

A solução de Schwarzschild Cálculo da curvatura

Paulo Sérgio Kuhn

Departamento de Física - IFM

UFPel, Pelotas, RS, Brasil

<https://wp.ufpel.edu.br/pskuhn/>

<https://pskuhnblog.wordpress.com/>

Já calculamos as geodésicas para a solução de Schwarzschild anteriormente, obtendo as equações das órbitas elípticas para o movimento planetário, e a deflexão dos raios de luz próximos de uma massa puntiforme. Nesse cálculo usamos principalmente a notação de Santaló [1]. Aqui vamos calcular o tensor de curvatura, usando a notação de Weinberg [2]. Escrevemos dessa forma a métrica de Schwarzschild como,

$$ds^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1)$$

com,

$$\begin{aligned} B(r) &= \left[1 - \frac{2GM}{rc^2}\right], \\ A(r) &= \left[1 - \frac{2GM}{rc^2}\right]^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Lembramos que a solução acima é obtida das equações de campo para o espaço vazio,

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3)$$

O tensor de curvatura de Riemann-Christoffel é definido por [2],

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\nu\eta}. \quad (4)$$

Obtemos, em função de B (problema 1),

$$\begin{aligned}
R^r_{trt} &= -\frac{BB''}{2}, \\
R^\theta_{t\theta t} &= R^\varphi_{t\varphi t} = -\frac{BB'}{2r}, \\
R^t_{rtr} &= \frac{B''}{2B}, \\
R^\theta_{r\theta r} &= R^\varphi_{r\varphi r} = \frac{B'}{2rB}, \\
R^t_{\theta t\theta} &= R^r_{\theta r\theta} = \frac{rB'}{2}, \\
R^\varphi_{\theta\varphi\theta} &= B - 1, \\
R^t_{\varphi t\varphi} &= R^r_{\varphi r\varphi} = \frac{1}{2}r \sin^2\theta B', \\
R^\theta_{\varphi\theta\varphi} &= \sin^2\theta(B - 1).
\end{aligned} \tag{5}$$

Podemos verificar que o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ obtido das expressões acima é identicamente nulo, como deve ser (problema 2).

O tensor de Riemann covariante é,

$$R_{\sigma\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\sigma} R^\lambda_{\mu\nu\kappa}. \tag{6}$$

Obtemos (problema 3),

$$\begin{aligned}
R_{rtrt} &= R_{trtr} = \frac{B''}{2}, \\
R_{\theta t\theta t} &= R_{t\theta t\theta} = \frac{rBB'}{2}, \\
R_{\theta r\theta r} &= R_{r\theta r\theta} = -\frac{rB'}{2B}, \\
R_{\varphi r\varphi r} &= R_{r\varphi r\varphi} = -r \sin^2\theta \frac{B'}{2B}, \\
R_{\varphi\theta\varphi\theta} &= R_{\theta\varphi\theta\varphi} = -r^2 \sin^2\theta(B - 1), \\
R_{t\varphi t\varphi} &= R_{\varphi t\varphi t} = r \sin^2\theta \frac{BB'}{2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Como a solução de Schwarzschild é obtida de $R_{\mu\nu} = 0$ obtemos também a curvatura escalar $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 0$. Contudo, podemos calcular o escalar de Kretschmann, obtendo (problema 4),

$$K = R_{\lambda\mu\nu\kappa} R^{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{48G^2 M^2}{c^4 r^6}. \tag{8}$$

O subespaço $t = \text{constante}$ é chamado *espaço de Flamm*. Temos nele uma métrica puramente espacial, dada por,

$$ds^2 = A(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (9)$$

Multiplicamos por -1 para obtermos uma métrica positivo definida, como é usual em geometria espacial, sem envolver a coordenada temporal. Calculando a curvatura espacial correspondente obtemos (problema 5),

$${}^{(3)}R = \frac{4GM}{c^2 r^3}. \quad (10)$$

Problemas

1. Obtenha as componentes do tensor de Riemann, eq.(5), correspondente à métrica de Schwarzschild definida em (1) e (2).
2. Verifique que o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ é identicamente nulo para a solução de Schwarzschild.
3. Obtenha as componentes do tensor de Riemann covariante, eq.(7).
4. Obtenha o escalar de Kretschmann, eq.(8).
5. Obtenha a expressão (10) para a curvatura para a parte espacial da métrica de Schwarzschild.

Bibliografia

- [1] Santaló, L. A., *Vectores y tensores con sus aplicaciones*, Eudeba, Buenos Aires (1961).
- [2] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology - Principle and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, New York (1972).
- [3] Lipschutz, M. M., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Differential Geometry*, Mc-Graw-Hill, New York (1969).
- [4] Struik, D. J., *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover, New York (1961).
- [5] E. Kreyszig, *Differential Geometry*, University Toronto Press, Toronto, 1959.
- [6] Wangsness, R. K., *Electromagnetic Fields*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York (1986).
- [7] Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, 1st ed., McGraw-Hill, New York (1941).
- [8] M. R. Spiegel, S. Lipschutz, J. Liu, *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York (2009).

[9] I. S. Gradshteyn, I. M. Rytzhik, *Table of Integral, Series, and Products*, 5th ed., Academic Press, San Diego (1994).