UNIVERSIDADE FEDERAL DE PELOTAS - UFPEL

INSTITUTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

11100058 CÁLCULO 1 - PROFA. REJANE PERGHER

SEMESTRE 2020/01

1. Introdução:

1.1 Números Reais R

Conjuntos numéricos:

- Números Naturais: $N = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Números Inteiros: $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Números Racionais: $Q = \left\{x \backslash x = \frac{m}{n}, \text{ com } m, n \in Z^*\right\}$
- Números Irracionais: Q' . Não podem ser escritos em termos de uma fração.

Ex.: $\pi, e, \sqrt{2}, \dots$

Observação: Assista a videoaula do projeto GAMA para saber mais sobre conjuntos numéricos https://www.youtube.com/watch?v=O3wxeOoQSUY

Desigualdades

i) $a < b \Leftrightarrow b - a$ é positivo
ii) $a > b \Leftrightarrow a - b$ é positivo
iii) $a \leq b \Leftrightarrow a < b$ ou $a = b$
iv) $a \geq b \Leftrightarrow a > b$ ou $a = b$

1.2 Intervalos:

- Intervalo aberto limitado: $(a, b) = \{x \backslash a < x < b\}$. Representação gráfica:
- Intervalo fechado limitado: $[a, b] = \{x \backslash a \leq x \leq b\}$. Representação gráfica:
- Intervalo semi-aberto ou semi-fechado limitado: $(a, b] = \{x \backslash a < x \leq b\}$

  $[a, b) = \{x \backslash a \leq x < b\}$
- Intervalo aberto ilimitado: $(a, \infty) = \{x \backslash x > a\}$

  $(-\infty, b) = \{x \backslash x < b\}$
- Intervalo fechado ilimitado: $[a, \infty) = \{x \backslash x \geq a\}$

  $(-\infty, b] = \{x \backslash x \leq b\}$

Observação: Assista a videoaula do projeto GAMA para saber mais sobre intervalos reais https://www.youtube.com/watch?v=gmU09MohY5A

1.3 Valor Absoluto:

Seja $a \in R$:

$$|a| = \begin{cases} a & ,se \quad a \geq 0 \\ -a & ,se \quad a < 0 \end{cases}$$

$|a| = d(a,0) =$ distância do ponto a até a origem.
$|a-b| = d(a,b) =$ distância entre a e b.

$$|a-b| = \begin{cases} a-b & ,se \quad a \geq b \\ b-a & ,se \quad b > a \end{cases}$$

Propriedades:

1) $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
2) $|x| > a \Leftrightarrow -a > x$ ou $x > a$

Exemplo 1: $|x| < 2$, ou seja, $d(x,0) < 2$.
$d(1,0) = 1,$ mas $d(-1,0) = 1$ também! Logo, $-2 < x < 2$.

Observação:
Assista a videoaula do projeto GAMA para saber mais sobre operações com intervalos em https://www.youtube.com/watch?v=4JWAANsiyc0

Exemplo 2: A interseção entre [2,5[e [-1,3[é o intervalo:

Exemplo 3: Segundo pesquisas realizadas em um laboratório, cientistas descobriram que bactérias do tipo A resistiram a temperaturas compreendidas entre os valores reais de 10^0C e 45^0C, incluindo neste intervalo os seus limites. Por sua vez, bactérias do tipo B resistiram a temperaturas entre os valores reais de 5^0C e 35^0C, excluindo deste intervalo os seus extremos. Esses pesquisadores, desejando estudar relações entre essas bactérias, necessitam colocá-las juntas num mesmo ambiente. Qual intervalo, relativo à temperatura ambiente, permite que esse estudo seja feito para que tais bactérias permaneçam vivas?

1.4 Desigualdades do 1◦ Grau:

Exemplo 4: Determine todos os intervalos que satisfaçam as desigualdades abaixo. Faça a representação gráfica:

i) $7 < 5x + 3 \leq 9$ Resp.: $(4/5, 6/5]$
ii) $|7x - 2| < 4$ Resp.: $(-2/7, 6/7)$

iii) $2 > -3 - 3x \geq -7$ Resp.: $(-5/3, 4/3]$
iv) $|x + 12| > 7$ Resp.: $(-\infty, -19) \cup (-5, \infty)$

1.5 Desigualdades do 2◦ Grau:

Exemplo 5: Determine todos os intervalos que satisfaçam as desigualdades abaixo. Faça a representação gráfica:
1) $x^2 - x - 2 > 0$ Resp.: $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
2) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ Resp.: $[1, 3]$
3) $x^2 + 2x \geq 0$ Resp.: $(-\infty, -2) \cup [0, \infty)$
4) $x^2 + 6x + 5 < 0$ Resp.: $(-5, -1)$

Lista de Exercícios 1:

Resolva as desigualdades e exprima a solução em termos de intervalos:

1. $2x + 5 < 3x - 7$
2. $3 \leq \frac{2x-3}{5} < 7$
3. $x^2 - x - 6 < 0$
4. $x^2 - 2x - 5 > 3$
5. $x(2x + 3) \geq 5$
6. $|x + 3| < 0.01$
7. $|2x + 5| < 4$
8. $|6 - 5x| \leq 3$
9. $|3x - 7| \geq 5$
10. $|-11 - 7x| > 6$
11. $-5 \leq 3x + 4 < 7$
12. $|6x - 7| > 10$
13. $0 < 3x + 1 \leq 4x - 6$
14. $|5 - 2x| \geq 7$
15. $-6 < 3x + 3 \leq 3$
16. $|x - 4| \leq 16$
17. $1 < x - 2 < 6 - x$
18. $x - 7 \geq -5$ ou $x - 7 \leq -6$
19. $x < 6x - 10$ ou $x \geq 2x + 5$
20. $2x - 1 > 1$ou $x + 3 < 4$
21. $1 \leq -2x + 1 < 3$
22. $x + 3 < 6x + 10$
23. $|2x - 3| > 4$
24. $2 < 5x + 3 \leq 8x - 12$
25. $|2x - 3| \leq 5$

RESPOSTAS:

1. $(12,\infty)$	2. $[9,19)$	3. $(-2,3)$
4. $(-\infty,-2) \cup (4,\infty)$	5. $(-\infty,-5/2] \cup [1,\infty)$	6. $(-3.01,-2.99)$
7. $(-9/2,-1/2)$	8. $[3/5,9/5]$	9. $(-\infty,2/3] \cup [4,\infty)$
10. $(-\infty,-17/7) \cup (-5/7,\infty)$	11. $[-3,1)$	12. $(-\infty,-1/2) \cup (17/6,\infty)$
13. $[7,\infty)$	14. $(-\infty,-1) \cup [6,\infty)$	15. $(-3,0]$
16. $[-12,20]$	17. $(3,4)$	18. $(-\infty,1] \cup [2,\infty)$
19. $(-\infty,-5] \cup (2,\infty)$	20. $(-\infty,1) \cup (1,\infty)$	21. $(-1,0]$
22. $(-7/5,\infty)$	23. $(-\infty,-1/2) \cup (7/2,\infty)$	24. $[5,\infty)$
25. $[-1,4]$		

Antes de prosseguir! Assista as videoaulas de matemática básica do projeto GAMA em https://wp.ufpel.edu.br/projetogama/videoaulas/

2. Funções:

1. O que é uma função ?

Podemos definir **função** da seguinte maneira:

Uma grandeza y é uma função de outra grandeza x, se a cada valor de x estiver associado um único valor de y. Dizemos que y é a **variável dependente** e x é a **variável independente**.

Escrevemos $y = f(x)$, onde f é o nome da função.

O **domínio** da função é o conjunto dos possíveis valores da variável independente e a **imagem** é o conjunto correspondente de valores da variável dependente.

Uma função pode ser representada por **tabelas**, **gráficos** e **fórmulas**.

Exemplo 1: No verão de 1990, a temperatura, no estado do Arizona, ficou alta durante todo o tempo (tão alta, de fato, que algumas empresas aéreas decidiram que talvez não fosse seguro aterrissar seus aviões lá). As altas diárias de temperatura na cidade de Phoenix, de 19 a 29 de junho são dadas na tabela abaixo:

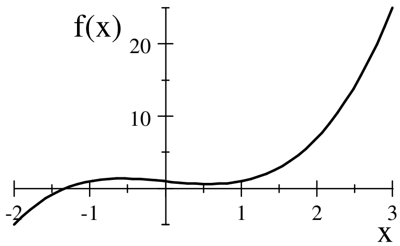
Data	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
Temperatura (^oC)	43	45	46	45	45	45	49	50	48	48	42

Tabela 1. Temperatura em Phoenix, Arizona, junho de 1990

Trata-se de uma função: cada data tem **uma única** temperatura mais alta, associada a ela.

2.1 Gráfico de uma função:

O gráfico da função f em um plano xy é o conjunto de pontos (x, y), onde x pertence ao domínio de f e y é o valor correspondente $f(x)$ de f.



2.2 Tipos de Funções:

a) **Funções polinomiais**:

1) **Função Linear**:

$$f(x) = mx + b$$

onde x é a variável independente e m e b são constantes (números reais).
• A constante m é a inclinação da reta determinada por $y = f(x)$.
• b é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo vertical.
• zero ou raiz da função é a abscissa do ponto em que a reta corta o eixo horizontal.

Observe que:
• Se $m = 0$, a função linear $f(x) = b$ é uma função constante. Desenhe seu gráfico!
• Se $b = 0$, então temos $f(x) = mx$. Trata-se de um conjunto de retas com inclinação m, todas passando na origem $(0,0)$.

Por exemplo: $y = -2x,\ y = -x,\ y = -\frac{1}{2}x,\ y = \frac{1}{2}x,\ y = x,\ y = 2x,\ y = -2x, y = -x, y = -x/2, y = x/2, y = x, y = 2x$

Coeficiente Angular de uma reta:

O coeficiente angular ou inclinação de uma reta não vertical pode ser determinado, se conhecermos dois de seus pontos, a partir da expressão:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

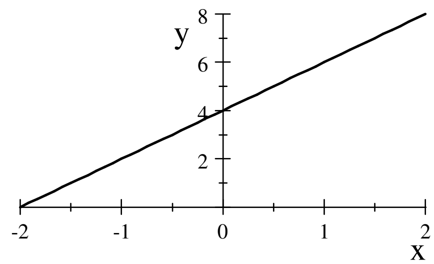
Equação de uma reta de coeficiente angular conhecido:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Exemplo 1: A equação da reta que passa pelo ponto $(3,-2)$ e tem coeficiente angular $\frac{2}{3}$ é? Resposta: $y = \frac{2}{3}x - 4$.

Exemplo 2: Determine a equação da reta que passa pelos pontos $(-3,-5)$ e $(2,-2)$. Resposta: $y = \frac{3}{5}x - \frac{16}{5}$.

Exemplo 3: Dada a função $f(x) = 2x + 4$, esboce o gráfico da função, mostrando os interceptos vertical e horizontal. Resposta:



Exemplo 4: A média de pontos obtidos num teste psicotécnico aplicado em determinada empresa vem decrescendo constantemente nos últimos anos. Em 2000, a média foi de 582 pontos, enquanto que em 2005, a média foi de 552 pontos.

a) Defina a função do valor da média em relação ao tempo. Resposta: $y = -6x + 582$

b) Se a tendência atual se mantiver, qual foi a média de pontos obtida em 2010? Resposta: 522 pontos

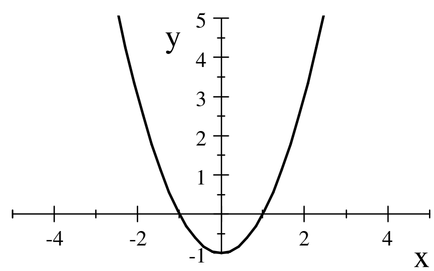
c) Em que ano, a média é de 534 pontos, nestas condições? Resposta: Em 2008.

2) **Função Quadrática**:

Uma função quadrática é da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Exemplo 1: Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 - 1$. Resposta:



Observação: Esta curva é chamada parábola. Uma parábola pode ter a concavidade voltada para cima ($a > 0$) ou concavidade voltada para baixo ($a < 0$).

Elementos da Parábola:

Raízes: Calcula-se por Báskhara (são os valores onde a parábola intercepta o eixo x).

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

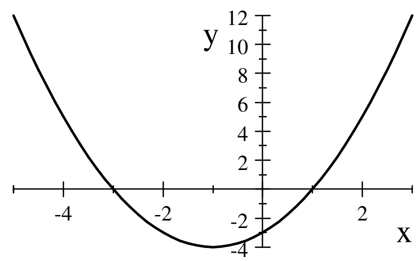
Vértice: é onde se encontra o valor máximo (se $a < 0$) ou o valor mínimo (se $a > 0$) da função.

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

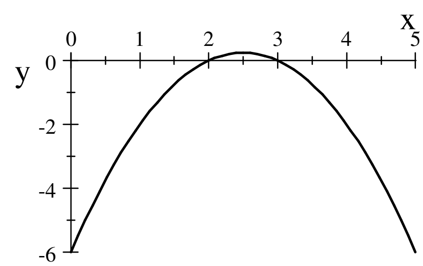
e

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Exemplo 2: Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 + 2x - 3$, mostrando os elementos da parábola, o domínio e a imagem. Resposta:



Exemplo 3: Esboce o gráfico de $f(x) = -x^2 + 5x - 6$, mostrando os elementos da parábola, o domínio e a imagem. Resposta:



Exemplo 4: A temperatura de uma certa região em função do tempo x é $C(x) = -0,15x^2 + 3,8x + 12$ graus centígrados.

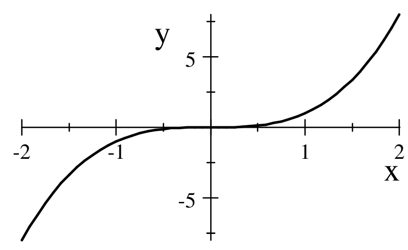
a) Qual era a temperatura às 14 horas? Resposta: 35,8 $\circ C$.

b) De quanto a temperatura aumentou ou diminuiu entre 19 e 22 horas? Resposta: Diminuiu 7,05$\circ C$.

3) **Função Cúbica**:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Exemplo 1: Esboce o gráfico de $f(x) = x^3$. Resposta:



Exemplo 2: Suponha que o custo total, em reais, para fabricar q unidades de um certo produto seja dado pela função: $C(q) = \frac{1}{27}q^3 + 5q^2 + 125q + 250$.

a) Calcule o custo de fabricação de 20 unidades. Resposta: R$ 5.046,30.

b) Calcule o custo de fabricação da 20^a. unidade. Resposta: R$ 362,26.

Lista de Exercícios 2:

1) Um tomate é jogado verticalmente para o alto, no instante $t = 0$, com velocidade de 15 metros por segundo. Sua altura y, acima do solo, no instante t (em segundos), é dada pela equação

$$y = -5t^2 + 15t$$

Faça uma análise da função quadrática definida por esta equação, isto é:

- esboce um gráfico da posição versus tempo;
- determine os zeros desta função e interprete o que representam;
- determine as coordenadas do ponto mais alto da curva e interprete o que este ponto representa;
- responda: durante quanto tempo ocorreu o movimento do tomate ?

2) Esboce os gráficos das funções e determine seus zeros:

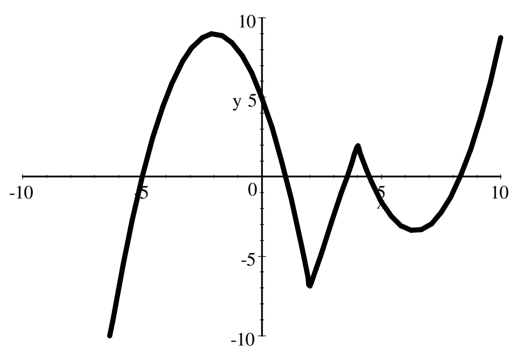
(a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 5$ (b) $g(x) = 2 - 5x$ (c) $h(x) = 10 - x^2$ (d) $l(x) = x^2 - 2x + 4$

3) Uma caixa retangular de base quadrada, tem volume 125. Expresse a área A, de sua superfície total, como função da aresta x , de sua base.

Lembre: • **o volume de uma caixa retangular pode ser obtido pelo produto da área de sua base pela altura**
• **a área da superfície total de uma caixa retangular é obtida pela soma das áreas de todas as suas faces**.

4) Expresse a área de um quadrado como função de seu perímetro.

5) Considere o gráfico abaixo para responder as perguntas a seguir.



(a) Quantos zeros tem a função?
(b) Dê valores aproximados para $f(2)$ e $f(4)$.
(c) A função é crescente ou decrescente na vizinhança de $x = -1$? E na vizinhança de $x = 3$?
(d) O gráfico é côncavo para cima ou para baixo na vizinhança de $x = 5$? E na vizinhança de $x = -5$?
(e) Dê os intervalos (aproximados) onde a função é crescente.

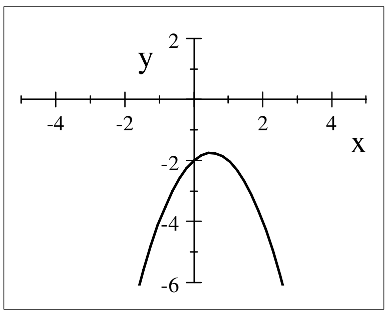
6) Se $f(x) = x^2 + 1$, encontre:

(a) $f(t+1)$ (b) $f(t^2+1)$ (c) $f(2)$ (d) $2f(t)$ (e) $[f(t)]^2+1$

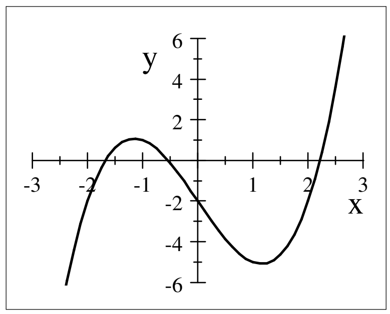
7) Esboce o gráfico de uma função definida para $x \geq 0$ com as seguintes propriedades. (Existem várias respostas possíveis.)
(a) $f(0) = 2$.
(b) $f(x)$ é crescente para $0 \leq x < 1$.
(c) $f(x)$ é decrescente para $1 < x < 3$.
(d) $f(x)$ é crescente para $x > 3$.
(e) $f(x) \to 5$ quando $x \to \infty$.

8) Relacione as seguintes fórmulas com os gráficos apresentados a seguir:

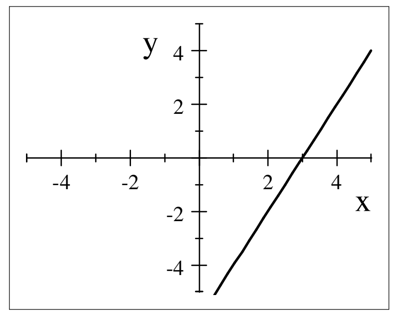
( ) $y = -x$	( ) $y = x^3 - 4x - 2$	( ) $y = -28 + 34x - 9x^2$
( ) $y = -x^2 + x - 2$	( ) $y = x^2 + 2$	( ) $y = 2x - 6$



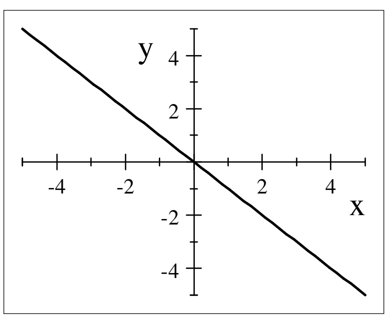
(1)



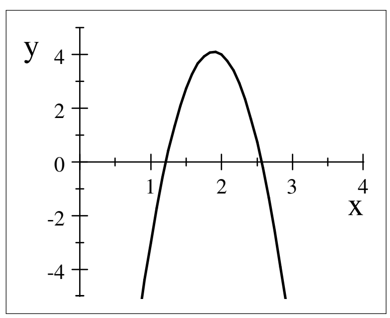
(2)



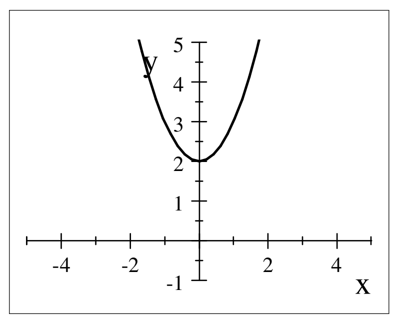
(3)



(4)



(5)



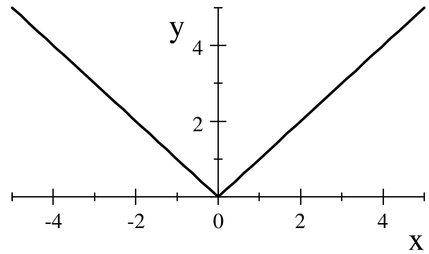
(6)

9) Uma empresa de aluguel de automóveis oferece carros a R$ 40,00 por dia e R$1,50 o quilômetro rodado. Os carros do seu concorrente estão a R$ 50,00 por dia e R$1,00 o quilômetro rodado.
(a) Para cada empresa, obtenha uma fórmula que dê o custo de alugar o carro por um dia em função da distância percorrida.
(b) No mesmo sistema de eixos, esboce os gráficos de ambas as funções.
(c) Como você deve decidir que empresa está com o aluguel mais barato ?

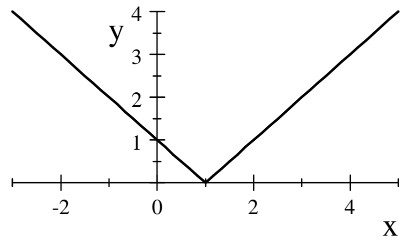
b) **Função Módulo**:

$$f(x) = |ax + b|$$

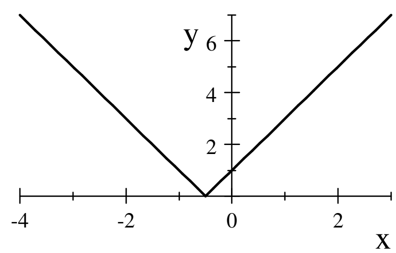
Exemplo 1: Esboce o gráfico de $f(x) = |x|$. Resposta:



Exemplo 2: Esboce o gráfico de $f(x) = |x - 1|$. Resposta:



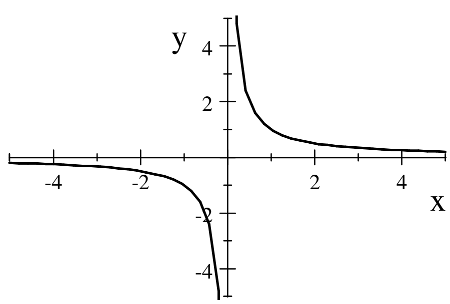
Exemplo 3: Esboce o gráfico de $f(x) = |2x + 1|$. Resposta:



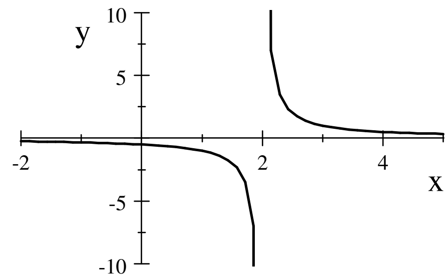
c) **Função Racional**:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

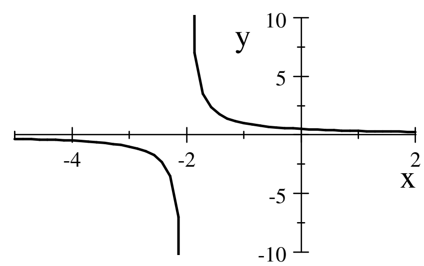
Exemplo 1: Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$. Resposta:



Exemplo 2: Esboce o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x-2}$. Resposta:



Exemplo 3: Esboce o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$. Resposta:



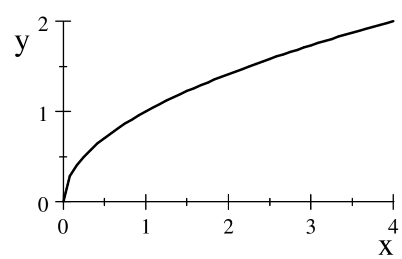
Exemplo 4: Supõe-se que a população de uma certa comunidade, daqui a x anos, será de $P(x) = 30 - \dfrac{5}{x+2}$ milhares.

a) Daqui a 10 anos, qual será a população da comunidade? Resposta: 29,58 mil habitantes.
b) De quanto a população crescerá durante o 10^o ano? Resposta: 30 habitantes.
c) Ao longo desse tempo, o que acontecerá ao tamanho da população? Resposta: Crescerá até 30 mil habitantes.

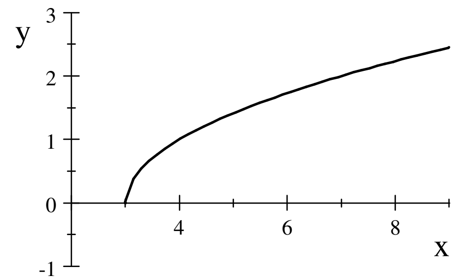
d) **Função Raiz Quadrada**:

$$f(x) = \sqrt{ax+b}$$

Exemplo 1: Esboce o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$. Resposta:



Exemplo 2: Esboce o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x-3}$. Resposta:



e) **Funções Trigonométricas**:

Os primeiros estudos sobre Trigonometria tiveram origem nas relações entre lados e ângulos num triângulo e datam de muito tempo.(Trigonon : triângulo e metria : medição). Nosso objetivo principal, agora, é o estudo de **funções trigonométricas**. Podemos definí-las usando o círculo unitário, que é a definição que as torna periódicas ou com repetições. Essas funções são muito importantes, pois inúmeros fenômenos que ocorrem em nossa volta são periódicos: o nível da água em uma maré, a pressão sangüinea em um coração, uma corrente alternada, a posição das moléculas de ar transmitindo uma nota musical, todos flutuam com regularidade e podem ser representados por funções trigonométricas.

Medida de arcos de circunferência

Usamos, basicamente, duas unidades de medidas para arcos de circunferência:

- **Grau**

Um grau corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência onde está o arco a ser medido.

- **Radiano**

Um radiano corresponde à medida do arco de comprimento igual ao raio da circunferência onde está o arco a ser medido.
É importante lembrar que o arco de uma volta mede 360° ou $2\pi \ rad$ $(\pi \approx 3,14)$.

Responda: Quantos graus correspondem, aproximadamente, a um arco de $1 rad$?

Definição 1: Considere um ângulo t, medido em radianos, num círculo de equação $x^2 + y^2 = 1$. Seu lado terminal intercepta o círculo num ponto $P(x,y)$. O **seno** de t é definido como sendo a ordenada do ponto P e o **cosseno** de t é definido como sendo a abscissa do ponto P. Isto é:

$$sent = y \qquad \text{e} \qquad \cos t = x.$$

Sobre o círculo, de raio 1, marque um ponto P e identifique o seno e o cosseno do ângulo que ele representa, em cada um dos seguintes casos:

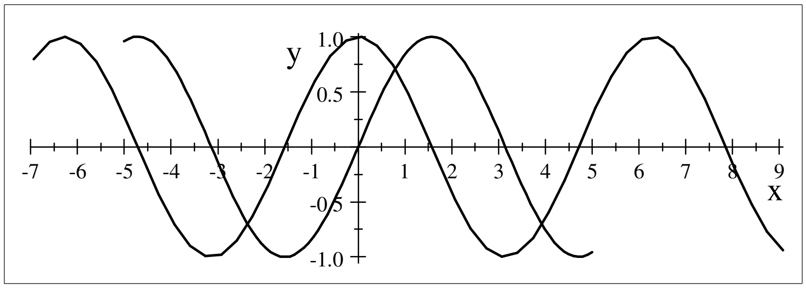
$a)$ $P \in 1^o$ quadrante $b)$ $P \in 2^o$ quadrante $c)$ $P \in 3^o$ quadrante $d)$ $P \in 4^o$ quadrante

Observe que à medida que o ponto P movimenta-se sobre o círculo, os valores de $sent$ e $\cos t$ **oscilam** entre -1 e 1.

Como consequência imediata da definição, temos que;

$$sen^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Veja, no mesmo sistema de eixos cartesianos, os gráficos das funções f e g , definidas, respectivamente, por $f(t) = sent$ e $g(t) = \cos t.$ Identifique cada uma delas.



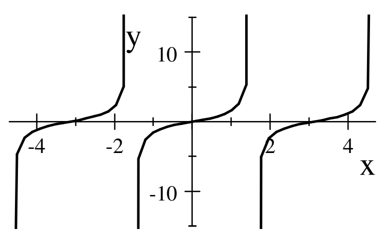
A **amplitude** de uma oscilação é a metade da distância entre os valores máximo e mínimo. O **período** de uma oscilação é o tempo necessário para que a oscilação complete
um ciclo.

A amplitude de $\cos t$ e $sent$ é 1 e o período é 2π.

<u>**Definição**</u>: Consideremos um número qualquer t , com $\cos t \neq 0$. A **função tangente** é definida por

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \quad .$$

- Observe o gráfico da função f , definida por $f(t) = \tan t$

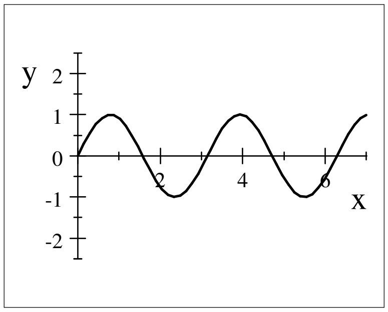


Lista de Exercícios 3

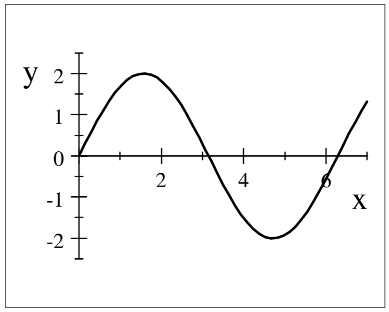
1) Relacione cada gráfico com a função que ele representa:

(1) $f(x) = 1 + senx$ (2) $g(x) = senx - 2$ (3) $h(x) = sen(2x)$

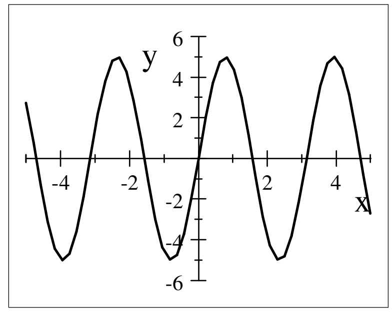
(4) $l(x) = 2senx$ (5) $m(x) = 5sen2x$ (6) $n(x) = -5sen\left(\frac{x}{2}\right)$



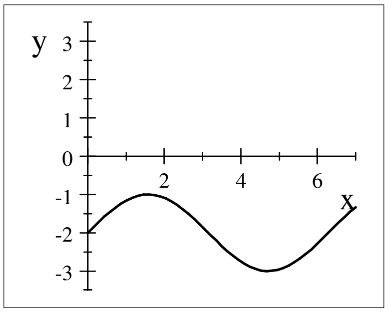
( )



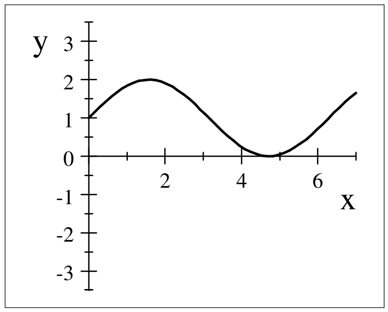
( )



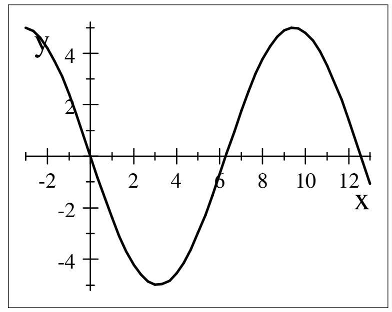
( )



( )



( )



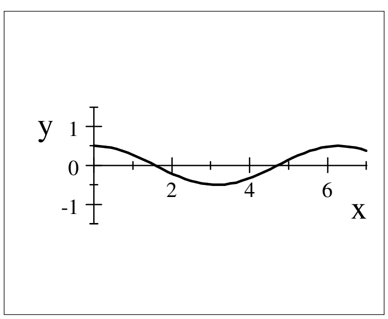
( )

• Qual a *amplitude* e o *período* de cada uma das funções ?

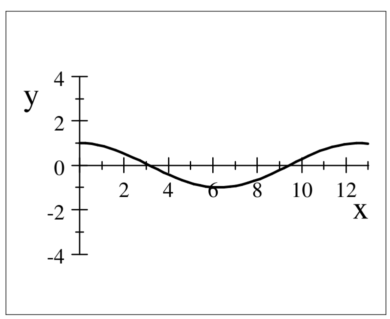
2) Idem para:

(1) $F(x) = \cos x + 2$ (2) $G(x) = 1 - \cos x$ (3) $H(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

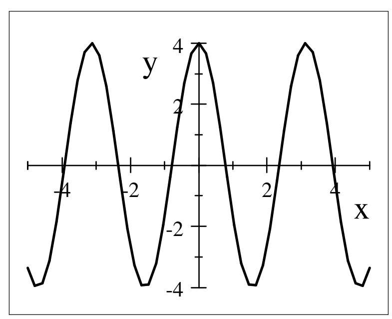
(4) $L(x) = \frac{\cos x}{2}$ (5) $M(x) = 4\cos 2x$ (6) $N(x) = 4\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$



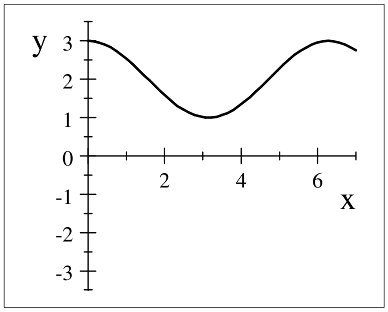
( )

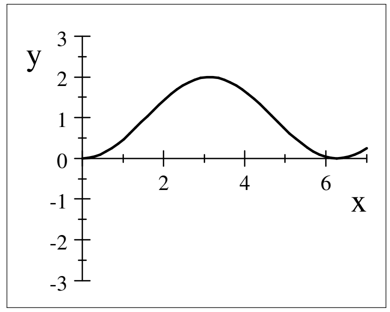


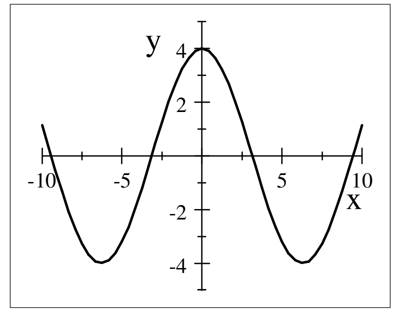
( )



( )





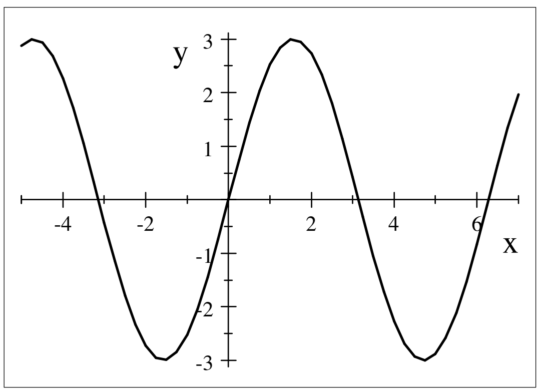


(   )   (   )   (   )

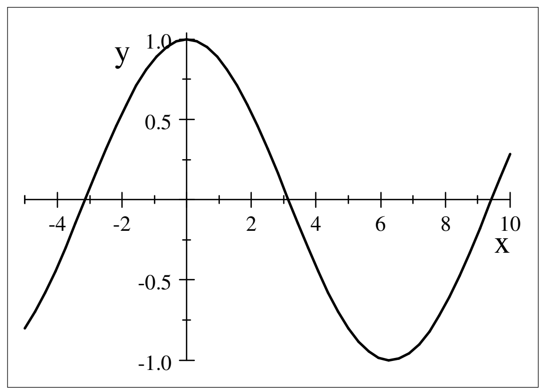
3) Qual a diferença entre $senx^2$, sen^2x e $sen(senx)$? Apresente exemplos, justificando.

4) Localize, no círculo trigonométrico, o ângulo de $\frac{\pi}{2}$ e determine o *seno* , o *co-seno* e a *tangente* do mesmo.

5) Complete, determinando uma fórmula para descrever oscilações do tipo:



$f(x) =$



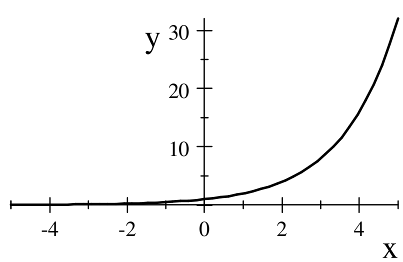
$g(x) =$

f) **Função exponencial**

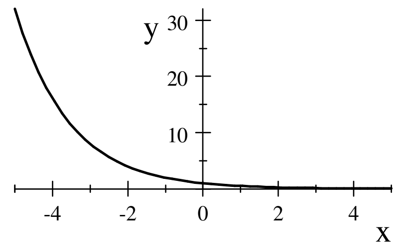
Definição: é uma função real, com base a positiva e diferente de 1, definida por

$$f(x) = a^x$$

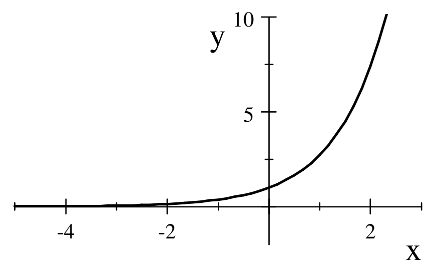
Exemplo 1: Esboce o gráfico de $f(x) = 2^x$. Resposta:



Exemplo 2: Esboce o gráfico de $f(x) = (\frac{1}{2})^x$. Resposta:



Exemplo 3: A função exponencial natural $f(x) = e^x$ é um caso particular da função exponencial de base a qualquer. Veja esta função na calculadora científica. Calcule alguns valores de x, inclusive $x = 1$. Esboce o gráfico. Resposta:



Exemplo 4: Um determinado veículo automotivo tem seu valor depreciado de tal forma que após t anos de utilização porde ser descrito pela função $V(t) = 15.000e^{-0,08t} + 600$.

a) Qual era o preço do veículo novo? Resposta: 15.600

b) Quanto o veículo valerá após 10 anos? Resposta: 7.339,93

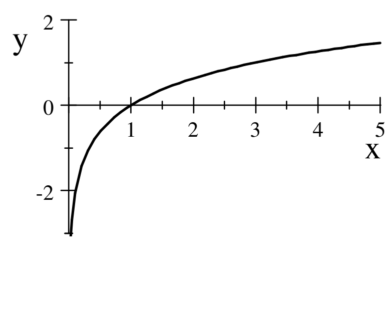
Exemplo 5: Se o custo anual y de manutenção de um computador está relacionado com o seu uso mensal médio x (em centenas de horas) pela equação $y = 35000 - 25000e^{-0,02x}$, qual é o custo anual de manutenção, em reais para o uso mensal médio de 200 horas? Resposta: R$ 10.980,26

g) **Função Logarítmica**:

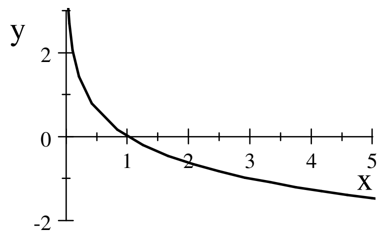
Definição: A função logarítmica de base a, positiva e diferente de 1, é uma função real, definida por

$$f(x) = \log_a x$$

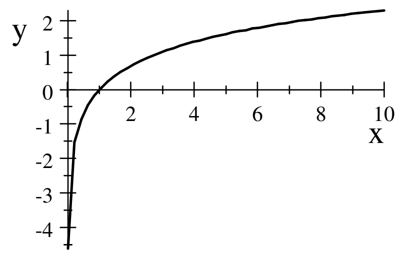
Exemplo 1: Esboce o gráfico da função $f(x) = \log_3 x$. Resposta:



Exemplo 2: Esboce o gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$. Resposta:



Exemplo 3: A função logarítmica natural $f(x) = \ln x$ é um caso particular da função logarítmica de base a qualquer, porque $\ln x = \log_e x$. Veja esta função na calculadora científica. Calcule alguns valores de x, inclusive $x = 1$. Esboce o gráfico. Resposta:



Propriedades:

1) $\ln(A.B) = \ln A + \ln B$

2) $\ln(\frac{A}{B}) = \ln A - \ln B$

3) $\ln A^r = r \ln A$

4) Mudança de base: $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a} = \dfrac{\ln a}{\ln b}$

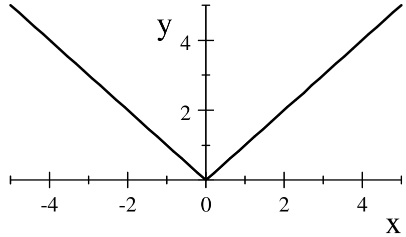
Exemplo 4: Uma máquina tem depreciação exponencial dada pela fórmula $V = V_0 e^{at}$. Sabendo que, em 1995, seu valor era de R$ 14.500,00 e em 2004 era de R$ 9.800, calcule seu valor em 1997. Resposta: R$ 13.291,00

h) **Função par**:

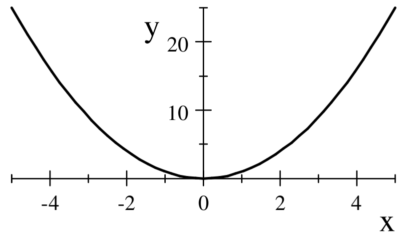
$$f(-x) = f(x)$$

Exemplos:

1) Função módulo: $f(x) = |x|$



2) Função quadrática: $f(x) = x^2$

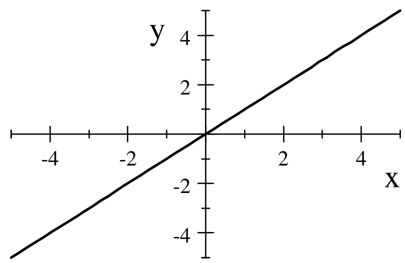


i) **Função Ímpar**:

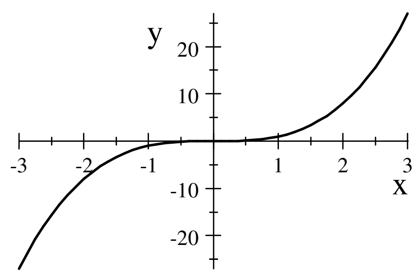
$$f(-x) = -f(x)$$

Exemplos:

1) Função identidade: $f(x) = x$



2) Função cúbica: $f(x) = x^3$



j) **Função periódica**:

$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = \ldots$$

Exemplo: As funções trigonométricas: função seno e função cosseno.

k) **Função definida por partes**

Há funções que são definidas por mais de uma expressão, como no exemplo a seguir:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & se \quad x < 0 \\ x^2 & se \quad 0 \le x < 2 \\ 1 & se \quad x \ge 2 \end{cases}$$

• Construa o gráfico da função dada.O que observa?

Exemplo: a função valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

é uma função definida por duas sentenças.

l) **Função Composta**:

Dadas duas funções f e g, a função composta de f e g ,denotada por $f \circ g$ é definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Exemplo 1: Dadas as funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x - 1$, encontre a composição de funções $(f \circ g)(x)$.
Resposta: $(f \circ g)(x) = f(x-1) = \sqrt{x-1}$

Exemplo 2: A análise das condições da água de uma pequena praia indica que o nível médio diário de substâncias poluentes presentes no local será de $Q(p) = \sqrt{0,6p + 18,4}$ unidades de volume, quando a população for p milhares de habitantes. Estima-se que, daqui a t anos, a população seja de $p(t) = 6 + 0,1t^2$ mil habitantes.

a) Expresse o nível de substâncias poluentes em função do tempo. Resposta: $Q(t) = \sqrt{22 + 0,06t^2}$

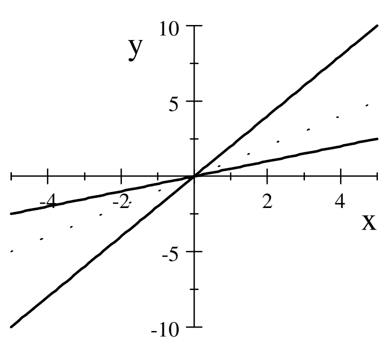
b) Qual será o nível de substâncias poluentes daqui a 2 anos? Resposta: 4,72 unidades de volume

c) Em quanto tempo, aproximadamente, o número de substâncias poluentes será de 5 unidades de volume? Resposta: 7 anos.

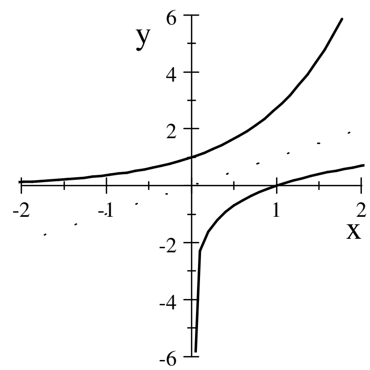
m) **Função Inversa**:

Exemplo 1: Encontre a função inversa de $f(x) = 2x$.
Solução: escrevendo $y = 2x$, então reslvemos a equação para x, $2x = y \Rightarrow x = y/2$. Finalmente, trocamos x por y temos: $y = x/2$.

Observe que o grafico da função inversa é obtido refletindo-se o gráfico de $f(x)$ em torno da reta $y = x$.



Exemplo 2: As funções exponencial $y = e^x$ e logarítmica $y = \ln x$ são inversas.



Exemplo 3: Encontre a função inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

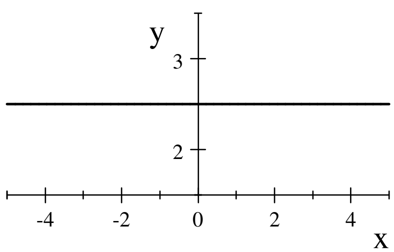
Solução: Escrevendo $y = x^3 + 2$, então resolvemos a equação para x, $x^3 = y - 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-2}$. Finalmente, trocamos x por y, obtemos $y = \sqrt[3]{x-2}$.

Lista de Exercícios 4:

1) Construa o gráfico das funções:

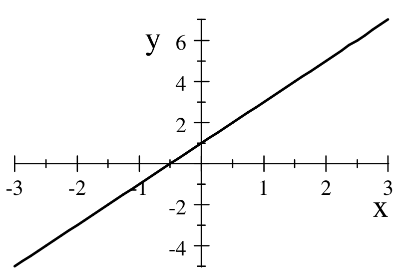
a) $f(x) = 5/2$

Resposta:

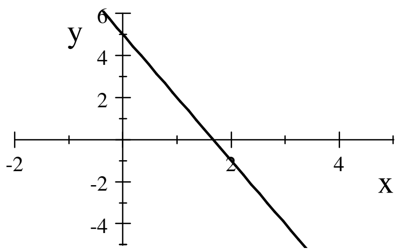


b)$f(x) = 2x + 1$

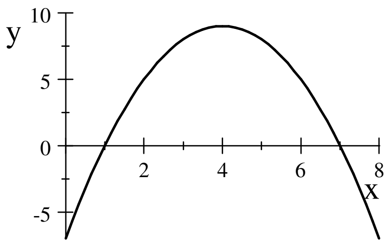
Resposta:



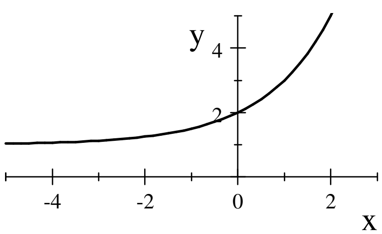
c)$f(x) = 5 - 3x$

Resposta: 

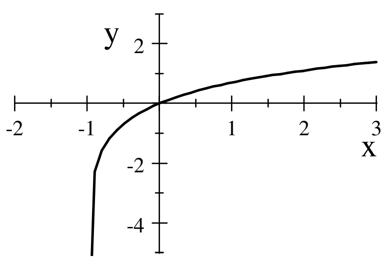
d) $f(x) = -x^2 + 8x - 7$

Resposta: 

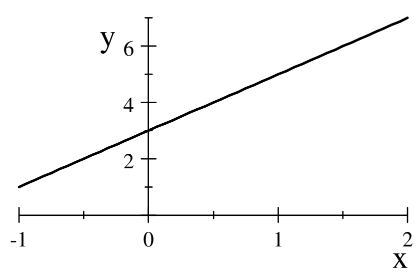
e) $f(x) = 2^x + 1$

Resposta: 

f) $f(x) = \ln(x+1)$

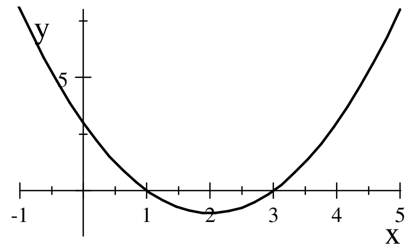
Resposta: 

2) Um ciclista, com velocidade constante, percorre uma trajetória retilínea conforme o gráfico:



Em quanto tempo percorrerá 15 Km? Resposta: 6 min.

3) Escreva a função do 2^o grau representada pelo gráfico:



Resposta: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

4) O custo para a produção de x unidades de certo produto é dado por $C = x^2 - 40x + 1600$. Calcule o valor do custo mínimo. Resposta: $C = 1200$.

5) Determine o domínio, a imagem, o gráfico e o período das funções:

a) $y = 2\sin x$ Resp.: $D = \Re, \mathrm{Im} = [-2, 2]$, período= 2π.
b) $y = 2 + \sin x$ Resp.: $D = \Re, \mathrm{Im} = [1, 3]$, período= 2π.
c) $y = \sin(3x)$ Resp.: $D = \Re, \mathrm{Im} = [-1, 1]$, período= $2\pi/3$.
d) $y = \cos(2x)$ Resp.: $D = \Re, \mathrm{Im} = [-1, 1]$, período= π.
e) $y = \cos(x + \pi/2)$ Resp.: $D = \Re, \mathrm{Im} = [-1, 1]$, período= 2π.
f) $y = 1 + 2\cos(x + \pi)$ Resp.: $D = \Re, \mathrm{Im} = [-1, 3]$, período= 2π.

6) A função degrau de Heaviside, H, é definida por $H(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ 1 & se \quad x \geq 0 \end{cases}$. Construa seu gráfico.

7) Para afinar um piano, um músico usa um diapasão que emite a nota LA (440 Hz). O movimento oscilatório de uma das extremidades do diapasão pode ser descrita de forma aproximada por $x(t) = 0,01\sin(880\pi t)$, onde x é dado em milímetros e t em segundos. Determine o domínio, a imagem, o período e a amplitude dessa função.

8) O algoritmo denominado Quicksort é capas de ordenar uma lista de n elementos usando, em média, $M = n\log_2 n$ operações. Supondo que a velocidade de processamento v de um computador seja de 1 000 000 de operações por segundo, quanto tempo irá demorar para ordenar uma lista com $n = 5000000$ de elementos

9) O volume de madeira V (em milhares de metros cúbicos por hectare) produzido por uma floresta com t anos é dado por

$$V = 470e^{-48/t}$$

a) Encontre o volume por hectare em 20 e 50 anos. Resp.: 42,63 e 179,95 milhares de metros cúbicos por hectare, respectivamente.
b) Encontre o volume limite de madeira por hectare quando t tende a infinito. Resp.: 470 milhares de metros cúbicos por hectare.
c) Aproximadamente quando o volume de madeira será de 63,6 milhares de metros cúbicos por hectare? Resp.: 24 anos.

10) A densidade demográfica a x quilômetros do centro de certa cidade é de $D(x) = 12e^{-0,07x}$ milhares de pessoas por km^2.
a) Qual será a densidade da população no centro da cidade? Resp.:12 mil.
b) Qual a densidade da população a 10 km do centro da cidade? Resp.: 5,96 mil.

11) Um estudo das condições ambientais de certa cidade indica que a taxa de poluição do ar será $c(p) = 0,4p + 1$ partes por milhão, quando a população for p milhares de habitantes. Imagina-se que a população, daqui a t anos, seja dada pela função $p(t) = 8 + 0,2t^2$ milhares.
a) determinar a função da poluição do ar em função do tempo.
b) calcule a taxa de poluição do ar daqui a 3 anos. Resp.: 4,92 partes por milhão/ano
c) quando a taxa de poluição do ar alcançará 6,2 partes por milhão? Resp.: 5 anos

12) Encontre uma fórmula para a função inversa.

a) $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$, b) $f(x) = e^{x^3}$, c) $f(x) = \ln(x + 3)$, d) $y = 2x^2 + 2$.

Respostas: a) $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{10}{3}$. b) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\ln x}$ c) $f^{-1}(x) = e^x - 3$, d) $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-2}{2}}$

Limites:

O conceito de limite é o alicerce sobre o qual todos os outros conceitos do cálculo estão baseados. Usamos a palavra limite no nosso cotidiano para indicar, genericamente, um ponto que pode ser eventualmente atingido mas que jamais pode ser ultrapassado.

Exemplos:

a) Injetando ininterruptamente ar em um balão de borracha, haverá um momento em que ele estoura. Isso porque existe um **Limite** de elasticidade da borracha.
b) Um engenheiro ao construir um elevador estabelece o **Limite** de carga que este suporta.
c) No lançamento de um foguete, os cientistas devem estabelecer um **Limite** mínimo de combustível necessário para que a aeronave entre em órbita.

É importante ter em mente que o limite pode ser um ponto que nunca é atingido mas do qual pode-se aproximar tanto quanto desejar. Iniciaremos por estudá-los de uma forma intuitiva.

Limites descrevem o que acontece com uma função $f(x)$ à medida que sua variável x se aproxima de um número particular a. Para ilustrar este conceito, vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Suponha que você quer saber o que acontece com a função

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

à medida que x se aproxima de 1. Embora $f(x)$ não esteja definida em $x = 1$, você pode obter uma boa idéia da situação avaliando $f(x)$ em valores de x cada vez mais próximos de 1 , tanto à esquerda quanto à direita. Isto pode ser feito através de uma tabela de valores.

x	$f(x)$
0.9	2.9
0.99	2.99
0.999	2.999
0.9999	2.9999

donde podemos concluir que, para valores próximos de 1, à sua esquerda, $f(x)$ se aproxima do número 3 e escrevemos:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \ ,$$

lendo: "o **limite** de $f(x)$ quando x tende a 1 pela esquerda é 3".
De forma análoga, investigamos o **limite à direita**. Vejamos:

x	$f(x)$
1.1	3.1
1.01	3.01
1.001	3.001
1.0001	3.0001

donde podemos concluir que, para valores próximos de 1, à sua direita, $f(x)$ se aproxima também do número 3 e escrevemos:

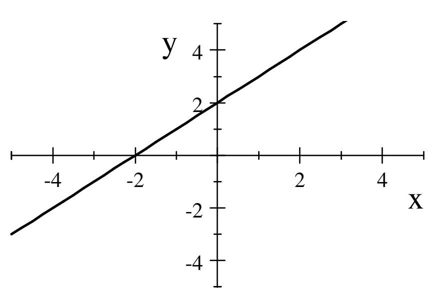
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3 \ ,$$

lendo: "o **limite** de $f(x)$ quando x tende a 1 pela direita é 3".

Concluímos que:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

Graficamente, temos:



No caso da função $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$, a qual concluimos que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ tabelando valores à esquerda e à direita de 1, este também pode ser determinado de forma algébrica, ou seja,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+2) = 1+2 = 3$$

Propriedades:

1) O limite é único.

2) Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$ existem e c é um número real qualquer, então:

a) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm M$

b) $\lim_{x\to a} c.f(x) = c\lim_{x\to a} f(x) = cL$

c) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x) = LM$

d) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}$, para $M \neq 0$

e) $\lim_{x\to a}(f(x))^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n = L^n$

f) $\lim_{x\to a} c = c$

LIMITES LATERAIS:

- Limite pela direita:
Notação:

$$\lim_{x\to a+} f(x)$$

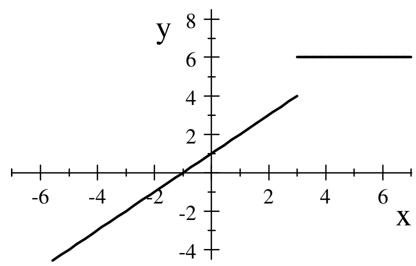
- Limite pela esquerda:
Notação:

$$\lim_{x\to a-} f(x)$$

Teorema 1: Se os limites à direita e à esquerda são diferentes $\lim_{x\to a-} f(x) = A$ e $\lim_{x\to a+} f(x) = B$, então o limite $\lim_{x\to a} f(x)$ não existe.

Notamos que no exemplo 1 obtivemos para a função $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1}$,os limites laterais iguais, isto é, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ e por este motivo afirmamos que $\lim_{x\to 1} f(x) = 3.$ Nem sempre isso ocorre. Vejamos um segundo exemplo.

Exemplo 2: Dada a função $f(x) = \begin{cases} x+1 & se \quad x < 3 \\ 6 & se \quad x \geq 3 \end{cases}$, cujo gráfico está representado a seguir.



Temos:

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 4$ e $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 6$ logo, conclui-se que $\nexists \lim_{x \to 3} f(x)$, pois os limites laterais são distintos.

Exemplo 3 : Dada a função $f(x) = \frac{1}{x}$, vamos verificar o comportamento da função quando tomamos valores próximos de $x = 0$. Embora $f(x)$ não esteja definida em $x = 0$, pode-se obter uma idéia da situação avaliando $f(x)$ em valores de x cada vez mais próximos de 0 , tanto à esquerda quanto à direita, como foi feito no exemplo 1, através de uma tabela,

x	$f(x)$
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.001	-1000
-0.0001	-10000
-0.00001	-100000

donde podemos concluir que, para valores próximos de 0, à sua esquerda, $f(x)$ decresce indefinidamente (sem limitação) e escrevemos:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty ,$$

De forma análoga, investigamos o **limite à direita**.

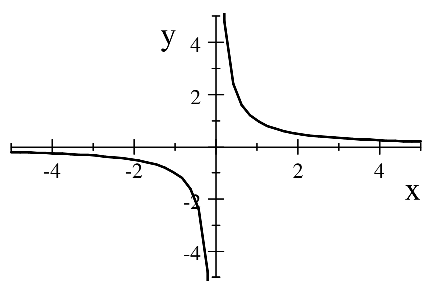
x	$f(x)$
0.1	10
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10000
0.00001	100000

donde podemos concluir que, para valores próximos de 0, a sua direita, $f(x)$ cresce indefinidamente (sem limitação) e escrevemos:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

Concluímos então que $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$,usando o argumento de que os limites laterais são distintos.

O gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ está abaixo representado



OBS.1: Devemos enfatizar que os símbolos $+\infty$ e $-\infty$, como usados aqui, descrevem uma maneira particular na qual o limite não existe; eles não são limites numéricos e, conseqüentemente, não podem ser manipulados usando regras de álgebra. Por exemplo, não é correto escrever $(+\infty) - (+\infty) = 0$.

OBS.2: Se $\lim_{x \to a} f(x)$, onde a não é ponto crítico ($\frac{a}{0}$, por exemplo) ou ponto de descontinuidade, então o limite existe e é $f(a)$. Caso contrário, devemos calcular os limites laterais.

Exemplo 4: Determine, se existir, o limite de: $\lim_{x \to 1} \frac{x}{x-1}$

Exemplo 5: Calcule $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 9}{x + 2}$:

Exemplo 6: Calcule $\lim_{x \to 0} f(x)$ onde $f(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } x = 0 \\ x, \text{ se } x \neq 0 \end{cases}$

Teorema 2: (Limite no infinito) Se $n \in N$, então $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Teorema 3: (Limite Infinito) Se $n \in N$, então $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^n} = \infty$ e $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, \text{ se n é par} \\ -\infty, \text{ se n é ímpar} \end{cases}$

OBS. 3: Se n é par, $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^n}$, então $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n}$ existe.

Se n é ímpar, $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^n} \neq \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^n}$, então $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n}$ não existe.

Exemplo 7: Calcule $\lim_{x \to 0} y(x)$, onde $y(x) = \frac{1}{x^2}$

Expressões Indeterminadas:

$$\boxed{\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty}$$

Exemplo 8: Calcule $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$. Resposta: 2

Exemplo 9: Calcule $\lim_{x \to -2} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{x+2}$. Resposta: -1

Exemplo 10: Calcule $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 3x + 7}{3x^2 + 2x - 1}$. Resposta: ∞

Lista de Exercícios 5:

1) Explique com suas palavras o significado da equação

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

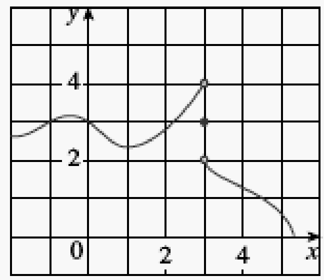
é possível diante da equação anterior que $f(2) = 3$? Explique.

2) Para a função cujo gráfico é dado, determine o valor solicitado se existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 3} f(x)$

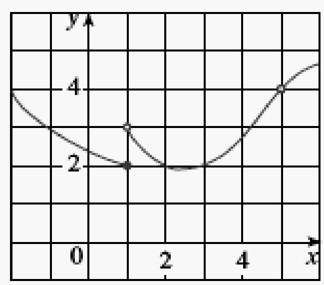
(e) $f(3)$



3) Para a função cujo gráfico é dado, determine o valor solicitado se existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 5} f(x)$ (e) $f(5)$

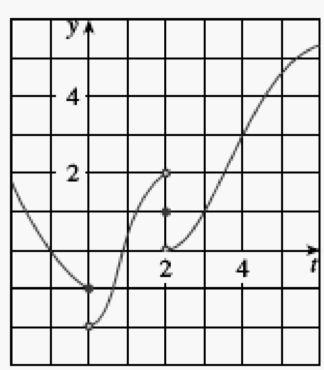


4) Para a função cujo gráfico é dado, determine o valor solicitado se existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{t \to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t \to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t \to 0} g(t)$

(d) $\lim_{t \to 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{t \to 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{t \to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim_{t \to 4} g(t)$



5) Dado que

$$\lim_{x \to a} f(x) = -3 \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a} h(x) = 8$$

Encontre se existir, o limite. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x \to a} [f(x) + h(x)]$ (b) $\lim_{x \to a} [f(x)]^2$

(c) $\lim_{x \to a} \sqrt[3]{h(x)}$ (d) $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)}$

(e) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$

(g) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (h) $\lim_{x \to a} \dfrac{2f(x)}{h(x) - f(x)}$

6) Calcule os limites:

1) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x - 5}{x + 8}$ Resp.: 2

2) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 - 3x + 5}{4x^5 - 2}$ Resp.: 0

3) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ Resp.: 6

4) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ Resp.: 1/2

5) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 4x}{x^3 - 3x^2 + 2x}$ Resp.: 4

6) $\lim_{x \to 9} \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$ Resp.: 6

7) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ Resp.: 3

7) Calcule os limites:

1) $\lim_{x \to 3} [\dfrac{x - 5}{x^3 - 7}]$

2) $\lim_{t \to 2} [\dfrac{t^2 - 5}{2t^3 + 6}]$

3) $\lim_{r \to 1} \sqrt{\dfrac{8r + 1}{r + 3}}$

4) $\lim_{x \to 1} [\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}]$

5) $\lim_{x \to 0} [\dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}]$

6) $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$

7) $\lim_{x \to 0} [\dfrac{x^3 - x}{x}]$

8) $\lim_{x \to \infty} [\dfrac{2x - 1}{x - 2}]$

12) $\lim_{t \to \infty} [\dfrac{t^2 - 2t + 3}{2t^2 + 5t - 3}]$

13) $\lim_{x \to -\infty} [\dfrac{5x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 + x^3 - x + 1}]$

14) $\lim_{x \to 3+} [\dfrac{x}{x - 3}], \lim_{x \to 3-} [\dfrac{x}{x - 3}], \lim_{x \to 3} [\dfrac{x}{x - 3}]$

15) $\lim_{y \to 0} [\dfrac{1 - \sqrt{1 + y}}{7y}]$

16) $\lim_{t \to 0} [\dfrac{4 - (t + 2)^2}{9 - (t + 3)^2}]$

17) $\lim_{x \to -1} [\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}]$

18) $\lim_{x \to 0} [\dfrac{(3x + 1)^2 - 1}{x^3 - 3x}]$

19) $\lim_{x \to 1} [\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}]$

9) $\lim_{x\to\infty}[\frac{2x}{x^2-1}]$

10) $\lim_{x\to\infty}[x^2-10x+1]$

11) $\lim_{x\to-2}[\frac{x^3-3x+2}{x^2-4}]$

20) $\lim_{h\to0}[\frac{(x+h)^2-x^2}{h}]$

21) $\lim_{x\to\infty}[\frac{-x^3+3x^2}{x^3-1}]$

22) $\lim_{x\to0+}\frac{|x|}{x^2}, \lim_{x\to0-}\frac{|x|}{x^2}, \lim_{x\to0}\frac{|x|}{x^2}$

Respostas do exercício 7)

1) $-\frac{1}{10}$	9) 0	17) 1
2) $-\frac{1}{22}$	10) $+\infty$	18) -2
3) $\frac{3}{2}$	11) $-\frac{9}{4}$	19) $\frac{1}{2}$
4) 2	12) $\frac{1}{2}$	20) $2x$
5) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$	13) 0	21) -1
6) $\nexists$	14) $+\infty, -\infty, \nexists$	22) $+\infty, +\infty, +\infty$
7) -1	15) $-\frac{1}{14}$	
8) 2	16) $\frac{2}{3}$	

Continuidade:

Um grupo importante de funções de uma variável real é o das **funções contínuas**, isto é, funções que têm limite, em cada ponto de seu domínio, igual ao valor da função no ponto. O gráfico uma função contínua não tem quebras, saltos ou furos, ou seja, pode ser traçado sem levantar a ponta do lápis do papel.

Definição: Dizemos que uma função f é contínua no ponto a, se as seguintes condições forem satisfeitas:

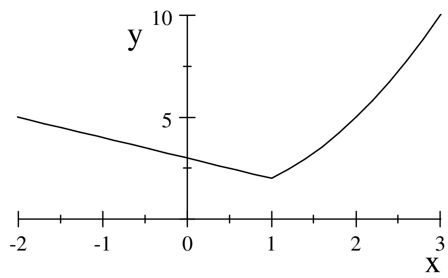
i) f é definida no ponto a
ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe
iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Se f não satisfizer alguma destas condições, dizemos que a função f é descontínua em a ou que f tem uma descontinuidade no ponto a.

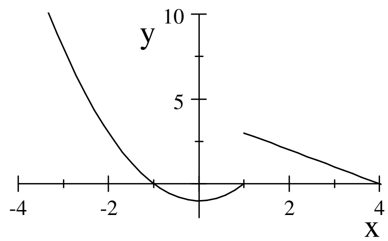
Dizemos que uma função f é contínua em um intervalo, se f for contínua em todos os pontos desse intervalo.

Exemplo 1: Faça o gráfico e determine, se existirem, os valores de x, nos quais a função é descontínua:

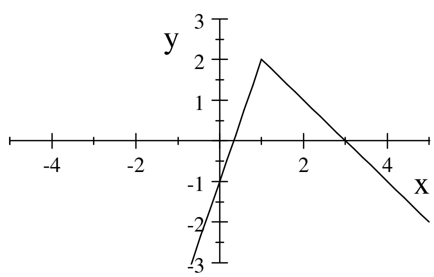
a) $f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{, se } x<1 \\ 4 & \text{, se } x=1 \\ x^2+1 & \text{, se } x>1 \end{cases}$



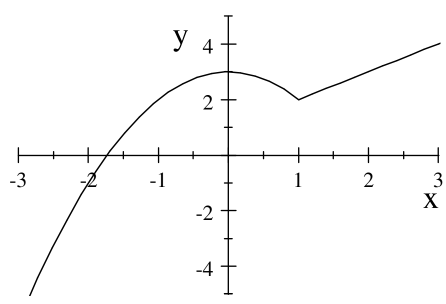
b) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{,se } x<1 \\ 4-x & \text{,se } x\geq 1 \end{cases}$



c) $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{,se } x\leq 1 \\ 3-x & \text{,se } x>1 \end{cases}$

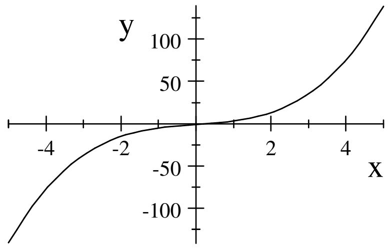


d) $g(x) = \begin{cases} 3-x^2 & \text{, se } x<1 \\ 1 & \text{, se } x=1 \\ x+1 & \text{, se } x>1 \end{cases}$



Teorema: Todos os polinômios são contínuos para todo valor de x. Uma função racional é contínua em qualquer ponto onde ela é definida, isto é, em todos os pontos, exceto naqueles para os quais um ou mais de seus denominadores se anulam.

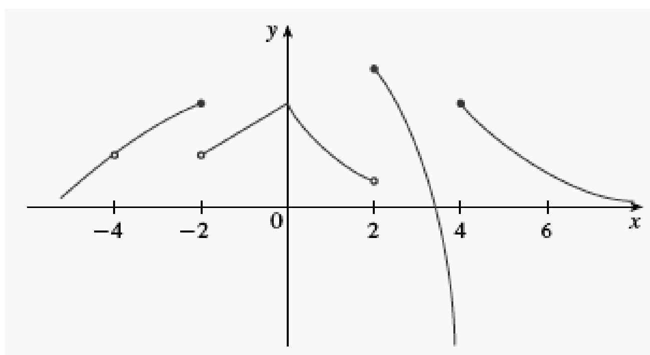
Exemplo 2:

$f(x) = x^3 + 3x - 1$ 

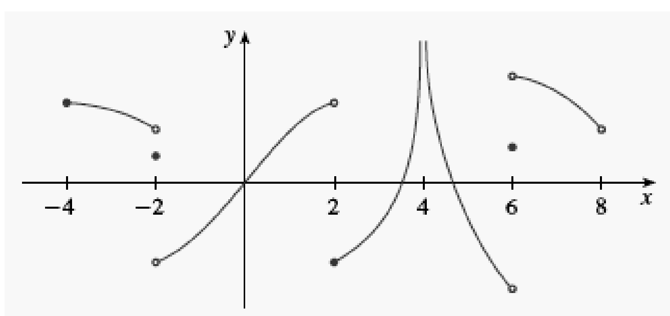
é função contínua para todo x.

Lista de Exercícios 6:

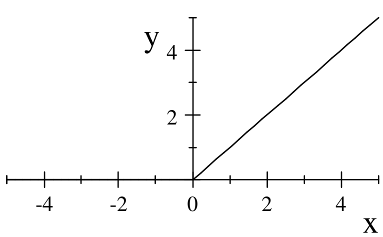
1) Dados os gráficos de f(x) e g(x) abaixo, estabeleça os números nos quais as funções são descontínuas e explique por quê.
f(x)



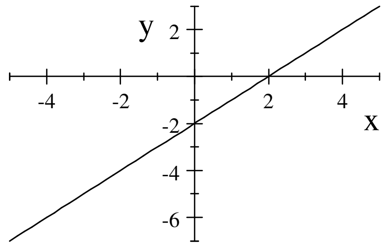
g(x)



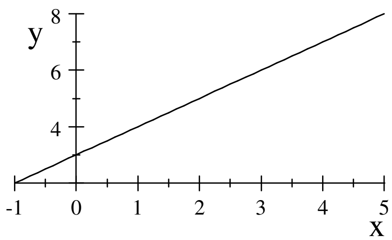
Faça o gráfico e determine, se existirem, os valores de x nos quais a função $f(x)$ é descontínua:



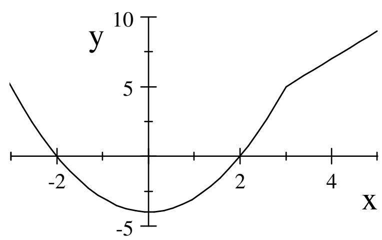
2) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{,se } x \leq 0 \\ x & \text{,se } x > 0 \end{cases}$



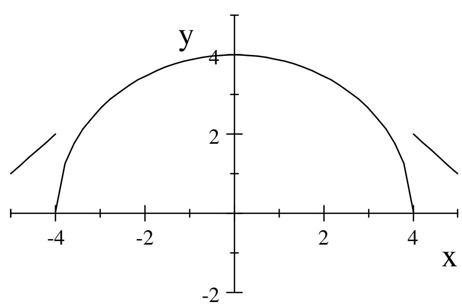
$$3)\, f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{,se } x \neq -2 \\ 1 & \text{,se } x = -2 \end{cases}$$



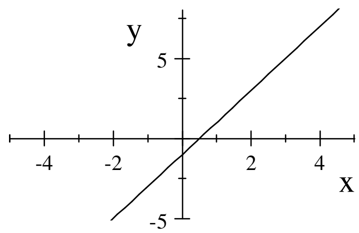
$$4)\, f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{,se } x \neq 3 \\ 2 & \text{,se } x = 3 \end{cases}$$



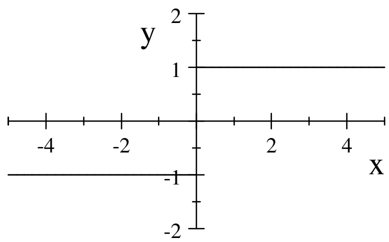
$$5)\, f(x) = \begin{cases} x^2-4 & \text{,se } x < 3 \\ 2x-1 & \text{,se } x \geq 3 \end{cases}$$



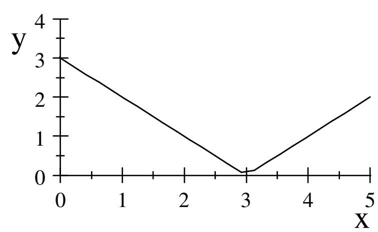
$$6)\, f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{,se } x \leq -4 \\ \sqrt{16-x^2} & \text{,se } -4 < x < 4 \\ 6-x & \text{,se } x \geq 4 \end{cases}$$



7) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{,se} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{,se} \quad x = 2 \end{cases}$



8) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{,se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{,se} \quad x = 0 \end{cases}$



9) $f(x) = \begin{cases} |x - 3| & \text{,se} \quad x \neq 3 \\ 2 & \text{,se} \quad x = 3 \end{cases}$

Traçado de Gráficos de Funções Racionais:

Roteiro:

1◦ Passo: Se a função racional é dada como uma soma de quociente de polinômios, reunimos os termos num único quociente de polinômios, tomando o mínimo múltiplo comum.

2◦ Passo: Determinar $\lim_{x \to \infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. Se esses limites são um número finito L, então y=L é uma assíntota horizontal.

Assíntota Horizontal:

A linha reta horizontal $y = b$ é chamada de assíntota horizontal do gráfico de uma função f se pelo menos uma das seguintes condições for válida:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

3◦ Passo: Determinar os valores de x para os quais o numerador da função é zero. São os pontos onde o gráfico intercepta o eixo dos x.

4◦ Passo: Determinar os valores de x para os quais o denominador da função é zero, que é onde a função tende a ∞ ou $-\infty$, determinando uma assíntota vertical.

5◦ Passo: Os valores de x encontrados no 3◦ e 4◦ passos são os pontos onde a função pode mudar de sinal. Esses pontos determinam os intervalos. Determinamos, então, se a função é positiva ou negativa em cada um desses intervalos, calculando seu valor num ponto de cada intervalo.

Assíntota Vertical:

A linha reta vertical $x = a$ é chamada de assíntota vertical do gráfico da função f se pelo menos uma das seguintes condições for válida:

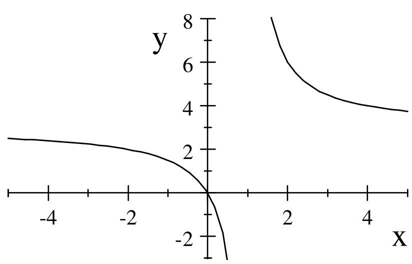
i) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = +\infty$

ii) $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = +\infty$

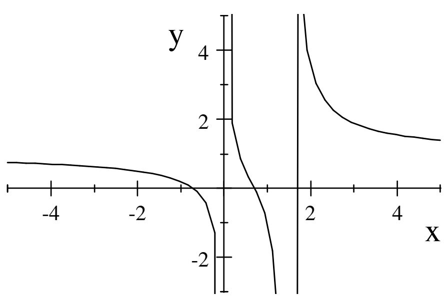
iii) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = -\infty$

iv) $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = -\infty$

Exemplo 1: Ache as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função f e trace este gráfico:



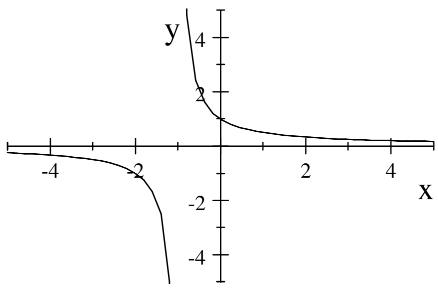
a) $f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$



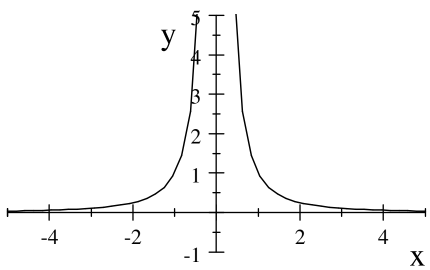
b) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{2x^2 - 3x}$

Continuidade de funções racionais:

Exemplo 2: Determine se $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ é contínua em $x = -1$:



Exemplo 3: Verifique se $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ é contínua em $x = 0$:

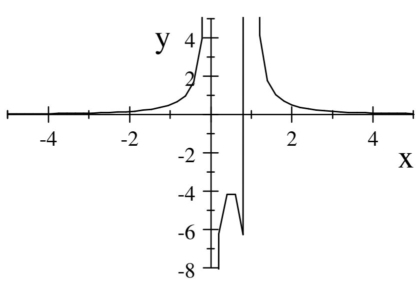


Exemplo 4: Em qual dos seguintes intervalos $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ é contínua?

a) $[2, \infty)$ b) $(-\infty, +\infty)$ c) $(2, \infty)$ d) $[1, 2]$

Exemplo 5: A função $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ é contínua para todo x, exceto para $x = 0$ e $x = 1$, que é onde zera o denominador. Esboce o gráfico e justifique sua resposta.

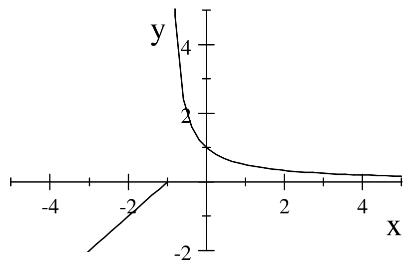
R.:



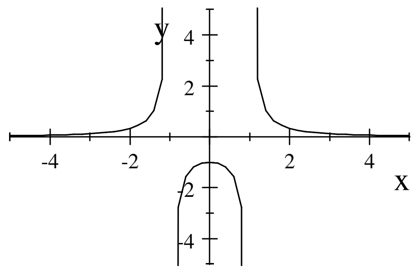
Lista de Exercícios 7:

Faça o gráfico e determine, se existirem, os valores de x nos quais a função $f(x)$ é descontínua:

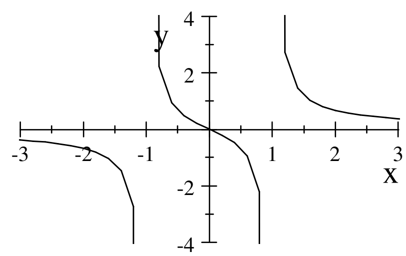
1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{, se} \quad x > -1 \\ 1 & \text{, se} \quad x = -1 \\ x+1 & \text{, se} \quad x < -1 \end{cases}$



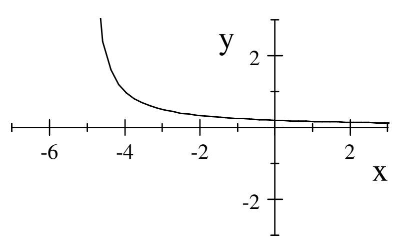
2) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2-1} & \text{, se} \quad x \neq \pm 1 \\ 0 & \text{, se} \quad x = \pm 1 \end{cases}$

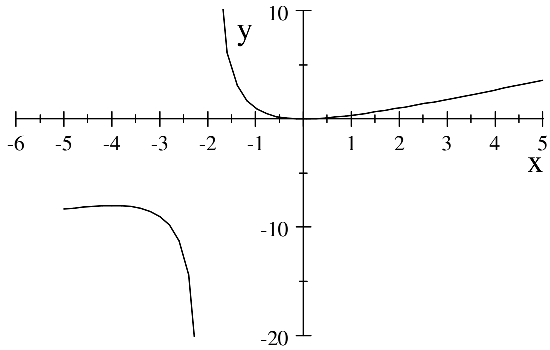


3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-1} & \text{,se} \quad x \neq \pm 1 \\ 0 & \text{,se} \quad x = \pm 1 \end{cases}$

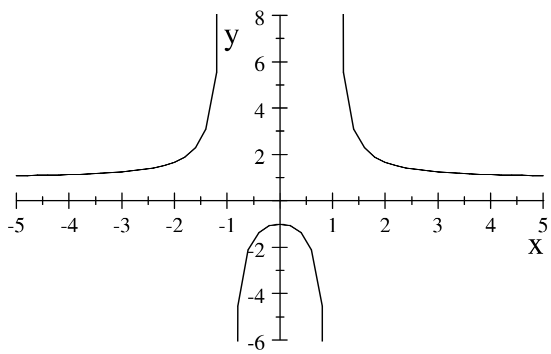


4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+5} & \text{,se} \quad x \neq -5 \\ 0 & \text{,se} \quad x = -5 \end{cases}$

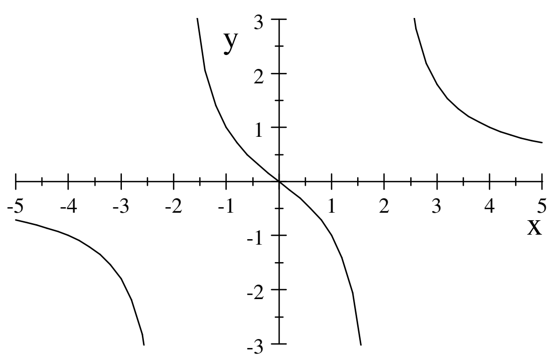




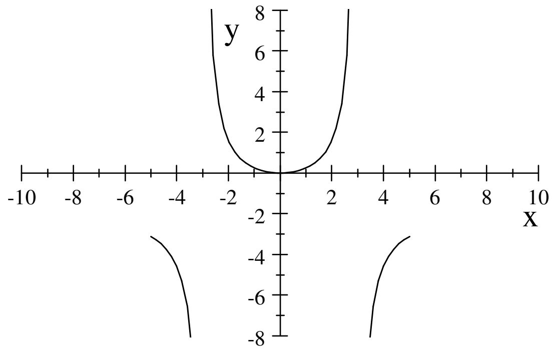
5) $y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x+2}, x \neq -2 \\ 1, x = -2 \end{cases}$



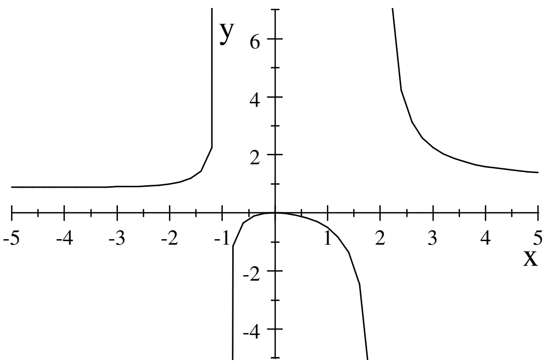
5) $y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x^2-1}, x \neq \pm 1 \\ 0, x = \pm 1 \end{cases}$



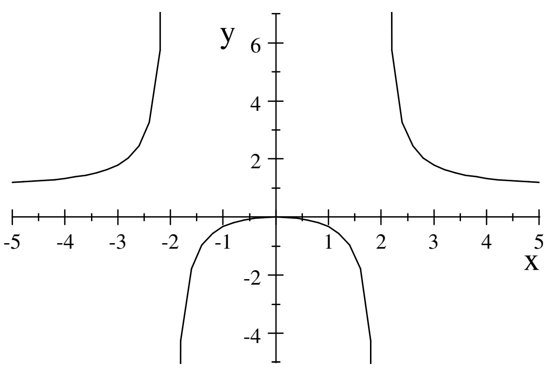
6) $y(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{x^2-4}, x \neq \pm 2 \\ -1, x = \pm 2 \end{cases}$



7) $y(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{9-x^2}, x \neq \pm 3 \\ 2, x = \pm 3 \end{cases}$



8) $y(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x - 2}$



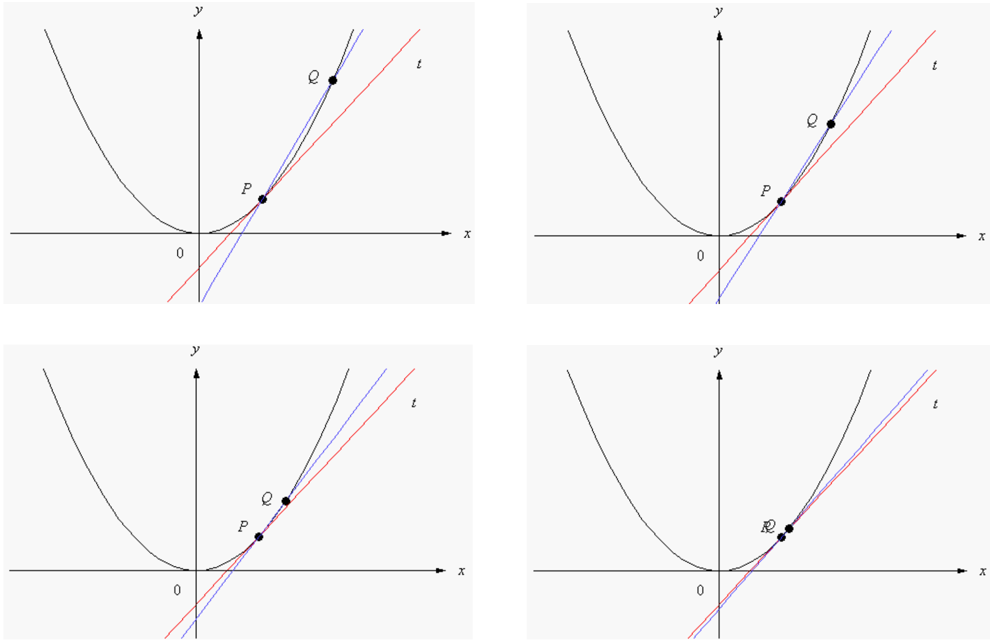
9) $y(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

Derivadas:

Derivada de f em x_0 é o coeficiente angular da reta tangente.

Notação: $f'(x_0)$.

Para calcular o coeficiente angular da reta tangente a f em x_0, tomamos a reta secante passando por $P(x_0,f(x_0))$ e um segundo ponto $Q(x,f(x))$ qualquer.



Aproximando x de x_0 , a reta secante se aproxima da reta tangente.

Temos o coeficiente angular da reta secante:

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f((x) - f(x_0)}{x - x_0}$ para $x \neq x_0$

Então, ao $x \to x_0$, teremos o coeficiente angular da reta tangente:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

desde que o limite exista e seja finito. Caso contrário, dizemos que f não tem derivada em x_0.

Exemplo 1:

a) Calcule a derivada da função $f(x) = 2x + 1$ em $x = 2$:
b) Calcule a derivada da função $f(x) = x^2$ em $x = 1$: E em $x = 2$?

Notação de Leibniz:

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}$$

Mudança de variável: $x - x_0 = \Delta x \longrightarrow x = \Delta x + x_0$.

Assim, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x}$

E, ao $x \to x_0$, $\Delta x \to 0$:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x + x_0) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Exemplo 2: Usando a fórmula de Leibniz, calcule a derivada da função $f(x) = 3x^2 + 12$, em $x = 2$.
Resp.: $f'(2) = 12$.

Observação: Funções deriváveis são contínuas, mas nem toda função contínua é derivável.

Exemplo 3: Usando a primeira fórmula estudada, calcule a derivada da função abaixo em $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 7 - x \text{ , se } x > 2 \\ 3x - 1 \text{ , se } x \leq 2 \end{cases}$$

Exemplo 4: Idem para $f(x) = |x|$ em $x = 0$:

Exemplo 5: Idem para $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em $x = 0$:

A Derivada Como Uma Função:

Se considerarmos a derivada de f em x e fizermos x variar, obtemos a função derivada $\frac{df}{dx}$, onde $\frac{df(x)}{dx}$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$.

$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, obtida substituindo x_0 por x.

Exemplo 6: Calcule a derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$:

Exemplo 7: Calcule a derivada de $f(x) = 3x^2 - 4$:

* Regras de Derivação:

- **Derivada de** x^n:

Definição: Para qualquer constante racional n, a derivada da função x^n é

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

Exemplo 1: Calcule $\frac{d}{dx}x^2$. Resposta: $2x$

- **Derivadas de Combinações Lineares de Funções**:

Sejam A e B constantes:

$$\frac{d}{dx}[Af(x) + Bg(x)] = A\frac{d}{dx}f(x) + B\frac{d}{dx}g(x)$$

Exemplo 2: Calcule a derivada de $\frac{d}{dx}(6x^{\frac{2}{3}} - 4x^{-2} + 5x)$. Para que valores de x existe a derivada?

- **Regra do produto**:

Se as funções f e g têm derivadas em x, então seu produto também tem derivada e vale:

$$\frac{d}{dx}[f(x).\,g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$$

Exemplo 3: $\frac{d}{dx}[(x^3 + 3x - 1)(4x^{\frac{1}{2}} - 6)]$

- **Regra do quociente**:

Se as funções f e g têm derivadas em x e se $g(x)$ não é zero, então o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ também tem uma derivada em x e vale:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{[g(x)]^2}$$

Exemplo 4: Calcule a derivada de $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{2x-1}\right]$:

- **Derivada de Funções Especiais**:

$$\begin{array}{ll}
\frac{d}{dx} senx = \cos x & \frac{d}{dx} senhx = \cosh x \\
\frac{d}{dx} \cos x = -senx & \frac{d}{dx} \cosh x = senhx \\
\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x & \frac{d}{dx} \tanh x = \sec h^2 x \\
\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x & \frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x \\
\frac{d}{dx} e^x = e^x & \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} \\
senhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}
\end{array}$$

Lista de Exercícios 8:

1) Usando a definição de derivada (fórmula de Leibniz), calcule as seguintes funções:

a) $f(x) = 2x^2 + x$, em $x = 3$ Resp.: $f'(3) = 13$

b) $g(x) = \frac{1}{x+2}$, em $x = 5$ Resp.: $g'(5) = -\frac{1}{49}$

c) $h(x) = \sqrt{x+5}$, em $x = 4$ Resp.: $h'(4) = \frac{1}{6}$

d)$f(x) = -\frac{x^2}{4}$ Resp.: $f'(x) = -\frac{x}{2}$

e)$f(x) = 5x - 3$ Resp.: $f'(x) = 5$

f)$g(x) = x^2$ Resp.: $g'(x) = 2x$

2) Calcule a derivada, usando a regra adequada:

2.1) $y(x) = 5x^3 - 6x^2 + 7x$ Resp.: $y'(x) = 15x^2 - 12x + 7$

2.2) $y(x) = x^7 + 3x^2 - 15$ Resp.: $y'(x) = 7x^6 + 6x$

2.3) $y(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$ Resp.: $y'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}$

2.4) $y(x) = \sqrt{x} + 2$ Resp.: $y'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

2.5) $y(x) = x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$ Resp.: $y'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}$

2.6) $y(x) = 2\sqrt[3]{x} - 3x$ Resp.: $y'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 3$

2.7) $y(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$ Resp.: $y'(x) = -\frac{4x}{(1 + x^2)^2}$

2.8) $y(x) = \frac{x^2 + x + 1}{1 - x^3}$ Resp.: $y'(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{(1 - x^{3})^2}$

2.9) $y(x) = \frac{x + \sqrt{2}}{x - \sqrt{3}}$ Resp.: $y'(x) = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{2}}{(x - \sqrt{3})^2}$

2.10) $y(x) = (\frac{2}{3}x^3 - x^2)(x^{\frac{1}{2}} + 2x)$ Resp.:$y'(x) = (\frac{2}{3}x^3 - x^2)(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2) + (2x^2 - 2x)(x^{\frac{1}{2}} + 2x)$

Velocidade Média:

Definição: Se um objeto está a $s = f(t)$ quilômetros no instante t horas, então sua velocidade média durante o intervalo de tempo entre os instantes t_0 e t ($t_0 \neq t$) é:

velocidade média=$\frac{distância}{tempo}\frac{percorrida}{gasto}$

$$v_m = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Unidade: quilômetros/hora.

Exemplo 1: Uma motocicleta está a 16 t^3 de um posto de gasolina. Qual é a velocidade média da motocicleta durante o intervalo de tempo $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$?

Velocidade Instantânea:

Definimos a velocidade de um objeto em t_0 como o limite quando t tende a t_0 , que é a derivada da função de deslocamento $f(t)$ em t_0.

Exemplo 2: Calcular a velocidade da motocicleta do exemplo anterior em $t = 1$:

Observação 1: Se a função deslocamento é crescente, a velocidade é positiva e se o deslocamento for decrescente, a velocidade é negativa.

Exemplo 3: Seja $s = 45 - 5t^2$. Calcule $s'(2)$ e $s'(-2)$:

Observação 2: A velocidade é a taxa de variação do deslocamento e a taxa de variação da velocidade é a aceleração.

Exemplo 4: Uma frente fria aproxima-se de uma região. A temperatura é T graus t horas após a meia-noite e $T = 0,1(400 - 40t + t^2)$, $0 \leq t \leq 12$.
a) Ache a taxa de variação média de T em relação a t entre 5h e 6h: R.: T=-2,9 graus/h
b) Ache a taxa de variação de T em relação a t às 5h: R.: -3 graus/h.

Exemplo 5: Uma bola é atirada verticalmente para cima a partir do chão, com velocidade inicial de 64 m/s. Se o sentido positivo da distância do ponto de partida é para cima, a equação do movimento é $s = -16t^2 + 64t$ com t em segundos e s em metros.
a) Ache a velocidade instantânea da bola ao fim de 1s. R.: 32 m/s
b) Ache a aceleração instantânea da bola ao final de 1s. R.: -32 m/s^2
c) Quantos segundos a bola leva para atingir o seu ponto mais alto? R.: 2 s
d) Qual a altura máxima atingida pela bola? R.: 64 m
e) Decorridos quantos segundos a bola atinge o solo? R.: 4 s
f) Ache a velocidade instantânea da bola quando ela chega ao chão. R.: -64 m/s.

Lista de Exercícios 9:

1) Uma partícula move-se ao longo de uma reta horizontal, onde s cm é a distância orientada da partícula a partir do ponto O em t segundos. Ache a velocidade instantânea $v(t)$ cm/s em t segundos e então ache $v(t_1)$ para o valor de t_1 dado:

a) $s = 3t^2 + 1; t_1 = 3$ Resp.: $6t; 18$

b) $s = \frac{1}{4t}; t_1 = \frac{1}{2}$ Resp.: $-\frac{1}{4t^2}; -1$

c) $s = 2t^3 - t^2 + 5; t_1 = -1$ Resp.: $6t^2 - 2t; 8$

d) $s = \frac{2t}{4+t}; t_1 = 0$ Resp.: $\frac{8}{(4+t)^2}; \frac{1}{2}$

2) Um objeto cai do repouso de acordo com a equação $s = -16t^2$, onde s cm é a distância do objeto ao ponto de partida em t segundos e o sentido positivo é para cima. Se uma pedra cai de um edifício com 256 cm de altura, ache
a) a velocidade instantânea da pedra 1s. depois de iniciada a queda; Resp.: -32 cm/s

b) a velocidade instantânea da pedra 2s. depois da queda; Resp.: -64 cm/s
c) quanto tempo leva para a pedra atingir o solo? Resp.: 4s
d) a velocidade instantânea da pedra quando ela atinge o solo. Resp.: -128 cm/s.

3) Uma bola de bilhar é atingida e movimenta-se em linha reta. Se s cm for a distância da bola de sua posição inicial após t segundos, então $s = 100t^2 + 100t$. Com qual velocidade a bola atingirá a tabela da posição inicial que está a 39 cm? Resp.: 160 cm/s.

4) Se uma bola for impulsionada de tal forma que ela adquira uma velocidade inicial de 24 cm/s ao descer um certo plano inclinado, então $s = 24t + 10t^2$, onde o sentido positivo é o de descida do plano inclinado.
a) Qual será a velocidade instantânea da bola em t_1 s.? Resp.: $24 + 20t_1$.
b) Quanto tempo levará para que a velocidade aumente para 48 cm/s? Resp.: 1,2 s.

- **Regra da Cadeia** (**para funções compostas**):

Sejam g e u funções de uma variável real x. A derivada da composta $g(u(x))$ é dada por:

$$\frac{d}{dx}g(u(x)) = \frac{d}{du}g(u).\frac{d}{dx}u(x)$$

Exemplo 1: Calcule a derivada de $y(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

Exemplo 2: Calcule a derivada de $y(x) = x^2(x^3 + 2x)^{10}$

Exemplo 3: Calcule a derivada de $y(x) = \left(\frac{3x}{x^2 + 7}\right)^9$

Exercícios: Calcule a derivada de:

1) $y = \cos^2 x$ R.: $y' = -2\cos x sen x$
2) $y = sen^3(4x)$ R.: $y' = 12 sen^2(4x)\cos(4x)$
3) $y = e^{2x}$ R.: $y' = 2e^{2x}$
4) $y = \ln(2x^2)$ R.: $y' = \frac{2}{x}$
5) $y = e^{-3x}(3x^2 + 1)^3$ R.: $y' = -3e^{-3x}(3x^2 + 1)^3 + 18xe^{-3x}(3x^2 + 1)^2$

- **Derivada Segunda ou de Ordem 2**:

A derivada segunda de uma função $f(x)$ é a derivada de sua derivada (primeira) $f'(x)$.
Notação:

$$f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)$$

Exemplo 1: Calcule a derivada segunda de $f(x) = x^5 - 2x$.

- **Derivadas de ordem superior**:

Seja f uma função derivável: f' é a derivada primeira de f
f'' é a derivada segunda de f
f''' é a derivada terceira de f
$f^{(n)}$ é a derivada enésima de f.

Exemplo 2: Ache todas as derivadas da função $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 7$.

Exemplo 3: Calcule $\frac{d^3}{dx^3}(2senx + 3\cos x - x^3)$:

- **Aceleração instantânea**:

É a taxa de variação instantânea da velocidade. Se v (velocidade) é dada em cm/s, a (aceleração) será dada em cm/s².

$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$ e $\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$ ou $\boxed{a = \frac{d^2s}{dt^2}}$

Exemplo 4: Se $s = \frac{1}{t} - 2\sqrt{t-1}$, $v = -\frac{1}{t^2} - (t-1)^{-\frac{1}{2}}$ e $a = \frac{2}{t^3} + \frac{1}{2}(t-1)^{-\frac{2}{3}}$

- **Derivação implícita**:

Função explícita: $y = 3x^2 + 5x + 1$
Função implícita: $y^2 + 2xy + 3x - 1 = 0$

Exemplo 1: Dada a função $x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2$, calcule y' usando derivação implícita:

Para derivarmos o segundo membro, usamos a regra da cadeia!
Resp.: $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^5 - 2}{18y^5 + 5y^4 - 2y}$

Exemplo 2: Calcule a derivada da equação $3x^4y^2 - 7xy^3 = 4 - 8y$. Resp.: $\frac{dy}{dx} = \frac{7y^3 - 12x^3y^2}{6x^4y - 21xy^2 + 8}$

Exemplo 3: Dada $(x+y)^2 - (x-y)^2 = x^4 + y^4$, ache $\frac{dy}{dx}$. Resp.: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - y}{x - y^3}$

Exemplo 4: Dada $x\cos y + y\cos x = 1$, ache $\frac{dy}{dx}$. Resp.: $\frac{dy}{dx} = \frac{y\sin x - \cos y}{\cos x - x\sin y}$

Lista de Exercícios 10:

1) Calcule a derivada segunda das seguintes funções:

1.1) $y(x) = x^6$ Resp.: $y''(x) = 30x^4$

1.2) $y(x) = \frac{2}{x}$ Resp.: $y''(x) = \frac{4}{x^3}$

1.3) $y(x) = x^4 - 3x^3 + 2x + 1$ Resp.: $y''(x) = 12x^2 - 18x$

1.4) $y(x) = \exp(-x)$ Resp.: $y''(x) = \exp(-x)$

1.5) $y(x) = (1-x)^3$ Resp.: $y''(x) = 6(1-x)$

2) Ache $f^{(4)}(x)$ se $f(x) = \frac{2}{x-1}$. Resp.: $f^{(4)}(x) = \frac{48}{(x-1)^5}$

3) Ache $f^{(5)}(x)$ se $f(x) = \cos(2x) - \sin(2x)$. Resp.: $f^{(5)}(x) = -32(\sin(2x) + \cos(2x))$

4) Dada $x^2 + y^2 = 1$, mostre que $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{y^3}$.

5) Dada $x^2 + 25y^2 = 100$, mostre que $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{25y^3}$.

6) Dada $x^3 + y^3 = 1$, mostre que $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2x}{y^5}$.

7) Uma partícula está se movendo ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a equação dada. Ache a velocidade e a aceleração em função do tempo t.

a) $s = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 + 6t - 2$ Resp.: $v = \frac{t^2}{2} - 4t + 6; a = t - 4$

b) $s = \frac{125}{16t+32} - \frac{2}{5}t^5$ Resp.: $v = -\frac{2000}{(16t+32)^2} - 2t^4; a = \frac{64000}{(16t+32)^3} - 8t^3$

c) $s = 9t^2 + 2\sqrt{2t+1}$ Resp.: $v = 18t + 2(2t+1)^{-\frac{1}{2}}; a = 18 - 2(2t+1)^{-\frac{3}{2}}$

d) $s = \frac{4}{9}t^{\frac{3}{2}} + 2t^{\frac{1}{2}}$ Resp.: $v = \frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}; a = \frac{1}{3}t^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}$

8) Ache $\frac{dy}{dx}$ por derivação implícita:

1) $x^2 + y^2 = 16$ $R.: \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

2) $x^3 + y^3 = 8xy$ $R.: \frac{dy}{dx} = \frac{8y - 3x^2}{3y^2 - 8x}$

3) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ $R.: \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2}$

4) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ $\qquad R.: \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

5) $x^2y^2 = x^2 + y^2$ $\qquad R.: \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(1-y^2)}{y(x^2-1)}$

Taxas Relacionadas:

São problemas envolvendo taxas de variação de variáveis que estão relacionadas.

Exemplo 1: Uma escada com 25 u.c. (unidades de comprimento) está apoiada numa parede vertical. Se o pé da escada for puxado horizontalmente, afastando-se da parede a 3 u.c. por segundo, qual a velocidade com que a escada está deslizando, quando seu pé está a 15 u.c. da parede? Resp.:-9/4 u.c./s.

Exemplo 2: Um tanque tem a forma de um cone invertido com 16 m. de altura e uma base com 4 m. de raio. A água flui no tanque a uma taxa de 2 m^3/min. Com que velocidade o nível da água estará se elevando quando sua profundidade for de 5 m.?(Volume do cone $= \dfrac{\pi r^2 h}{3}$). Resp.: $\dfrac{32}{25\pi}$ m/min.

Exemplo 3: Dois carros estão se encaminhando em direção a um cruzamento, um seguindo a direção leste a 90 km/h e o outro seguindo a direção sul a 60 km/h. Qual a taxa segundo a qual eles se aproximam um do outro no instante em que o primeiro carro está a 0,2 km do cruzamento e o segundo a 0,15 km? Resp.: -108 km/h.

Exemplo 4: Dada $x\cos y = 5$, onde x e y são funções de uma terceira variável t. Se $\dfrac{dx}{dt} = -4$, ache $\dfrac{dy}{dt}$ quando $y = \dfrac{\pi}{3}$. Resp.: -$\dfrac{2\sqrt{3}}{15}$

Lista de Exercícios 11:

A) Nos exercícios de 1 a 4, x e y são funções de t:

1) Se $2x + 3y = 8$ e $\dfrac{dy}{dt} = 2$, ache $\dfrac{dx}{dt}$. Resp.: -3

2) Se $xy = 20$ e $\dfrac{dy}{dt} = 10$, ache $\dfrac{dx}{dt}$ quando $x = 2$. Resp.: -2

3) Se $\sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{5}{4}$ e $\dfrac{dx}{dt} = -1$, ache $\dfrac{dy}{dt}$ em $(\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{3\pi}{4})$. Resp.: $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4) Se $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ e $\dfrac{dy}{dt} = 3$, ache $\dfrac{dx}{dt}$ quando $x = 1$. Resp.: $-\dfrac{3}{4}$

B) Uma pipa está voando a uma altura de 40m. Uma criança está empinando-a de tal forma que ela se mova horizontalmente, a uma velocidade de 3 m/s. Se a linha estiver esticada com que velocidade a linha estará sendo dada, quando o comprimento da linha desenrolada for de 50m? Resp.: $\frac{9}{5}$m/s.

C) Uma bola de neve está se formando de tal modo que seu volume cresça a uma taxa de $8cm^3$/min. Ache a taxa segundo a qual o raio está crescendo quando a bola de neve tiver 4 cm de diâmetro. (Lembre que volume da esfera é= $\frac{4\pi r^3}{3}$). Resp.: $\frac{1}{2\pi}cm$/min.

D) Uma certa quantidade de areia é despejada a uma taxa de $10m^3$/min, formando um monte cônico. Se a altura do monte for sempre o dobro do raio da base, com que taxa a altura estará crescendo quando o monte tiver 8m de altura? (Lembre que volume do cone= $\frac{\pi r^2 h}{3}$). Resp.: $\frac{5}{8\pi}m$/min.

E) Suponha que um tumor no corpo de uma pessoa tenha a forma esférica. Se, quando o raio do tumor for 0,5 cm, o raio estiver crescendo a uma taxa de 0,001 cm por dia, qual será a taxa de aumento do volume do tumor naquele instante? Resp.: 0,001 πcm^3/dia.

F) Para o tumor do exercício E), qual será a taxa de crescimento da sua área quando seu raio for 0,5 cm? (Lembre que $A = 4\pi r^2$). Resp.: 0,004πcm^2/dia.

G) Um tanque com a forma de um cone invertido está sendo esvaziado a uma taxa de 6m^3/min. A altura do cone é de 24 m e o raio da base é de 12 m. Ache a velocidade com que o nível de água está abaixando, quando a água tiver uma profundidade de 10m. Resp.: $\frac{6}{25\pi}m$/min.

H) Uma bicicleta está 6,4 km a leste de um cruzamento, movimentando-se em direção ao cruzamento à taxa de 14,4 km/h. No mesmo instante, uma segunda bicicleta está a 4,8 km ao sul do cruzamento e se afasta do cruzamento à taxa de 16 km/h. A distância entre as bicicletas estará crescendo ou descrescendo, neste instante? A que taxa?

Resp.: Decrescendo a 1,92 km/h.

I) Um petroleiro avariado tem um vazamento de óleo cubrindo uma área circular A de raio r. Se a área cresce à taxa de 10000 m$^2/h$, qual a taxa que o raio estará se expandindo quando o raio for igual a 2 km? E quando o raio atingir o valor de 4 km? Resp.: 0,8 m/h e 0,4 m/h

J) Um tanque de água tem a forma de um cone circular reto, com vértice apontando para baixo. O topo tem 3 metros de raio e o tanque tem 12 metros de altura. O tanque está sendo cheio com água a uma taxa de 0,189 m^3/min, quando há 2,4 m de altura de água no tanque. A que taxa estará aumentando esta altura, neste momento?

Resp.: $\frac{21}{40\pi}$m/min.

K) Ao ser aquecida uma chapa circular de metal, seu diâmetro varia à razão de 0,01 cm/min. Determine a taxa à qual a área de uma das faces varia quando o diâmetro está em 30 cm. Resp.: $0{,}15\pi$ cm^2/min.

L) A área de um círculo está descrescendo à taxa de 5 m^2/s, quando seu raio é igual a 3 m. A que taxa está decrescendo o raio, neste instante? Resp.: Decresce a $\frac{5}{6\pi}$ m/s.

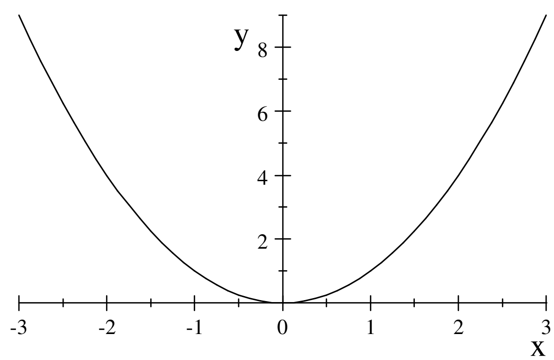
M) Em determinado instante, o raio da base de um cone circular reto é 10 cm e está crescendo à taxa de 12,5 cm/s, enquanto que a altura do cone é de 7,5 cm e está decrescendo à taxa de 15 cm/s. O volume do cone está crescendo ou decrescendo, neste momento? A que taxa? Resp.: Crescendo a uma taxa de 125π cm^3/min.

Aplicações da derivada:

Teste da derivada primeira:

Se a derivada $f'(x)$ exite e é positiva para todo x em um intervalo aberto, então a função é crescente neste intervalo. Se $f'(x)$ é negativa no intervalo aberto, então a função é decrescente.

Exemplo 1: Dada a função $f(x) = x^2$, cujo gráfico é abaixo representado,



Sua derivada é $f'(x) = 2x$.
Observe que $f'(x)$ é positiva para x > 0 e $f'(x)$ é negativa para x < 0.

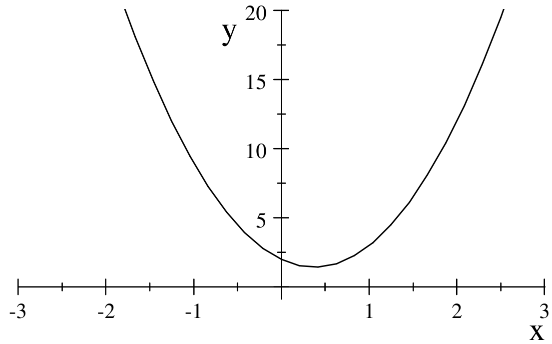
Máximos e mínimos (**Extremos das funções**):

Uma função f tem um máximo relativo (ou local) em x_0, se $f(x) \leq f(x_0)$ para todo x em um intervalo aberto contendo x_0. A função tem um mínimo relativo (ou local) em x_0, se $f(x) \geq f(x_0)$ para todo x em um intervalo aberto contendo x_0.

Pontos Críticos:

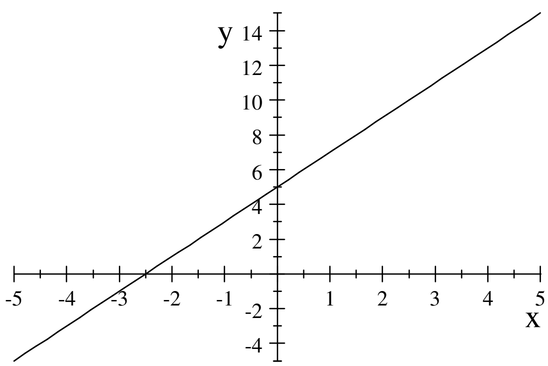
O ponto x_0 é um ponto crítico de uma função f, se f é definida em um intervalo aberto contendo x_0 e $f(x_0)$ é zero ou não existe.

Exemplo 2: Ache os pontos críticos da função:
$f(x) = 4x^2 - 3x + 2$



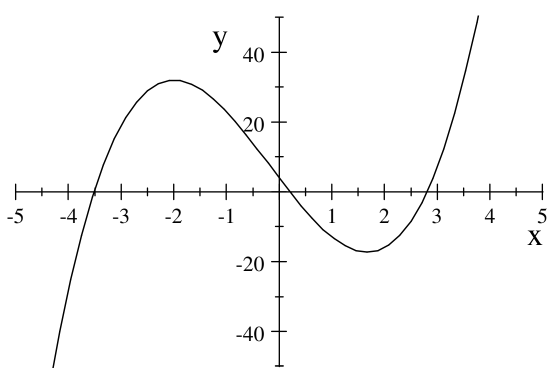
Resp.: 3/8

Exemplo 3: $f(x) = 2x + 5$



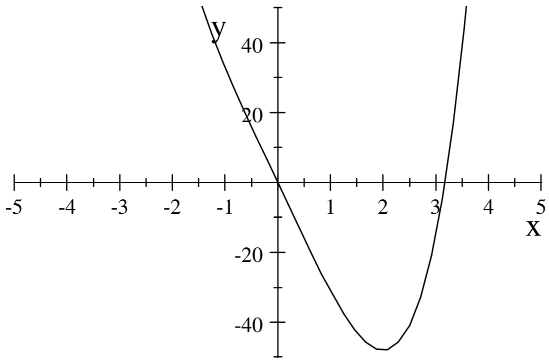
Resp.: nenhum

Exemplo 4: $s(t) = 2t^3 + t^2 - 20t + 4$



Resp.: -2, 5/3

Exemplo 5: $F(w) = w^4 - 32w$



Resp.: 2

Aplicações da derivada - Traçado de gráficos:

Teste da derivada segunda:

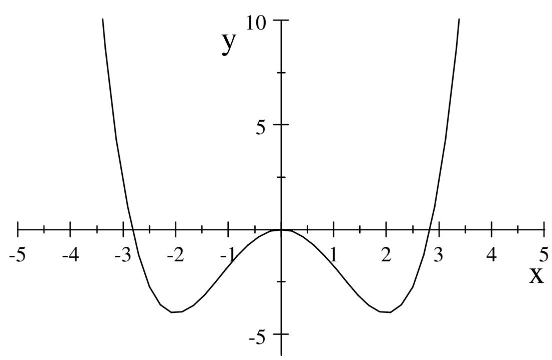
Concavidade: Se a derivada segunda $f''(x)$ é positiva num intervalo aberto, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima neste intervalo. Se $f''(x)$ é negativa no intervalo, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo.

Ponto de Inflexão:

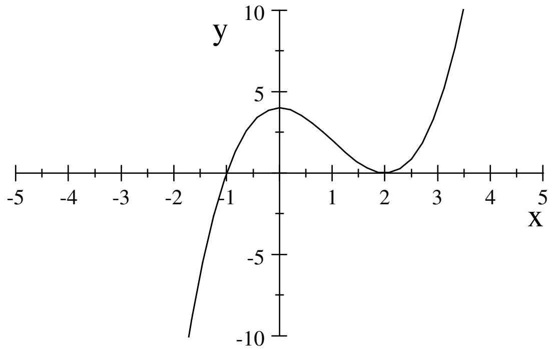
Um ponto $(x_0, f(x_0))$ do gráfico de f é um ponto de inflexão, se $f''(x_0) = 0$ ou o gráfico tem uma reta tangente vertical em $x = x_0$.

Exemplo 6: Trace o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$. Mostre os pontos críticos e os extremos da função:

Resp.:



Exemplo 7: Trace o gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

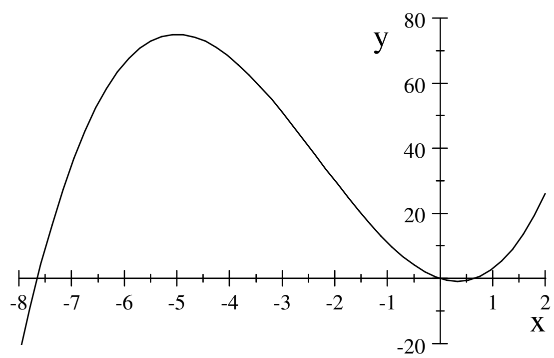


Resp:

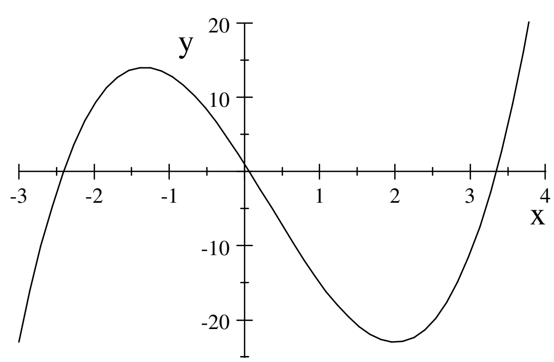
Lista de Exercícios 12:

Encontre os pontos críticos e de inflexão. Esboce o gráfico:

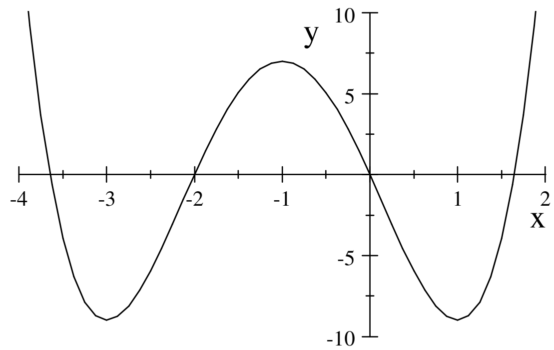
1) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$



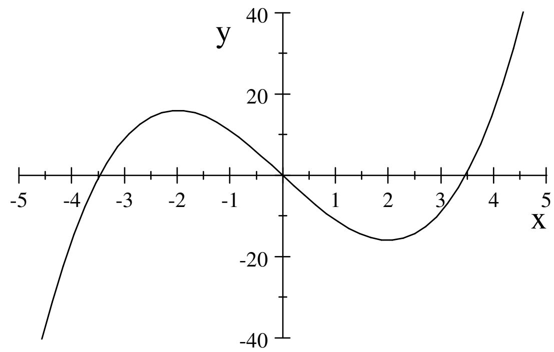
2) $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 16x + 1$



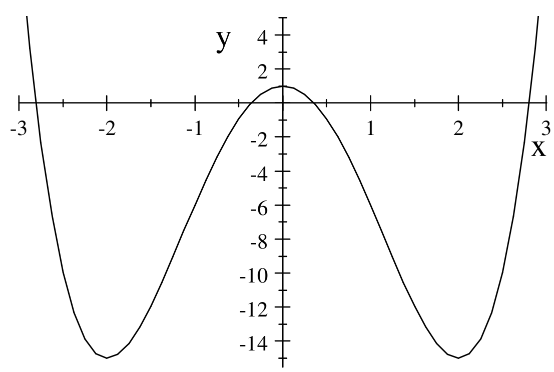
3) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$



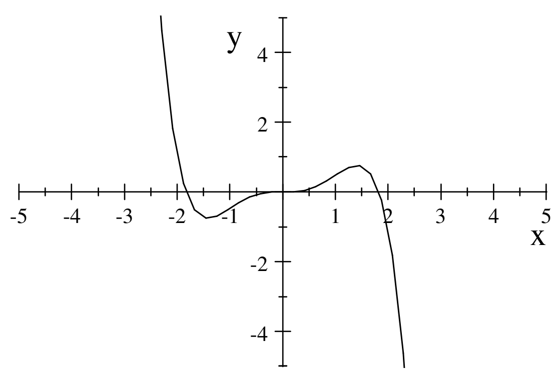
4) $f(x) = x^3 - 12x$



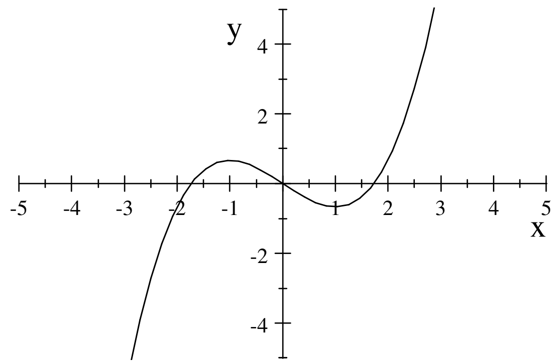
5) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$



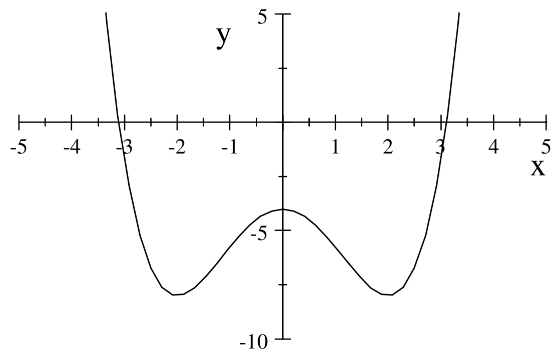
6) $y(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5$



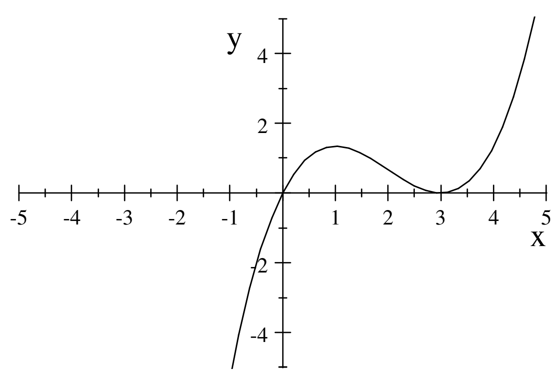
7) $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$



8) $y(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - 4$



9) $y(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$



Máximos e Mínimos absolutos (**Globais**):

Roteiro para encontrar o máximo e o mínimo de uma função contínua f em um intervalo fechado $[a, b]$:

1) Encontre os pontos críticos de f.
2) Calcule f em cada ponto crítico em (a, b)
3) Calcule f nos extremos do intervalo $[a, b]$
4) O menor desses valores é o mínimo e o maior é o máximo.

Exemplo 1: Encontre o máximo e o mínimo de $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ em $[-1, 2]$.

Exemplo 2: Calcule os extremos das funções:

a) $f(x) = 2(3 - x)$ em $[-1, 2]$ R.: Mín.: (2,2) Máx.: (-1,8)
b) $f(x) = \frac{2x + 5}{3}$ em $[0, 5]$ R.: Mín.: (0,5/3) Máx.: (5,5)
c) $f(x) = -x^2 + 3x$ em $[0, 3]$ R.: Mín.: (0,0) e (3,0) Máx.: (3/2,9/4)

Lista de Exercícios 13:

1) Calcule os extremos das funções:
a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ em $[-1, 3]$ R.: Mín.: (-1,4) e (2,-4) Máx.: (0,0) e (3,0)
b) $f(s) = \frac{1}{s - 2}$ em $[0, 1]$ R.: Mín.: (1,-1) Máx.: (0,-1/2)

2) Explique porque a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$ tem um máximo em $[1, 2]$ mas não em $(0, 2]$.

3) Explique porque a função $f(x) = \frac{1}{x + 1}$ tem um mínimo em $[0, 2]$ mas não em $[-2, 0]$.

4) A potência P de uma bateria de automóvel é dada por $P = VI - I^2r$, para uma voltagem V, corrente I e resistência interna r da bateria. Que corrente corresponde à potência máxima? Resp.: $I = \frac{V}{2r}$

5) A tosse faz com que a traquéia se contraia, afetando assim a velocidade com que o ar passa por ela. Suponha que a velocidade do ar ao tossir seja descrita pela fórmula $v = k(R - r)r^2$; onde k é uma constante, R é o raio normal da traquéia e r é o raio da mesma durante a tosse. Que raio produz a maior velocidade? Resp.: $r = \frac{2R}{3}$

6) A concentração C de uma certa substância química no fluxo sangüíneo em t horas após ser injetado no músculo é dada por $C = \frac{3t}{27 + t^3}$. Em que instante a concentração será máxima? Resp.: $\approx 2,38$ horas.

7) Após a administração de uma substância química, sua concentração no fluxo sangüíneo do paciente durante um intervalo de duas horas é da forma $C = 0,29483t + 0,04253t^2 - 0,00035t^3$, onde C é medido em miligramas e t é o tempo em minutos. Encontre os intervalos abertos em que C cresce ou decresce. Resp.: Crescente quando $0 < t < 84,3388$ minutos. Decrescente quando $84,3388 < t < 120$ minutos.