

Cálculo da solução exterior de Schwarzschild

Paulo Sérgio Kuhn
Departamento de Física - IFM
UFPel, Pelotas, RS, Brasil
<https://wp.ufpel.edu.br/pskuhn/>
<https://pskuhnblog.wordpress.com/>

Calculamos as geodésicas para a solução exterior de Schwarzschild anteriormente, obtendo as equações das órbitas elípticas para o movimento planetário, e a deflexão dos raios de luz próximos de uma massa puntiforme. Também calculamos as componentes do tensor de Riemann. Partimos da métrica exterior, cuja dedução está em Weinberg [1], por exemplo.

Vamos obter agora a solução exterior de Schwarzschild, isto é, a expressão da métrica no exterior de uma distribuição esférica de massa uniforme e estática. Vamos calcular também o tensor de Riemann-Christoffel, o tensor de Ricci, e a curvatura escalar no exterior da distribuição de massa.

Partimos da métrica na forma padrão [1],

$$ds^2 = B(r)c^2dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1)$$

ou,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -B(r) & & & \\ & A(r) & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Assim,

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -B(r), \quad g_{rr} = A(r), \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta, \\ g^{tt} &= -\frac{1}{B(r)}, \quad g^{rr} = \frac{1}{A(r)}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}. \end{aligned} \quad (3)$$

Os símbolos de Christoffel de segunda espécie para a métrica acima são [1] (problema 1),

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^t &= \frac{B'}{2A}, \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{A'}{2A}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{A}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r\sin^2\theta}{A}, \\ \Gamma_{tr}^t &= \frac{B'}{2B}, \quad \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi &= \cot\theta, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta. \end{aligned} \quad (4)$$

As componentes do tensor de curvatura de Riemann-Christoffel, definido por [2],

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\nu\eta}, \quad (5)$$

são (problema 2),

$$\begin{aligned} R^r_{trt} &= -\left(\frac{B'}{2A}\right)' - \frac{B'}{2A} \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} \frac{B'}{2A}, \\ R^\theta_{t\theta t} &= R^\varphi_{t\varphi t} = -\frac{B'}{2rA}, \\ R^t_{rtr} &= \left(\frac{B'}{2B}\right)' + \left(\frac{B'}{2B}\right)^2 - \frac{A'}{2A} \frac{B'}{2B}, \\ R^\theta_{r\theta r} &= R^\varphi_{r\varphi r} = -\frac{A'}{2rA}, \\ R^t_{\theta t\theta} &= \frac{rB'}{2AB}, \\ R^r_{\theta r\theta} &= -\frac{rA'}{2A^2}, \\ R^\varphi_{\theta\varphi\theta} &= \frac{1}{A} - 1, \\ R^t_{\varphi t\varphi} &= \frac{B'}{2AB} r \sin^2 \theta, \\ R^r_{\varphi r\varphi} &= -\frac{A'}{2A^2} r \sin^2 \theta, \\ R^\theta_{\varphi\theta\varphi} &= \sin^2 \theta \left(\frac{1}{A} - 1\right). \end{aligned} \quad (6)$$

O tensor de Riemann covariante é,

$$R_{\sigma\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma} R^\lambda_{\mu\nu\kappa}. \quad (7)$$

Obtemos (problema 3),

$$\begin{aligned}
R_{rtrt} &= -A \left(\frac{B'}{2A} \right)' - \frac{A'B'}{4A} + \frac{B'^2}{4B}, \\
R_{\theta t \theta t} &= -\frac{rB'}{2A}, \\
R_{\varphi t \varphi t} &= -r \sin^2 \theta \frac{B'}{2A}, \\
R_{\theta r \theta r} &= -\frac{rA'}{2A}, \\
R_{\varphi r \varphi r} &= -r \sin^2 \theta \frac{A'}{2A}, \\
R_{\varphi \theta \varphi \theta} &= r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{A} - 1 \right). \tag{8}
\end{aligned}$$

Com o tensor de Riemann covariante podemos calcular o escalar de Kretschmann,

$$K \equiv R_{\lambda\mu\nu\kappa} R^{\lambda\mu\nu\kappa}, \tag{9}$$

obtendo (problema 4),

$$\begin{aligned}
K &= \frac{2}{A^2 B^2} \left[-B \left(\frac{B'}{2B} \right)' - \frac{B'^2}{4B} + \frac{A'B'}{4A} \right]^2 \\
&\quad + \frac{B'^2}{r^2 A^2 B^2} + \frac{A'^2}{r^2 A^4} + \frac{2}{r^4} \left(\frac{1}{A} - 1 \right)^2. \tag{10}
\end{aligned}$$

O tensor de Ricci é dado por,

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}. \tag{11}$$

Obtemos (problema 5),

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rA}, \\
R_{rr} &= \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA}, \\
R_{\theta\theta} &= -1 + \frac{r}{2A} \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A}, \\
R_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}. \tag{12}
\end{aligned}$$

Com o tensor de Ricci calculamos a curvatura escalar,

$$R \equiv R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} , \quad (13)$$

obtendo (problema 6),

$$R = \frac{B''}{AB} - \frac{B'}{2AB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{2}{rA} \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2 A} . \quad (14)$$

No nosso caso obtemos $R = 0$

O subespaço $t = \text{constante}$ é chamado *espaço de Flamm*. Temos nele uma métrica puramente espacial, dada por,

$$ds^2 = A(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) . \quad (15)$$

Multiplicamos por -1 para obtermos uma métrica positivo definida, como é usual em geometria espacial, sem envolver a coordenada temporal. Calculando a curvatura espacial correspondente obtemos (problema 7),

$${}^{(3)}R = \frac{4GM}{c^2 r^3} . \quad (16)$$

Vamos aplicar agora as equações de campo de Einstein à métrica geral estática isotrópica. Usamos a forma padrão discutida antes, eq.(1). As equações de campo para o espaço vazio são, incluindo a constante cosmológica,

$$R_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} . \quad (17)$$

As componentes não nulas do tensor de Ricci estão em (12). Vemos que é suficiente considerarmos as equações para R_{tt} , R_{rr} e $R_{\theta\theta}$. Também podemos ver que,

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = -\frac{1}{rA} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) , \quad (18)$$

portanto,

$$\frac{B'}{B} = -\frac{A'}{A} , \quad (19)$$

ou,

$$A(r)B(r) = \text{constante} . \quad (20)$$

Temos também as condições de contorno para A e B que, em $r \rightarrow \infty$, o tensor da métrica deve se aproximar do tensor em coordenadas esféricas, isto é,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1. \quad (21)$$

Portanto,

$$A(r) = \frac{1}{B(r)}. \quad (22)$$

Usando (24) e (13) em (22), temos,

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -\frac{1}{2}B''B - \frac{1}{r}B'B = \Lambda B = -\frac{BR'_{\theta\theta}}{2r}, \\ R_{rr} &= \frac{B''}{2B} + \frac{B'}{rB} = -\frac{\Lambda}{B} = -\frac{R_{tt}}{B^2} = \frac{R'_{\theta\theta}}{2rB}, \\ R_{\theta\theta} &= -1 + rB' + B = -\Lambda r^2, \end{aligned} \quad (23)$$

logo é suficiente considerarmos a equação para $R_{\theta\theta}$,

$$-1 + rB' + B + \Lambda r^2 = 0. \quad (24)$$

A solução da equação acima é,

$$B(r) = 1 + \frac{c_0}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}. \quad (25)$$

Podemos verificar que R dada por (14) se anula com os resultados acima. Para obtermos o valor da constante de integração, lembramos que para distâncias grandes de uma massa central M (considerando $\Lambda = 0$), a componente $g_{tt} \equiv -B$ deve se aproximar de $-1 - 2\phi/c^2$, em que $\phi = -GM/r$ é o potencial Newtoniano (cap. 3). Temos então $c_0 = -2GM/c^2$, e a solução é,

$$\begin{aligned} B(r) &= \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right], \\ A(r) &= \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

A métrica fica então na forma, considerando $\Lambda = 0$,

$$d\tau^2 = \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} \right] c^2 dt^2 - \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} \right]^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (27)$$

Essa solução foi encontrada por K. Schwarzschild em 1916.

Problemas

1. Obtenha os símbolos de Christoffel de segunda espécie, eq.(4).
 2. Obtenha as componentes do tensor de Riemann-Christoffel, eq.(6).
 3. Obtenha as componentes do tensor de Riemann covariante, eq.(??).
- Temos, usando (6),*

$$\begin{aligned}
 R^r_{trt} &= -\left(\frac{B'}{2A}\right)' - \frac{B'}{2A} \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} \frac{B'}{2A}, \\
 R^\theta_{t\theta t} &= R^\varphi_{t\varphi t} = -\frac{B'}{2rA}, \\
 R^t_{rtr} &= \left(\frac{B'}{2B}\right)' + \left(\frac{B'}{2B}\right)^2 - \frac{A'}{2A} \frac{B'}{2B}, \\
 R^\theta_{r\theta r} &= R^\varphi_{r\varphi r} = -\frac{A'}{2rA}, \\
 R^t_{\theta t\theta} &= \frac{rB'}{2AB}, \\
 R^r_{\theta r\theta} &= -\frac{rA'}{2A^2}, \\
 R^\varphi_{\theta\varphi\theta} &= \frac{1}{A} - 1, \\
 R^t_{\varphi t\varphi} &= \frac{B'}{2AB} r \sin^2\theta, \\
 R^r_{\varphi r\varphi} &= -\frac{A'}{2A^2} r \sin^2\theta, \\
 R^\theta_{\varphi\theta\varphi} &= \sin^2\theta \left(\frac{1}{A} - 1\right).
 \end{aligned}$$

4. Obtenha o escalar de Kretschmann, eq.(10).
5. Obtenha as componentes do tensor de Ricci, eq.(12).
6. Obtenha a curvatura escalar, eq.(14).
7. Obtenha a expressão (16) para a curvatura da parte espacial da métrica padrão.
8. Para a solução de Schwarzschild, eq.(27), obtenha as componentes do tensor de Riemann e o escalar de Kretschmann.
9. Para a solução de Schwarzschild, eq.(27), verifique que o tensor de Ricci e a curvatura escalar se anulam.

Bibliografía

- [1] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology - Principle and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, New York (1972).
- [2] Santaló, L. A., *Vectores y tensores con sus aplicaciones*, Eudeba, Buenos Aires (1961).
- [3] Lipschutz, M. M., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Differential Geometry*, Mc-Graw-Hill, New York (1969).
- [4] Struik, D. J., *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover, New York (1961).
- [5] E. Kreyszig, *Differential Geometry*, University Toronto Press, Toronto, 1959.
- [6] Wangsness, R. K., *Electromagnetic Fields*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York (1986).
- [7] Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, 1st ed., McGraw-Hill, New York (1941).
- [8] M. R. Spiegel, S. Lipschutz, J. Liu, *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York (2009).
- [9] I. S. Gradshteyn, I. M. Rytzhik, *Table of Integral, Series, and Products*, 5th ed., Academic Press, San Diego (1994).