
Resp.: $z' = \dfrac{2e^{4t}}{\sqrt{e^{4t} + e^{-4t}}} - \dfrac{2e^{-4t}}{\sqrt{e^{4t} + e^{-4t}}}$

3) Se $f(x, y, z) = x \sin yz$, determine:
a) o gradiente de f. Resp.: $\nabla f = \sin(yz)\vec{i} + xz\cos(yz)\vec{j} + xy\cos(yz)\vec{k}$
b) a derivada direcional de f no ponto $(1, 3, 0)$ na direção do vetor $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Resp.: $D_u f(1, 3, 0) = -\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

4) Dê o domínio da função: $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$.
Resp.: $\left\{(x, y) \in \Re^2 \backslash \frac{x^2}{16} + y^2 \le 1\right\}$

5) Ache todas as derivadas parciais segundas de $z = (x^2 + y^2)^4$.
Resp.: $z_x = 8x(x^2 + y^2)^3$, $z_y = 8y(x^2 + y^2)^3$, $z_{xx} = 8(x^2 + y^2)^3 + 48x^2(x^2 + y^2)^2$,
$z_{yy} = 8(x^2 + y^2)^3 + 48y^2(x^2 + y^2)^2$, $z_{xy} = z_{yx} = 48xy(x^2 + y^2)^2$.

6) A temperatura num ponto (x, y, z) é dada por $T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$, onde T é medido em graus Celsius e x, y, z em metros.

a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $P(2, -1, 2)$ em direção ao ponto $(3, -3, 3)$. Resp.: $D_u T(2, -1, 2) = -\dfrac{10400e^{-43}}{\sqrt{6}}$

b) Qual é a direção de maior crescimento da temperatura em P? Resp.: $\nabla T = e^{-43}(-800, 1200, 7200)$

c) Encontre a taxa máxima de crescimento em P. Resp.: 1.5531×10^{-15}

7) Determine os domínios das funções e faça o esboço dos domínios :

a) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ Resp.: $D = \left\{(x, y) \in \Re^2 \backslash y \geq -x-1 \text{ e } x \neq 1\right\}$

b) $f(x, y) = x\ln(y^2 - x)$ Resp.: $D = \{(x, y) \in \Re^2 \backslash y^2 \geq x\}$

8) Faça o esboço das curvas de nível da função $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$, para $c = \pm 1, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{5}$:

9) Verifique se $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Resp.: $u_{xx} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$ e $u_{yy} = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$

10) Utilize a regra da cadeia para determinar $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ se $z = e^{xy}\tan y$, $x = s + 2t$ e $y = \dfrac{s}{t}$.

Resp.: $z_s = \dfrac{s}{t}e^{\frac{s^2+2st}{t}}\tan\left(\dfrac{s}{t}\right) + \dfrac{1}{t}\left((s+2t)e^{\frac{s^2+2st}{t}}\tan\left(\dfrac{s}{t}\right) + e^{\frac{s^2+2st}{t}}\sec^2\left(\dfrac{s}{t}\right)\right)$

$z_t = 2\dfrac{s}{t}e^{\frac{s^2+2st}{t}}\tan\left(\dfrac{s}{t}\right) - \dfrac{s}{t^2}\left((s+2t)e^{\frac{s^2+2st}{t}}\tan\left(\dfrac{s}{t}\right) + e^{\frac{s^2+2st}{t}}\sec^2\left(\dfrac{s}{t}\right)\right)$

11) Encontre a derivada de $f(x, y, z) = x^3 - xy^2 - z$ em $P_0(1, 1, 0)$ na direção de $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$. Em que direção f varia mais rapidamente em P_0 e qual é a taxa de variação máxima? Resp.: $D_u f = -\frac{8}{7}$, $\nabla f(1, 1, 0) = (2, -2, -1)$ e $|\nabla f| = 3$.

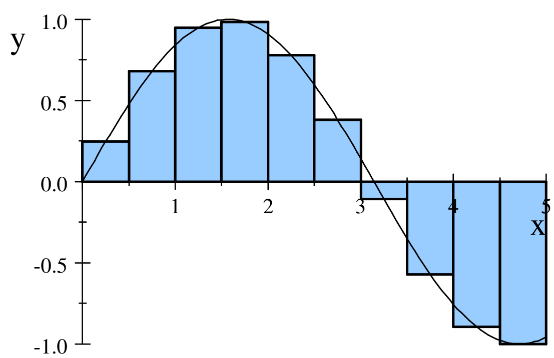
12) Localize todos os máximos e mínimos relativos e os pontos de sela, se houver, da função $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$. Resp.: ponto de sela em $(0, 0)$ e máxilo local em $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$.

3. Integrais Múltiplas

3.1 Área de uma Região Plana:

Definição:

Seja uma função contínua, não-negativa $y = f(x)$. Estudaremos a região A limitada inferiormente pelo eixo x, à esquerda pela reta $x = a$, à direita pela reta $x = b$ e superiormente pela curva $y = f(x)$.



Podemos tentar a aproximação da área A tomando retângulos inscritos ou circunscritos. A somatória das áreas de cada retângulo pode ser usada como uma aproximação para a área desejada.

A altura de cada retângulo é o valor da função $f(x)$ para algum ponto t ao longo da base do retângulo. Escolhemos Δx para a base de cada retângulo. A área será aproximadamente igual ao somatório:

$$S_n = f(t_1)\Delta x + f(t_2)\Delta x + \ldots + f(t_n)\Delta x$$
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x$$

quando usamos n retângulos com base Δx e t_i como um ponto ao longo da base do i-ésimo retângulo.

Observação: Quanto menor escolhermos a largura Δx , melhor será a aproximação da área sob a curva. Quando $\Delta x \to 0$, o número de termos n da somatória de aproximação S_n aumenta. De fato, quando $\Delta x \to 0$, $n \to \infty$ e a somatória S_n se aproxima da área exata A sob a curva. Este processo pode ser simbolizado por:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A.$$

A Integral Definida:

A área definida acima é chamada a integral de f no intervalo $[a,b]$, a qual é indicada com o símbolo $\int_a^b f(x)dx$ Por definição: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x.$

Quando este limite existe, dizemos que a função f é integrável no intervalo $[a,b]$.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO:

Para calcularmos o valor da integral definida, usamos o 2^o Teorema Fundamental do Cálculo que faz a relação entre a integral indefinida e a integral definida.

> Seja f contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e F uma função tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Então,
> $$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

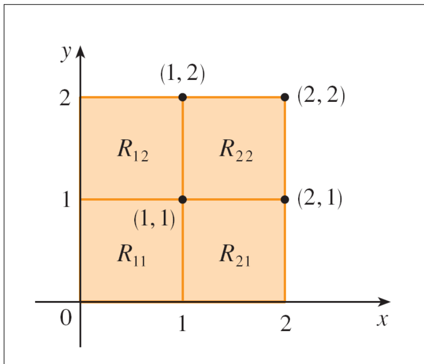
Exemplo 1: Calcule $\int_1^2 x^3 dx$. Resposta: $\frac{15}{4}$

Exemplo 2: Calcule $\int_3^6 (x^2 - 2x)dx$. Resposta: 36

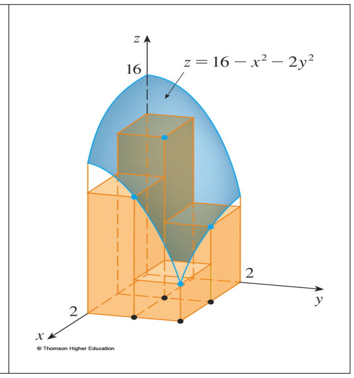
3.2 Integração Múltipla:

Lembre-se que uma função de duas variáveis está definida numa região do plano xy (que pode ser o próprio R2). Dessa forma parece natural considerar a integral de f, definida numa região do plano xy. Nesse caso as partições para definir a integral são pequenos retângulos.

Exemplo 3: Calcule o volume aproximado do solido que esta acima do quadrado $R = [0,2]x[0,2]$ e abaixo do paraboloide $z = 16 - x^2 - 2y^2$.



$$V \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\Delta A$$
$$= f(1,1)\Delta A + f(1,2)\Delta A + f(2,2)\Delta A$$
$$= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1)$$
$$= 34$$



O Volume é chamado a integral dupla de f no retângulo R é por definição.

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$

onde $dA = dydx$.

3.2.1 Integrais Repetidas ou Iteradas:

A idéia para calcular a integral dupla de uma dada função é considerar uma das variáveis fixa e variar a outra. Para entender essa idéia consideraremos uma região do plano bem simples: um retângulo R, de pontos de coordenadas (x,y) tal que: $a \le x \le b$ e $c \le y \le d$. Desenhe essa região para você entender melhor.

Seja $f(x,y)$ uma função contínua para os pontos desse retângulo e $f(x,y) \ge 0$ para $(x,y) \in R$. Se considerarmos x fixo e y variando de c à d, então f é uma função só de y e então podemos definir:

$$\int_c^d f(x,y)dy$$

que é a integral simples (de uma variável) que resulta numa função de x. Vamos chamar o valor dessa integral de $I(x)$, ou seja, $I(x) = \int_c^d f(x,y)dy$. Esse valor representa a área de uma "fatia" do sólido de base R e altura f. Veja se você visualiza essa região. Faça um esboço para ver se você entendeu.

Podemos agora definir $\int_a^b I(x)dx$, cujo valor é o volume do sólido de base R e altura f. Sendo assim a integral dupla pode ser calculada por integrais iteradas ou integrais parciais, da seguinte forma:

$$\iint_R f(x,y)dydx = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

Exemplo 4: Calcule a integral dupla $\int_R (x-3y^2)dydx$ na região $R = \{(x,y)|0 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\}$

Solução: $\int_R (x-3y^2)dydx = \int_0^2\int_1^2 (x-3y^2)dydx = \int_1^2\int_0^2 (x-3y^2)dxdy$

a) Calculando $\int_0^2\int_1^2 (x-3y^2)dydx$: para obter os extremos observe que a integral interna depende de y, portanto vamos examinar a região considerando x fixo e y variando: Qual a variação de y para cada x fixo?
Veja que para cada x fixo, na região, y varia de $y = 1$ à $y = 2$, portanto são esses os extremos da integral interna.
Para a integral externa vamos pensar de forma análoga: Nesse caso, x varia e y está constante: examinamos a região, perguntando: como x varia para cada y fixo?
Para cada y fixo, x varia de $x = 0$ à $x = 2$, e então esses são os extremos da integral externa.

b) Para $\int_1^2\int_0^2 (x-3y^2)dxdy$: calculamos primeiramente a integral interna em x e posteriormente a integral externa em y:

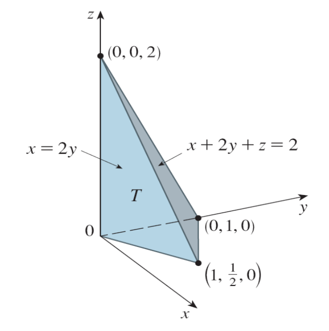
$\iint_R (x-3y^2)\,dA = \int_0^2\int_1^2 (x-3y^2)\,dy\,dx$ $= \int_0^2 \left[xy - y^3\right]_{y=1}^{y=2} dx$ $= \int_0^2 (x-7)\,dx = \left.\frac{x^2}{2} - 7x\right]_0^2$ $= -12$ a)	$\iint_R (x-3y^2)\,dA = \int_1^2\int_0^2 (x-3y^2)\,dx\,dy$ $= \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2\right]_{x=0}^{x=2} dy$ $= \int_1^2 (2-6y^2)\,dy = \left.2y - 2y^3\right]_1^2$ $= -12$ b)

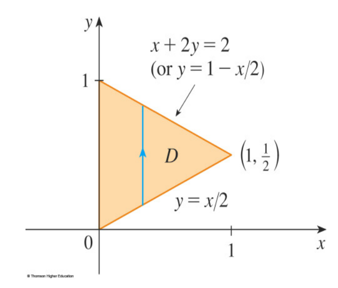
De forma mais geral:

$$\boxed{\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx} \quad \text{e} \quad \boxed{\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy}$$

Exemplo 5: Vamos calcular agora a integral da função $f(x,y) = 2-x-2y$ para valores de (x,y) da região limitada por $y = 1-\frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x$ e $x = 0$, $x = 1$. Desenhe essa região (no plano xy). Para encontrar os extremos observe que y varia de $y = \frac{1}{2}x$ à $y = 1-\frac{1}{2}x$ para cada x fixo e que x varia de $x = 0$ à $x = 1$ para varrer toda a região. Ou seja, temos:

$$\int_0^1\int_{\frac{1}{2}x}^{1-\frac{1}{2}x} (2-x-2y)dydx$$





$$V = \iint_D (2-x-y)\,dA = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2-x-2y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[2y - xy - y^2\right]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx$$

$$= \int_0^1 \left[2 - x - x\left(1-\frac{x}{2}\right) - \left(1-\frac{x}{2}\right)^2 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right] dx = \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \left.\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Observação: Os limites de integração interiores podem ser funções da variável de integração exterior, mas os limites de integração exteriores não podem depender de nenhuma das variáveis.

Exemplo 6: Calcule $\int_1^2 \int_0^x (2xy + 3)dydx$. R.: 33/4

Exemplo 7: Calcule $\int_1^4 \int_{-1}^2 (2x + 6x^2y)dydx$. R.: 234

3.2.2 Cálculo do Volume:

Observe que se f é positiva para os pontos de R, então o valor da integral dupla pode ser interpretado como o volume do sólido que tem por base R e altura f. Isto está relacionado a interpretação geométrica da integral dupla.

$$\boxed{V = \iint_R f(x, y)dA}$$

Em cada caso:
- Desenhe o sólido, em R^3, definido pelos gráficos das funções
- Identifique qual a região é base, no plano xy, do sólido e desenhe-a
- Identifique também a função que dá a altura do sólido
- Escreva a integral dupla cujo valor é o volume do sólido
- Calcule o valor do volume do sólido

Lembre-se: Se f é contínua, definida para x e y tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) em R, então a integral $\iint_R f(x, y)dA$ fornece o valor do volume da região abaixo do gráfico de f e acima de R. Assim, para calcular os volumes solicitados é preciso analisar com atenção esses aspectos.
Confira a seguir, os passos principais da resolução, em cada caso. Esteja atento para entender o que está sendo feito.

Exemplo 8: Calcule o volume da região limitada por $z = 1 - x^2$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 3$.

Solução: Base do sólido: retângulo limitado por $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 3$; Altura do sólido: cilindro $z = 1 - x^2$.
O volume do sólido é dado por: $V = \int_0^3 \int_{-1}^1 (1 - x^2)dxdy$

Exemplo 9: Calcule o volume da região limitada por $x + 2y + z = 4$ e os planos coordenados:

Solução: Base do sólido: triângulo limitado por $x + 2y = 4$, e os eixos coordenados. Altura do sólido: plano $z = 4 - x - 2y$.

O volume do sólido é dado por: $V = \int_0^4 \int_0^{\frac{4-x}{2}} (4 - x - 2y)dydx.$

3.3 Lista de Exercícios 8

1) Calcule a integral repetida de:

a) $\int_0^1 \int_0^2 (x+y)\,dydx$ R.: 3

b) $\int_1^2 \int_0^4 (x^2 - 2y^2 + 1)\,dxdy$ R.: 20/3

c) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\,dxdy$ R.: 2/3

d) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\,dxdy$ R.: 4

e) $\int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dydx$ R.: 1/3

2)Resolva os exercícios ímpares do número 3 ao 23 da página 992 e 24 ao 29 da página 993 do livro : Cálculo Volume 2 James Stewart.

3–12 Calcule a integral iterada.

3. $\int_1^3 \int_0^1 (1 + 4xy)\, dx\, dy$

4. $\int_2^4 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2)\, dy\, dx$

5. $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} y\, dy\, dx$

6. $\int_1^4 \int_0^2 (x + \sqrt{y})\, dx\, dy$

7. $\int_0^2 \int_0^1 (2x + y)^8\, dx\, dy$

8. $\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y}\, dy\, dx$

9. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy\, dx$

10. $\int_1^2 \int_0^1 (x + y)^{-2}\, dx\, dy$

11. $\int_0^{\ln 2} \int_0^{\ln 5} e^{2x-y}\, dx\, dy$

12. $\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}\, dy\, dx$

13–20 Calcule a integral dupla.

13. $\iint_R (6x^2y^3 - 5y^4)\, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

14. $\iint_R \cos(x + 2y)\, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2\}$

15. $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1}\, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

16. $\iint_R \frac{1 + x^2}{1 + y^2}\, dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

17. $\iint_R x \operatorname{sen}(x + y)\, dA$, $R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

18. $\iint_R \frac{x}{1 + xy}\, dA$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$

19. $\iint_R xye^{x^2y}\, dA$, $R = [0, 1] \times [0, 2]$

20. $\iint_R \frac{x}{x^2 + y^2}\, dA$, $R = [1, 2] \times [0, 1]$

21–22 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

21. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y)\, dx\, dy$

22. $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$

23. Determine o volume do sólido que se encontra abaixo do plano $3x + 2y + z = 12$ e acima do retângulo $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -2 \leqslant y \leqslant 3\}$.

24. Determine o volume do sólido que está abaixo do parabolóide hiperbólico $z = 4 + x^2 - y^2$ e acima do quadrado $R = [-1, 1] \times [0, 2]$.

25. Determine o volume do sólido contido abaixo do parabolóide elíptico $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ e acima do retângulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

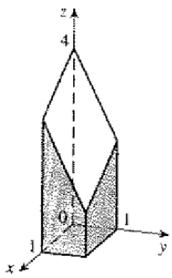
26. Determine o volume do sólido delimitado pela superfície $z = 1 + e^x \operatorname{sen} y$ pelos planos $x = \pm 1$, $y = 0$, $y = \pi$, e $z = 0$.

27. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x\sqrt{x^2 + y}$ e pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$.

28. Determine o volume do sólido limitado pelo parabolóide elíptico $z = 1 + (x - 1)^2 + 4y^2$, pelos planos $x = 3$ e $y = 2$ e pelos planos coordenados.

29. Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado pelo cilindro $z = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$.

R: **1.** $9 + 27y,\ 8x + 24x^2$ **3.** 10 **5.** 2 **7.** $261{,}632/45$
9. $\frac{21}{2}\ln 2$ **11.** 6 **13.** $\frac{21}{2}$ **15.** $9\ln 2$
17. $\left[(\sqrt{3} - 1)/2\right] - (\pi/12)$ **19.** $\frac{1}{2}(e^2 - 3)$
21.



23. $47{,}5$ **25.** $\frac{166}{27}$ **27.** $\frac{4}{15}(2\sqrt{2} - 1)$ **29.** 36

3)Resolva os exercícios ímpares do número 7 ao 12 da página 1000 do livro : Cálculo Volume 2 James Stewart.

7–18 Calcule a integral dupla.

7. $\displaystyle\iint_D x^3 y^2\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ -x \leq y \leq x\}$

8. $\displaystyle\iint_D \frac{4y}{x^3 + 2}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2x\}$

9. $\displaystyle\iint_D \frac{2y}{x^2 + 1}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

10. $\displaystyle\iint_D e^{y^2}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\}$

11. $\displaystyle\iint_D e^{x/y}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 2,\ y \leq x \leq y^3\}$

12. $\displaystyle\iint_D x\sqrt{y^2 - x^2}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\}$

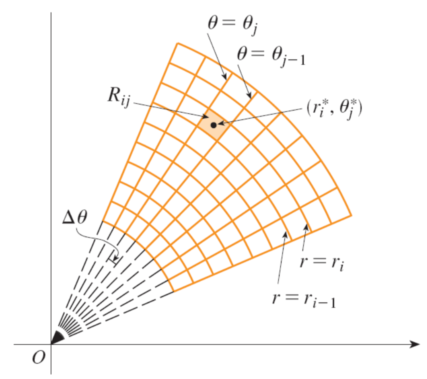
R: **1.** $\frac{9}{20}$ **3.** $\frac{4}{9}e^{3/2} - \frac{32}{45}$ **5.** $e - 1$ **7.** $\frac{256}{21}$ **9.** $\frac{1}{2}\ln 2$
11. $\frac{1}{2}e^4 - 2e$ **13.** $(1 - \cos 1)/2$ **15.** $\frac{147}{20}$ **17.** 0

3.4 Integrais Duplas em Coordenadas Polares:

Vamos ver agora como definir e calcular uma integral dupla quando o integrando e a região são expressos em coordenadas polares. Isso será útil, pois em muitas aplicações é mais simples e mais fácil utilizar coordenadas polares, ao invés de cartesianas. Isso acontecerá especialmente quando as regiões consideradas são limitadas por circunferências ou trechos delas.

As coordenadas polares no espaço também são denominadas de coordenadas cilíndricas.

O centro do subretangulo polar $R_{ij} = \{(r, \theta) | r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_i\}$ tem coordenadas polares $r_i^* = ½(r_{i-1} + r_i)$ e $\theta_j^* = ½(\theta_{j-1} + \theta_j)$. para calcular a área de R_{ij}, usamos o fato de que a área de um círculo de raio r e ângulo θ é $½r^2\theta$. Subtraindo as áreas de dois setores, cada um deles com ângulo central $\Delta_\theta = \theta_j - \theta_{j-1}$, descobrimos a área de R_{ij}.



$$\begin{aligned} \Delta A_i &= \tfrac{1}{2} r_i^2\, \theta - \tfrac{1}{2} r_{i-1}^2\, \Delta\theta \\ &= \tfrac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)\, \Delta\theta \\ &= \tfrac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})\, \Delta\theta \\ &= r_i^*\, \Delta r\, \Delta\theta \end{aligned}$$

As coordenadas retangulares do centro de R_{ij} são $(r_i^* cos\theta_j^*, r_i^* sin\theta_j^*)$. Assim a soma de Riemann é:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*)\, \Delta A_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*)\, r_i^*\, \Delta r\, \Delta\theta$$

Definição:

Se f é uma função contínua de r e θ em uma região plana R fechada e limitada, então a integral dupla de f em R em coordenadas polares é dada por

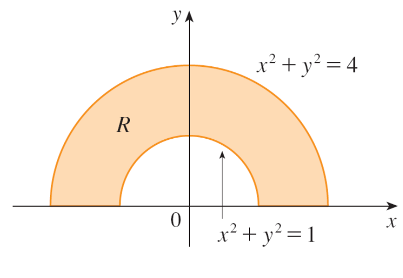
$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta$$

ou $$\iint_R f(r,\theta) dA = \iint_R f(r,\theta) r dr d\theta$$

Para transformar uma integral expressa em coordenadas cartesianas numa integral em coordenadas polares ou para escrever uma integral dupla em coordenadas polares é preciso identificar a região do plano na qual a integral está definida, bem como a função que está sendo integrada. A próxima etapa é expressar a região e a função em coordenadas polares, lembrando que:
$dA = dydx = dxdy = rdrd\theta$; $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$; $r^2 = x^2 + y^2$; $tg\theta = \frac{y}{x}$.

Para identificar os extremos da integral é preciso analisar a região R, examinando como varia r para cada valor fixo de θ e qual a variação de θ para que a região toda seja abrangida.

Exemplo 10: Calcule $\iint_R (3x + 4y^2) dA$ onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ and $x^2 + y^2 = 4$.

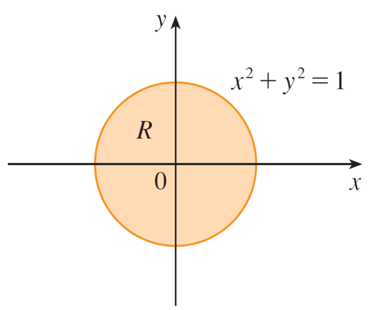


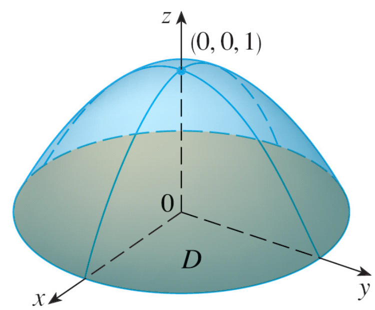
$R=\{(r,\theta)\mid 1\leqslant r\leqslant 2,\, 0\leqslant \theta\leqslant \pi\}$

$$\iint_R (3x+4y^2)\,dA$$
$$=\int_0^{\pi}\int_1^{2}(3r\cos\theta+4r^2\sin^2\theta)\,r\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{\pi}\int_1^{2}(3r^2\cos\theta+4r^3\sin^2\theta)\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{\pi}[r^3\cos\theta+r^4\sin^2\theta]_{r=1}^{r=2}\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}(7\cos\theta+15\sin^2\theta]\,d\theta$$
$$=\int_0^{\pi}[7\cos\theta+\tfrac{15}{2}(1-\cos 2\theta)]\,d\theta$$
$$=7\sin\theta+\frac{15\theta}{2}-\frac{15}{4}\sin 2\theta\Big]_0^{\pi}$$
$$=\frac{15\pi}{2}$$

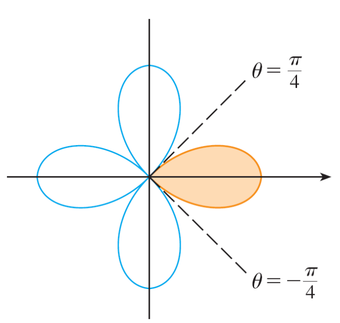
Exemplo 11: Determine o volume do sólido limitado pelo plano $z=0$ e pelo parabolóide $z=1-x^2-y^2$. Como $1-x^2-y^2=1-r^2$, o volume é:





$$V=\iint_D(1-x^2-y^2)dA=\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(r-r^3)dr$$
$$=2\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$$

Exemplo 12: Determine a área contida em um laço da rosácea de quatro pétalas $r=\cos 2\theta$.



$$A(D)=\iint_D dA=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{\cos 2\theta}r\,dr\,d\theta$$
$$=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}[\tfrac{1}{2}r^2]_0^{\cos 2\theta}\,d\theta$$
$$=\tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2 2\theta\,d\theta$$
$$=\tfrac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 4\theta)\,d\theta$$
$$=\tfrac{1}{4}[\theta+\tfrac{1}{4}\sin 4\theta]_{-\pi/4}^{\pi/4}=\frac{\pi}{8}$$

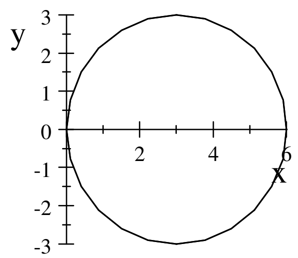
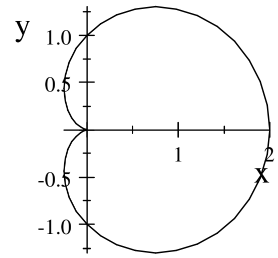
3.5 Lista de Exercícios 9

1) Calcule a integral dupla e esboce a região R:

a) $\int_0^{2\pi}\int_0^{6}3r^2\sin\theta r dr d\theta$ R.: 0

b) $\int_0^{\pi/2}\int_2^{3}\sqrt{9-r^2}\, r dr d\theta$ R.: $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}$

2) Use uma integral dupla para encontrar a área da região indicada:

 $r = 6\cos\theta$ R.: 9π	b) $r = 1 + \cos\theta$  R.: $\frac{3\pi}{2}$

3) Resolva os exercícios ímpares do número 7 ao 27 da página 1006: Cálculo, Volume 2, James Stewart.

7–8 □ Esboce a região cuja área é dada pela integral e calcule-a

7. $\int_{\pi}^{2\pi}\int_{4}^{7} r\,dr\,d\theta$ **8.** $\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{4\cos\theta} r\,dr\,d\theta$

9–16 □ Calcule a integral dada, colocando-a em coordenadas polares.

9. $\iint_R xy\,dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 3

10. $\iint_R (x + y)\,dA$, onde R é a região que está à esquerda do eixo y e entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$

11. $\iint_R \cos(x^2 + y^2)\,dA$, onde R é a região acima do eixo x e dentro da circunferência $x^2 + y^2 = 9$

12. $\iint_R \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dA$, onde $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0\}$

13. $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dA$, onde D é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ e o eixo y

14. $\iint_R ye^x\,dA$, onde D é a região do primeiro quadrante contida pelo círculo $x^2 + y^2 = 16$

15. $\iint_R \arctan(y/x)\,dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$

16. $\iint_D x\,dA$, onde D é a região do primeiro quadrante compreendida entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 2x$

21–27 □ Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido dado.

21. Abaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima do disco $x^2 + y^2 \leqslant 9$

22. Dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 4$

23. Uma esfera de raio a

24. Limitada pelo parabolóide $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ e pelo plano $z = 4$

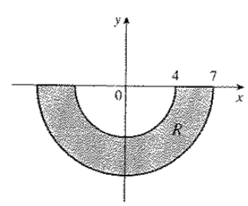
25. Acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

26. Limitada pelos parabolóides $z = 3x^2 + 3y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$

27. Dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$

R:

7.



$33\pi/2$

9. 0 **11.** $(\pi/2)\,\text{sen}\,9$ **13.** $(\pi/2)(1 - e^{-4})$
15. $\frac{3}{64}\pi^2$ **17.** $\pi/12$ **19.** $\frac{1}{8}(\pi - 2)$ **21.** $81\pi/2$ **23.** $\frac{4}{3}\pi a^3$
25. $(2\pi/3)\left[1 - (1/\sqrt{2})\right]$
27. $(8\pi/3)(64 - 24\sqrt{3})$ **29.** $(\pi/4)(e - 1)$ **31.** $4\pi/3$

3.6 Integrais de Superfície

1–12 □ Determine a área da superfície.

1. A parte do plano $z = 2 + 3x + 4y$ que está acima do retângulo $[0, 5] \times [1, 4]$
2. A parte do plano $2x + 5y + z = 10$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 9$
3. A parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante
4. A parte da superfície $z = 1 + 3x + 2y^2$ que está acima do triângulo com vértices (0, 0), (0, 1) e (2, 1)
5. A parte do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ que está acima do retângulo com vértices, (0, 0), (4, 0), (0, 2) e (4, 2)
6. A parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do plano xy
7. A parte do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$
8. A superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$
9. A parte da superfície $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$
10. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está acima do plano $z = 1$
11. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = ax$ e acima do plano xy
12. A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ que está dentro do parabolóide $z = x^2 + y^2$

13–14 □ Determine a área de superfície com precisão de quatro casas decimais, expressando a área em termos de integral de função de uma variável real e use sua calculadora para estimar o valor da integral.

13. A parte da superfície $z = e^{-x^2-y^2}$ que está acima do círculo $x^2 + y^2 \leqslant 4$
14. A parte da superfície $z = \cos(x^2 + y^2)$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

R: **1.** $15\sqrt{26}$ **3.** $3\sqrt{14}$ **5.** $12 \operatorname{sen}^{-1} \frac{2}{3}$
7. $(\pi/6)(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$ **9.** $(2\pi/3)(2\sqrt{\ }$
11. $a^2(\pi - 2)$ **13.** 13,9783 **15.** (a)

3.7 Integrais Triplas

1. Calcule a integral do Exemplo 1, integrando primeiro em relação a z, depois x e então y.

2. Calcule a integral $\iiint_E (xz - y^3)\, dV$, onde

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$$

utilizando três ordens diferentes de integração.

3–6 ▫ Calcule a integral iterada.

3. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz\, dy\, dx\, dz$

4. $\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^y 2xyz\, dz\, dy\, dx$

5. $\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y\, dx\, dz\, dy$

6. $\int_0^1 \int_0^z \int_0^y ze^{-y^2}\, dx\, dy\, dz$

7–16 ▫ Calcule a integral tripla.

7. $\iiint_E 2x\, dV$, onde
$E = \left\{(x, y, z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4 - y^2},\ 0 \leqslant z \leqslant y\right\}$

8. $\iiint_E yz \cos(x^5)\, dV$, onde
$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ x \leqslant z \leqslant 2x\}$

9. $\iiint_E 6xy\, dV$, onde E está abaixo do plano $z = 1 + x + y$ e acima da região do plano xy limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$

10. $\iiint_E y\, dV$, onde E é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $2x + 2y + z = 4$

11. $\iiint_E xy\, dV$, onde E é o sólido tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 3)$

12. $\iiint_E xz\, dV$, onde E é o sólido tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$

13. $\iiint_E x^2e^y\, dV$, onde E é limitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e pelos planos $z = 0$, $x = 1$, and $x = -1$

14. $\iiint_E (x + 2y)\, dV$, onde E é limitado pelo cilindro parabólico $y = x^2$ e pelos planos $x = z$, $x = y$ e $z = 0$

15. $\iiint_E x\, dV$, onde E é limitado pelo parabolóide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$

16. $\iiint_E z\, dV$, onde E é limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 3x$ e $z = 0$ no primeiro octante

R: **3.** 1 **5.** $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$ **7.** 4 **9.** [illegible]
13. $8/(3e)$ **15.** $16\pi/3$ **17.** $\frac{16}{3}$

3.8 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

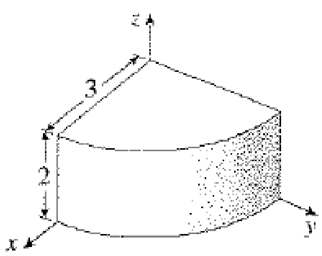
1–4 □ Faça o esboço do sólido cujo volume é dado pela integral e calcule essa integral.

1. $\int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_r^4 r\, dz\, d\theta\, dr$ **2.** $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{9-r^2} r\, dz\, dr\, d\theta$

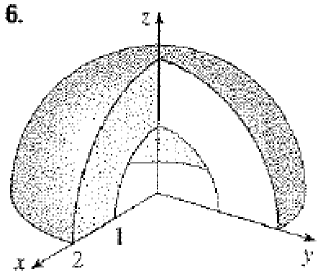
3. $\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen} \phi \; d\rho\, d\theta\, d\phi$ **4.** $\int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen} \phi \; d\rho\, d\phi\, d\theta$

5–6 □ Estabeleça a integral tripla de uma função contínua arbitrária $f(x, y, z)$ em coordenadas cilíndricas ou esféricas sobre o sólido mostrado.

5.



6.



7–16 □ Utilize as coordenadas cilíndricas.

7. Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$, onde E é a região contida dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$.

8. Calcule $\iiint_E (x^3 + xy^2)\, dV$, onde E é o sólido do primeiro octante que está abaixo do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$.

9. Calcule $\iiint_E e^z\, dV$, onde E está delimitado pelo parabolóide $z = 1 + x^2 + y^2$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 5$ e pelo plano xy.

10. Calcule $\iiint_E x\, dV$, onde E está delimitado pelos planos $z = 0$ e $z = x + y + 3$, pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

11. Calcule $\iiint_E x^2\, dV$, onde E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

12. Determine o volume do sólido que está dentro tanto do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ como da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

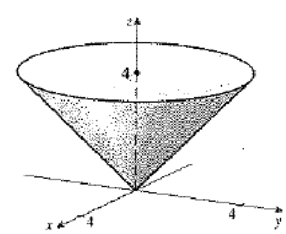
13. (a) Ache o volume da região E limitada pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.
(b) Encontre o centróide do E (centro de massa no caso em que a densidade é constante).

14. (a) Determine o volume do sólido que o cilindro $r = a \cos \theta$ corta da esfera de raio a centrada na origem.
(b) Ilustre o sólido da parte (a) desenhando a esfera e o cilindro na mesma tela.

15. Determine a massa e o centro de massa do sólido S limitado pelo parabolóide $z = 4x^2 + 4y^2$ e pelo plano $z = a$ $(a > 0)$ se S tem densidade constante K.

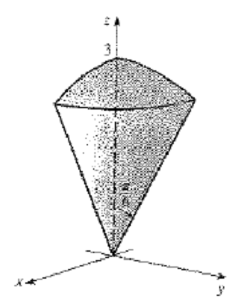
R:

1.



$64\pi/3$

3.



$(9\pi/4)(2 - \sqrt{3})$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^3 \int_0^2 f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$ **7.** 384π

9. $\pi(e^6 - e - 5)$ **11.** $2\pi/5$

13. (a) 162π (b) $(0, 0, 15)$

15. $\pi K a^2/8$, $(0, 0, 2a/3)$

17. $4\pi/5$ **19.** $15\pi/16$

4. CÁLCULO VETORIAL

4.1 Campos Vetoriais:

DEFINIÇÃO:Um campo vetorial em três dimensões é uma função $\vec{F}$ cujo domínio D é um subconjunto de $\Re^3$,

$$\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + P(x,y,z)\vec{k}$$

onde M, N e P são funções escalares.

O nome "campo" está relacionado ao fato do gráfico dessa função ser constituído por vetores.
Analogamente, um campo vetorial definido numa região do plano é uma função que associa, a cada ponto (x, y), um vetor

$$\vec{F}(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$$

Alguns exemplos de campos vetoriais: campos de força (eletromagnéticos ou gravitacionais) e campos de velocidade (do ar de fluídos em movimento).

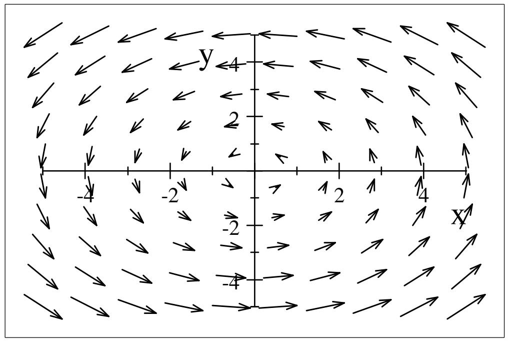
Um campo pode ser representado geometricamente, esboçando-se para cada ponto o vetor que lhe é associado com origem nesse ponto e tamanho igual ao módulo desse vetor.

Exemplo 13: Descreva o campo vetorial $\vec{F}$ se $\vec{F}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ e, em seguida, se $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} - y\vec{j}$

Ponto	Vetor associado
$(1,1)$	$(-1,1)$
$(1,2)$	$(-2,1)$
$(1,-1)$	$(1,1)$
$(-1,-2)$	$(2,-1)$
$\ldots$	$\ldots$

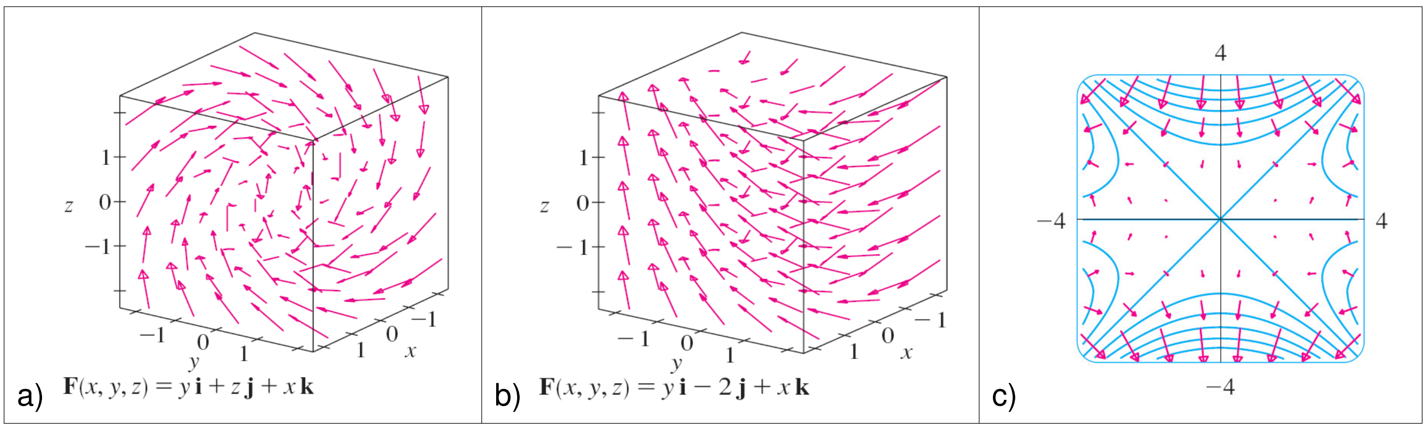
Desenhe esses pontos e vetores num sistema coordenado no plano e veja como fica a visualização geométrica de um campo vetorial.

Para desenhar os vetores para esses pontos, inicialmente identifique o ponto e desenhe o vetor associado a cada um deles, com origem no ponto.



Analise o comportamento do ”gráfico” obtido. Ou seja, examine como os vetores se comportam em cada ponto considerado: como variam comprimento, direção e sentido, que são as características de um vetor, em cada ponto.

Exemplo 14: **a**) **e b**) Exemplos de camplos vetoriais em 3D:



Campos Gradientes: página 1058

O gradiente de uma função, $\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j}$, define uma função vetorial, ou seja, uma função que a cada ponto de $\Re^2$ associa um vetor. Portanto a função gradiente, é um **campo vetorial**.

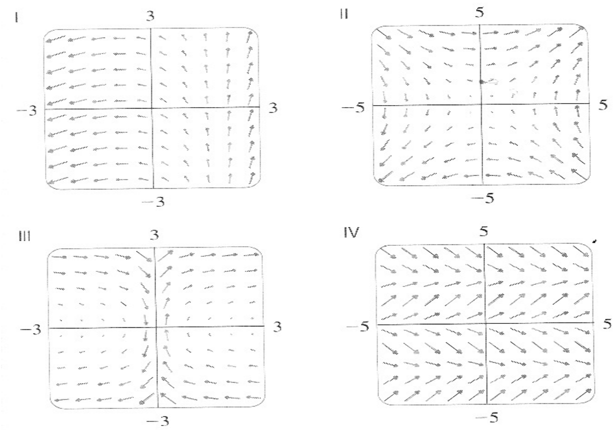
Exemplo 15: Determine o vetor gradiente de $f(x,y) = x^2y - y^3$.
$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j} = 2xy\vec{i} + (x^2 - 3y^2)\vec{j}$. A figura c), acima, mostra o mapa de contorno de f com o campo de vetor gradiente.

4.2 Lista de Exercícios 10

1)Resolva os exercícios ímpares do número 1 ao 14 e 21 ao 26 da página 1059: Cálculo, Volume 2, James Stewart.

1–10 □ Esboce o campo vetorial **F**, desenhando um diagrama como o da Figura 5 ou da Figura 9.

1. $\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$
2. $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
6. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{j}$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{j}$
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{j}$
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{j} - \mathbf{i}$



11–14 □ Case o campo vetorial **F** com a figura rotulada de I–IV. Dê razões para suas escolhas.

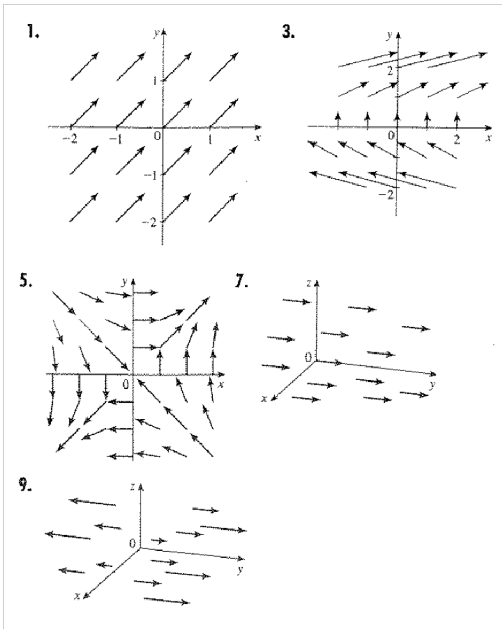
11. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, x \rangle$
12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle 1, \operatorname{sen} y \rangle$
13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle x - 2, x + 1 \rangle$
14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, 1/x \rangle$

21–24 □ Determine o campo do vetor gradiente de f.

21. $f(x, y) = \ln(x + 2y)$
22. $f(x, y) = x^{\alpha} e^{-\beta x}$
23. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
24. $f(x, y, z) = x \cos(y/z)$

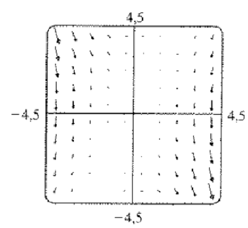
25–26 □ Determine o campo do vetor gradiente ∇f de f e o desenhe.

25. $f(x, y) = xy - 2x$
26. $f(x, y) = \frac{1}{4}(x + y)^2$



11. II 13. I 15. IV 17. III

19.

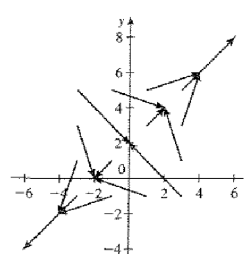


A reta $y = 2x$

21. $\nabla f(x, y) = \dfrac{1}{x + 2y}\,\mathbf{i} + \dfrac{2}{x + 2y}\,\mathbf{j}$

23. $\nabla f(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{j} + \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{k}$

25. $\nabla f(x, y) = (y - 2)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$



4.3 Integrais de Linha

DEFINIÇÃO: Uma *curva plana* é um conjunto C de pares ordenados $(f(t), g(t))$, em que f e g são funções contínuas em um intervalo I.

DEFINIÇÃO: Seja C uma curva que consiste em todos os pares ordenados $(f(t), g(t))$, onde f e g são funções contínuas em um intervalo I. As equações $x = f(t)$ e $y = g(t)$ para t em I, são as equações paramétricas de C, com parâmetro t.

4.3.1 Parametrização de Curvas no Plano e no Espaço:

Uma curva no plano é um conjunto de pontos, no caso, pares ordenados, relacionados por meio de uma função. Assim uma curva C no plano é um conjunto de pontos que pode ser assim representado:

$$C = \{(x, y); y = f(x)\} \text{ ou } \{(x, f(x)), x \in R\}$$

Analogamente, uma curva no espaço é um conjunto de pontos, ternas ordenadas, relacionadas por meio de uma função. Assim, uma curva C no espaço é um conjunto que pode ser assim representado:

$$C = \{(x, y, z); z = f(x, y)\} \text{ ou } \{(x, y, f(x, y)), x, y \in R\}$$

Muitas vezes, em situações de aplicações, uma curva pode representar o movimento de uma partícula no plano ou no espaço. Nesse caso é necessário representar as coordenadas da curva em função de um parâmetro. Ou seja, as coordenadas x, y, z são representadas por meio de funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$. Essa representação é chamada de **representação paramétrica da curva**, que também pode ser chamada de **caminho**.

Exemplo 16: Por exemplo, uma partícula percorre a curva C representada pelo trecho do gráfico da função $y = x^2$ para $-1 \leq x \leq 2$. Então uma parametrização dessa curva é dada por

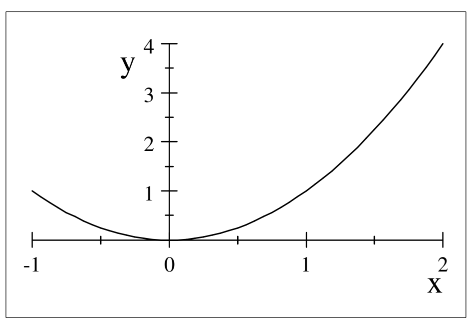
$x(t) = t$

$y(t) = t^2$

$-1 \leq x \leq 2$

Ou ainda, $C = \{(t, t^2); -1 \leq t \leq 2\}$ que é a representação paramétrica do caminho C.

Sua representação geométrica é dada pela figura abaixo:



Exemplo 17: Considere agora o caminho C cuja parametrização é dada por:

$x = t$

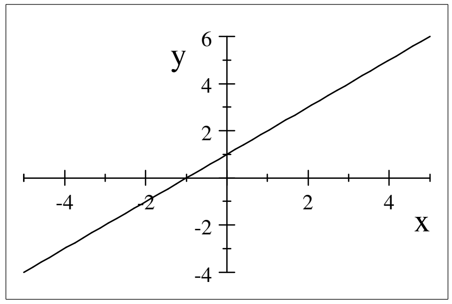
$y = t + 1$

$0 \leq t \leq 3$

desenhe-o, antes de continuar!

Para desenhar esse caminho observe que $y = x + 1$, pois $x = t$ e $y = t + 1$.

Logo, esse caminho é a reta $y = x + 1$, para x no intervalo $[0, 3]$. Veja a figura abaixo:



Importante:

Uma curva pode ser representada por mais de uma parametrização.
É possível que duas curvas se interceptem, sem que duas partículas que as percorram colidam: isso por que o parâmetro t (que representa o tempo) pode ser diferente nos pontos onde as curvas se interceptam.

Exemplo 18: Trace o gráfico da curva C de equações $x = 2t$ e $y = t^2 - 1$ com $-1 \leq t \leq 2$.

Tangentes e Comprimentos de Arco:

TEOREMA: Se uma curva suave C é dada parametricamente por $x = f(t)$ e $y = g(t)$, então o coeficiente angular $\frac{dy}{dx}$ da tangente à C em $P(x, y)$ é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \text{, desde que } \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

Exemplo 19: Seja C a curva parametrizada por $x = 2t$, $y = t^2 - 1$, $-1 \leq t \leq 2$. Determine os coeficientes angulares da tangente e da normal à C em $P(x, y)$.
Resp.: tangente: t e normal: $-\frac{1}{t}$

Exemplo 20: Seja C a curva parametrizada por $x = t^3 - 3t$, $y = t^2 - 5t - 1$, $t \in \Re$. Ache a equação da tangente a C no ponto correspondente a $t = 2$. Resp.: $y = \frac{-x - 61}{9}$

4.3.2 Comprimento de Arco:

TEOREMA: Se uma curva suave C é dada parametricamente por $x = f(t)$ e $y = g(t)$, com $a \leq t \leq b$ e se C não intercepata a si própria, exceto possivelmente em $t = a$ e $t = b$, então o comprimento S de C é

$$S = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2}\, dt$$

Exemplo 21: Ache o comprimento da curva $x = 5t^2$, $y = 2t^3$, $0 \leq t \leq 1$. Resp.: 5,43

4.3.3 Diferencial de Comprimento de Arco:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2}\,dt$$

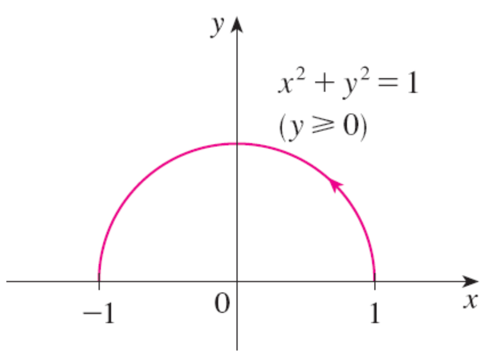
4.3.4 Teorema de Cálculo para Integrais Curvilíneas (Integrais de Linha):

Se uma curva suave C é dada por $x = g(t)$, $y = h(t)$, $a \le t \le b$ e se $f(x,y)$ é contínua em uma região D contendo C, então

(i) $\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(g(t),h(t))\sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt$
(ii) $\int_C f(x,y)dx = \int_a^b f(g(t),h(t))g'(t)dt$
(iii) $\int_C f(x,y)dy = \int_a^b f(g(t),h(t))h'(t)dt$

Exemplo 22: Calcule $\int_C (2 + x^2 y)ds$ onde C é a metade superior do círculo unitário.

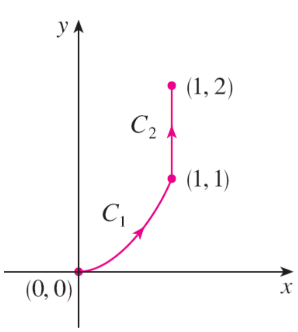
Solução: O círculo unitário pode ser parametrizado por $x = \cos t$, $y = sent$ no intervalo $0 \le t \le \pi$.



$$\int_C (2+x^2y)\,ds = \int_0^{\pi}(2+\cos^2 t\sin t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$= \int_0^{\pi}(2+\cos^2 t\sin t)\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt$$
$$= \int_0^{\pi}(2+\cos^2 t\sin t)\,dt$$
$$= \left[2t-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi} = 2\pi+\tfrac{2}{3}$$

Exemplo 23: Calcule $\int_C 2xds$ onde C é a curva $y = x^2$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ seguido pelo segmento de reta vertical de $(1,1)$ a $(1,2)$.

Solução: A curva C_1 pode ser parametrizado por $x = x$, $y = x^2$ no intervalo $0 \le x \le 1$. A curva C_2 pode ser parametrizado por $x = 1$, $y = y$ no intervalo $1 \le y \le 2$.



$$\int_{C_1} 2x\,ds = \int_0^1 2x\sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$= \int_0^1 2x\sqrt{1+4x^2}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{2}{3}(1+4x^2)^{3/2}\Big]_0^1$$
$$= \frac{5\sqrt{5}-1}{6}$$

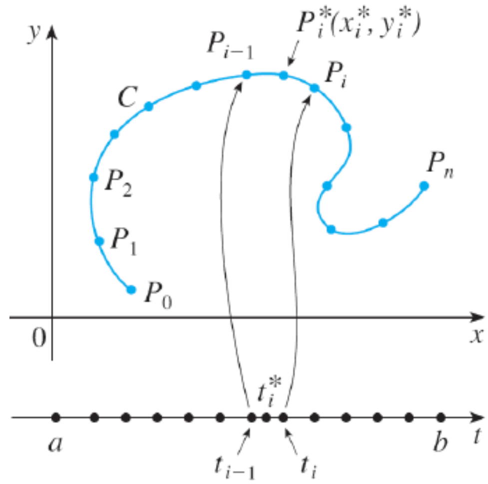
$$\int_{C_2} 2x\,ds$$
$$= \int_1^2 2(1)\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{dy}{dy}\right)^2}\,dy = \int_1^2 2\,dy = 2$$

$$\int_C 2x\,ds = \int_{C_1} 2x\,ds + \int_{C_2} 2x\,ds$$
$$= \frac{5\sqrt{5}-1}{6}+2$$

O trabalho feito por uma força constante $\vec{F}$ para mover um objeto de um ponto P para outro ponto Q do espaço é $W = \vec{F} \cdot \vec{D}$, onde $\vec{D} = \overrightarrow{PQ}$ é o vetor deslocamento.

Suponha agora que $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ seja um campo de força contínuo em R^3, tal como um campo gravitacionaldo ou um campo de forçaelétrica. Um campo de força em R^2 pode ser visto como um caso especial onde $R = 0$ e P e Q dependem só de x e y. Queremos calcular o trabalho exercido por essa força ao mover uma partícula ao longo de uma curva lisa C.

Dividimos C em subarcos $P_{i-1}P_i$ com comprimentos Δs_i dividindo o intervalo do parâmetro $[a,b]$ em subintervalos de mesmo tamanho. A primeira figura mostra o caso bidimensional e a segunda, o caso tridimensional.



Se Δs_i é pequeno, o movimento da partícula de P_{i-1} para P_i na curva ocorre aproximadamente na direção de $T(t_i)$, vetor tangente unitário a P_i.
Então, o trabalho feito pela força F para mover a partícula de P_{i-1} para P_i é aproximadamente
$F(x_i,y_i,z_i) \cdot T(t_i)\Delta s_i = [F(x_i,y_i,z_i) \cdot T(x_i,y_i,z_i)]\Delta s_i$

O trabalho total executado para mover a partícula ao longo de C é aproximadamente
$\sum_{i=1}^{n}[F(x_i,y_i,z_i) \cdot T(x_i,y_i,z_i)]\Delta s_i$

onde $T(x,y,z)$ é o vetor tangente unitário no ponto (x,y,z) sobre C. Portanto, definimos o trabalho W feito por um campo de força F como o limite da soma de Riemann dada por,
$\int_c F(x,y,z) \cdot T(x,y,z)ds = \int_c F \cdot Tds$

A Equação anterior nos diz que o trabalho é a integral em relação ao comprimento do arco da componente tangencial da força.

Se a curva C é dada pela equação vetorial $r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$ então $T(t) = r'(t)/|r'(t)|$, podemos reescrever a equação anterior como
$W = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)/|r'(t)|dt = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)dt$

Essa última integral é frequentemente abreviada como $\int_c F \cdot dr$

e ocorre também em outras áreas da física.Portanto, definimos a integral de linha de qualquer campo vetorial contínuo como a seguir:

Seja F um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva C dada pela função vetorial $r(t), a \leq t \leq b$. Então, a integral de linha de F ao longo de C é

$\int_c F \bullet T ds = \int_a^b F(r(t)) \bullet r'(t) dt = \int_c F \bullet dr.$

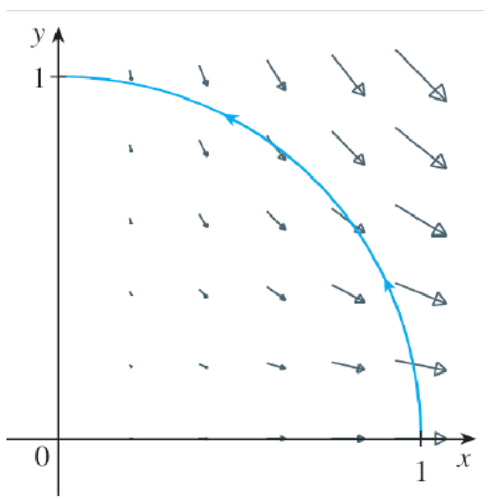
Exemplo: Determine o trabalho feito pelo campo de força $F(x,y) = x2i - xyj$ ao se mover uma partícula ao longo de um quarto de círculo $r(t) = costi + sentj, 0 \leq t \leq \pi/2.$ Como $x = cost$ e $y = sent$, temos $F(r(t)) = cos2ti - costsentj$ e $r'(t) = -senti + costj.$

Portanto, o trabalho realizado é

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2 t \operatorname{sen} t)\, dt$$

$$= 2 \frac{\cos^3 t}{3} \Bigg]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}$$

A figura mostra o campo de força e a curva do Exemplo. O trabalho realizado é negativo porque o campo impede o movimento ao longo da curva.



4.4 Lista de Exercícios 11

1)Resolva os exercícios ímpares do número 1 ao 16 e 19 ao 22 da página 1070: Cálculo, Volume 2, James Stewart.

1–16 □ Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada.

1. $\int_C y\,ds$, $C: x = t^2,\ y = t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2$

2. $\int_C (y/x)\,ds$, $C: x = t^4,\ y = t^3,\ \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$

3. $\int_C xy^4\,ds$, C é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 16$

4. $\int_C ye^x\,ds$, C é o segmento de reta que liga $(1, 2)$ a $(4, 7)$

5. $\int_C (xy + \ln x)\,dy$,
C é o arco de parábola $y = x^2$ de $(1; 1)$ a $(3, 9)$

6. $\int_C xe^y\,dx$,
C é o arco de curva $x = e^y$ de $(1, 0)$ a $(e, 1)$

7. $\int_C xy\,dx + (x - y)\,dy$, C consiste nos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ e de $(2, 0)$ a $(3, 2)$.

8. $\int_C \operatorname{sen} x\,dx + \cos y\,dy$, C consiste na metade superior da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$ e o segmento de reta de $(-1, 0)$ a $(-2, 3)$.

9. $\int_C xy^3\,ds$, $C: x = 4\operatorname{sen} t,\ y = 4\cos t,\ z = 3t,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

10. $\int_C x^2 z\,ds$, C é o segmento de reta de $(0, 6, -1)$ a $(4, 1, 5)$

11. $\int_C xe^{yz}\,ds$, C é o segmento de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$

12. $\int_C (2x + 9z)\,ds$, $C: x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$

13. $\int_C x^2 y\sqrt{z}\,dz$, $C: x = t^3,\ y = t,\ z = t^2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\int_C z\,dx + x\,dy + y\,dz$, $C: x = t^2,\ y = t^3,\ z = t^2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$

15. $\int_C (x + yz)\,dx + 2x\,dy + xyz\,dz$, C consiste nos segmentos de reta de $(1, 0, 1)$ a $(2, 3, 1)$ e de $(2, 3, 1)$ a $(2, 5, 2)$

16. $\int_C x^2\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz$, C consiste nos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, -1)$, e de $(1, 2, -1)$ a $(3, 2, 0)$

19–22 □ Calcule a integral de linha $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C é dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.

19. $\mathbf{F}(x, y) = x^2y^3\,\mathbf{i} - y\sqrt{x}\,\mathbf{j}$,
$\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} - t^3\,\mathbf{j},\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k},\quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} - t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k},\quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - x\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k},\quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

R: **1.** $(17\sqrt{17} - 1)/12$ **3.** 1638,4 **5.** $\frac{464}{5} + 9\ln 3$ **7.** $\frac{17}{3}$
9. 320 **11.** $\sqrt{14}(e^6 - 1)/12$ **13.** $\frac{1}{5}$ **15.** $\frac{97}{3}$
17. (a) Positivo (b) Negativo **19.** $-\frac{59}{105}$
21. $\frac{6}{5} - \cos 1 - \operatorname{sen} 1$

4.5 Teorema Fundamental para as Integrais de Linha (Integrais Curvilíneas):

4.5.1 Campo Vetorial Conservativo

Alguns exemplos de campos vetoriais conservativos: campos gravitacionais, magnéticos e elétricos. O termo conservativo vem da lei clássica da física relativa à conservação de energia. Essa lei diz que a soma da energia cinética com a energia potencial de uma partícula movendo-se em um campo de forças conservativo é constante. A energia cinética de uma partícula é a energia devida ao movimento, enquanto sua energia potencial é a energia devida à sua posição no campo de forças.

Teste para Campos Vetoriais Conservativos no Plano:

Suponha que M e N têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um disco aberto R. O campo vetorial $\vec{F}(x,y) = M\vec{i} + N\vec{j}$ é conservativo se, e somente se,

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

Exemplo 24: Determine se o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = (x-y)\vec{i} + (x-2)\vec{j}$ é ou não conservativo.

$\frac{\partial N}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial M}{\partial y} = -1$ portanto não conservativo.

Exemplo 25: Determine se o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = (3+2xy)\vec{i} + (x^2-3y^2)\vec{j}$ é ou não conservativo.
$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x = \frac{\partial M}{\partial y}$ portanto conservativo.

Teste para Campos Vetoriais Conservativos no Espaço:

Suponha que M, N e P têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas no interior Q de uma esfera no espaço. O campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = M\vec{i} + N\vec{j} + P\vec{k}$ é conservativo se, e somente se, $\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = 0$.

Da mesma forma, $\vec{F}$ é conservativo se, e somente se,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z} \text{ e } \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

DEFINIÇÃO: Um campo vetorial $\vec{F}$ é conservativo se $\vec{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$ para alguma função escalar (que também pode ser denominada campo escalar ou função potencial) f.

Ou seja, o gradiente de um campo escalar é um campo vetorial.

Observação 1: $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$; $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$.

Observação 2: Quando um campo é conservativo é possível encontrar sua função potencial.

Exemplo 26: Se $\vec{F}(x,y,z) = y^2\vec{i} + (2xy+e^{3z})\vec{j} + 3ye^{3z}\vec{k}$, determine uma função f tal que $\vec{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$.
$f_x(x,y,z) = y^2$, $f_y(x,y,z) = 2xy+e^{3z}$, $f_z(x,y,z) = 3ye^{3z}$, integrando $f_x(x,y,z) = y^2$ com relação a x, temos $f(x,y,z) = xy^2 + g(y,z)$ que derivando com relação a y resulta $f_y(x,y,z) = 2xy + g_y(y,z)$ e comparando com a derivada obtida anteriormente temos: $f_y(x,y,z) = 2xy + e^{3z} = 2xy + g_y(y,z)$, logo $g_y(y,z) = e^{3z}$.

Portanto, $g(y,z) = e^{3z} + h(z)$, analogamente, obtemos $h(z) = k$ e $f(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + k$.

4.5.2 Independência do Caminho:

Teorema 1: Se $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$ é contínua em uma região conexa D, então a integral curvilínea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho se e somente se $\vec{F}$ é conservativo, ou seja, $\vec{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$ para alguma função escalar f.

Teorema 2: Seja $\vec{F}(x,y) = M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$ contínua em uma região conexa D e seja C uma curva parcialmente suave em D com extremidades $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$. Se $\vec{F}(x,y) = \nabla f(x,y)$, então

$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = [f(x,y)]_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)}.$$

Exemplo 27: Seja $\vec{F}(x,y) = (2x+y^3)\vec{i} + (3xy^2+4)\vec{j}$.

a) Mostre que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho. Resp.: $f(x,y) = x^2 + xy^3 + 4y$.

b) Calcule $\int_{(0,1)}^{(2,3)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Resp.: 66

Teorema 3: Se $M(x,y)$ e $N(x,y)$ têm derivadas parciais primeiras contínuas em uma região simplesmente conexa D, então a integral curvilínea

$$\int_C M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

é independente do caminho em D se e somente se

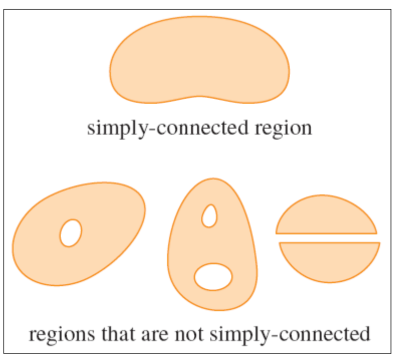
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Observação: O teorema vale para uma função de três variáveis: Se $M(x,y,z)$, $N(x,y,z)$ e $P(x,y,z)$ têm derivadas parciais primeiras contínuas em uma região simplesmente conexa D, então a integral curvilínea

$$\int_C M(x,y,z)dx + N(x,y,z)dy + P(x,y,z)dz$$

é independente do caminho em D se e somente se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$$



Exemplo 28: Mostre que a integral curvilínea $\int_C (e^{3y} - y^2 \sin x)dx + (3xe^{3y} + 2y\cos x)dy$ é independente do caminho em uma região simplesmente conexa.

Observação: Se $\vec{F}(x,y,z)$ tem derivadas parciais primeiras contínuas em toda uma região simplesmente conexa D, então as condições seguintes são equivalentes:

(i) $\vec{F}$ é conservativo, isto é, $\vec{F} = \nabla f$ para alguma função escalar f.

(ii) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente do caminho em D.

(iii) $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ para toda curva fechada simples C em D.

Exemplo 29: Prove que, se $\vec{F}(x,y,z) = (3x^2+y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j} - 3z^2\vec{k}$, então $\vec{F}$ é conservativo.

4.6 Lista de Exercícios 12

1) Resolva os exercícios ímpares do número 12 ao 21 da página 1080: Cálculo, Volume 2, James Stewart.

12–18 (a) Determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ e (b) use a parte (a) para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sobre a curva C dada.

12. $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i} + (x + 2y)\,\mathbf{j}$, C é a semicircunferência superior que começa em $(0, 1)$ e termina em $(2, 1)$

13. $\mathbf{F}(x, y) = x^3y^4\,\mathbf{i} + x^4y^3\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\,\mathbf{i} + (1 + t^3)\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{y^2}{1 + x^2}\,\mathbf{i} + 2y \operatorname{arctg} x\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (xy + 2z)\,\mathbf{k}$,
C é o segmento de reta de $(1, 0, -2)$ a $(4, 6, 3)$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xz + y^2)\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + (x^2 + 3z^2)\,\mathbf{k}$,
C: $x = t^2$, $y = t + 1$, $z = 2t - 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 \cos z\,\mathbf{i} + 2xy \cos z\,\mathbf{j} - xy^2 \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y\,\mathbf{i} + xe^y\,\mathbf{j} + (z + 1)e^z\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

19–20 Mostre que a integral de linha é independente do caminho e calcule a integral.

19. $\int_C \operatorname{tg} y\,dx + x \sec^2 y\,dy$, C é qualquer caminho de $(1, 0)$ a $(2, \pi/4)$

20. $\int_C (1 - ye^{-x})\,dx + e^{-x}\,dy$, C é qualquer caminho de $(0, 1)$ a $(1, 2)$

21–22 Determine o trabalho realizado pelo campo vetorial de força $\mathbf{F}$ movendo um objeto de P a Q.

21. $\mathbf{F}(x, y) = 2y^{3/2}\,\mathbf{i} + 3x\sqrt{y}\,\mathbf{j}$; $P(1, 1)$, $Q(2, 4)$

R:
13. (a) $f(x, y) = \frac{1}{4}x^4y^4$ (b) 4
15. (a) $f(x, y, z) = xyz + z^2$ (b) 77
17. (a) $f(x, y, z) = xy^2 \cos z$ (b) 0
19. 2 **21.** 30 **23.** Não **25.** Não

4.7 O Teorema de Green:

Esse teorema estabelece uma relação entre a integral de linha ao longo de uma curva fechada simples C e a integral dupla sobre a região cuja fronteira é limitada pela curva C. Dessa forma ele é um meio de converter integrais de linha, definidas em curvas fechadas simples, de campos não conservativos, em integrais duplas.
Sendo assim, esse teorema pode ser útil para analisar e estudar processos que relacionem o contorno de uma região com o domínio (pontos internos) dessa região.

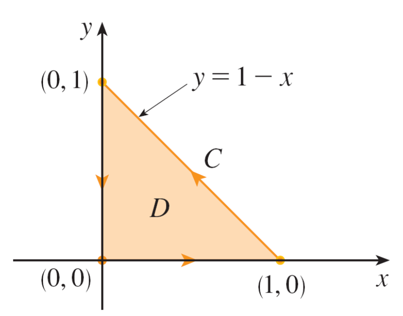
Diante do que já estudamos, podemos dizer que: quando o campo $\vec{F}$ é um campo conversativo a integral de linha de $\vec{F}$ ao longo de um percurso fechado é nula. Quando não é conservativo muitas vezes é mais conveniente utilizar o teorema de Green para calcular a integral de $\vec{F}$ ao longo de um caminho fechado.

Seja C uma curva fechada simples parcialmente suave e seja R a região que consiste em C e seu interior. Se M e N são funções contínuas com derivadas parciais primeiras contínuas em toda uma região D contendo R, então

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA$$

onde $\oint$ denota uma integral curvilínea ao longo de uma curva fechada simples C. Uma curva deste tipo constitui a fronteira de uma região R do plano xy e, por definição, a orientação ou direção positiva, ao longo de C é tal que R esteja sempre à esquerda.

Exemplo 30: Calcule $\int_C x^4 dx + xydy$ onde C é o triângulo constituído pelos segmentos de reta de $(0,0)$ a $(1,0)$, de $(1,0)$ a $(0,1)$ e de $(0,1)$ a $(0,0)$.



$$\int_C x^4\, dx + xy\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (y-0)\, dy\, dx$$
$$= \int_0^1 [\tfrac{1}{2} y^2]_{y=0}^{y=1-x}\, dx$$
$$= \tfrac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2\, dx$$
$$= -\tfrac{1}{6}(1-x)^3\Big]_0^1 = \tfrac{1}{6}$$

Observação: Com o teorema de Green, pode-se achar a área A de uma região R delimitada por uma curva fechada simples parcialmente suave C. Fazendo $M = 0$ e $N = x$, tem-se $A = \oint_C xdy = \iint_R dA$. Mas se $M = -y$ e $N = 0$, tem-se $A = -\oint_C ydx = \iint_R dA$.

Combinando as duas fórmulas tem-se a terceira fórmula do próximo teorema.

Teorema:

Se uma região R do plano xy é delimitada por uma curva fechada simples parcialmente suave C, então a área A de R é

$$A = \oint_C xdy = -\oint_C ydx = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx.$$

Exemplo 31: Use o teorema acima para achar a área da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, utilizando a parametrização $x = a\cos t$ e $y = b\sin t$, com $0 \le t \le 2\pi$.

$$A$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_C x\, dy - y\, dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)(b\cos t)\, dt - (b\sin t)(-a\sin t)\, dt$$
$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab$$

Observação: O teorema de Green pode ser estendido a uma região R que contenha buracos, desde que integremos sobre toda a fronteira, mantendo sempre a região R à esquerda de C. A integral dupla sobre R é igual à soma das integrais curvilíneas ao longo de C_1 e C_2. A soma de duas integrais ao longo da mesma curva e em direções opostas é zero.

4.8 Lista de Exercícios 13

1)Resolva os exercícios ímpares do número 1 ao 14 da página 1087: Cálculo, Volume 2, James Stewart.

1–4 Calcule a integral de linha por dois métodos: (a) diretamente e (b) utilizando o Teorema de Green.

1. $\oint_C xy^2\,dx + x^3\,dy$,
C é o retângulo com vértices (0, 0), (2, 0), (2, 3) e (0, 3)

2. $\oint_C y\,dx - x\,dy$,
C é o círculo com centro na origem e raio 1

3. $\oint_C xy\,dx + x^2y^3\,dy$,
C é o triângulo com vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 2)

4. $\oint_C x\,dx + y\,dy$, C consiste nos segmentos de reta de (0, 1) a (0, 0) e de (0, 0) a (1, 0) e na parábola $y = 1 - x^2$ de (1, 0) a (0, 1)

5–6 Verifique o Teorema de Green, usando um sistema algébrico computacional para calcular tanto a integral de linha como a integral dupla.

5. $P(x, y) = x^4y^5$, $Q(x, y) = -x^7y^6$, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$

6. $P(x, y) = y^2 \operatorname{sen} x$, $Q(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y$,
C é formado pelo arco da parábola $y = x^2$ de (0, 0) a (1, 1) seguido do segmento de reta de (1, 1) a (0, 0)

7–12 Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva.

7. $\int_C e^y\,dx + 2xe^y\,dy$,
C é o quadrado de lados $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$

8. $\int_C x^2y^2\,dx + 4xy^3\,dy$,
C é o triângulo com vértices (0, 0), (1, 3) e (0, 3)

9. $\int_C (y + e^{\sqrt{x}})\,dx + (2x + \cos y^2)\,dy$,
C é a fronteira da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$

10. $\int_C xe^{-2x}\,dx + (x^4 + 2x^2y^2)\,dy$,
C é a fronteira da região entre as circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$

11. $\int_C y^3\,dx - x^3\,dy$, C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$

12. $\int_C \operatorname{sen} y\,dx + x\cos y\,dy$, C é a elipse $x^2 + xy + y^2 = 1$

13–16 Use o teorema de Green para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (Verifique a orientação da curva antes de aplicar o teorema.)

13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle \sqrt{x} + y^3, x^2 + \sqrt{y} \rangle$,
C consiste no arco de curva $y = \operatorname{sen} x$ de (0, 0) a $(\pi, 0)$ e do segmento de reta $(\pi, 0)$ a (0, 0)

14. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y^2 \cos x, x^2 + 2y \operatorname{sen} x \rangle$,
C é o triângulo de (0, 0) a (2, 6) a (2, 0) a (0, 0)

R: **1.** 6 **3.** $\frac{2}{3}$ **7.** $e - 1$ **9.** $\frac{1}{3}$ **11.** -24π
13. $\frac{4}{3} - 2\pi$ **15.** $\frac{625}{2}\pi$ **17.** $-\frac{1}{12}$

4.9 Rotacional e Divergência

DEFINIÇÃO: Seja $\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + P(x,y,z)\vec{k}$ onde M, N e P têm derivadas parciais em alguma região. O **rotacional** de $\vec{F}$, que mede a direção e magnitude da circulação do vento dentro de um tornado, por exemplo, é dado por

$$rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Exemplo 32: Se $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + xyz\vec{j} - y^2\vec{k}$, determine o rotacional de $\vec{F}$.

$$
\begin{aligned}
\text{curl } \mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2)-\frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right]\mathbf{i} \\
&\quad -\left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2)-\frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\mathbf{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz)-\frac{\partial}{\partial y}(xz)\right]\mathbf{k} \\
&= (-2y-xy)\,\mathbf{i}-(0-x)\,\mathbf{j}+(yz-0)\,\mathbf{k} \\
&= -y(2+x)\,\mathbf{i}+x\,\mathbf{j}+yz\,\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

DEFINIÇÃO: Seja $\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + P(x,y,z)\vec{k}$, com M, N e P com derivadas parciais em alguma região. A **divergência** de $\vec{F}$, é a derivada de $\vec{F}$, por exemplo, se $\vec{F}$ representa a velocidade de partículas em movimento, a divergência mede a taxa do fluxo de partículas por unidade de volume em um ponto. É denotada por $div\vec{F}$ ou $\nabla \bullet \vec{F}$, dada por

$$div\vec{F} = \nabla \bullet \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

Exemplo 33: Se $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + xyz\vec{j} - y^2\vec{k}$, ache $\nabla \bullet \vec{F}$:

$$
\begin{aligned}
\text{div } \mathbf{F} &= \nabla\cdot\mathbf{F} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(xz)+\frac{\partial}{\partial y}(xyz)+\frac{\partial}{\partial z}(-y^2) \\
&= z+xz
\end{aligned}
$$

4.10 Lista de Exercícios 14

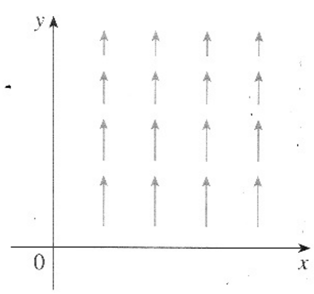
1)Resolva os exercícios ímpares do número 1 ao 21 da página 1094: Cálculo Volume 2 James Stewart.

1–8 Determine (a) o rotacional e (b) a divergência do campo vetorial.

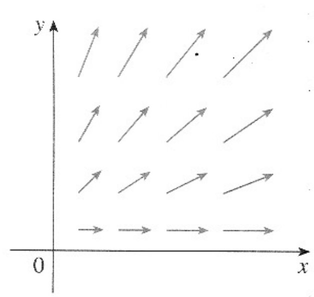
1. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{k}$
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\,\mathbf{i} + xy^2z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + (x + yz)\,\mathbf{j} + \left(xy - \sqrt{z}\right)\mathbf{k}$
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = \cos xz\,\mathbf{j} - \operatorname{sen} xy\,\mathbf{k}$
5. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + e^x \cos y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$
6. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathbf{j} + \dfrac{z}{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathbf{k}$
7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle \ln x, \ln(xy), \ln(xyz) \rangle$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle xe^{-y}, xz, ze^{y} \rangle$

9–11 O campo vetorial $\mathbf{F}$ é mostrado no plano xy e é o mesmo em todos os planos horizontais. (Em outras palavras, $\mathbf{F}$ é independente de z e seu componente z é 0.)
(a) O div $\mathbf{F}$ será positivo, negativo ou nulo? Explique.
(b) Determine se o rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Se não, em que direção rot $\mathbf{F}$ aponta?

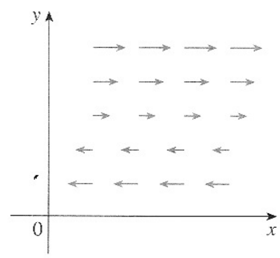
9.



10.



11.



12. Seja f um campo escalar e $\mathbf{F}$ um campo vetorial. Diga se cada expressão tem significado. Em caso negativo, explique por quê. Em caso afirmativo, diga se é um campo vetorial ou escalar.

(a) rot f	(b) grad f
(c) div $\mathbf{F}$	(d) rot(grad f)
(e) grad $\mathbf{F}$	(f) grad(div $\mathbf{F}$)
(g) div(grad f)	(h) grad(div f)
(i) rot(rot $\mathbf{F}$)	(j) div(div $\mathbf{F}$)
(k) (grad f) $\times$ (div $\mathbf{F}$)	(l) div(rot(grad f))

13–18 Determine se o campo vetorial é conservativo ou não. Se conservativo, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$
14. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3z^2\,\mathbf{i} + \cos y\,\mathbf{j} + 2xz\,\mathbf{k}$
15. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 + 2yz)\,\mathbf{j} + y^2\,\mathbf{k}$
16. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^z\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + xe^z\,\mathbf{k}$
17. $\mathbf{F}(x, y, z) = ye^{-x}\,\mathbf{i} + e^{-x}\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$
18. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\cos xy\,\mathbf{i} + x\cos xy\,\mathbf{j} - \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$

19. Existe um campo vetorial $\mathbf{G}$ em $\mathbb{R}^3$ tal que rot $\mathbf{G} = xy^2\,\mathbf{i} + yz^2\,\mathbf{j} + zx^2\,\mathbf{k}$? Explique.

20. Existe um campo vetorial $\mathbf{G}$ em $\mathbb{R}^3$ tal que rot $\mathbf{G} = yz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$? Explique.

21. Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x)\,\mathbf{i} + g(y)\,\mathbf{j} + h(z)\,\mathbf{k}$$

onde f, g e h são diferenciáveis, é irrotacional.

R:

1. (a) $-x^2\,\mathbf{i} + 3xy\,\mathbf{j} - xz\,\mathbf{k}$ (b) yz
3. (a) $(x - y)\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (b) $1 - 1/\left(2\sqrt{z}\right)$
5. (a) $\mathbf{0}$ (b) 1
7. (a) $\langle 1/y, -1/x, 1/x \rangle$ (b) $1/x + 1/y + 1/z$
9. (a) Negativo (b) rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$
11. (a) Zero (b) rot $\mathbf{F}$ aponta na direção do eixo z, no sentido negativo
13. $f(x, y, z) = xyz + K$ **15.** $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + K$
17. Não-conservativo **19.** Não

4.11 O Teorema de Stokes

4.11.1 Integrais de superfície:

Se uma superfície S com forma paramétrica $z = g(x, y)$, então a integral de $f(x, y, z)$ sobre a superfície S num domínio D é

$$\iint_S f(x, y, z)ds = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{g_x(x, y)^2 + g_y(x, y)^2 + 1}\, dA$$

onde $dS = \sqrt{g_x(x, y)^2 + g_y{}^2 + 1}\, dA$

Exemplo: Calcule $\iint_S yds$, onde S é a superfície $z = x + y^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2.$

$\iint_S yds = \int_0^1 \int_0^1 y\sqrt{1 + 4y^2 + 1}\, dA = \frac{13\sqrt{2}}{3}.$

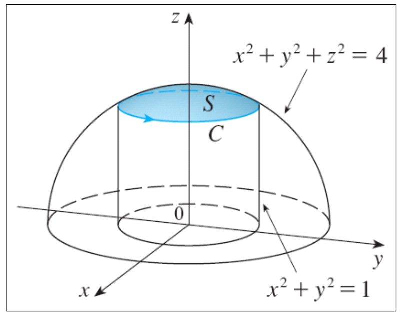
4.11.2 Teorema de Stokes:

Seja o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\vec{i} + N(x, y, z)\vec{j} + P(x, y, z)\vec{k}$ sobre a superfície $S = f(x, y)$ então, temos:

$$\oint_C \vec{F} \cdot dr = \iint_S rot\vec{F} \cdot dS$$

Exemplo 34: Use o teorema de Stokes para calcular a integral de $\iint_S rot\vec{F} \cdot dS$ onde $F(x, y, z) = xz\vec{i} + yz\vec{j} + xy\vec{k}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que esta dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy.

Solução: Subtraindo $x^2 + y^2 = 1$ de $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ obtemos $z^2 = 3$, ou seja $z = \sqrt{3}$. Então, C é a circunferência dada pelas equações $x^2 + y^2 = 1$ e $z = \sqrt{3}$. A equação vetorial de C é $r(t) = \cos t\vec{i} + sent\vec{j} + \sqrt{3}\,\vec{k}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ e $r'(t) = -sent\vec{i} + \cos t\vec{j}$ e temos também $F(r(t)) = \sqrt{3}\,sent\vec{i} + \sqrt{3}\cos t\vec{j} + \cos t\,sent\vec{k}$. Portanto, pelo teorema de Stokes, $\iint_S rot\vec{F} \cdot dS = \oint_C \vec{F} \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t)dt = \int_0^{2\pi} (-\sqrt{3}\cos t\,sent + \sqrt{3}\,sent\cos t)dt = \sqrt{3}\int_0^{2\pi} 0dt = 0.$



Observação: Seja $\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + P(x,y,z)\vec{k}$ sobre a superfície $f(x,y,z) = z - g(x,y) = 0$ então, temos:

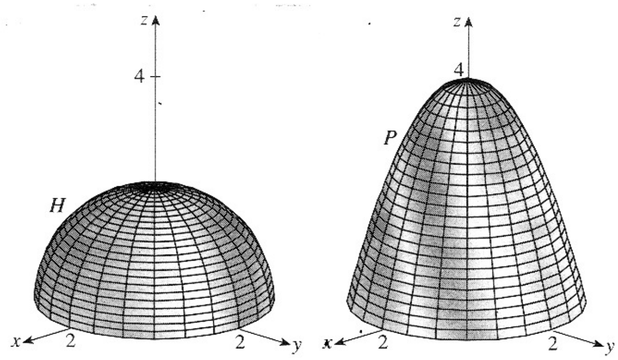
$$\iint_S \vec{F} \cdot dS = \iint_R \left(-M\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} - N\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} + P\right)dA$$

4.12 Lista de Exercícios 15

1)Resolva os exercícios ímpares do número 1 ao 11 da página 1122: Cálculo Volume 2 James Stewart.

1. Um hemisfério H e uma parte P de um parabolóide estão mostrados. Suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ cujos componentes têm derivadas parciais contínuas. Explique por quê

$$\iint_H \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_P \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$



2–6 Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$,
S é a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 5$, com orientação para cima.

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2e^{yz}\,\mathbf{i} + y^2e^{xz}\,\mathbf{j} + z^2e^{xy}\,\mathbf{k}$,
S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqslant 0$, com orientação para cima

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2y^3z\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}(xyz)\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$
S é a parte do cone $y^2 = x^2 + z^2$ que está entre os planos, $y = 0$ e $y = 3$, orientado na direção positiva do eixo y

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + x^2yz\,\mathbf{k}$,
S é formada pelo topo e pelos quatro lados (mas não pelo fundo) do cubo com vértices $(\pm1, \pm1, \pm1)$, com orientação para fora. [*Dica*: use a Equação 3.]

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy}\cos z\,\mathbf{i} + x^2z\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$,
S é o hemisfério $x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$ orientado na direção positiva do eixo x [*Dica*: use a Equação 3.]

7–10 Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Em cada caso, C é orientado no sentido anti-horário quando visto de cima.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\,\mathbf{i} + (y + z^2)\,\mathbf{j} + (z + x^2)\,\mathbf{k}$,
C é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{-x}\,\mathbf{i} + e^{x}\,\mathbf{j} + e^{z}\,\mathbf{k}$,
C é a fronteira da parte do plano $2x + y + 2z = 2$ no primeiro octante

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{j} + e^{xy}\,\mathbf{k}$, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 16$, $z = 5$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\,\mathbf{k}$, C é a fronteira da parte do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ no primeiro octante

11. (a) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

e C é a curva da interseção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$ com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.

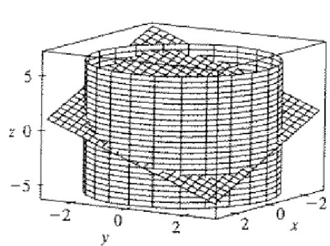
(b) Trace o gráfico do plano e do cilindro com janelas de inspeção escolhidas de forma a ver a curva C e a superfície que você usou na parte (a).

(c) Determine as equações paramétricas para C e use-as para traçar o gráfico de C.

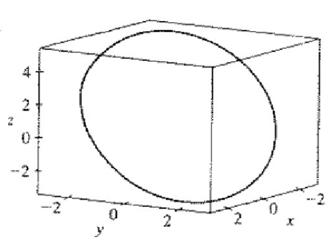
R:

3. 0 5. 0 7. -1 9. 80π

11. (a) $81\pi/2$ (b)



(c) $x = 3\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$, $z = 1 - 3(\cos t + \operatorname{sen} t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$



4.13 O Teorema da Divergência (Gauss)

Seja Q uma região em três dimensões delimitada por uma superfície fechada S e denotemos por $\vec{n}$ o vetor normal unitário exterior a S em (x,y,z). Se $\vec{F}$ é uma função vetorial dotada de derivadas parciais contínuas em Q , então

$$\iint_S \vec{F} \bullet dS = \iiint_Q \nabla \bullet \vec{F} dV$$

isto é, o fluxo de $\vec{F}$ sobre S é igual à integral tripla da divergência de $\vec{F}$ sobre Q.

Exemplo 35: Encontre o fluxo do campo vetorial $F(x,y,z) = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$ sobre a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 1$	$\iint_S F \cdot dS = \iiint_B \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_B 1\, dV$ $= V(B) = \frac{4}{3}\pi (1)^3 = \frac{4\pi}{3}$

4.14 Lista de Exercícios 16

1)Resolva os exercícios ímpares do número 1 ao 11 da página 1129: Cálculo Volume 2 James Stewart.