

A solução de Schwarzschild

Paulo Sérgio Kuhn
Departamento de Física - IFM
UFPel, Pelotas, RS, Brasil
<https://wp.ufpel.edu.br/pskuhn/>
<https://pskuhnblog.wordpress.com/>

As equações de campo de Einstein para os coeficientes da métrica são em geral impossíveis de integrar exatamente, sendo necessário fazer aproximações. Contudo, há um caso simples em que a integração é exata, devido a simplificações por razões de simetria, o caso de uma massa puntiforme constante no tempo.

Nesse caso, as condições de simetria do problema permitem a integração das equações de campo, levando ao elemento de arco,

$$ds^2 = c^2(1 - K/r)dt^2 - (1 - K/r)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2. \quad (1)$$

Esse elemento de arco corresponde ao criado por uma massa puntiforme imóvel, e foi obtido pela primeira vez por K. Schwarzschild em 1916.

As coordenadas em (1) são esféricas, com a diferença que r não é exatamente a distância da origem, onde está a massa puntiforme. A constante K está relacionada com a constante da gravitação de Newton, e c é a velocidade da luz no vácuo. Vemos que se $r \rightarrow \infty$ o elemento de arco tende ao de Minkowski, na relatividade especial.

Não vamos ver aqui como a métrica acima foi obtida em detalhe. Em vez disso vamos obter e resolver as equações das geodésicas. Para isso precisamos calcular primeiro os símbolos de Christoffel. Os símbolos de Christoffel de primeira espécie são definidos por,

$$[ij, k] = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}). \quad (2)$$

O tensor da métrica covariante pode ser escrito a partir de (1) como,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -(1 - K/r)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - K/r) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

e o tensor contravariante como,

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} -(1 - K/r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - K/r)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Escolhemos as coordenadas como $x_1, x_2, x_3, x_4 = r, \theta, \varphi, ct$.

Temos nove símbolos de Christoffel de primeira espécie não nulos (problema 1),

$$\begin{aligned} [11, 1] &= \frac{K}{2r^2(1 - K/r)^2}, \\ [12, 2] &= -r, \\ [22, 1] &= r, \\ [13, 3] &= -r \sin^2 \theta, \\ [14, 4] &= \frac{K}{2r^2}, \\ [23, 3] &= -r^2 \sin \theta \cos \theta, \\ [33, 1] &= r \sin^2 \theta, \\ [33, 2] &= r^2 \sin \theta \cos \theta, \\ [44, 1] &= -\frac{K}{2r^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Os símbolos de Christoffel de segunda espécie são definidos por,

$$\{^s_{ij}\} = g^{sh} [ij, h]. \quad (6)$$

Obtemos nove símbolos de Christoffel de segunda espécie (problema 2),

$$\begin{aligned}
\{^1_{11}\} &= -\frac{K}{2r^2(1-K/r)}, \\
\{^1_{22}\} &= -r(1-K/r), \\
\{^1_{33}\} &= -r(1-K/r)\sin^2\theta, \\
\{^1_{44}\} &= \frac{K}{2r^2}(1-K/r), \\
\{^2_{12}\} &= \frac{1}{r}, \\
\{^2_{33}\} &= -\sin\theta\cos\theta, \\
\{^3_{13}\} &= \frac{1}{r}, \\
\{^3_{23}\} &= \cot\theta, \\
\{^4_{14}\} &= \frac{K}{2r^2(1-K/r)}. \tag{7}
\end{aligned}$$

Agora que temos os símbolos de Christoffel podemos escrever as equações das geodésicas, dadas por,

$$x''_k + \{^k_{ij}\}x'_i x'_j = 0, \tag{8}$$

em que a linha denota derivada em relação a um parâmetro arbitrário. Seguimos aqui a notação de Santaló [1], em que x_i e dx_i são escritos com um índice inferior, embora este último, o vetor deslocamento, seja um exemplo de vetor contravariante, que é escrito com um índice superior. Obtemos (problema 3),

$$\begin{aligned}
r'' - \frac{1}{2}\frac{d\mu}{dr}r'^2 - re^\mu\theta'^2 - re^\mu\sin^2\theta\varphi'^2 + \frac{1}{2}c^2e^{2\mu}\frac{d\mu}{dr}t'^2 &= 0, \\
\theta'' + \frac{2}{r}r'\theta' - \sin\theta\cos\theta\varphi'^2 &= 0, \\
\varphi'' + \frac{2}{r}r'\varphi' + 2\cot\theta\theta'\varphi' &= 0, \\
t'' + \frac{d\mu}{dr}r't' &= 0, \tag{9}
\end{aligned}$$

com,

$$e^\mu \equiv 1 - K/r. \tag{10}$$

Vamos tentar integrar o sistema acima. Em vez da primeira equação em (9), que envolve uma derivada de segunda ordem, podemos considerar a

equação resultante de dividir (1) por ds^2 . Dessa forma consideramos como parâmetro o arco s , obtendo,

$$c^2 e^\mu t'^2 - e^{-\mu} r'^2 - r^2 \theta'^2 - r^2 \sin^2 \theta \varphi'^2 = 1, \quad (11)$$

com $r' = dr/ds$, etc.

Consideremos a segunda equação em (9), escolhendo como condições iniciais,

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta'_0 = 0. \quad (12)$$

Obtemos $\theta''_0 = 0$, e por derivadas sucessivas temos que todas as derivadas de θ são nulas. Portanto a geodésica é uma curva plana em $\theta = \pi/2$.

Considerando agora a terceira equação em (9) com $\theta = \pi/2$,

$$\begin{aligned} \varphi'' + \frac{2}{r} r' \varphi' &= 0, \\ \frac{\varphi''}{\varphi'} &= -2 \frac{r'}{r}, \\ \ln \varphi' &= -2 \ln r + \ln c_0, \\ \varphi' &= \frac{c_0}{r^2}, \end{aligned}$$

ou,

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = c_0. \quad (13)$$

Para a última equação em (9) vem,

$$\begin{aligned} t'' + \frac{d\mu}{dr} r' t' &= 0, \\ \frac{t''}{t'} &= -\frac{d\mu}{dr} r', \\ \frac{t''}{t'} &= -\frac{d\mu}{ds}, \\ \ln t' &= -\mu + \ln c_1, \\ t' &= c_1 e^{-\mu}, \end{aligned}$$

ou,

$$e^\mu \frac{dt}{ds} = c_1. \quad (14)$$

Substituímos agora em (11) as expressões,

$$\begin{aligned}
t' &= \frac{dt}{ds} = c_1 e^{-\mu}, \\
r' &= \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{c_0}{r^2}, \\
\theta' &= 0, \\
\varphi' &= \frac{d\varphi}{ds} = \frac{c_0}{r^2}, \\
e^\mu &= 1 - K/r,
\end{aligned} \tag{15}$$

vem, sempre com $\theta = \pi/2$,

$$\begin{aligned}
c^2 e^\mu t'^2 - e^{-\mu} r'^2 - r^2 \theta'^2 - r^2 \sin^2 \theta \varphi'^2 &= 1, \\
c^2 e^\mu c_1^2 e^{-2\mu} - e^{-\mu} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{c_0^2}{r^4} - r^2 \frac{c_0^2}{r^4} &= 1, \\
c^2 c_1^2 - \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \frac{c_0^2}{r^4} - \frac{c_0^2}{r^2} e^\mu &= e^\mu, \\
c^2 c_1^2 \frac{r^4}{c_0^2} - \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r^2 e^\mu &= \frac{r^4}{c_0^2} e^\mu,
\end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned}
c^2 c_1^2 \frac{r^4}{c_0^2} - \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r^2 (1 - K/r) &= \frac{r^4}{c_0^2} (1 - K/r), \\
c^2 c_1^2 \frac{r^4}{c_0^2} - \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r^2 + Kr &= \frac{r^4}{c_0^2} - \frac{Kr^3}{c_0^2}, \\
\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 &= -(1 - c^2 c_1^2) \frac{r^4}{c_0^2} + \frac{Kr^3}{c_0^2} - r^2 + Kr.
\end{aligned} \tag{16}$$

A solução da equação acima nos a relação entre r e φ , ou seja a equação da órbita. Vamos trocar variáveis, fazendo $u = 1/r$,

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi}$$

logo (16) fica,

$$\frac{1}{u^4} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = -(1 - c^2 c_1^2) \frac{1}{c_0^2 u^4} + \frac{K}{c_0^2 u^3} - \frac{1}{u^2} + \frac{K}{u},$$

ou,

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = -(1 - c^2 c_1^2) \frac{1}{c_0^2} + \frac{Ku}{c_0^2} - u^2 + Ku^3. \quad (17)$$

Podemos escrever a equação acima de outra forma, derivando em relação a φ ,

$$2 \frac{du}{d\varphi} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = \frac{K}{c_0^2} \frac{du}{d\varphi} - 2u \frac{du}{d\varphi} + 3Ku^2 \frac{du}{d\varphi},$$

ou,

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{K}{2c_0^2} + \frac{3}{2}Ku^2. \quad (18)$$

Tomando como primeira aproximação apenas o primeiro termo no lado direito temos como solução (problema 4),

$$\frac{1}{r} = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{K}{2c_0^2}. \quad (19)$$

que é a equação de uma cônica com foco em O . Esse é o resultado clássico de Newton. Considerando a equação (18) completa obtemos uma curva semelhante a uma elipse que gira em torno de O (problema 5). Esse é o fenômeno da *precessão do perihélio*, que será tanto maior quanto maior seja a influência do termo $3Ku^2/2$, ou seja, quanto menor a distância a O . No caso do sistema solar o efeito é apreciável apenas para o caso do planeta Mercúrio, e o resultado coincide com o observado [5]. Esse é um dos fenômenos que antes da teoria de Einstein ainda não haviam sido explicados.

Para a trajetória dos raios luminosos, as equações são as mesmas de antes, mas com $ds = 0$. A equação (1) fica então,

$$c^2(1 - K/r)dt^2 - (1 - K/r)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 = 0. \quad (20)$$

Substituindo $\theta = \text{constante} = \pi/2$,

$$c^2(1 - K/r)dt^2 - (1 - K/r)^{-1}dr^2 - r^2d\varphi^2 = 0. \quad (21)$$

Dividindo por $d\varphi^2$,

$$c^2(1 - K/r) \left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2 - (1 - K/r)^{-1} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r^2 = 0. \quad (22)$$

De (13) e (14) temos,

$$\begin{aligned}
e^\mu \frac{dt}{ds} &= c_1, \\
e^\mu \frac{dt}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} &= c_1, \\
\frac{dt}{d\varphi} &= \frac{c_1 e^{-\mu}}{d\varphi/ds}, \\
\frac{dt}{d\varphi} &= \frac{c_1 e^{-\mu}}{c_0/r^2} = \frac{c_1 r^2 e^{-\mu}}{c_0}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Substituindo em (22),

$$\begin{aligned}
c^2(1 - K/r) \left(\frac{c_1 r^2 e^{-\mu}}{c_0} \right)^2 - (1 - K/r)^{-1} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r^2 &= 0, \\
c^2(1 - K/r)^2 \left(\frac{c_1 r^2 e^{-\mu}}{c_0} \right)^2 - \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r^2(1 - K/r) &= 0, \\
c^2 \left(\frac{c_1 r^2}{c_0} \right)^2 - \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - r^2(1 - K/r) &= 0,
\end{aligned}$$

ou,

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \left(\frac{cc_1}{c_0} \right)^2 r^4 - r^2 + Kr. \tag{24}$$

Definindo novamente $u = 1/r$ vem,

$$\left(\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \left(\frac{cc_1}{c_0} \right)^2 \frac{1}{u^4} - \frac{1}{u^2} + \frac{K}{u},$$

ou,

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 = \left(\frac{cc_1}{c_0} \right)^2 + Ku^3. \tag{25}$$

Podemos reecrevar a equação acima derivando em relação a φ ,

$$2 \frac{du}{d\varphi} \frac{d^2u}{d\varphi^2} + 2u \frac{du}{d\varphi} = 3Ku^2 \frac{du}{d\varphi},$$

ou,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{3}{2}Ku^2. \tag{26}$$

A distâncias não muito próximas do ponto central, o termo $3Ku^2/2$ é desprezível e as curvas integrais são retas (problema 6),

$$\frac{1}{r} = A \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (27)$$

Considerando o termo $3Ku^2/2$ as trajetórias são curvas (problema 7). Fisicamente isso significa que os raios luminosos devem curvar-se ao passar próximo de uma massa, curvatura que é calculada a partir da equação (26) da trajetória.

1 Problemas

1. Obtenha os símbolos de Christoffel de primeira espécie em (5).
2. Obtenha os símbolos de Christoffel de segunda espécie em (7).
3. Obtenha as equações das geodésicas em (9).
4. Mostre que a solução da equação (18) sem o último termo, isto é,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{K}{2c_0^2},$$

é dada por (19).

Escrevemos a equação acima na forma,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - \frac{K}{2c_0^2} = 0.$$

Definindo a variável $v = u - K/2c_0^2$ a equação fica,

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} + v = 0,$$

com solução,

$$v = A \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Portanto,

$$u = v + \frac{K}{2c_0^2} = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{K}{2c_0^2},$$

e,

$$\frac{1}{r} = A \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{K}{2c_0^2}.$$

Temos uma cônica com foco em O .

5. Obtenha a solução da equação (18) completa.
 6. Mostre que a solução da equação (26), sem o termo $3Ku^2/2$, são retas, equação (27).
 A equação (26), sem o termo $3Ku^2/2$, fica,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0,$$

com solução,

$$u = A \cos(\varphi - \varphi_0),$$

ou,

$$\frac{1}{r} = A \cos(\varphi - \varphi_0),$$

que é a equação de uma reta.

7. Obtenha a solução da equação (26) completa.

Bibliografia

- [1] Santaló, L. A., *Vectores y tensores con sus aplicaciones*, Eudeba, Buenos Aires (1961).
 [2] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology - Principle and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, New York (1972).
 [3] Lipschutz, M. M., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Differential Geometry*, Mc-Graw-Hill, New York (1969).
 [4] Struik, D. J., *Lectures on Classical Differential Geometry*, Dover, New York (1961).
 [5] E. Kreyszig, *Differential Geometry*, University Toronto Press, Toronto, 1959.
 [6] Wangsness, R. K., *Electromagnetic Fields*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York (1986).
 [7] Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, 1st ed., McGraw-Hill, New York (1941).
 [8] M. R. Spiegel, S. Lipschutz, J. Liu, *Schaum's Outline of Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York (2009).
 [9] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integral, Series, and Products*, 5th ed., Academic Press, San Diego (1994).