

BIOFÍSICA - RADIAÇÃO E DECAIMENTO RADIOATIVO

1. Um fóton é uma partícula sem massa e sem carga associada ao campo eletromagnético. Cada fóton possui energia proporcional à frequência ν da onda correspondente,

$$E = h\nu,$$

em que $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s é a constante de Planck. Calcule a energia de um fóton cujo comprimento de onda é de 5000 \AA .

Temos

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 4 \times 10^{-19} \text{ J} = 2,5 \text{ eV},$$

em que $c = 3 \times 10^8$ m/s é a velocidade da luz no vácuo.

2. O comprimento de onda de de Broglie é definido como

$$\lambda = \frac{h}{mv}.$$

Calcule o comprimento de onda de de Broglie para um elétron com velocidade de 3×10^7 m/s.

O comprimento de onda de de Broglie é

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 2,42 \times 10^{-11} \text{ m} = 0,24 \text{ \AA},$$

em que usamos a massa do elétron, $m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg.

3. Um microscópio eletrônico utiliza as propriedades ondulatórias dos elétrons. Calcule o comprimento de onda correspondente aos elétrons em um microscópio eletrônico operando em uma voltagem de 50 kV.

A energia de um elétron nesse potencial é

$$E = eV = 8 \times 10^{-15} \text{ J} = 50 \text{ keV}.$$

Essa energia é toda cinética, logo a velocidade é

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 1,32 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

O comprimento de onda de de Broglie é

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 5,49 \times 10^{-12} \text{ m} = 0,0549 \text{ \AA}.$$

4. Um elétron cede toda sua energia cinética de 34 keV ao colidir com uma placa de metal, emitindo um fóton de raio X. Calcule: (a) o comprimento de onda de de Broglie do elétron; (b) a velocidade do elétron; (c) o comprimento de onda da radiação X; (d) a velocidade do fóton; (e) a energia do fóton em J.

A energia cinética do elétron é

$$E = 34 \text{ keV} = 5,44 \times 10^{-15} \text{ J} = 34 \text{ keV},$$

e a velocidade é

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 1,093 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

O comprimento de onda de de Broglie do elétron é então,

$$\lambda_e = \frac{h}{mv} = 6,66 \times 10^{-12} \text{ m} = 0,066 \text{ \AA}.$$

O fóton de raio X possui a mesma energia, considerando que toda a energia do elétron foi convertida na energia do fóton, logo,

$$E = h\nu = 34 \text{ keV}.$$

A frequência do raio X é então

$$\nu = \frac{E}{h} = 8,21 \times 10^{18} \text{ Hz},$$

e o comprimento de onda do raio X é

$$\lambda_x = \frac{c}{\nu} = 3,66 \times 10^{-11} \text{ m} = 0,366 \text{ \AA}.$$

5. Para dissociar uma molécula de monóxido de carbono é necessária uma energia mínima de 11 eV. Determine a frequência mínima e o comprimento de onda máximo da radiação eletromagnética correspondente.

A energia é

$$E = 11 \text{ eV} = 1,76 \times 10^{-18} \text{ J}.$$

Um fóton com essa energia deve ter frequência

$$\nu = 2,65 \times 10^{15} \text{ Hz},$$

e o comprimento de onda é

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 1,13 \times 10^{-7} \text{ m} = 1130 \text{ \AA}.$$

6. A luz solar tem comprimento de onda médio de 5000 \AA . Considerando uma intensidade 12 W/m^2 , calcule quantos fótons por segundo atingem a pupila de um olho humano de 5 mm de diâmetro.

Para esse comprimento de onda a frequência é

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = 6 \times 10^{14} \text{ Hz},$$

e a energia de um fóton é

$$E = h\nu = 4 \times 10^{-19} \text{ J} = 2,5 \text{ eV}.$$

A área da pupila é

$$A = \pi r^2 = 1,96 \times 10^{-5} \text{ m}^2,$$

e a energia por segundo, ou potência, que incide sobre a pupila é

$$P = IA = 2,36 \times 10^{-4} \text{ W}.$$

O número de fótons por segundo que incidem sobre a pupila é então

$$N = \frac{P}{E} = \frac{P}{h\nu} = 5,92 \times 10^{14} \text{ fótons/s}.$$

7. Um pulso de luz com frequência $6 \times 10^{14} \text{ Hz}$ pode ser percebido pelo olho humano se a intensidade for no mínimo 10^{-12} W/m^2 . Em média, apenas 10% dos fótons incidentes na pupila atingem as células fotossensíveis da retina. Calcule: (a) a energia total incidente na pupila em eV por segundo, considerando um diâmetro de 5 mm ; (b) o número mínimo de fótons por segundo que atinge a retina permitindo a visão.

A energia de um fóton para essa frequência é

$$E = h\nu = 4 \times 10^{-19} \text{ J} = 2,5 \text{ eV}.$$

A energia por segundo, ou potência, que incide sobre a pupila é

$$P = IA = 1,96 \times 10^{-17} \text{ W} = 122,72 \text{ eV/s},$$

e o número de fótons por segundo que incidem sobre a pupila é então

$$N = \frac{P}{E} = \frac{P}{h\nu} = 49,36 \cong 50 \text{ fótons/s}.$$

Se o número de fótons por segundo que incidem sobre a pupila é 10% desse valor, temos

$$\frac{N}{10} = 5 \text{ fótons/s}.$$

8. Uma forma de representar o decaimento radioativo é

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

em que N_0 é o número inicial de átomos na amostra, $N(t)$ é o número de átomos que ainda não se desintegraram após um tempo t , e λ é a constante de decaimento. A taxa de desintegração de 1 g de ^{40}K é 10^5 s^{-1} . Calcule a constante de decaimento.

Calculamos N_0 primeiro. Em 1 grama de ^{40}K temos

$$N_0 = \frac{1}{40} N_a = \frac{1}{40} \times 6,02 \times 10^{23} = 1,51 \times 10^{22} \text{ átomos},$$

em que $N_a = 6,02 \times 10^{23}$ é o número de Avogadro. Essa é a quantidade total de átomos.

A atividade A de uma amostra radioativa é

$$A(t) = \lambda N(t) = A_0 e^{-\lambda t}.$$

Portanto,

$$A_0 = \lambda N_0.$$

No nosso caso,

$$\lambda = \frac{A_0}{N_0} = \frac{10^5}{1,51 \times 10^{22}} = 6,64 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}.$$

9. A meia-vida $T_{1/2}$ de uma amostra é o tempo em que metade dos átomos terá sofrido decaimento. Assim podemos escrever

$$N(t) = \frac{N_0}{2^{t/T_{1/2}}}.$$

Mostre que a relação entre a meia-vida e a constante de decaimento é

$$\ln 2 = \lambda T_{1/2}.$$

10. O oxigênio radioativo $^{15}_8\text{O}$ tem meia-vida de 2,1 minutos. (a) Calcule a constante de decaimento. (b) Qual o tempo necessário para que a atividade diminua por um fator 8?

A constante de decaimento é

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 0,0055 \text{ s}^{-1}.$$

Como a atividade também pode ser escrita na forma

$$A(t) = \frac{A_0}{2^{t/T_{1/2}}},$$

vemos que

$$8 = 2^3 = 2^{t/T_{1/2}},$$

ou $t = 3T_{1/2} = 6,3 \text{ minutos} = 378 \text{ s}$.

11. A atividade de um fóssil diminuiu de 1530 desintegrações por minuto para 190 desintegrações por minuto, durante o processo de fossilização. Se a meia-vida do ^{14}C é 5760 anos, determine a idade do fóssil.

Temos aproximadamente,

$$\frac{A_0}{A(t)} \cong 8 = 2^3,$$

logo,

$$2^3 = 2^{t/T_{1/2}},$$

e $t = 3T_{1/2} = 17280 \text{ anos}$.

12. A intensidade de um feixe de raios X, ou de qualquer outra radiação, decresce ao atravessar um meio. Esse decréscimo pode ser descrito por

$$I = I_0 e^{-\mu x},$$

em que I é a intensidade do feixe após atravessar um meio de espessura x e μ é o coeficiente de atenuação linear do meio. A espessura de um meio que reduz à metade a intensidade da radiação incidente é chamada *camada semi-redutora* $X_{1/2}$. Mostre que

$$X_{1/2} = \frac{0,693}{\mu} .$$

13. Um feixe de raios X de 50 keV atravessa um meio de 10 cm e tem sua intensidade diminuída para 70% da intensidade original. Calcule o coeficiente de atenuação linear do meio.

Da equação

$$I = I_0 e^{-\mu x} ,$$

temos

$$\mu = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{I_0}{I} \right) ,$$

portanto,

$$\mu = \frac{1}{0,1 m} \ln \left(\frac{1}{0,7} \right) = 3,57 m^{-1} .$$

14. O coeficiente de atenuação linear da pele para fótons de 1 MeV é $7 m^{-1}$. Calcule a espessura da camada semi-redutora.

Temos

$$X_{1/2} = \frac{0,693}{\mu} = 0,099 m \cong 10 cm .$$

15. Um feixe de raios X atravessa um meio de 16 cm de espessura. A razão entre as intensidades incidente e emergente é 16. Calcule a espessura da camada semi-redutora.

Podemos escrever

$$\mu = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{I_0}{I} \right) = \frac{1}{0,16} \ln 16 = 17,33 m^{-1} ,$$

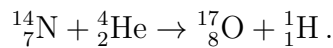
logo,

$$X_{1/2} = \frac{0,693}{\mu} = 0,04 m = 4 cm .$$

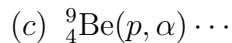
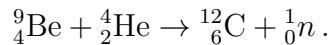
16. Complete as seguintes equações nucleares:



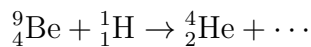
No lado esquerdo temos 9 prótons, logo devemos ter 1 próton no termo que falta no lado direito. O número de massa total no lado esquerdo é 18, logo o número de massa no lado direito do termo que falta deve ser 1. Portanto o elemento que falta é ${}^1_1\text{H}$,



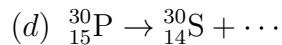
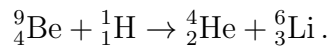
Para completar a equação do lado direito falta uma partícula com número de massa igual a 1 e carga 0, logo deve ser o nêutron, 1_0n



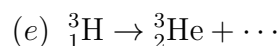
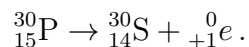
Essa notação é resumida, em que p é um próton no lado esquerdo, representado por um átomo de hidrogênio, ${}^1_1\text{H}$, e α é uma partícula α no lado direito, representada por ${}^4_2\text{He}$, um núcleo de hélio,



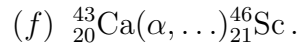
Para completar a equação falta 6 para o número de massa e 3 para o número atômico, correspondente ao lítio, ${}^6_3\text{Li}$, portanto,



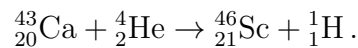
O número de massa não sofre alteração, mas o número atômico diminui uma unidade, logo a partícula emitida deve ser um pósitron, ${}^0_{+1}e$,



O número de massa permanece constante, e o número atômico aumenta uma unidade, logo a partícula produzida deve ser um elétron, ${}_{-1}^0e$,



Os reagentes, ${}^{43}_{20}\text{Ca}$ e uma partícula α , têm carga total 22 e número de massa total 47. A partícula que falta deve ter então número de massa 4 e carga +2, logo deve ser um núcleo de hélio, ou ${}^4_2\text{He}$,



17. O elemento ${}^{18}\text{F}$ sofre 90% de decaimento radioativo em 366 minutos. Calcule a meia-vida.

Após 366 minutos o número de átomos ativos é então 10% no número inicial, logo,

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 e^{-\lambda t}, \\ (0,1)N_0 &= N_0 e^{-\lambda t}, \\ 0,1 &= e^{-\lambda t}, \\ \ln(0,1) &= -\lambda t, \\ \lambda &= -\frac{\ln(0,1)}{t} = -\frac{(-2,3)}{366 \times 60} = 1,05 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

Essa é a constante de decaimento. A meia-vida é obtida da relação

$$\ln 2 = \lambda T_{1/2}.$$

Portanto,

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 6601,4 \text{ s} = 110,02 \text{ minutos}.$$

18. Um material fóssil apresenta uma atividade de ${}^{14}\text{C}$ de 8,1 decaimentos por minuto, por grama de carbono. Supondo que a atividade inicial seja a mesma de hoje, 15,3 decaimentos por minuto, por grama de carbono, calcule a idade do fóssil. A meia-vida do carbono-14 é 5730 anos.

Como a atividade diminuiu aproximadamente por um fator 2, a idade do fóssil é próxima da meia-vida do elemento, 5730 anos. De forma mais precisa temos

$$\begin{aligned}
A(t) &= \frac{A_0}{2^{t/T_{1/2}}}, \\
2^{t/T_{1/2}} &= \frac{A_0}{A(t)}, \\
\frac{t}{T_{1/2}} \ln 2 &= \ln \frac{A_0}{A(t)}, \\
\frac{t}{T_{1/2}} &= \frac{\ln(A_0/A(t))}{\ln 2} = 0,917, \\
t &= 0,917 T_{1/2} = 5257 \text{ anos}.
\end{aligned}$$

19. Uma amostra de uraninita, um mineral contendo urânio, apresenta 0,214 g de chumbo, ^{206}Pb , por grama de urânio. Supondo que todo o chumbo resulta da desintegração radioativa do urânio em uma única etapa, estime a data em que o mineral foi formado. A meia-vida do ^{238}U é $4,5 \times 10^9$ anos.

O número de átomos de chumbo é

$$N_{\text{Pb}} = 0,214 \text{ g} \times \frac{N_a}{206 \text{ g}} = 6,25 \times 10^{20} \text{ átomos},$$

e o número de átomos de urânio é

$$N_U = 1 \text{ g} \times \frac{N_a}{238 \text{ g}} = 2,53 \times 10^{21} \text{ átomos}.$$

Esses são os números atuais. O número inicial de átomos de urânio é

$$N_0 = N_U + N_{\text{Pb}} = 3,16 \times 10^{21} \text{ átomos}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
N(t) &= \frac{N_0}{2^{t/T_{1/2}}}, \\
2^{t/T_{1/2}} &= \frac{N_0}{N(t)}, \\
\frac{t}{T_{1/2}} \ln 2 &= \ln(N_0/N(t)), \\
\frac{t}{T_{1/2}} &= \frac{\ln(N_0/N(t))}{\ln 2} = \frac{\ln 1,25}{\ln 2} = 0,322.
\end{aligned}$$

O tempo de formação do mineral é então

$$t = 0,322 \times T_{1/2} = 1,45 \times 10^9 \text{ anos} .$$

20. Uma amostra radioativa apresentava atividade de 4280 desintegrações por minuto às 13h35, e às 16h55 a atividade era de 1070 desintegrações por minuto. Calcule a meia-vida do material.

Temos,

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{A_0}{2^{t/T_{1/2}}} , \\ 2^{t/T_{1/2}} &= \frac{A_0}{A(t)} , \\ \frac{t}{T_{1/2}} \ln 2 &= \ln(A_0/A(t)) , \\ \frac{t}{T_{1/2}} &= \frac{\ln(A_0/A(t))}{\ln 2} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2 . \end{aligned}$$

A meia-vida é então,

$$T_{1/2} = \frac{t}{2} = \frac{200}{2} = 100 \text{ minutos} .$$