6 - Ondas

1 Ondas em Meios Elásticos

Ondas Mecânicas

O movimento ondulatório está presente em praticamente todas as áreas da Física. Temos ondas na superfície da água, ondas sonoras, ondas luminosas, ondas de rádio e outras ondas eletromagnéticas. Uma das formulações da mecânica dos átomos e partículas subatômicas chama-se mecânica ondulatória. As propriedades e o comportamento das ondas são portanto muito importantes em Física.

Vamos estudar aqui ondas que se propagam em meios deformáveis ou elásticos. Essas ondas podem ser chamadas de *ondas mecânicas*, e têm sua origem no deslocamento de uma parte de um meio elástico em relação à sua posição de equilíbrio. A perturbação é transmitida de uma parte à outra do meio devido às propriedades elásticas do meio. A onda é a perturbação que se move através do meio. O próprio meio não se move como um todo, apenas suas partes constituintes executam movimento oscilatório, descrevendo trajetórias limitadas. O movimento ondulatório pode transmitir energia a distâncias consideráveis. As ondas mecânicas têm como característica o transporte de energia através de um meio material, devido ao deslocamento de uma perturbação nesse meio, sem haver movimento de matéria como um todo.

É necessário haver um meio para a transmissão de ondas mecânicas, o que não ocorre com as ondas eletromagnéticas, que podem se propagar no vácuo. As propriedades do meio que determinam a velocidade de uma onda mecânica nesse meio são a sua inércia e a sua elasticidade. Todos os meios materiais possuem tais propriedades e podem transmitir ondas mecânicas. A elasticidade origina as forças restauradoras em qualquer parte do meio deslocada de sua posição de equilíbrio. A inércia determina como a parte deslocada do meio responde às forças restauradoras. Esses dois fatores em conjunto determinam a velocidade da onda.

Tipos de Ondas

Podemos classificar as ondas de várias formas. Se o movimento das partículas materiais que transmitem a onda for perpendicular à direção de propagação da própria onda, temos uma onda chamada *transversal*. Um exemplo é uma onda percorrendo uma corda esticada. As ondas eletromagnéticas também são transversais, embora aqui não haja movimento de matéria. Os campos elétrico e magnético são perpendiculares à direção de propagação, logo temos uma onda transversal.

Se o movimento das partículas que transmitem a onda tiver a mesma direção de propagação da onda, temos uma onda chamada *longitudinal*. Uma onda em uma mola é desse tipo, bem como as ondas sonoras.

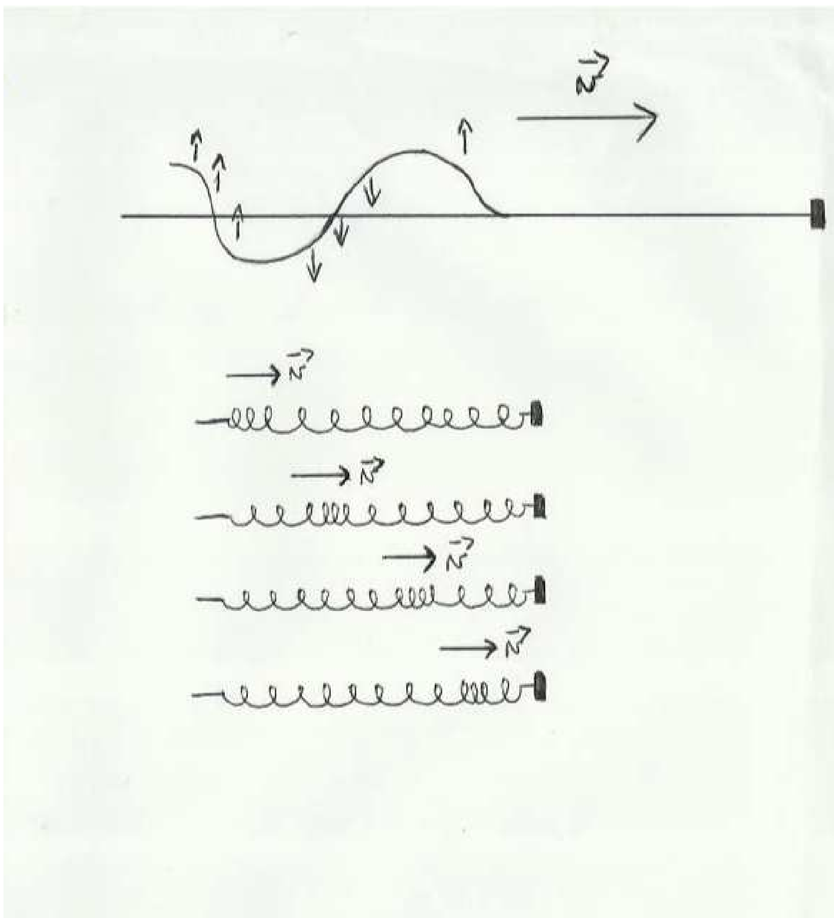


Fig. 1. Em uma onda transversal, como um pulso em uma corda (acima), as partículas do meio vibram perpendicularmente à direção em que a onda se propaga. Em uma onda longitudinal as partículas do meio, como em uma mola (abaixo), vibram na direção em que a onda se propaga

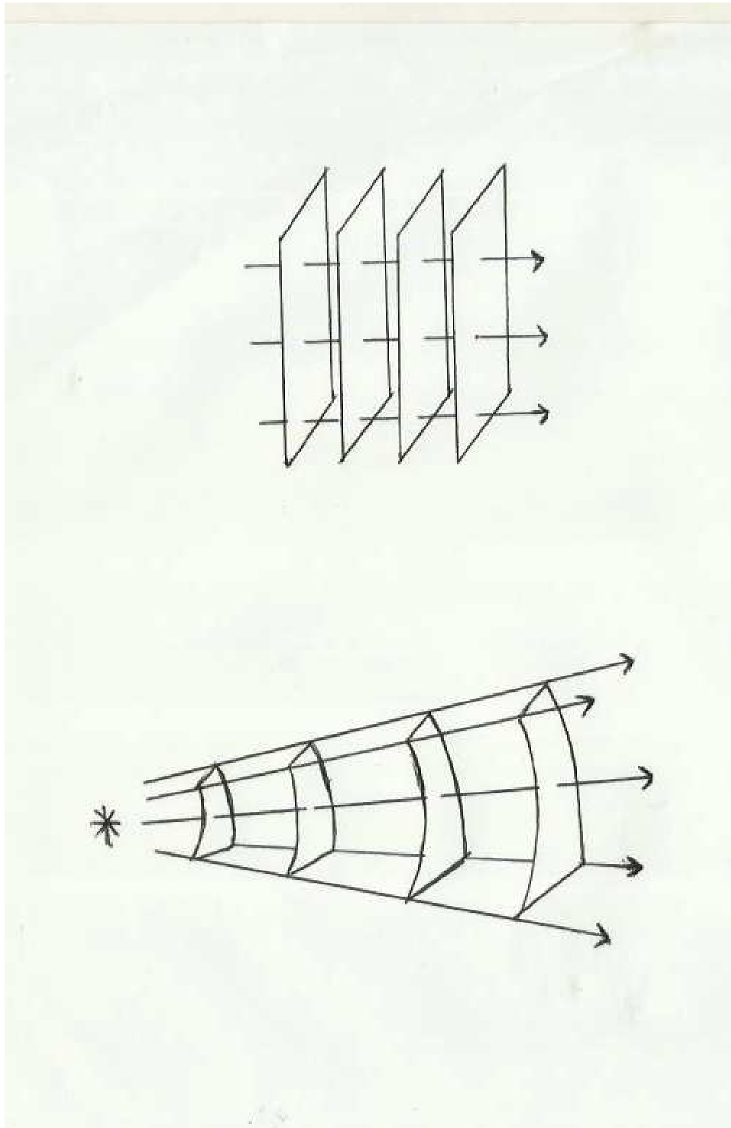


Fig. 2. Em uma onda plana (acima) os planos representam frentes de onda distantes entre si de um comprimento de onda. As flechas representam raios. Em uma onda esférica (abaixo) os raios coincidem com os da esfera, e as frentes de onda são esferas concêntricas, distanciadas de um comprimento de onda. A grandes distâncias da fonte, pequenas regiões da frente de onda são praticamente planas.

As ondas podem ainda ser uni, bi e tridimensionais, conforme a dimensão do meio em que ocorre a propagação da energia. As ondas ao longo de uma corda e de uma mola são unidimensionais. As ondas sobre a superfície da água são bidimensionais. As ondas sonoras e as ondas eletromagnéticas emitidas radialmente por uma fonte são ondas tridimensionais.

Podemos ainda classificar as ondas de acordo com o comportamento de uma partícula do meio que transporta a onda, durante o tempo em que esta se propaga. Por exemplo, podemos produzir um *pulso* ou *onda única*, que se propaga ao longo de uma corda esticada, aplicando um único movimento transversal em sua extremidade. Se movemos a extremidade da corda continuamente produzimos um *trem de ondas*, que se move ao longo dela. Se o movimento for periódico, produz-se um trem de ondas periódico, que transmite a cada partícula da corda um movimento periódico. O caso mais simples de onda periódica é a *onda harmônica simples*, que produz em cada partícula um movimento harmônico simples.

Podemos desenhar uma superfície que passa por todos os pontos de uma mesma perturbação, em um dado instante, devida a um pulso tridimensional. O movimento desta superfície com o tempo mostra a propagação do pulso. O mesmo pode ser feito para os pulsos seguintes. Generalizando esse procedimento para uma onda periódica, desenhamos superfícies com pontos na mesma fase de movimento. Essas superfícies são chamadas *frentes de onda*. Em um meio homogêneo e isotrópico a direção de propagação será sempre perpendicular à frente de onda. A normal à frente de onda, que indica a direção em que a onda se propaga, é chamada *raio*.

As frentes de onda podem ter muitas formas. Se a perturbação se propaga em uma só direção, temos uma *onda plana*. Em qualquer instante de tempo as condições são as mesmas em qualquer plano perpendicular à direção de propagação. As frentes de onda são planas e os raios são retas paralelas. Um outro caso é uma *onda esférica*, em que o distúrbio se propaga em todas as direções, a partir de uma fonte puntiforme. As frentes de onda são esferas e os raios são linhas radiais, traçadas a partir da fonte em todas as direções. Distante da fonte as frentes de onda esféricas têm pequena curvatura, e podem ser consideradas como planas em uma região limitada. Existem muitas outras formas possíveis para as frentes de onda.

Ondas Progressivas

Consideremos uma corda esticada na qual se propaga uma onda transversal, ao longo do eixo Ox. Em um dado instante, supomos $t = 0$, a forma da corda pode ser determinada pela função,

$$y = f(x)\,, \qquad t = 0\,, \tag{1}$$

sendo y o deslocamento transversal de um ponto da corda na posição x. Na figura 3 temos uma possível forma de onda, um pulso, na corda, no instante $t = 0$. A experiência mostra que, com o tempo, uma onda se propaga ao longo da corda, sem alteração da forma, desde que sejam pequenas as perdas internas devidas ao atrito. Em um instante t posterior a onda terá percorrido para a direita a distância vt, sendo v o módulo da velocidade da onda, suposta constante. A equação da curva no instante t será,

$$y = f(x - vt)\,, \qquad t = t\,, \tag{2}$$

equação que representa a mesma forma de onda tanto em torno do ponto $x = vt$ no instante t, como em torno do ponto $x = 0$ no instante $t = 0$. Essa é a equação geral que representa uma onda de *qualquer* forma e que se *propaga para a direita.* Para descrever uma forma particular, deve-se especificar exatamente qual é a função f.

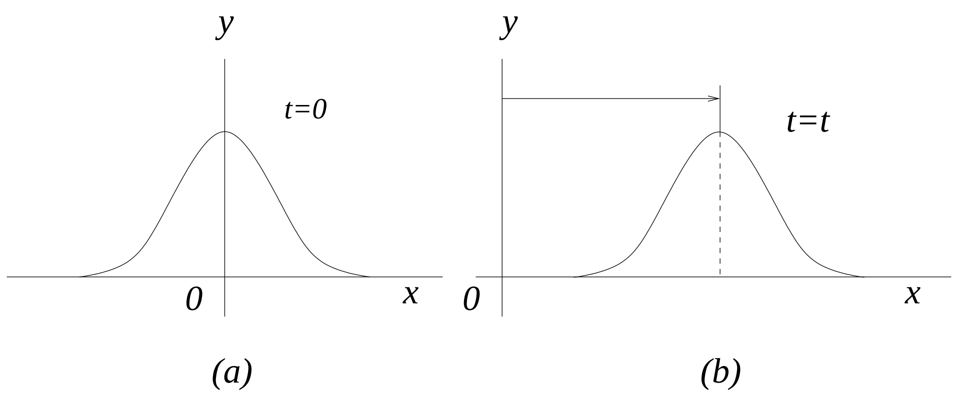


Fig. 3. (a) Uma onda na forma de um pulso em $t = 0$. (b) Em um instante t posterior o pulso percorreu a distância $x = vt$.

Examinemos essa equação com mais cuidado. Se quisermos acompanhar uma parte, ou fase, determinada da onda, com o decorrer do tempo, procura-se um valor particular de y na equação, por exemplo, o extremo superior do pulso que descrevemos acima. Matematicamente isso significa determinar como x varia com t quando $(x - vt)$ assume um valor fixo determinado. Vemos que, à medida que t aumenta, x deve aumentar, para que $(x - vt)$ se mantenha constante. A equação (2) representa portanto uma onda que se move para a direita, x crescente com o tempo. Se quisermos representar uma onda que se desloque *para a esquerda* escrevemos,

$$y = f(x + vt)\,, \tag{3}$$

pois nesse caso a posição x de uma fase fixa $(x + vt)$ da onda decresce com o tempo. Obtemos facilmente a velocidade de uma fase particular da onda. No caso de uma onda que se desloca para a direita, temos para uma fase particular,

$$x - vt = \text{constante}\,.$$

Diferenciando em relação ao tempo obtemos,

$$\frac{dx}{dt} - v = 0 \,\text{ou}\, \frac{dx}{dt} = v\,, \tag{4}$$

portanto v é a *velocidade de fase* da onda. Se a onda se move para a esquerda obtemos $-v$ como velocidade de fase.

A equação geral de uma onda pode ter outra interpretação. Notemos que, para qualquer valor fixo de t a equação nos dá y como função de x. Isso define uma curva que representa a forma verdadeira da onda no instante considerado, ou seja, é um "instantâneo" da onda naquele instante. Supomos por outro lado, que desejamos focalizar nossa atenção em um ponto da corda, isto é, em um valor fixo de x. Então a equação nos dá y como função do tempo t. Ela descreve como varia com o tempo a posição transversal de um ponto da corda.

O argumento acima se aplica para ondas longitudinais e transversais. O exemplo análogo para ondas longitudinais é o caso de um tubo retilíneo com gás, com eixo na direção x. Os mesmos argumentos nos dão equações da mesma forma de (2) e (3), que nos dão as variações da pressão com o tempo, em todos os pontos do tubo.

Consideremos uma frente de onda particular, cuja importância logo veremos. Supomos que no instante $t = 0$ temos na corda uma onda descrita por,

$$y = y_m \mathrm{sen} \frac{2\pi}{\lambda} x\,. \tag{5}$$

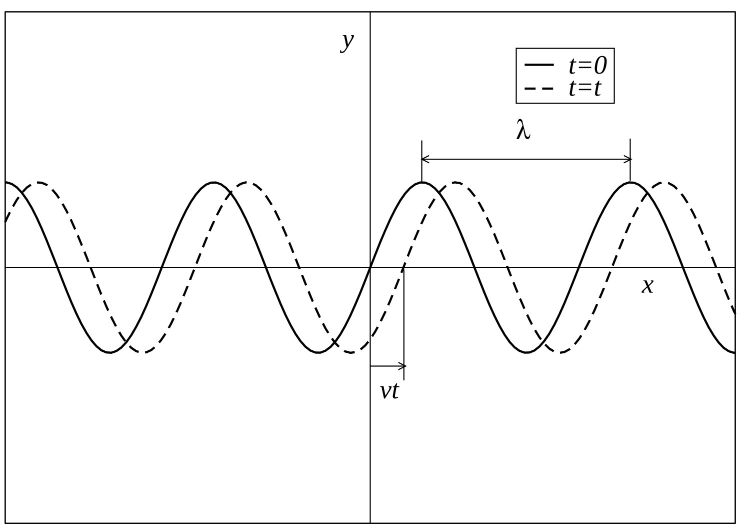


Fig 4. Uma onda progressiva senoidal propagando-se para a direita.

A forma da onda é uma senóide (fig. 4). O deslocamento máximo y_m é a *amplitude* da onda senoidal. O deslocamento transversal y é o mesmo tanto em x como em $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, etc. O símbolo λ representa o *comprimento de onda*, isto é, a distância entre dois pontos consecutivos da onda que possuem a mesma fase. Supomos que a onda se propaga para a direita com velocidade de fase v. Portanto, a equação da onda no instante t é,

$$y = y_m \text{sen} \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\,. \tag{6}$$

Esta equação tem a forma (2) de uma onda progressiva.

O *período* T é o tempo necessário para que a onda percorra a distância de um comprimento de onda λ,

$$\lambda = vT\,. \tag{7}$$

Substituindo esse valor na equação de onda temos,

$$y = y_m \text{sen} 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)\,. \tag{8}$$

Podemos ver nessa forma que, em qualquer instante, y tem em $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, etc., o mesmo valor que em x. De forma análoga, y tem em qualquer posição, nos instantes $t + T$, $t + 2T$, etc., o mesmo valor que no instante t.

A equação acima pode ser escrita de forma mais compacta, definindo o *número de onda* k e a *frequência angular* ω por,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}\,, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}\,. \tag{9}$$

A equação de uma onda senoidal que se propaga para a direita é então,

$$y = y_m \text{sen}(kx - \omega t)\,, \tag{10}$$

e se a onda progride para a esquerda,

$$y = y_m \text{sen}(kx + \omega t)\,, \tag{11}$$

A velocidade de fase v da onda é,

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}\,. \tag{12}$$

Nas ondas progressivas acima supusemos $y = 0$ em $t = 0$, mas isso nem sempre ocorre. A expressão geral de uma onda progressiva para a direita é,

$$y = y_m \mathrm{sen}(kx - \omega t - \phi)\,, \tag{13}$$
em que ϕ é a constante de fase. Se $\phi = -90^o$ por exemplo, em $x = 0$ e $t = 0$ temos $y = y_m$. Nesse caso temos,

$$y = y_m \cos(kx - \omega t)\,,$$
pois $\mathrm{sen}(\theta + 90^o) = \cos\theta$.

Consideremos um ponto qualquer da corda, por exemplo $x = \pi/k$. O deslocamento transversal y nesse ponto é,

$$y = y_m \mathrm{sen}(\pi - \omega t - \phi) = y_m \mathrm{sen}(\omega t + \phi)\,, \tag{14}$$
pois $\mathrm{sen}(\pi - \theta) = \mathrm{sen}\theta$. Essa equação é análoga à equação para o movimento harmônico simples. Assim, qualquer elemento da corda executa movimento harmônico simples em torno da posição de equilíbrio, à medida que a onda se desloca pela corda.

O Princípio da Superposição

É um fato experimental que, para muitos tipos de ondas, *duas ou mais ondas podem cruzar-se na mesma região do espaço independentemente uma da outra*. O fato de as ondas serem independentes uma da outra significa que o deslocamento de qualquer parícula, em um instante qualquer, é a soma dos deslocamentos produzidos pelas ondas isoladamente. Esse processo de adição vetorial de deslocamentos de uma partícula chama-se *superposição*.

Para ondas em meios deformáveis. o princípio de superposição é válido desde que a deformação e a força restauradora sejam proporcionais entre si, relação expressa por uma equação linear. No caso de ondas eletromagnéticas, o princípio de superposição é válido porque a relação matemática entre os campos elétrico e magnético é também linear.

A importância do princípio de superposição em física é que, quando válido, permite analisar um movimento ondulatório complicado como uma combinação de ondas simples. O matemático francês J. Fourier (1768-1830) mostrou que, para obter a forma mais geral de onda periódica, são necessárias apenas ondas harmônicas simples. Fourier provou que qualquer movimento periódico de uma partícula pode ser representado como combinação de movimentos harmônicos simples. Por exemplo, se $y(t)$ representa o movimento de uma fonte de ondas de período T, podemos analisar $y(t)$ como,

$$y(t) = A_0 + A_1 \text{sen}\omega t + A_2 \text{sen} 2\omega t + A_3 \text{sen} 3\omega t + \ldots +$$
$$+ B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + B_3 \cos 3\omega t + \ldots ,$$

com $\omega = 2\pi/T$. Essa expressão é uma *série de Fourier*. As constantes A_i, B_i têm valores definidos para um dado movimento periódico $y(t)$. Quando os movimentos não são periódicos, como em pulso, a soma é substituída por uma integral, chamada integral de Fourier. Qualquer movimento de uma fonte de ondas pode, portanto, ser representado em função de movimentos harmônicos simples.

Suporemos por enquanto que o meio de propagação é não dispersivo, isto é, ondas de diferentes frequências propagam-se com a mesma velocidade. Também supomos não haver dissipação, ou seja, a onda não perde energia para o meio.

As figuras 5-8 mostram alguns exemplos de superposição de ondas. A constante 1 pode ser representada como uma série de senos, no intervalo $0 < x < l$, por

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{(2m-1)\pi} \text{sen} \frac{(2m-1)\pi x}{l} \, . \tag{15}$$

A figura 5 mostra o gráfico da série acima para $l = 1$, considerando os primeiros seis termos apenas. Na figura 6 temos a série para 10, 20 e 30 termos.

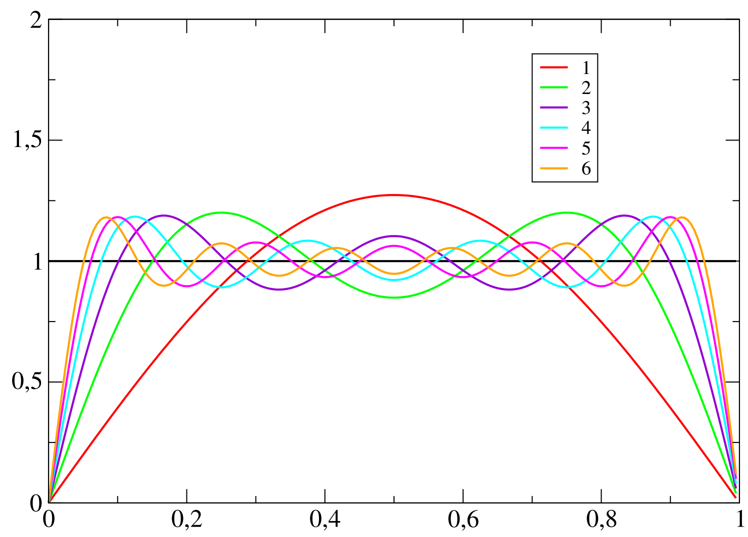


Fig. 5.

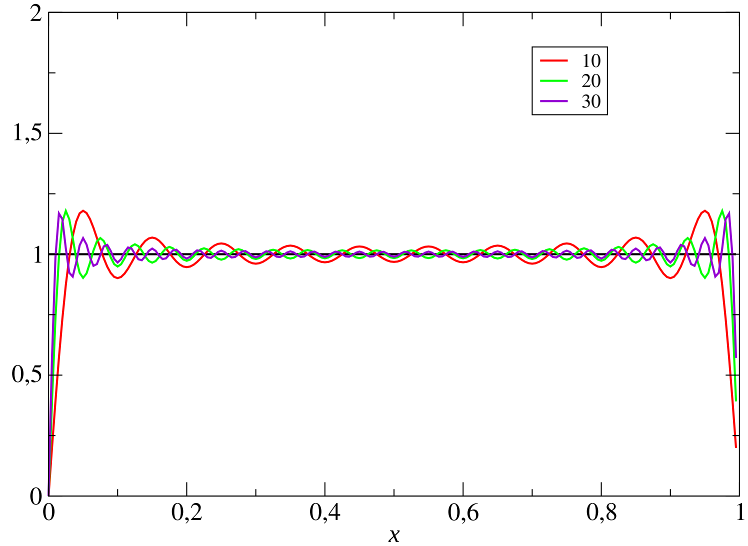


Fig. 6.

A função $f(x) = x$ no intervalo $0 < x < l$ pode ser representada pela série

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-4}{m\pi} \cos(m\pi) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{l} \,. \tag{16}$$

A figura 7 mostra o gráfico da série acima para $l = 2$, considerando os primeiros seis termos apenas. Na figura 8 temos a série para 10, 20 e 30 termos.

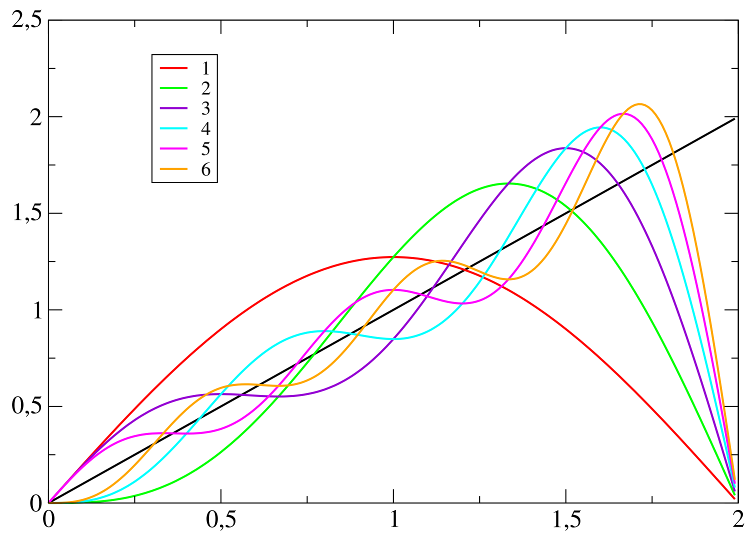


Fig. 7.

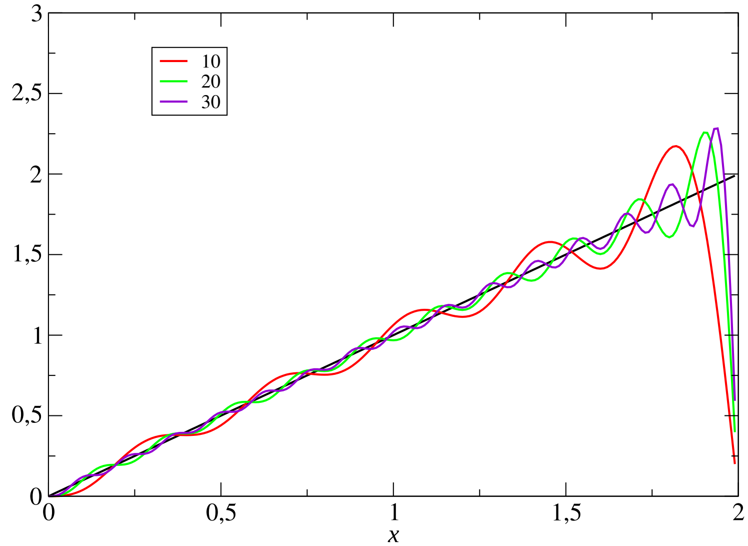


Fig. 8.

Velocidade de Onda

As características do meio determinam a velocidade da onda. Vamos considerar aqui ainda as ondas transversais em uma corda. Primeiro vamos usar análise dimensional e depois calcularemos a velocidade do pulso.

Afirmamos anteriormente que a velocidade da onda em um meio depende da elasticidade do meio e da sua inércia. Para uma corda esticada, a elasticidade é medida pela tensão F da corda. A inércia é medida por μ, a massa por unidade de comprimento da corda. Supondo que a velocidade da onda v depende apenas de F e μ, a análise dimensional permite estabelecer a dependência entre v e essas gradezas. As dimensões de F são ML/T^2 e de μ são M/L. A única combinação dessas dimensões que fornece uma velocidade é a raiz quadrada de F/μ,

$$\sqrt{\frac{F}{\mu}} \sim \sqrt{\frac{ML/T^2}{M/L}} = \sqrt{\frac{L^2}{T^2}} \sim \frac{L}{T}\,,$$

portanto,

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\,. \tag{17}$$

Ainda poderíamos ter alguma grandeza adimensional envolvida, como uma constante multiplicando o resultado acima. No entanto, uma análise mecânica ou a experiência mostra que a constante é um e portanto a equação acima é correta.

Vamos *deduzir* a velocidade de um pulso em uma corda esticada, através da análise mecânica. A figura 9 mostra um pulso de onda que se desloca ao longo da corda, da direita para a esquerda com velocidade v. Podemos imaginar que toda a corda se move para a direita com essa velocidade, de modo que o pulso de onda permaneça fixo no espaço, enquanto a corda passa por ele. Isso significa que, em vez de um referencial em repouso em relação às paredes onde a corda está presa, consideramos um referencial que se move com o pulso.

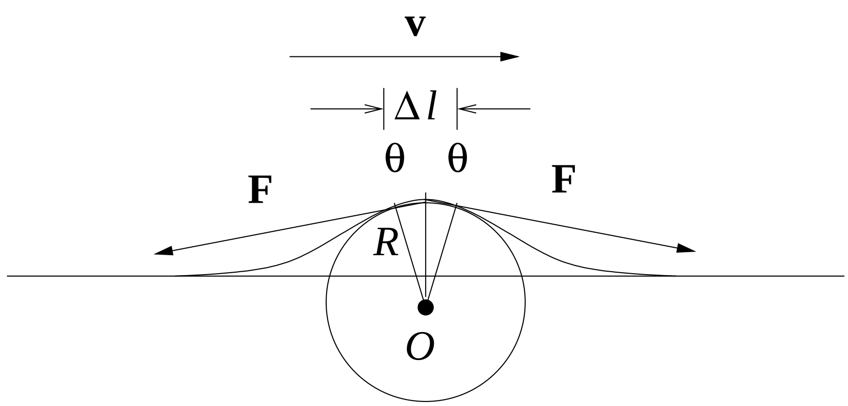


Fig. 9.

Consideremos uma pequena seção do pulso, de comprimento Δl, na forma de um arco de círculo de raio R. Sendo μ a massa por unidade de comprimento da corda, $\mu \Delta l$ é a massa desse elemento de corda. A tensão F é uma força que age tangencialmente em cada extremo desse pequeno segmento da corda. As componentes horizontais se cancelam e as verticais são iguais a $F\text{sen}\theta$. Portanto, a força vertical total é $2F\text{sen}\theta$. Como θ é pequeno, $\text{sen}\theta \cong \theta$ e portanto,

$$2F\text{sen}\theta = 2F\theta = 2F\frac{\Delta l/2}{R} = F\frac{\Delta l}{R}\,.$$

Essa é a expressão da força que produz a aceleração centrípeta das partículas da corda, dirigida para O. Como a aceleração centrípeta é v^2/R,

$$F\frac{\Delta l}{R} = \frac{\mu \Delta l v^2}{R}\,,$$

ou seja,

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\,.$$

A frequência de uma onda é naturalmente determinada pela frequência da fonte. A velocidade com a qual a onda se propaga é determinada pelas propriedades do meio, como vimos. Uma vez conhecidas a frequência f e a velocidade v o comprimento de onda está determinado, pois $f = 1/T$,

$$\lambda = \frac{v}{f} \,. \tag{18}$$

Potência e Intensidade de uma Onda

Na figura 10 está desenhado um elemento da corda, localizado em uma posição qualquer x em um instante t. A componente *transversal* da tensão da corda exercida *pelo* elemento localizado à esquerda de x *sobre* o elemento localizado à direita de x é,

$$F_y = -F \frac{\partial y}{\partial x} \,.$$

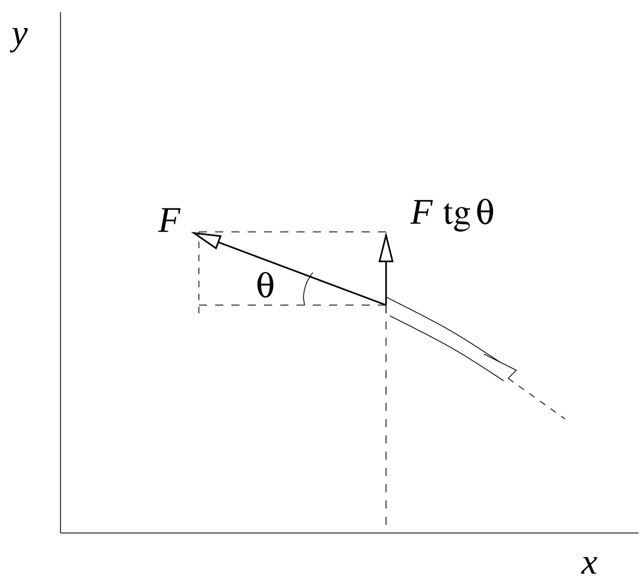


Fig. 10.

A derivada $\partial y/\partial x$ representa a tangente trigonométrica do ângulo formado por $\mathbf{F}$ com a horizontal no instante t. Na figura a inclinação é negativa, logo F_y é positiva. A velocidade transversal da partícula localizada em x é $\partial y/\partial t$, logo a potência dissipada pela força em x, por unidade de tempo, deslocando-se no sentido positivo de x, é,

$$P = \left(-F\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial t}\,.$$

Supondo uma onda senoidal simples,

$$y = y_m \mathrm{sen}(kx - \omega t)\,,$$

a inclinação em x é,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = k y_m \cos(kx - \omega t)\,, \quad (t = \text{constante})\,,$$

e a força transversal é,

$$-F\frac{\partial y}{\partial x} = -F k y_m \cos(kx\omega t)\,.$$

A velocidade transversal de uma partícula da corda, em x, será,

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)\,, \quad (x = \text{constante})\,.$$

Portanto a potência transmitida em x é,

$$P = (-F k y_m)(-\omega y_m)\cos^2(kx - \omega t) = y_m^2 k\omega F \cos^2(kx - \omega t)\,.$$

Notemos que a potência não é constante. Quando a energia percorre a corda, ela é armazenada em cada um dos elementos dela como combinação de energia cinética e energia potencial de deformação, aparecendo na forma de calor. A potência média liberada é,

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} P dt\,,$$

em que T é o período. Como o valor médio de $\mathrm{sen}^2 x$ ou $\cos^2 x$ é $1/2$, em um ciclo temos,

$$\bar{P} = \frac{1}{2}y_m^2 k\omega F = \frac{1}{2\lambda T}y_m^2(2\pi)^2 F = 2\pi^2 y_m^2 f^2 \frac{F}{v}\,,$$

resultado independente de x e t. Para uma corda, $v = \sqrt{F/\mu}$, logo,

$$\bar{P} = 2\pi^2 y_m^2 f^2 \frac{F}{v} = 2\pi^2 y_m^2 f^2 v\mu\,.$$

A dependência da taxa de transmissão de energia com o quadrado da amplitude de onda e do quadrado da frequência tem validade geral, para qualquer tipo de onda.

No caso de uma onda tridimensional (fig. 11), como uma onda luminosa ou uma onda sonora, proveniente de uma fonte puntiforme, falamos de *intensidade* da onda, definida como a potência por unidade de área perpendicular à direção de propagação da onda. Como uma onda em uma corda, a intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude.

Notemos que até agora não consideramos perda de energia para o meio, como dissipação devido ao atrito ou viscosidade.

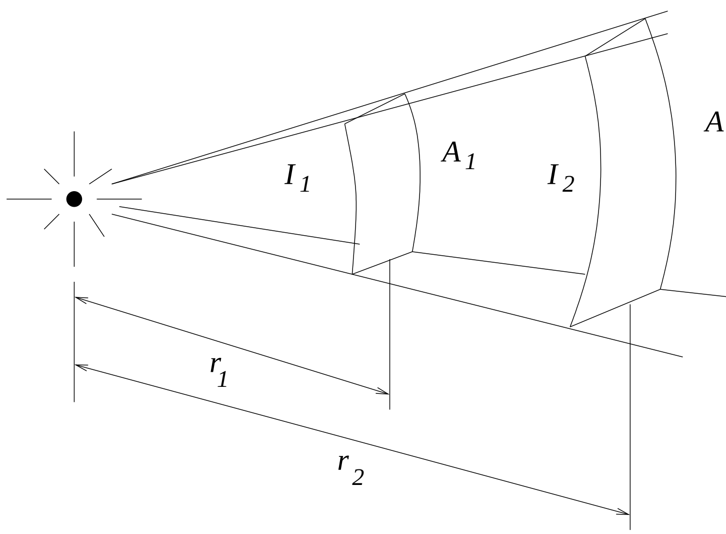


Fig. 11.

interferência de Ondas

A *interferência* refere-se aos efeitos físicos da superposição de dois ou mais grupos de ondas. Consideremos duas ondas de mesma frequência e mesma amplitude, que se propagam com a mesma velocidade, no sentido positivo de x, com uma diferença de fase ϕ. As equações das duas ondas serão,

$$y_1 = y_m \mathrm{sen}(kx - \omega t - \phi)\,,$$
$$y_2 = y_m \mathrm{sen}(kx - \omega t)\,.$$

A primeira dessas equações pode ser reescrita nas formas equivalentes,

$$y_1 = y_m \text{sen}\left[k\left(x - \frac{\phi}{k}\right) - \omega t\right] \;, \quad \text{ou,}$$
$$y_1 = y_m \text{sen}\left[kx - \omega\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right] \,.$$

Assim, no mesmo instante de tempo, a distância entre as ondas é ϕ/k, enquanto na mesma posição x, as duas ondas produzirão dois movimentos harmônicos com uma diferença de tempo constante ϕ/ω.

Determinemos a onda resultante, supondo haver superposição, que será a soma das equações acima,

$$y = y_1 + y_2 = y_m[\text{sen}(kx - \omega t - \phi) + \text{sen}(kx - \omega t)] \,.$$

Usando a relação trigonométrica,

$$\text{sen}B + \text{sen}C = 2\text{sen}\frac{1}{2}(B + C)\cos\frac{1}{2}(C - B) \,, \tag{19}$$

obtemos,

$$y = \left(2y_m \cos\frac{\phi}{2}\right)\text{sen}\left(kx - \omega t - \frac{\phi}{2}\right) \,. \tag{20}$$

A função acima representa uma nova onda, de mesma frequência, com amplitude $2y_m \cos\phi/2$. Se ϕ for muito pequena, a amplitude será aproximadamente $2y_m$. Para $\phi = 0$, as duas ondas terão sempre a mesma fase. Os máximos e mínimos das duas ondas estarão alinhados. Dizemos nesse caso que temos uma interferência construtiva. A amplitude resultante é exatamente o dobro da amplitude de qualquer uma das ondas individuais. Se $\phi \cong 180^o$, a amplitude resultante será aproximadamente zero. Para $\phi = 180^o$, o máximo de uma das ondas estará alinhado com um mínimo da outra. As duas ondas interferem destrutivamente e a amplitude resulante é nula.

A figura 12 mostra a superposição de duas ondas de mesma amplitude e frequência, com uma diferença de fase $\phi = 10^o$. Notamos um reforço quase total.

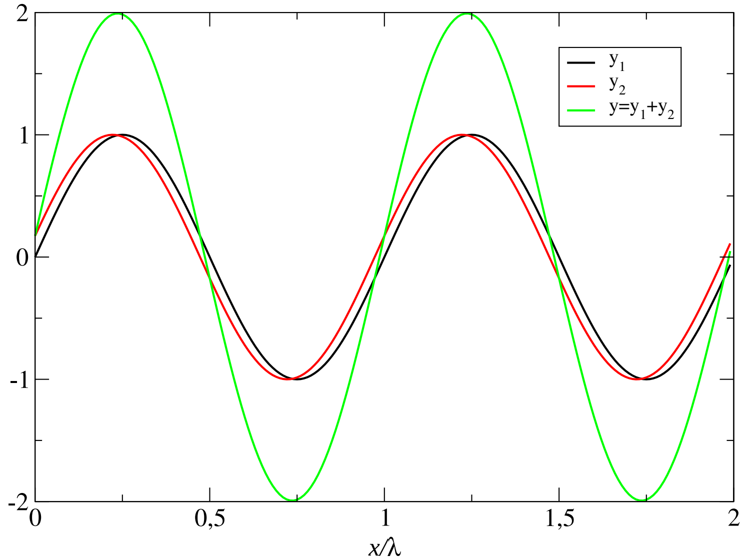


Fig. 12.

A figura 13 mostra a superposição de duas ondas de mesma amplitude e frequência, com uma diferença de fase $\phi = 170^o$. Temos um cancelamento significativo.

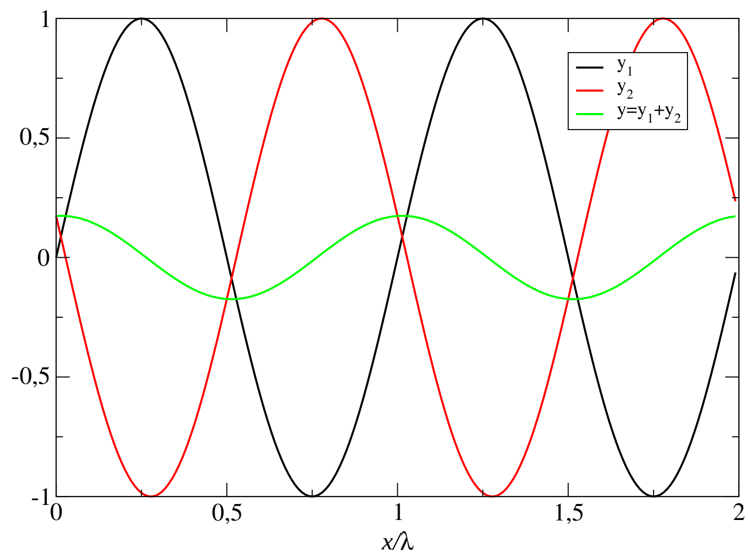


Fig. 13.

A onda resultante será senoidal, mesmo que as amplitudes das ondas individuais sejam diferentes. A figura 14 mostra a soma de duas ondas senoidais de mesma frequência e velocidade, mas de amplitudes diferentes. A amplitude resultante depende da diferença de fase, igual a zero nessa figura.

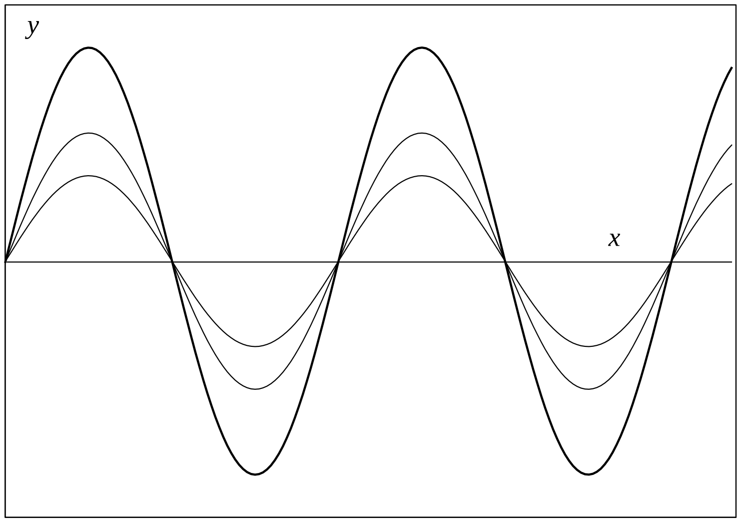


Fig. 14.

A superposição de duas ondas de mesma frequência e mesma fase, mas de amplitudes diferentes (linhas finas), resulta em uma terceira onda de mesma frequência e fase (linha grossa).

Fenômenos de interferência são obtidos, na prática, a partir de ondas originárias da mesma fonte, ou de fontes com uma relação fixa de fase, mas que percorrem distâncias diferentes até o ponto de interferência. A diferença de fase ϕ entre as ondas que chegam a um ponto pode ser calculada determinando a diferença entre os caminhos percorridos por elas, desde a fonte até o ponto de interferência. A diferença de caminho é $\phi/k = \phi\lambda/2\pi$. Quando a diferença de caminho é $0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \ldots$, de modo que $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, as duas ondas interferem construtivamente. Quando a diferença de caminho é $\lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \ldots$, teremos $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$, e as ondas interferem destrutivamente. Voltaremos a esse ponto em seguida.

Ondas Complexas

Até agora vimos a superposição de ondas de mesma frequência. Consideraremos agora a superposição de ondas de *frequências diferentes*. A resultante é chamada de uma *onda complexa*. O movimento de uma partícula em uma onda complexa não é mais harmônico simples, e a forma da onda não será mais senoidal. Vamos aqui fazer apenas uma análise qualitativa, construindo alguns gráficos para ondas com a mesma velocidade, mas diferentes frequências e amplitudes.

A figura 15 mostra a superposição de duas ondas de mesma amplitude e frequências diferentes, com $\omega_2 = 2\omega_1$, com uma diferença de fase $\phi = 0^o$.

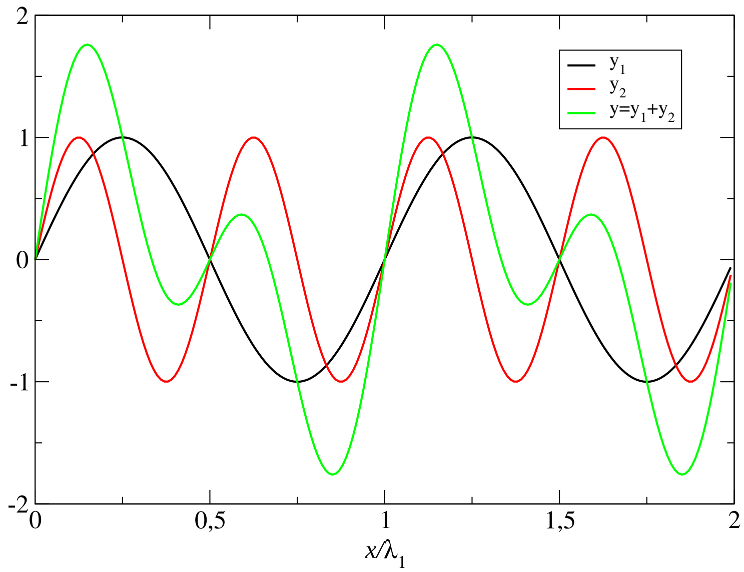


Fig. 15.

A figura 16 mostra a superposição de duas ondas de frequências diferentes, com $\omega_2 = 2\omega_1$, e amplitudes também diferentes, $y_{m1} = 2y_{m2}$, com uma diferença de fase $\phi = 0^o$.

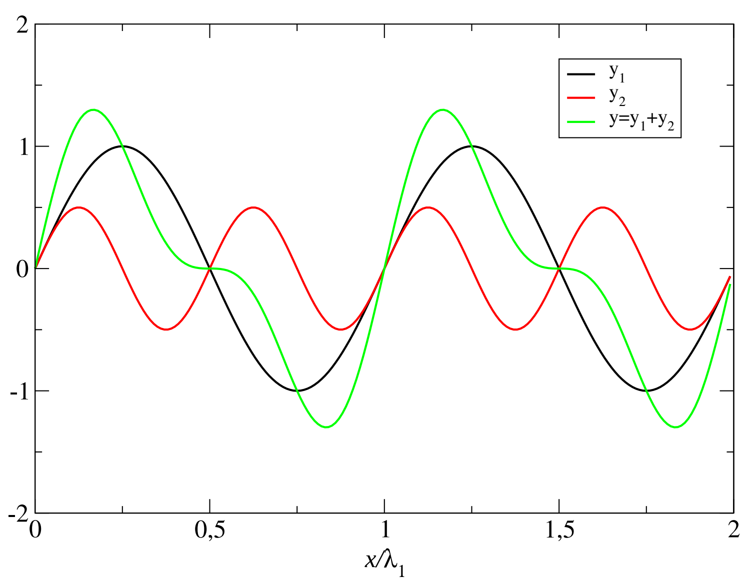


Fig. 16.

A figura 17 mostra a superposição de duas ondas de frequências muito próximas. Temos nesse caso o fenômeno dos *batimentos*. Escolhemos $\omega_1 = 0,9\omega_2$.

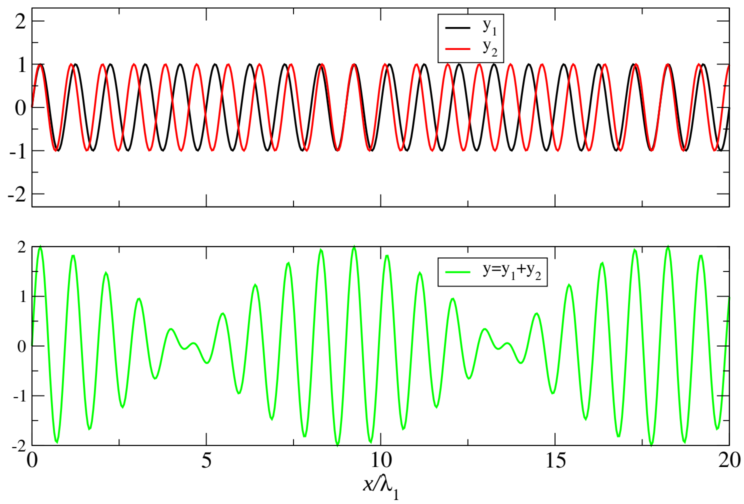


Fig. 17.

Ondas Estacionárias

Em uma corda de comprimento l, esticada entre dois suportes, as ondas que se propagam são refletidas nas extremidades. As ondas refletidas somam-se às ondas incidentes, de acordo com o princípio da superposição.

Consideremos duas ondas de mesma frequência, velocidade e amplitude, se propagando em *sentidos opostos*, ao longo de uma corda esticada. Podemos representas essas ondas por,

$$y_1 = y_m \text{sen}(kx - \omega t)\,,$$
$$y_2 = y_m \text{sen}(kx + \omega t)\,.$$

A onda resultante é,

$$y = y_1 + y_2 = y_m \text{sen}(kx - \omega t) + y_m \text{sen}(kx + \omega t)\,,$$

ou, usando a relação trigonométrica (19),

$$y = 2y_m \text{sen} kx \cos \omega t\,, \tag{21}$$

que é a equação de uma *onda estacionária*. Uma partícula em x realiza movimento harmônico simples, e todas as partículas vibram com a mesma frequência. Em uma onda progressiva cada partícula vibra com a mesma amplitude. *Em uma onda estacionária a amplitude não é a mesma para diferentes partículas, variando com a posição x da partícula.* Vemos que a amplitude $2y_m \text{sen} kx$ tem valor *máximo* $2y_m$ nos pontos dados por,

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, etc.,$$

ou seja,

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, etc.$$

Esses pontos são denominados *antinodos*, estando distanciados entre si de meio comprimento de onda. O valor *mínimo* igual a zero da amplitude corresponde aos pontos para os quais,

$$kx = \pi, 2\pi, 3\pi, etc.,$$

ou,

$$x = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, 2\lambda, etc.$$

Esses pontos são chamados *nodos*, estando distanciados entre si de meio comprimento de onda. A distância de um nodo ao antinodo adjacente é de um quarto de comprimento de onda.

Não há transmissão de energia ao longo da corda para a direita ou para a esquerda, pois a energia não pode ultrapassar os pontos nodais, em que a corda permanece em repouso. A energia permanece "estacionária" na corda, embora alternando-se entre energia cinética de vibração e energia potencial elástica. O movimento é denominado ondulatório porque podemos imaginá-lo como a soma de ondas que se propagam em sentidos opostos (fig. 18). Também podemos interpretar o movimento como uma oscilação da corda como um todo, cada partícula oscilando com movimento harmônico simples de frequência angular ω com amplitude dependendo da posição. Cada elemento da corda possui inércia e elasticidade. A corda pode ser pensada como um conjunto de osciladores acoplados. Assim, a corda vibrante é idêntica, em princípio, a um sistema massa-mola, com a diferença de a corda vibrante possuir um grande número de frequências naturais, enquanto o sistema massa-mola tem apenas uma frequência natural.

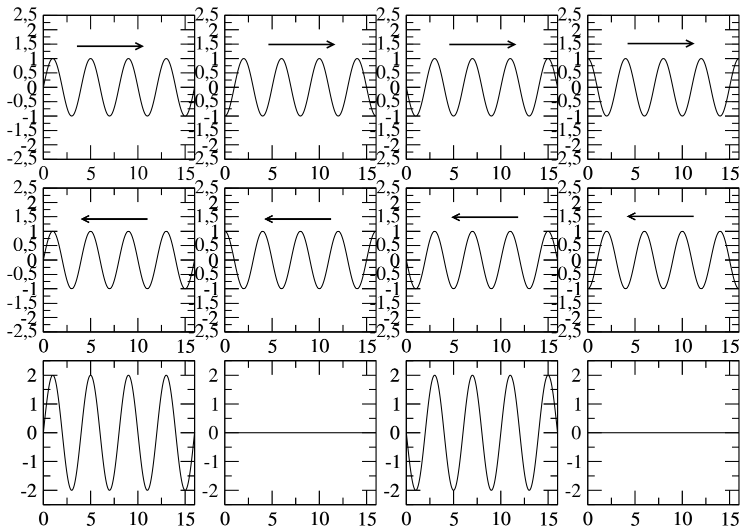


Fig. 18.

Ressonância

Sempre que, sobre um sistema capaz de oscilar, atuar uma série de impulsos periódicos com frequência igual ou muito próxima da frequência natural do sistema, este começará também a oscilar com amplitude relativamente grande. Esse é o fenômeno da *ressonância*.

Consideremos uma corda com as extremidades fixas. Podemos produzir oscilações ou ondas estacionárias. A única condição é que os extremos da corda sejam nodos de vibração. Entre eles pode haver qualquer número de nodos intermediários, inclusive zero. Dessa forma o comprimento de onda da onda estacionária pode ter muitos valores diferentes (fig. 19). A distância entre nodos adjacentes é $\lambda/2$, assim, em uma corda de comprimento l haverá exatamente um número inteiro n de meios comprimentos de onda $\lambda/2$, isto é,

$$\frac{n\lambda_n}{2} = l\,,$$

ou seja,

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}\,,\quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como $v = \lambda f$ e $v = \sqrt{F/\mu}$, as frequências naturais de oscilação do sistema são,

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{22}$$

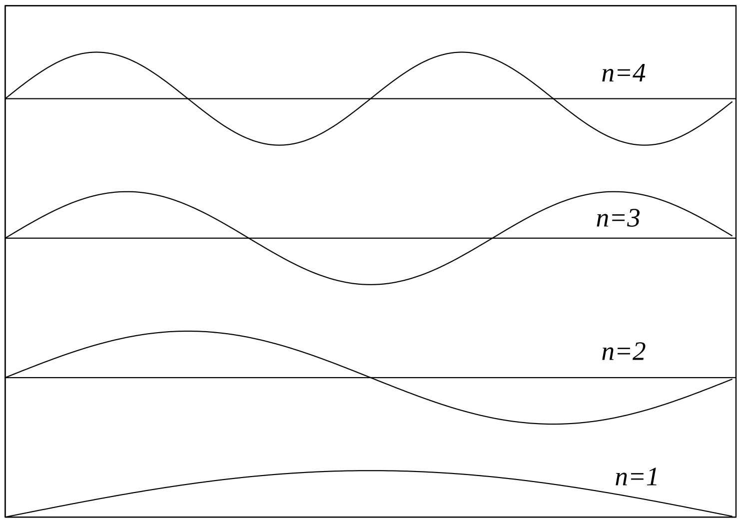


Fig. 19.

2 Ondas sonoras

Propagação e velocidade de ondas longitudinais

As ondas sonoras se propagam em todas as direções a partir da fonte. Entretanto, é mais simples tratar da propagação em uma dimensão, assim consideramos inicialmente a transmissão de ondas longitudinais ao longo de um tubo.

A figura 20 mostra um êmbolo na extremidade de um tubo, cheio de uma substância compressível. As linhas verticais indicam porções do fluido com a mesma massa. Regiões com linhas mais próximas indicam pressão e densidade maiores do no estado normal do fluido, e analogamente para as regiões com linhas mais afastadas. Se empurramos o êmbolo comprimimos o fluido, gerando um aumento na pressão e na densidade, em relação a seus valores no estado não perturbado. O fluido comprimido desloca-se para a frente, comprimindo as camadas adjacentes, e um pulso de compressão propaga-se ao longo do tubo. Se deslocamos o êmbolo para trás, o fluido próximo a ele se expande, sua pressão e densidade diminuem, e um pulso de rarefação propaga-se ao longo do tubo. Se o êmbolo oscilar para a frente e para trás, um conjunto contínuo de compressões e rarefações se propagará ao longo do tubo. Usando as leis de

Newton podemos encontrar uma expressão para a velocidade de propagação das ondas longitudinais geradas.

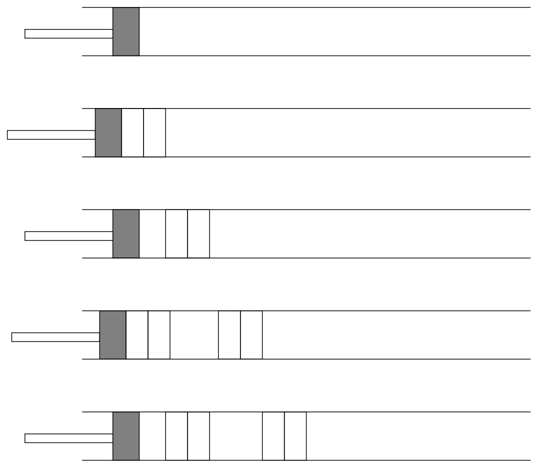


Fig. 20. Ondas sonoras produzidas em um tubo por um pistão oscilante. As linhas verticais representam uma região de rarefação se propagando para a direita.

Consideramos um pulso formado por uma "zona de compressão", propagando-se com velocidade v para a direita (figura 21). Analisamos a situação do ponto de vista de um referencial em que o pulso está em repouso. Nesse caso o fluido se desloca para a esquerda com velocidade v. Acompanhando o movimento de um elemento de fluido que se desloca para a esquerda, passando pelos pontos P, Q, R. Ao entrar na zona de compressão, há uma diferença de pressão Δp entre as faces do elemento de fluido. O elemento é comprimido e desacelerado, movendo-se com uma velocidade menor $v + \Delta v$, sendo Δv negativo. O elemento sai da zona de compressão, expandindo-se para seu volume original, e a diferença de pressão Δp acelera-o até sua velocidade original v.

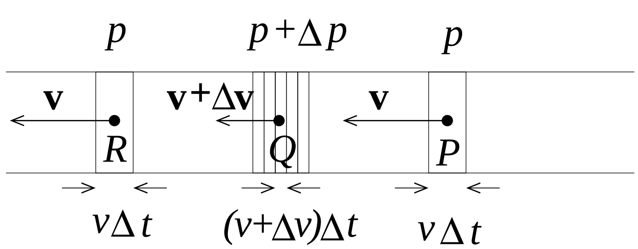


Fig. 21. Um pulso de compressão propaga-se em um tubo com gás. Em um referencial em que o gás está em repouso, o pulso se move da esquerda para a direita com velocidade v. Em um referencial onde o pulso está estacionário, o gás move-se da direita para a esquerda. Note que Δv é negativo.

Apliquemos as leis de Newton ao elemento de fluido enquanto ele está entrando na zona de compressão. A força resultante sobre ele durante sua entrada aponta para a direita, sendo,

$$F = (p + \Delta p)A - pA = \Delta pA \,, \tag{23}$$

em que A é a área da seção reta do tubo. No ponto P o elemento de fluido possui largura $v\Delta t$ para um certo intervalo de tempo Δt. O volume do elemento é então $vA\Delta t$ e sua massa é $\rho_0 vA\Delta t$, em que ρ_0 é a densidade do fluido fora da área de compressão. A desaceleração a do elemento, enquanto penetra na zona de compressão, é $-\Delta v/\Delta t$. Como Δv é negativo, a é positiva. A segunda lei de Newton $F = ma$ nos dá,

$$\Delta pA = \rho_0 vA\Delta t \frac{-\Delta v}{\Delta t} \,, \tag{24}$$

ou,

$$\rho_o v^2 = \frac{-\Delta p}{\Delta v/v} \,. \tag{25}$$

O elemento de fluido em P possui volume $V = Av\Delta t$, e ao entrar na zona de compressão a variação de volume é $\Delta V = A(\Delta v)\Delta t$, logo,

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{A(\Delta v)\Delta t}{Av\Delta t} = \frac{\Delta v}{v} \,, \tag{26}$$

e temos,

$$\rho_o v^2 = \frac{-\Delta p}{\Delta V/V} \,. \tag{27}$$

A razão entre a variação de pressão Δp, e a variação relativa de volume, $-\Delta V/V$, é chamada *módulo volumétrico* B. Vemos que B é positivo, pois um aumento de pressão causa uma diminuição de volume.

A velocidade de propagação do pulso longitudinal no meio é então,

$$v = \sqrt{B/\rho_0} \,. \tag{28}$$

Se o meio for um gás, como o ar, $B = \gamma p_0$,

$$v = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0} \,, \tag{29}$$

em que $\gamma = c_p/c_v$. Se o meio for um sólido, o módulo volumétrico é substituído pelo módulo de Young. A tabela abaixo mostra as velocidades das ondas longitudinais (sonoras), em alguns meios.

Meio	Temperatura (^{o}C)	Velocidade (m/s)
Ar	0	331,3
Hidrogênio	0	1286
Oxigênio	0	317,2
Água	15	1450
Chumbo	20	1230
Alumínio	20	5100
Cobre	20	3560
Ferro	20	5130
Granito	-	6000
Borracha	0	54

Velocidade do som em alguns meios.

O efeito Doppler

Quando um observador se aproxima de uma fonte sonora estacionária, a altura (frequência) do som percebida é maior do que quando ele está em repouso. Se o observador se afasta da fonte estacionária, ele escuta um som mais grave do que se estivesse parado. Obtemos resultados semelhantes quando a fonte se aproxima ou se afasta de um observador estacionário.

Em um trabalho de 1842, o austríaco Christian Johann Doppler (1803-1853) chamou a atenção para o fato de que a cor de um corpo luminoso, como a altura do som de uma fonte sonora, deve mudar em virtude do movimento relativo do corpo e do observador. Esse é o *efeito Doppler*, que se aplica às ondas em geral.

Consideremos a aplicação do efeito Doppler a ondas sonoras, com a fonte e o observador se movendo ao longo da linha que os une. Consideramos o referencial, ou meio, em que o som se move, como estando em repouso. A figura abaixo mostra à esquerda uma fonte sonora F em repouso, e um observador que se aproxima com velocidade v_o. As circunferências representam as frentes de onda, distanciadas de um comprimento de onda e propagando-se através do meio. Se o observador estivesse em repouso em relação ao meio, ele receberia vt/λ ondas durante o tempo t, sendo v a velocidade do som no meio e λ o comprimento de onda. Devido ao seu movimento em direção à fonte, ele recebe $v_o t/\lambda$ ondas *adicionais* durante o mesmo tempo t. A frequência f' que ele escuta é o número de ondas recebido por unidade de tempo, ou seja,

$$f' = \frac{vt/\lambda + v_o t/\lambda}{t} = \frac{v + v_o}{\lambda} = \frac{v + v_o}{v/f}\,.$$

Então,

$$f' = f\frac{v + v_o}{v} = f\left(1 + \frac{v_o}{v}\right)\,. \qquad (30)$$

Vemos que a frequência f' percebida pelo observador *aumenta* se ele se aproxima da fonte. Se o observador estiver se afastando da fonte temos,

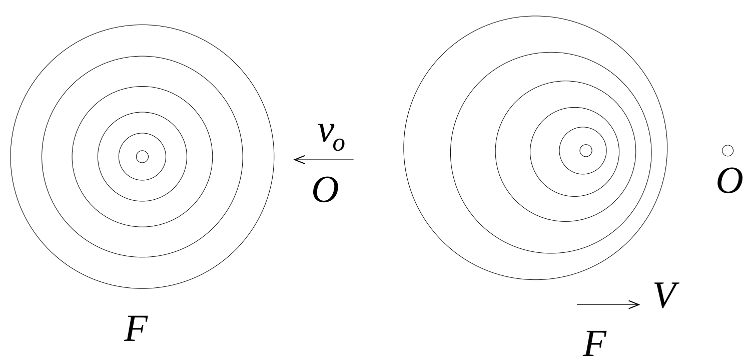
$$f' = f\frac{v - v_o}{v} = f\left(1 - \frac{v_o}{v}\right)\,. \qquad (31)$$

Nesse caso a frequência *diminui*.

Portanto, a relação válida no caso de *a fonte estar em repouso* em relação ao meio, e *o observador estar em movimento* através do meio, é,

$$f' = f\left(\frac{v \pm v_o}{v}\right)\,. \qquad (32)$$

O sinal *positivo* se refere ao observador *aproximando-se* da fonte, e o sinal *negativo* refere-se ao observador *afastando-se* da fonte.



À esquerda temos uma fonte sonora em repouso, e um observador que se aproxima com velocidade v_o. À direita temos um observador em repouso e uma fonte que se aproxima com velocidade V.

Quando a *fonte se aproxima* de um observador estacionário, como à direita na figura acima, a consequência será uma diminuição do comprimento de onda, pois a fonte se desloca no sentido do movimento das ondas que se aproximam do observador, e as cristas das ondas ficam mais próximas umas das outras. Sendo a frequência da fonte é f e sua velocidade V, durante cada vibração ela percorre uma distância V/f, e o comprimento de onda é diminuído desse valor. Assim, o comprimento de onda percebido pelo observador é $\lambda' = v/f - V/f$. A frequência do som percebida pelo observador é *aumentada*,

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v-V)/f} = f\left(\frac{v}{v-V}\right) . \tag{33}$$

Se a fonte *afastar-se* do observador, o comprimento de onda emitido será aumentado de V/f, de modo que o observador perceberá uma frequência *menor*, dada por,

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v+V)/f} = f\left(\frac{v}{v+V}\right) . \tag{34}$$

A relação geral, válida quando *o observador está em repouso* em relação ao meio mas *a fonte se move* através dele é,

$$f' = f\left(\frac{v}{v \mp V}\right) . \tag{35}$$

O sinal *negativo* refere-se à fonte *aproximando-se* do observador e o sinal *positivo* refere-se à fonte *afastando-se* do observador.

Quanto a fonte e o observador se movem através do meio, a frequência percebida é,

$$f' = f\left(\frac{v \pm v_o}{v \mp V}\right) . \tag{36}$$

Os sinais superiores correspondem ao movimento de *aproximação* da fonte e do observador, ao longo da linha que os une, e os sinais inferiores referem-se ao *afastamento* da fonte e do observador.