BIOFÍSICA - RADIAÇÃO E DECAIMENTO RADIOATIVO

1. Um fóton é uma partícula sem massa e sem carga associada ao campo eletromagnético. Cada fóton possui energia proporcional à frequência ν da onda correspondente,

$$E = h\nu \, ,$$

em que $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s é a constante de Planck. Calcule a energia de um fóton cujo comprimento de onda é de 5000 Å.

Temos

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 4 \times 10^{-19} \, J = 2,5 \, eV \, ,$$

em que $c = 3 \times 10^{8}$ m/s é a velocidade da luz no vácuo.

2. O comprimento de onda de de Broglie é definido como

$$\lambda = \frac{h}{mv} \, .$$

Calcule o comprimento de onda de de Broglie para um elétron com velocidade de 3×10^{7} m/s.

O comprimento de onda de de Broglie é

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 2,42 \times 10^{-11} \, m = 0,24 \, \text{\AA} \, ,$$

em que usamos a massa do elétron, $m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg.

3. Um microscópio eletrônico utiliza as propriedades ondulatórias dos elétrons. Calcule o comprimento de onda correspondente aos elétrons em um microscópio eletrônico operando em uma voltagem de 50 kV.

A energia de um elétron nesse potencial é

$$E = eV = 8 \times 10^{-15} \, J = 50 \, keV \, .$$

Essa energia é toda cinética, logo a velocidade é

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 1,32 \times 10^{8} \, m/s \, .$$

O comprimento de onda de de Broglie é

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 5,49 \times 10^{-12} \, m = 0,0549 \, \text{\AA} \, .$$

4. Um elétron cede toda sua energia cinética de 34 keV ao colidir com uma placa de metal, emitindo um fóton de raio X. Calcule: (a) o comprimento de onda de de Broglie do elétron; (b) a velocidade do elétron; (c) o comprimento de onda da radiação X; (d) a velocidade do fóton; (e) a energia do fóton em J.

A energia cinética do elétron é

$$E = 34\,keV = 5,44 \times 10^{-15}\,J = 34\,keV\,,$$

e a velocidade é

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 1,093 \times 10^{8}\,m/s\,.$$

O comprimento de onda de de Broglie do elétron é então,

$$\lambda_e = \frac{h}{mv} = 6,66 \times 10^{-12}\,m = 0,066\,\AA\,.$$

O fóton de raio X possui a mesma energia, considerando que toda a energia do elétron foi convertida na energia do fóton, logo,

$$E = h\,\nu = 34\,keV\,.$$

A frequência do raio X é então

$$\nu = \frac{E}{h} = 8,21 \times 10^{18}\,Hz\,,$$

e o comprimento de onda do raio X é

$$\lambda_x = \frac{c}{\nu} = 3,66 \times 10^{-11}\,m = 0,366\,\AA\,.$$

5. Para dissociar uma molécula de monóxido de carbono é necessária uma energia mínima de 11 eV. Determine a frequência mínima e o comprimento de onda máximo da radiação eletromagnética correspondente.

A energia é

$$E = 11\,eV = 1,76 \times 10^{-18}\,J\,.$$

Um fóton com essa energia deve ter frequência

$$\nu = 2,65 \times 10^{15}\,Hz\,,$$

e o comprimento de onda é

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 1,13 \times 10^{-7}\, m = 1130\, \AA\,.$$

6. A luz solar tem comprimento de onda médio de 5000 Å. Considerando uma intensidade 12 W/m^2, calcule quantos fótons por segundo atingem a pupila de um olho humano de 5 mm de diâmetro.

Para esse comprimento de onda a frequência é

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 6 \times 10^{14}\, Hz\,,$$

e a energia de um fóton é

$$E = h\,\nu = 4 \times 10^{-19}\, J = 2,5\, eV\,.$$

A área da pupila é

$$A = \pi\, r^2 = 1,96 \times 10^{-5}\, m^2\,,$$

e a energia por segundo, ou potência, que incide sobre a pupila é

$$P = I A = 2,36 \times 10^{-4}\, W\,.$$

O número de fótons por segundo que incidem sobre a pupila é então

$$N = \frac{P}{E} = \frac{P}{h\,\nu} = 5,92 \times 10^{14}\, fótons/s\,.$$

7. Um pulso de luz com frequência 6×10^{14} Hz pode ser percebido pelo olho humano se a intensidade for no mínimo 10^{-12} W/m^2. Em média, apenas 10% dos fótons incidentes na pupila atingem as células fotossensíveis da retina. Calcule: (a) a energia total incidente na pupila em eV por segundo, considerando um diâmetro de 5mm; (b) o número mínimo de fótons por segundo que atinge a retina permitindo a visão.

A energia de um fóton para essa frequência é

$$E = h\,\nu = 4 \times 10^{-19}\, J = 2,5\, eV\,.$$

A energia por segundo, ou potência, que incide sobre a pupila é

$$P = I A = 1,96 \times 10^{-17}\, W = 122,72\, eV/s\,,$$

e o número de fótons por segundo que incidem sobre a pupila é então

$$N = \frac{P}{E} = \frac{P}{h\,\nu} = 49,36 \cong 50\,\textit{fótons/s}\,.$$

Se o número de fótons por segundo que incidem sobre a pupila é 10% desse valor, temos

$$\frac{N}{10} = 5\,\textit{fótons/s}\,.$$

8. Uma forma de representar o decaimento radioativo é

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}\,,$$

em que N_0 é o número inicial de átomos na amostra, $N(t)$ é o número de átomos que ainda não se desintegraram após um tempo t, e λ é a constante de decaimento. A taxa de desintegração de 1 g de ^{40}K é 10^5 s^{-1}. Calcule a constante de decaimento.

Calculamos N_0 primeiro. Em 1 grama de ^{40}K temos

$$N_0 = \frac{1}{40}N_a = \frac{1}{40} \times 6,02 \times 10^{23} = 1,51 \times 10^{22}\ \textit{átomos}\,,$$

em que $N_a = 6,02 \times 10^{23}$ é o número de Avogadro. Essa é a quantidade total de átomos.

A atividade A de uma amostra radioativa é

$$A(t) = \lambda N(t) = A_0 e^{-\lambda t}\,.$$

Portanto,

$$A_0 = \lambda N_0\,.$$

No nosso caso,

$$\lambda = \frac{A_0}{N_0} = \frac{10^5}{1,51 \times 10^{22}} = 6,64 \times 10^{-18}\,s^{-1}\,.$$

9. A meia-vida $T_{1/2}$ de uma amostra é o tempo em que metade dos átomos terá sofrido decaimento. Assim podemos escrever

$$N(t) = \frac{N_0}{2^{t/T_{1/2}}}\,.$$

Mostre que a relação entre a meia-vida e a constante de decaimento é

$$\ln 2 = \lambda T_{1/2}\,.$$

10. O oxigênio radioativo ${}^{15}_{8}O$ tem meia-vida de 2,1 minutos. (a) Calcule a constante de decaimento. (b) Qual o tempo necessário para que a atividade diminua por um fator 8?

A constante de decaimento é

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 0,0055\,s^{-1}\,.$$

Como a atividade também pode ser escrita na forma

$$A(t) = \frac{A_0}{2^{t/T_{1/2}}}\,,$$

vemos que

$$8 = 2^3 = 2^{t/T_{1/2}}\,,$$

ou $t = 3T_{1/2}$ *=6,3 minutos = 378 s.*

11. A atividade de um fóssil diminuiu de 1530 desintegrações por minuto para 190 desintegrações por minuto, durante o processo de fossilização. Se a meia-vida do ${}^{14}C$ é 5760 anos, determine a idade do fóssil.

Temos aproximadamente,

$$\frac{A_0}{A(t)} \cong 8 = 2^3\,,$$

logo,

$$2^3 = 2^{t/T_{1/2}}\,,$$

e $t = 3T_{1/2}$ *=17280 anos.*

12. A intensidade de um feixe de raios X, ou de qualquer outra radiação, decresce ao atravessar um meio. Esse decréscimo pode ser descrito por

$$I = I_0 e^{-\mu x}\,,$$

em que I é a intensidade do feixe após atravessar um meio de expressura x e μ é o coeficiente de atenuação linear do meio. A espessura de um meio que reduz à metade a intensidade da radiação incidente é chamada *camada semi-redutora* $X_{1/2}$. Mostre que

$$X_{1/2} = \frac{0,693}{\mu} \,.$$

13. Um feixe de raios X de 50 keV atravessa um meio de 10 cm e tem sua intensidade diminuída para 70% da intensidade original. Calcule o coeficiente de atenuação linear do meio.

Da equação

$$I = I_0 e^{-\mu x} \,,$$

temos

$$\mu = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{I_0}{I} \right) \,,$$

portanto,

$$\mu = \frac{1}{0,1\,m} \ln \left(\frac{1}{0,7} \right) = 3,57\,m^{-1} \,.$$

14. O coeficiente de atenuação linear da pele para fótons de 1 MeV é 7 m^{-1}. Calcule a espessura da camada semi-redutora.

Temos

$$X_{1/2} = \frac{0,693}{\mu} = 0,099m \cong 10\,cm \,.$$

15. Um feixe de raios X atravessa um meio de 16 cm de espessura. A razão entre as intensidades incidente e emergente é 16. Calcule a espessura da camada semi-redutora.

Podemos escrever

$$\mu = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = \frac{1}{0,16} \ln 16 = 17,33\,m^{-1} \,,$$

logo,

$$X_{1/2} = \frac{0,693}{\mu} = 0,04m = 4\,cm \,.$$

16. Complete as seguintes equações nucleares:

$$(a)\ \ {}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + \cdots$$

No lado esquerdo temos 9 prótons, logo devemos ter 1 próton no termo que falta no lado direito. O número de massa total no lado esquerdo é 18, logo o número de massa no lado direito do termo que falta deve ser 1. Portanto o elemento que falta é ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$,

$${}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{17}_{8}\mathrm{O} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}\,.$$

$$(b)\ \ {}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + \cdots$$

Para completar a equação do lado direito falta uma partícula com número de massa igual a 1 e carga 0, logo deve ser o nêutron, ${}^{1}_{0}n$

$${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{0}n\,.$$

$$(c)\ \ {}^{9}_{4}\mathrm{Be}(p,\alpha)\cdots$$

Essa notação é resumida, em que p é um próton no lado esquerdo, representado por um átomo de hidrogênio, ${}^{1}_{1}H$, *e* α *é uma partícula* α *no lado direito, representada por* ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$, *um núcleo de hélio,*

$${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + \cdots$$

Para completar a equação falta 6 para o número de massa e 3 para o número atômico, correspondente ao lítio, ${}^{6}_{3}\mathrm{Li}$, *portanto,*

$${}^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{6}_{3}\mathrm{Li}\,.$$

$$(d)\ \ {}^{30}_{15}\mathrm{P} \rightarrow {}^{30}_{14}\mathrm{S} + \cdots$$

O número de massa não sofre alteração, mas o número atômico diminui uma unidade, logo a partícula emitida deve ser um pósitron, ${}^{0}_{+1}e$,

$${}^{30}_{15}\mathrm{P} \rightarrow {}^{30}_{14}\mathrm{S} + {}^{0}_{+1}e\,.$$

$$(e)\ \ {}^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + \cdots$$

O número de massa permanece constante, e o número atômico aumenta uma unidade, logo a partícula produzida deve ser um elétron, ${}_{-1}^{0}e$,

$$ {}_{1}^{3}\mathrm{H} \rightarrow {}_{2}^{3}\mathrm{He} + {}_{-1}^{0}e\,. $$

$$ (f)\;\; {}_{20}^{43}\mathrm{Ca}(\alpha, \ldots){}_{21}^{46}\mathrm{Sc}\,. $$

Os reagentes, ${}_{20}^{43}\mathrm{Ca}$ *e uma partícula* α *, têm carga total 22 e número de massa total 47. A partícula que falta deve ter então número de massa 1 e carga +1, logo deve ser um próton* p*, ou* ${}_{1}^{1}\mathrm{H}$,

$$ {}_{20}^{43}\mathrm{Ca} + {}_{2}^{4}\mathrm{He} \rightarrow {}_{21}^{46}\mathrm{Sc} + {}_{1}^{1}\mathrm{H}\,. $$

17. O elemento ${}^{18}\mathrm{F}$ sofre 90% de decaimento radioativo em 366 minutos. Calcule a meia-vida.

Após 366 minutos o número de átomos ativos é então 10% no número inicial, logo,

$$
\begin{aligned}
&N(t) = N_0 e^{-\lambda t}\,,\\
&(0,1)N_0 = N_0 e^{-\lambda t}\,,\\
&0,1 = e^{-\lambda t}\,,\\
&\ln(0,1) = -\lambda t\,,\\
&\lambda = -\frac{\ln(0,1)}{t} = -\frac{(-2,3)}{366 \times 60} = 1,05 \times 10^{-4}\, s^{-1}\,.
\end{aligned}
$$

Essa é a constante de decaimento. A meia-vida é obtida da relação

$$ \ln 2 = \lambda T_{1/2}\,. $$

Portanto,

$$ T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 6601,4\, s = 110,02\, minutos\,. $$

18. Um material fóssil apresenta uma atividade de ${}^{14}\mathrm{C}$ de 8,1 decaimentos por minuto, por grama de carbono. Supondo que a atividade inicial seja a mesma de hoje, 15,3 decaimentos por minuto, por grama de carbono, calcule a idade do fóssil. A meia-vida do carbono-14 é 5730 anos.

Como a atividade diminuiu aproximadamente por um fator 2, a idade do fóssil é próxima da meia-vida do elemento, 5730 anos. De forma mais precisa temos

$$
\begin{aligned}
&A(t) = \frac{A_0}{2^{t/T_{1/2}}}\,,\\
&2^{t/T_{1/2}} = \frac{A_0}{A(t)}\,,\\
&\frac{t}{T_{1/2}}\ln 2 = \ln\frac{A_0}{A(t)}\,,\\
&\frac{t}{T_{1/2}} = \frac{\ln(A_0/A(t))}{\ln 2} = 0,917\,,\\
&t = 0,917\,T_{1/2} = 5257\,anos\,.
\end{aligned}
$$

19. Uma amostra de uraninita, um mineral contendo urânio, apresenta 0,214 g de chumbo, ^{206}Pb, por grama de urânio. Supondo que todo o chumbo resulta da desintegração radioativa do urânio em uma única etapa, estime a data em que o mineral foi formado. A meia-vida do ^{238}U é $4,5 \times 10^9$ anos.

O número de átomos de chumbo é

$$N_{Pb} = 0,214\,g \times \frac{N_a}{206\,g} = 6,25 \times 10^{20}\ \acute{a}tomos,$$

e o número de átomos de urânio é

$$N_U = 1\,g \times \frac{N_a}{238\,g} = 2,53 \times 10^{21}\ \acute{a}tomos.$$

Esses são os números atuais. O número inicial de átomos de urânio é

$$N_0 = N_U + N_{Pb} = 3,16 \times 10^{21}\ \acute{a}tomos.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&N(t) = \frac{N_0}{2^{t/T_{1/2}}}\,,\\
&2^{t/T_{1/2}} = \frac{N_0}{N(t)}\,,\\
&\frac{t}{T_{1/2}}\ln 2 = \ln(N_0/N(t))\,,\\
&\frac{t}{T_{1/2}} = \frac{\ln(N_0/N(t))}{\ln 2} = \frac{\ln 1,25}{\ln 2} = 0,322\,.
\end{aligned}
$$

O tempo de formação do mineral é então

$$t = 0,322 \times T_{1/2} = 1,45 \times 10^9 \, anos \, .$$

20. Uma amostra radioativa apresentava atividade de 4280 desintegrações por minuto às 13h35, e às 16h55 a atividade era de 1070 desintegrações por minuto. Calcule a meia-vida do material.

Temos,

$$\begin{aligned}
A(t) &= \frac{A_0}{2^{t/T_{1/2}}} \, , \\
2^{t/T_{1/2}} &= \frac{A_0}{A(t)} \, , \\
\frac{t}{T_{1/2}} \ln 2 &= \ln(A_0/A(t)) \, , \\
\frac{t}{T_{1/2}} &= \frac{\ln(A_0/A(t))}{\ln 2} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2 \, .
\end{aligned}$$

A meia-vida é então,

$$T_{1/2} = \frac{t}{2} = \frac{200}{2} = 100 \, minutos \, .$$